Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din mun.Chișinău

Catedra Pedagogia Învățămîntului Primar

Ludmila Ursu

Note de curs
la DIDACTICA MATEMATICII (sinteze)

Tema 1. Concepţia didactică a cursului primar de matematică

1. ***Prevederi curriculare***
2. ***Orientări strategice în metodica predării matematicii în clasele primare***

1. Predarea-învăţarea matematicii în clasele primare are scopul să asigure pentru toţi elevii formarea capacităţilor de bază: calcul aritmetic, noţiuni elementare intuitive de geometrie, noţiuni elementare vizînd măsurarea şi măsurile.

Curriculum-ul la matematică vizează formarea de structuri ale gîndirii specifice matematicii cu următoarele accente în:

- ***abordarea conţinuturilor***: trecerea de la o aritmetică teoretică la o varietate de contexte problematice generalizate de aritmetică;
- ***pregătirea elevilor***: trecerea de la aplicarea unor algoritmi rezolutivi la utilizarea de strategii în rezolvarea de probleme;
- ***învăţare***: reamplasarea accentului de pe memorare repetată pe explorare-investigare;
- ***predare***: trecerea de la subiectivismul şi rigiditatea în aprecierea cu note la transformarea evaluării într-un mijloc de autoapreciere şi stimulare a elevului.

Toate acestea obligă învăţătorul să-şi schimbe fundamental orientarea în activitatea la clasă, să facă efort sistematic pentru a cunoaşte cît mai bine posibilităţile elevilor şi, pe această bază, să proiecteze şi să aplice în mod creator, potrivit celui mai bun efect aşteptat, soluţiile individualizatoare menite să asigure dezvoltarea personalităţii integrale a fiecărui elev.

Obiectivele cadru prevăzute curricular pentru instruirea matematică primară sînt:

- *însuşirea şi utilizarea conceptelor specifice matematicii;*
- *dezvoltarea capacităţilor de explorare/investigare şi rezolvare de probleme;*
- *formarea unor capacităţi de comunicare, utilizînd limbajul matematic;*
- *formarea motivaţiei personale şi a unor atitudini pozitive faţă de matematică în contexte variate.*

Alături de limba română, matematica este una dintre disciplinele de bază, care se studiază în clasele primare.

În planul-cadru de învăţămînt al ciclului primar, studiului matematicii la clasele I – IV îi sînt rezervate căte 4 ore obligatorii şi o oră opţională pe săptămînă în fiecare clasă. Importanţa ce se acordă matematicii poziţionează această disciplină ca una fundamentală, a cărei studiere sistematică şi temeinică serveşte cu certitudine însuşirii altor discipline şcolare.

2. Specifice predării-învăţării matematicii în clasele primare sînt *strategia inductivă* şi *strategia analogică*. Ca tip special de abordare a realităţii matematice în *maniera inductivă*, învăţătorul şi elevii întreprind explorări şi investigări asupra situaţiei date sau în cadrul ei, efectuînd acţiuni cu obiecte concrete sau ideale (noţiuni). Pe baza observărilor făcute, provocate de acţiunile întreprinse, elevii sînt conduşi progresiv spre conceptualizări. De exemplu, în rezolvările de probleme care folosesc abordările inductive, elevul gîndeşte analitic prin probe şi, treptat, ajunge la o concluzie. Acest tip de activitate constituie o premisă a construirii ulterioare a raţionamentului specific matematic.

Strategia analogică are ca temei o primă şi esenţială caracteristică a gîndirii matematice, anume relevanţa ei logic-analogică. Vom întîlni analogii între noţiuni, între idei, între domenii şi chiar între analogii. Punctul de plecare rezidă în faptul că analogia reprezintă forma principală sub care se manifestă procesele de abstracţie.

Modernizarea pedagogiei învăţămîntului matematic, în special din perspectiva apropierii formării gîndirii logice a elevilor, încă din primele clase, de logica ştiinţei matematice propriu-zise, impune organizarea şi desfăşurarea acesteia într-o manieră nouă:

- conştientizarea complexităţii actului de predare-învăţare;
- metode active şi participative;
- diferenţierea învăţămîntului;
- cultivarea interesului pentru studiu ş.a.

Prin toate acestea se urmăreşte sporirea eficienţei formative a învăţămîntului matematic primar.

Tema 2. Structura sistemului de exerciţii şi probleme

1. ***Caracteristica generală a sistemelor de exerciţii şi probleme la matematică în clasele primare***
2. ***Principii de structurare a sistemelor de exerciţii şi probleme***

1. Un sistem de exerciţii şi probleme pentru o unitate de învăţare în clasele primare comportă o dublă valenţă:

- formează reprezentări şi noţiuni matematice;
- fixează, antrenează şi dezvoltă capacităţi specifice matematice.

Sistemele de exerciţii şi probleme sînt structurate pe două pagini pentru fiecare unitate de învăţare (o oră de predare, o oră de consolidare).

Pentru ora de predare sistemul de exerciţii şi probleme se structurează în felul următor:

- un context problematic care serveşte drept punct de plecare în descoperirea noii achiziţii cognitive;
- exerciţii şi probleme pentru asigurarea retenţiei şi a transferului.

Pentru ora de consolidare sistemul de exerciţii şi probleme se structurează pe trei niveluri, fiecare asigurînd atingerea obiectivelor ce vizează unul din domeniile cognitive:

- nivelul 1, de fixare: domeniul *cunoaştere şi înţelegere*;
- nivelul 2, de antrenare: domeniul *aplicare*;
- nivelul 3, de dezvoltare: domeniul *integrare*.

Astfel, învăţătorul are posibilitatea să lucreze diferenţiat cu elevii care demonstrează niveluri diferite de performanţă.

Sistemele de exerciţii şi probleme din manualele de matematică pentru clasele primare nu trebuie abordate rigid. Învăţătorul trebuie să le adapteze nivelului real şi necesităţilor clasei concrete de elevi. Pentru aceasta el trebuie să valorifice întregul bagaj metodologic acumulat, să cunoască profund ritmul de învăţare şi nivelul clasei, să utilizeze creativ literatura metodico-matematică şi să acţioneze în conformitate cu principiile specifice de structurare.

2. Sistemul de exerciţii şi probleme care conţine sarcini de acelaşi tip se numeşte ***stereotipic***. Stereotipictatea are efect:

- *pozitiv*: asigură formarea de capacităţi aplicative trainice;
- *negativ*: scade atenţia şi interesul; gîndirea, treptat, devine mecanică; sporeşte riscul comiterii greşelilor.

Pentru a păstra efectul pozitiv şi a anihila efectul negativ al stereotipicităţii, se recomandă a folosi şi alte principii de structurare a sistemelor stereotipice.

Conform principiului ***repetării continue***, în sistemul stereotipic se includ sarcini din repetare. Scopul acestor includeri rezidă în sporirea atenţiei, activizarea elevilor, anihilînd astfel efectul negativ al stereotipicităţii. Tot odată se realizează repetarea continuă a conţinuturilor învăţate anterior. Astfel, sistemul primeşte structura:

$T_1, T_2, T_3, R_1, T_4, T_5, R_2, T_6, T_{7\,\ldots}$, unde prin T sînt notate sarcinile stereotipice la tema nouă, iar prin R – sarcinile din repetare.

Cerinţele metodologice faţă de un asemenea sistem sînt:

- gruparea sarcinilor stereotipice la tema nouă cîte 2-3, ceea ce permite elevilor mai slabi să însuşească noua capacitate, iar elevilor mai buni să nu-şi piardă definitiv atenţia şi interesul;
- sarcinile din repetare se aleg aparent asemănătoare cu cele la tema nouă, pentru a stimula gîndirea conştientă a elevilor.

Principiul confruntării presupune alternarea exerciţiilor şi problemelor care tind să fie confundate de către elevi sau care se află într-o legătură strînsă pe care vrem s-o evidenţiem.

De exemplu, elevii confund semnificaţia sintagmelor "cu … mai mic /mare" şi "de … ori mai mic/mare". De aceea se creează exerciţii şi probleme în care aceste sintagme apar simultan, în confruntare, şi elevii sînt puşi în situaţia să aleagă conştient operaţia de rezolvare.

Aceeaşi situaţie se creează la problemele:

- de aflare a două numere după suma şi raportul acestora şi de aflare a două numere după suma şi diferenţa acestora;
- de aflare a unei fracţii dintr-un întreg şi de aflare a întregului după o fracţie a sa.

Dacă, de exemplu, ne interesează să evidenţiem legătura dintre adunare şi scădere, aceste noţiuni se introduc simultan, în confruntare, descoperind asemănările, deosebirile şi relaţiile lor în rezolvări de exerciţii şi probleme.

Prin ***contraexemplu didactic*** se înţelege orice exerciţiu sau problemă care, provocînd elevii să greşească, permite elucidarea şi prevenirea greşelilor de înţelegere. Contraexemplele se alcătuiesc de către învăţător în urma observării şi analizei greşelilor comise de elevi în cadrul evaluării. Această activitate necesită o dirijare atentă de către învăţător, de aceea se realizează în clasă şi nici într-un caz nu se recomnadă pentru lucru independent.

Contraexemplul didactic este văzut de către copii ca un joc şi permite educarea atenţiei elevilor.

De exemplu, formînd capacitatea de a împărţi cu rest numere naturale (cl.II) propunem elevilor exerciţii rezolvate, unele conţinînd greşeli:

34 : 8 = 4, rest 2
36 : 5 = 6, rest 6
28 : 3 = 7, rest 4
22 : 4 = 5, rest 2.

Elevii analizează exerciţiile propuse, descoperă greşelile, le corectează argumentat.

Se spune că sistemul de exerciţii şi probleme respectă principiul ***plenitudinii***, dacă se asigură însuşirea conţinutului de învăţare şi se exclude formarea unor asociaţii eronate.

Alegînd din manual exerciţiile şi problemele, învăţătorul trebuie să fie atent ca să nu încalce principiul plenitudinii. Încălcările pot fi:

- *vădite*: dacă nu prezentăm elevilor, de exemplu, probleme de un anumit tip, atunci ei nu vor învăţa să le rezolve;
- *ascunse*: de exemplu: 1) dacă elevilor li s-a demonstrat pătratul doar cu laturile în poziţia vertical-orizontală, atunci văzînd pătratul cu laturile oblice, elevii pot să nu-l recunoască; 2) dacă sistemul nu va conţine contraexemple didactice, atunci, la moment, greşeli pot să nu fie comise, însă, în timp, aceste greşeli vor ieşi la iveală şi va fi mult mai dificil de a le combate.

Tema 3. Elemente pregătitoare pentru formarea conceptului de număr natural

1. ***Premise psiho-pedagogice ale formării conceptului de număr natural***
2. ***Prevederi curriculare***

1. Copiii de vîrstă şcolară mică se găsesc în stadiul operaţiilor concrete. Ei învaţă prin intuiţie şi manipulare directă a obiectelor concrete, iar activitatea matematică reproduce, între anumite limite, spaţiul fizic în care se dezvoltă copiii. De aceea cunoaşterea şi modelarea obiectelor din spaţiul fizic reprezintă ideea esenţială în învăţarea matematicii atît în preşcolaritate, cît şi în clasa întîi.

Premisele psiho-pedagogice ale formării conceptului de număr natural sînt:

- în jurul vîrstei de 3-4 ani copiii devin capabili să localizeze un set de obiecte într-un sistem de relaţii spaţiale;
- la vîrsta de 4-5 ani se formează intuitiv noţiunile figurative de interior/exterior, închis/deschis;
- după vîrsta de 5 ani copiii devin capabili să reproducă o anumită ordine spaţială simplă;
- începînd cu vîrsta de 6-7 ani copiii pot organiza în mod concret spaţiul fizic: înţeleg şi pot explica anumite proprietăţi ale figurilor geometrice, sînt capabili să noteze grafic deplasările unui corp, să construiască mulţimi de obiecte după anumite proprietăţi ale elementelor sale, apar primele semne ale formării noţiunii de măsură;

- la începutul vîrstei şcolare mici se dezvoltă primele operaţii logice elementare: conjuncţia, disjuncţia şi negaţia;
- la vîrsta de 6-7 ani apar primele reprezentări despre invarianţa cantităţii: copii sînt capabili să stabilească corespondenţa între elementele a două mulţimi şi să exprime rezultatul acestei activităţi prin cuvintele *mai puţin/tot atît/mai mult*.

2. Perioada pregătitoare prevede 14 ore la începutul clasei I şi este extrem de importantă sub raportul ***obiectivelor*** pe care le pune:

- adaptarea copilului la noua sa funcţie socială;
- formarea competenţelor elementare de învăţare;
- actualizarea şi sistematizarea cunoştinţelor şi capacităţilor specifice matematicii dobîndite în preşcolaritate;
- dezvoltarea raţionamentului şi limbajului specifice matematicii.

Conţinutuirle învăţării prevăzute curricular pentru perioada pregătitoare se constituie din:

- exerciţii pentru organizarea spaţiului fizic şi geometric:

- cu ajutorul noţiunilor *aproape/departe, înăuntru/afară, interior/exterior, pe/sub/între, în faţă/în spate, înainte/înapoi, sus/jos, stînga/dreapta, scurt/lung, scund/înalt, subţire/gros, îngust/lat, uşor/greu, puţin/mult, mic/mare*;
- notarea grafică a deplasării unui corp, a distanţei dintre două obiecte;
- cunoaşterea formelor spaţiale (sferă, cub) şi plane (cerc, pătrat, triunghi, dreptunghi);

- exerciţii de formare şi clasificare a mulţimilor după 1, 2, 3 dintre proprietăţile: *formă, mărime, culoare, întrebuinţare*, utilizînd cuvintele *şi, sau, nu*;
- exerciţii pentru desprinderea ideii de corespondenţă între mulţimi prin compararea şi egalizarea mulţimilor de obiecte cu utilizarea noţiunilor *mai puţin/tot atît /mai mult*.

Activităţile recomandate sînt

- manipularea obiectelor concrete,
- jocurile logico-matematice,
- jocuri de formare a mulţimilor.

Activităţile de punere în corespondenţă a două mulţimi se pot desfăşura în două direcţii:

- stabilirea echivalenţei a două mulţimi de obiecte prin realizarea corespondenţei element cu element;
- construirea unei mulţimi echivalente cu o mulţime dată.

Corespondenţa dintre două mulţimi poate fi indicată:

- printr-o linie de unire a elementelor corespondente;
- prin alăturare sau suprapunere a elementelor corespondente;
- suprapunerea şi egalizarea rigletelor.

Activităţile de stabilire a corespondenţei element cu element a mulţimilor urmăresc să dezvolte la copil înţelegerea conţinutului esenţial al noţiunii de *număr natural* ca *o clasă de echivalenţă a mulţimilor finite echipotente cu o mulţime dată*.

În activităţile matematice învăţătorul trebuie să ofere elevilor un model de exprimare corectă, clară, pe înţelesul şi la nivelul pregătirii elevilor. Dacă elevii formulează raţionamentele matematice în esenţă corect, dar într-un limbaj nesigur, învăţătorul îi va aprecia pozitiv, subliniind partea corectă a răspunsului şi ajutîndu-i să-şi corecteze exprimarea.

În practica şcolară se remarcă tendinţa unor învăţători de a restrînge perioada pregătitoare şi de a trece mai rapid la conţinutul propriu-zis al cursului de matematică. Însă, chiar dacă nivelul de pregătire a clasei este avansat, numărul de ore rezervate perioadei pregătitoare nu trebuie scăzut din motivul că valenţele formative ale acesteia sînt multiaspectuale.

Tema 4. Metodologia formării conceptului de număr natural în clasa întîi

1. ***Dinamica formării conceptului de număr natural***
2. ***Metodologia formării conceptului de număr natural cardinal***
3. ***Metodologia formării conceptului de număr natural ordinal***

1. Primele zece numere constituie fundamentul pe care se va dezvolta ulterior întregul edificiu al gîndirii matematice a copilului. Acesta este primul contact al copiilor cu matematica, cînd aceştia încep să utilizeze cuvinte pentru a denumi numere şi cifre pentru a le scrie.

Proiectul tematic de perspectivă la matematică pentru clasa I prevede pentru predarea fiecărui număr al primei zeci cîte două ore. La prima lecţie se dezvăluie aspectul cardinal al numărului natural, iar la lecţia a doua se dezvăluie relaţia de ordine a numărului respectiv cu numerele învăţate anterior.

În formarea conceptului de număr natural acţiunea precede intuiţia, modelul didactic presupunînd următoarea dinamica:

- activităţi şi acţiuni cu mulţimi de obiecte (faza concretă);
- schematizarea acţiunii şi reprezentarea grafică a mulţimilor (faza reprezentărilor);

- traducerea simbolică a acţiunilor (faza abstractă).

Raportul dintre aceste etape se schimbă treptat pe parcursul evoluţiei de la intuitiv la logic, de la concret la abstract. La început se va acorda prioritate activităţilor concrete, după care, treptat, se vor utiliza, cu precădere, corespondenţele grafice pe tablă şi pe fişe individuale.

2. Modelul metodologic al formării conceptului de număr natural cardinal prevede următoarele etape.

- Se construieşte o mulţime care are tot atîtea elemente *cîte* indică numărul învăţat anterior şi o mulţime cu un singur element.
- Se reunesc cele două mulţimi şi învăţătorul denumeşte mulţimea nou formată. De exemplu, s-a obţinut o mulţime nouă care are patru elemente şi încă un element. Despre o astfel de mulţime spunem că are cinci elemente.
- Se construiesc mulţimi care au tot atîtea elemente ca şi mulţimea nou formată, folosind corespondenţa “unu la unu” (formarea perechilor de elemente). Învăţătorul subliniază faptul că numărul arată cîte elemente are fiecare din mulţimile construite. Activităţile de stabilire a corespondenţei “unu la unu” între elementele diferitor mulţimi conduc elevii spre detaşarea treptată a conceptului de *număr natural* ca *o clasă de echivalenţă a mulţimilor finite echipotente cu mulţimea dată.* Esenţial este ca elevii să înţeleagă că există o infinitate de mulţimi echivalente cu mulţimea dată, toate avînd acelaşi număr de elemente.
- Se continue cu acţiuni concrete care relevează toate posibilităţile de compunere a numărului învăţat. Trecerea de la acţiunea concretă la reprezentarea iconică se face solicitînd elevilor să deseneze pe caiete ceea ce au efectuat cu obiectele concrete pe bancă.
- Asigurîndu-se ca toţi elevii au realizat saltul calitativ de la acţiunea concretă la reprezentarea iconică, învăţătorul trece la învăţarea scrierii cifrei respective. Scrierea numerelor ridică dificultăţi psihologice, unele chiar mai mari decît la scrierea literelor: elevul trebuie să realizeze o legătură triplă reversibilă între conceptul numeric, exprimarea sa verbală şi semnul grafic. O atenţie sporită trebuie acordată procesului de înţelegere a semnificaţiei cifrei zero, deoarece aceasta reprezintă pentru copil o dublă abstracţie: ea nu exprimă ceva concret, fiind simbolul clasei de mulţimi vide. Se atenţionează asupra distincţiei dintre noţiunea de număr şi noţiunea de cifră ca simbol grafic al numărului.
- Se repetă verbal toate posibilităţile de compunere şi descompunere a numărului respectiv simultan cu reprezentarea grafică prin diagrame.

Acesta este momentul optim de construcţie a micromodelelor mintale cu care copilul va opera ulterior în procesul de adunare şi scădere a numerelor naturale. Elevul rezolvă exerciţiile de compunere /descompunere a numărului natural prin încercări sau pe cale probabilistică pînă ajunge la soluţie.

3. Pentru a stabili relaţia de ordine a numărului dat cu numerele învăţate anterior se recomandă a se proceda astfel (de exemplu, la predarea-învăţarea aspectului ordinal al numărului 5):

- se construieşte o mulţime cu 4 elemente şi alta cu 5 elemente;
- se pun în corespondenţă “unu la unu” elementele acestor mulţimi şi se găseşte că prima mulţime are cu un element mai puţin decît cea de a doua mulţime;
- se introduce semnul “<” care se citeşte “*mai mic*”, apoi semnul “>” care se citeşte “*mai mare*”; se atenţionează că vîrful semnului indică numărul mai mic;
- se scriu numerele învăţate în ordine crescătoare şi descrescătoare, folosind semnele corespunzătoare:

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5, \qquad 5 > 4 > 3 > 2 > 1.$$

Se efectuează exerciţii vizînd:

- completarea şirului numerelor 0-10 cu numerele ce lipsesc;
- determinarea vecinilor numărului dat (predecesor şi succesor);
- stabilirea relaţiei de ordine între numere care nu sînt consecutive; copiii vor compara numere fără a utiliza obiecte concrete, după locul pe care îl ocupă aceste numere în şirul 0-10;
- ordonarea mai multor numere în şir crescător sau descrescător.

Elevii trebuie să înţeleagă că relaţia de ordine pe mulţimea numerelor naturale nu este dată de denumirile numerelor, care de multe ori se învaţă mecanic, ci de relaţiile “*mai mic*” sau “*mai mare*” care se stabilesc între numere şi corespund relaţiilor “mai puţin” sau “mai mult” între mulţimile ce reprezintă numerele date.

Tema 5. Metodologia studierii numeraţiei numerelor naturale

1. ***Organizarea studiului numeraţiei numerelor naturale***
2. ***Noţiunile noi în fiecare concentru***
3. ***Materiale didactice recomandate***

1. Numeraţia este conţinutul central al cursului primar de matematică. În legătură cu numeraţia se proiectează studiul celorlalte compartimente ale cursului.

Conţinutul studiului numeraţiei este organizat, în principal, după un model liniar, cu sensibile orientări spre constituirea de modele spiralate. Se efectuează extinderea treptată a numerelor naturale în cadrul numerelor pînă la 10, apoi pînă la 20, la 30, 100, 1 000, 1 000 000, 1 000 000 000. O asemenea organizare concentrică de repartizare a materiei de studiu asigură:

- gradarea judicioasă a dificultăţilor;
- condiţiile necesare şi reale pentru reluarea şi întărirea cunoştinţelor în sisteme integrative, cu accent pe structură şi relaţii logice.

Predarea-învăţarea numeraţiei prevede:

- o etapă de conştientizare: introducerea conceptului de număr natural pe baza mulţimilor, ideea de sistem zecimal de numeraţie, scrierea poziţională, noţiunile de ordin şi clasă, compararea şi ordonarea numerelor, estimări şi rotunjirea numerelor;
- o etapă de învăţare-interiorizare cu finalitate operatorie automatizată (numărare);
- o etapă de generalizare-aplicare şi transfer matematic.

Aceste etape nu sînt distincte, ci se împletesc pe parcursul învăţării.

În clasa I se învaţă numerele pînă la 100, într-a II-a – numerele pînă la 1000, în clasa a III-a – numerele pînă la 1 000 000, în clasa a IV-a – numerele mai mari decît 1 000 000. În clasa a IV-a se sistematizează şi se adîncesc noţiunile aferente conceptului de număr natural.

2. <u>În concentrul 0-10</u> se introduc noţiunile: *număr, cifră; mai mic/ egal / mai mare; predecesor /succesor; ordine crescătoare / descrescătoare; număr par / impar; axa numerelor.*

<u>În concentrul 0-20</u> se introduce noţiunea de “*zece*” cu o dublă semnificaţie:

- *o nouă unitate de numeraţie*: cu zecile se poate număra la fel ca şi cu unităţile;
- *o nouă unitate de ordin*: 10 unităţi formează o “*zece*”, iar cifra zecilor se scrie la stînga cifrei unităţilor; paralel se introduce noţiunea despre număr de două cifre.

<u>În concentrul 0-100</u> se introduc noţiunile: *numere consecutive, numere precedente, numere următoare, se antrenează compunerea /descompunerea numerelor în termeni de ordin (zeci şi unităţi)*.

<u>În concentrul 0-1000</u> se introduce noţiunea de număr de 3 cifre, se antrenează compunerea/descompunerea numerelor în termeni de ordin (sute, zeci, unităţi) şi descompunerea canonică (în sume de produse),

estimarea şi rotunjirea numerelor la cea mai apropiată zece sau sută (prin lipsă/prin adaos).

În concentrul 0 – 1 000 000 se introduce noţiunea de *ordin* (locul cifrei în scrierea numerelor de la dreapta spre stînga) şi *clasă* (un grup de trei ordine consecutive începînd cu ordinul 1), se continuă activităţile de compunere/descompunere, de estimare şi rotunjire a numerelor.

În concentrul 0 – 1 000 000 000 se formează reprezentări despre *sistemul zecimal de numeraţie* (cifrele arabe şi regulile de folosire a acestora la citirea şi scrierea numerelor naturale) şi despre *proprietăţile acestui sistem*:

- *zecimal*: zece unităţi de orice ordin formează o unitate de ordin imediat superior;
- *poziţional*: valoarea cifrei depinde de poziţia acesteia în scrierea numărului.

Se introduce noţiunea de *ordin de mărime a numărului* (ordin superior), scrierea poziţională a numărului (de exemplu, numărul de 3 cifre se notează $\overline{abc}$, unde a poate primi valori de la 1 la 9, iar b şi c pot primi orice valori cuprinse între 0 şi 9).

Se formează capacitatea de a utiliza cifre romane pentru scrierea numerelor ordinale.

Elevii sînt conduşi progresiv la înţelegerea infinităţii şirului numerelor naturale. La denumirile cunoscute ale claselor unităţilor, miilor şi milioanelor se adaugă denumirile claselor miliardelor, trilioanelor, cvadrilioanelor, cvintilioanelor, sextilioanelor etc.

3. Materialul didactic potrivit pentru predarea-învăţarea numeraţiei poate fi:

- beţişoarele, care se leagă cîte 10 în mănunchiuri;
- rigletele;
- cubuleţele-unităţi care se asamblează în bare cîte 10, în plăci de 100 şi în cuburi cîte 1000;
- numărătoarea cu bile;
- numărătoarea de poziţionare cu tije la fiecare ordin, pe care se aranjează cel mult 10 bile;
- abacul;
- tabelul ordinelor şi claselor.

Rolul materialelor didactice concrete este sporit în clasa întîi şi scade treptat către clasa a II-a, iar în clasele a III-IV-a ne bazăm mai mult pe un suport iconic.

Se impune dozarea judicioasă a intuiţiei ca suport material, fiind la fel de periculos abuzul de intuiţie ca şi insuficienţa acesteia.

Tema 6. Metodologia formării noţiunii de adunare a numerelor naturale

1. ***Introducerea noţiunii de adunare a numerelor naturale***
2. ***Proprietăţile adunării numerelor naturale***
3. ***Predarea-învăţarea tablei adunării în clasa I***

1. Noţiunea de adunare se prevede a fi introdusă la elevii claselor întîi după ce ei şi-au însuşit conceptul de număr natural, au construit progresiv şirul 0-10 şi au cercetat şi memorat conştient toate posibilităţile de compunere /descompunere a numerelor 0-10. Anume acestea din urmă constituie baza predării-învăţării adunării numerelor naturale 0-10.

Pentru formarea noţiunii de adunare se parcurg următoarele trei faze:

- ***faza concretă*** (acţiuni concrete cu obiecte concrete), scopul căreia constă în dirijarea elevilor spre înţelegerea *sensului concret al adunării*: *rezultatul adunării a două numere este cardinalul reuniunii a două mulţimi disjuncte finite care au fiecare atîtea elemente cîte corespund numerelor care se adună*;
- ***faza semiabstractă*** (a reprezentărilor) în care obiectele concrete se reprezintă prin simboluri practice, abstractizant-intuitive: elevii desenează pe caiete mulţimi cu astfel de simboluri sau folosesc riglete;
- ***saltul la conceptul matematic*** de adunare prin care elevii scriu cu cifre şi semne (+, =) operaţia de adunare şi denumesc numerele la adunare (termeni şi sumă).

Etapa reprezentărilor este foarte importantă în procesul cognitiv şi comportă valenţe importante, inclusiv pentru înţelegerea *proprietăţii de simetrie a relaţiei de egalitate* ($3 + 4 = 7$ şi $7 = 3 + 4$). Această proprietate exprimă faptul că un număr poate fi descompus ca sumă a două numere şi se va utiliza ulterior în cadrul diverselor tehnici de calcul.

Limbajul matematic aferent operaţiei de adunare se îmbogăţeşte progresiv prin traducerea simbolică cu ajutorul adunării a unor operaţii concrete, exprimate verbal prin *"măresc cu"*, *"adaug"*, *"în total"*, *"la un loc"* etc., operaţii care se exprimă tot prin reuniunea de mulţimi disjuncte finite.

Pentru a motiva necesitatea efectuării operaţiei de adunare este necesar să se folosească compunerea şi rezolvarea de probleme simple cu context uzual (probleme simple de aflare a sumei şi de mărire a unui număr cu cîteva unităţi).

2. Proprietatea comutativă a adunării numerelor naturale se descoperă în clasa I în baza unei strategii inductive, în clasa a II-a ajungîndu-se la formularea propoziţiei matematice "*Dacă schimbăm termenii cu locul, suma rămîne aceeaşi*". În clasele III-IV comutativitatea adunării se formalizează prin scrierea literală $a + b = b + a$.

Proprietatea asociativă a adunării se descoperă în clasa a II-a, de asemenea, în baza unui raţionament inductiv, abordînd în trei moduri diferite calculul unei sume de trei numere: "*Oricum am asocia numerele la adunare, suma rămîne aceeaşi*". În clasele a III-IV-a, asociativitatea adunării se formalizează prin scrierea literală $(a + b) + c = a + (b + c)$ şi se antrenează prin asocierea optimă a numerelor în cadrul adunării de mai multe numere.

Înţelegerea proprietăţilor adunării stă la baza formării ulterioare a diverselor tehnici de calcul.

3. Tabla adunării se învaţă în clasa I conform următoarei dinamici:

- cazurile + 1, + 2, + 3, + 4, + 5 se dezvăluie în baza sensului concret al adunării;
- cazurile + 6, +7, + 8, + 9, + 10 se bazează pe utilizarea comutativităţi adunării;
- cazul + 0 relevă proprietatea adunării de a avea element neutru pe mulţimea numerelor naturale (0) şi se cercetează în baza înţelegerii sensului concret al adunării.

Tabla adunării nu se învaţă pe de rost, dar se ajunge la o memorare conştientă în urma unui sistem de activităţi speciale:

- rezolvarea de exerciţii şi probleme simple cu sau fără suport intuitiv;
- rezolvarea de ecuaţii implicite (exerciţii de adunare în care un număr este înlocuit printr-un simbol abstractizant-intuitiv: *, □, ? etc.);
- jocuri didactice; concursuri pe echipe şi individuale.

Tema 7. Formarea capacităţilor de calcul legate de adunarea netabelară a numerelor naturale

1. ***Conţinuturile de învăţare legate de adunarea netabelară a numerelor naturale***
2. ***Procedee de adunare netabelară***

1. Formarea capacităţilor de calcul legate de adunarea netabelară prevăd următoarea dinamică:

- procedee fără trecere peste ordin;
- procedee cu trecere peste ordin.

Mai întîi se învaţă procedeele de calcul oral, apoi procedeele de calcul scris, punînd accentul pe calcul oral. Capacitatea de calcul se formează conform următorului itinerariu metodologic:

- familiarizarea cu procedeul de calcul oral şi scris (în contextul unei probleme simple de adunare);
- formarea priceperii de calcul prin aplicarea procedeului respectiv în rezolvarea de exerciţii şi probleme;
- formarea deprinderii de calcul prin transferul priceperii respective în diverse contexte şi situaţii noi.

Familiarizarea cu procedeele de calcul legate de adunarea netabelară a numerelor naturale se organizează după principiul concentric:

- cl.I: concentrele 0-20, 0-30, 0-100 neobligatoriu;
- cl.II: concentrele 0-100, 0-1000 neobligatoriu;
- cl.III: concentrul 0-1000;
- cl.IV: concentrele 0-1 000 000, 0-1 000 000 000 neobligatoriu.

2. Să exemplificăm prin metodologia familiarizării cu procedeele orale de adunare netabelară în concentrul 0-20.

1) Procedeu fără trecere peste ordin

ZU + U Adunarea unui număr format din zeci şi unităţi cu un număr format numai din unităţi.

De exemplu: 12 + 5 =(1z + 2) + 5 = 1z + (2+5) = 1z + 7 = 17

Descompunem pe 12 în 1zece şi 2 unităţi.
Adunăm unităţile: 2+5 = 7.
Formăm numărul 17.

În acest procedeu de calcul oral s-a folosit:

- proprietatea de simetrie a relaţiei de egalitate, cînd am descompus pe 12 în suma termenilor de ordin 1zece şi 2 unităţi;
- asociativitatea adunării, cînd am asociat unităţile între ele:
  (1z + 2) + 5 = 1z + (2 + 5);
- tabla adunării: 2 + 5 = 7;
- cunoaşterea componenţei zecimale a numerelor 0-20, cînd dintr-o zece şi 7 unităţi am format numărul 17.

2) Procedeu cu trecere peste ordin

U + U Adunarea a două numere formate din unităţi.

De exemplu: 7 + 5 = 7 + (3 + 2) = (7 + 3) + 2 = 10 + 2 = 1z + 2 = 12

Descompunem pe 5 în suma termenilor potriviţi 3 şi 2 pentru a-l completa pe 7 pînă la 10.

Transformăm 10 unităţi într-o zece (trecerea peste ordin).

Formăm numărul 12.

În acest procedeu de calcul oral s-a folosit:

- proprietatea de simetrie a relaţiei de egalitate şi cunoaşterea componenţei numerelor 0-10, cînd am descompus pe 5 în suma termenilor potriviţi 3 şi 2;
- asociativitatea adunării, cînd am asociat convenabil pe 7 cu 3 pentru a obţine 10: 7 + (3 + 2) = (7 + 3) + 2;
- înţelegerea zecii ca o nouă unitate de ordin: 10 unităţi = 1 zece;
- cunoaşterea componenţei zecimale a numerelor 0-20, cînd cu o zece şi 2 unităţi am format numărul 12.

Acelaşi procedeu poate fi realizat descompunînd numărul 7 în suma termenilor potriviţi 2 şi 5 pentru a-l completa pe 5 pînă la 10:

7 + 5 = (2 + 5) + 5 = 2 + (5 + 5) = 2 + 10 = 2 + 1z = 1 z + 2 = 12.

Pentru a familiariza elevii cu aceste procedee vom întreprinde mai întîi activităţi concrete cu obiecte concrete. De exemplu, pentru a aduna 12 + 5, vom lua un mănunchi de 10 beţişoare (1 z) şi încă 2 beţişoare, apoi vom mai lua încă 5 beţişoare. Obţinem, în total, 1 mănunchi de 10 beţişoare şi încă 7 beţişoare, ceea ce reprezintă numărul 17.

Pentru a aduna 7 cu 5, alăturăm la 7 beţişoare 5 beţişoare. Începem a număra beţişoarele. Cînd ajungem la 10 beţişoare, le legăm într-un mănunchi şi spunem că am format o zece de beţişoare (trecerea peste ordin). Mai avem încă 2 beţişoare. În total avem 12 beţişoare.

Procedeele de adunare netabelară în concentrul 0-100 se cercetează în mod analog:

1) *Z + Z* fără trecere peste ordin;

De exemplu: 40+30= 4z + 3z = 7 z = 70 (analogic cu adunarea unităţilor);

2) *ZU + U* fără trecere peste ordin;

De exemplu: 42 + 5 = (4z + 2) + 5 = 4z + (2 + 5) = 4z + 7 = 47.

3) *ZU + Z* fără trecere peste ordin;

De exemplu: 42+30 = (4z + 2) + 3z = (4z + 3z) + 2 = 7z + 2 = 72.

4) *ZU + ZU* fără trecere peste ordin;

De exemplu: 42+36 = (4z + 2)+(3z + 6) = (4z + 3z)+(2 + 6) = 7z + 8 = 78.

5) *ZU +U* cu trecere peste ordinul unităţilor;

De exemplu: a) 86+7 = (8z + 6) + 7 = 8z + (6 + 7) = 8z + 13 =
= 8z + (1z + 3) = (8z + 1z) + 3 = 9z + 3 = 93;
b) 86+7 = 86 + (4+3) = 90 +3 = 93;

c) 86+7 = (3+83) + 7 = 3 + (83+7) = 3 + 90 = 93.

6) *ZU* + ZU cu trecere peste ordinul unităţilor.

De exemplu: a) 24+37 = (2z + 4) + (3z + 7) = (2z + 3z) + (4+7) =
= 5z + 11 = 5z + (1z + 1) = (5z + 1z) + 1 = 6z + 1 = 61;

b) 24+37 = 24 + (6+31) = (24+6) + 31 = 30 +31 = 61;

c) 24+37 = (21+3) + 37 = 21 + (3+37) = 21 + 40 = 61.

În cadrul concentrului 0-1000 devine mai important calculul scris, în care unităţile se scriu sub unităţi, zecile sub zeci, sutele sub sute.

După ce se învaţă procedeul fără trecere peste ordin, care nu trezeşte dificultăţi pentru elevi, se trece la cercetarea procedeelor cu trecere peste ordin.

1) *SZU* + *SZU* cu trecere peste ordinul unităţilor;

De exemplu:

$$\begin{array}{r} 246+ \\ \underline{139} \\ 385 \end{array}$$

Pasul 1. Adunăm unităţile: 6 + 9 = 15 sau 1 zece şi 5 unităţi. Scriem cifra 5 la unităţile sumei, iar 1 zece o memorăm pentru a o aduna la suma zecilor.

Pasul 2. Adunăm zecile: 4 z + 3 z = 7 z. Adunăm zecea memorată: 7z + 1 z = 8z. Scriem cifra 8 la zecile sumei.

Pasul 3. Adunăm sutele: 2s + 1s = 3 s. Scriem cifra 3 la sutele sumei.

Pasul 4. Citim suma: 385.

2) *SZU* + *SZU* cu trecere peste ordinul zecilor.

De exemplu:

$$\begin{array}{r} 264+ \\ \underline{193} \\ 457 \end{array}$$

3) SZU + SZU cu trecere peste ordinele unităţilor şi zecilor.

De exemplu:

$$\begin{array}{r} 268+ \\ \underline{195} \\ 463 \end{array}$$

4) Cazuri speciale cînd suma se scrie cu zerouri.

De exemplu:

$$\begin{array}{r} 135+ \\ \underline{245} \\ 380 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 173+ \\ \underline{435} \\ 605 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 264+ \\ \underline{536} \\ 800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 264+ \\ \underline{736} \\ 1000 \end{array}$$

Familiarizarea cu procedeele de adunare netabelară a numerelor mai mari ca 1000 urmează o dinamică analogică şi, în cazul formării unor deprinderi trainice de adunare a numerelor 0-1000, nu prezintă dificultăţi pentru elevi.

Tema 8. Metodologia formării noţiunii de scădere a numerelor naturale

1. ***Introducerea noţiunii de scădere a numerelor naturale***
2. ***Predarea-învăţarea tablei scăderii în clasa I***

1. Noţiunea de scădere a numerelor naturale se introduce paralel cu noţiunea de adunare după ce s-a construit progresiv şirul numeric 0-10.

Formarea noţiunii de scădere parcurge următoarea dinamică:

- ***faza concretă*** (reprezentare acţională după J.Bruner), scopul căreia constă în dirijarea elevilor spre înţelegerea *sensului concret al operaţiei de scădere a numerelor naturale*, care, pe planul mulţimilor prezintă *diferenţa dintre o mulţime şi o submulţime a sa*, adică, *la baza operaţiei de scădere stă conceptul de mulţimi complementare*;
- ***faza semiabstractă***, în care se introduce semnul grafic al scăderii (–) şi se denumesc numerele la scădere (descăzut, scăzător, diferenţă/rest).

Prin exemple şi contraexemple se scoate în evidenţă faptul că *descăzutul nu poate fi mai mic decît scăzătorul*.

Ca şi la adunare, pentru a motiva necesitatea efectuării operaţiei de scădere se rezolvă probleme simple (de aflare a restului şi de micşorare a unui număr cu cîteva unităţi).

Limbajul matematic al elevului se va îmbogăţi treptat cu formele verbale care se traduc concret prin operaţia de scădere: *mai puţin cu, dăm la o parte, separăm, rămîn* etc.

2. Tabla scăderii se învaţă paralel cu tabla adunării, urmînd dinamica:

- cazurile -1, -2, -3, -4, -5 se dezvăluie în baza sensului concret al scăderii;
- cazurile -6, -7, -8, -9, -10 se dezvăluie în baza cunoaşterii componenţei numerelor 0-10 şi legăturii adunării cu scăderea.

De exemplu, $9 - 6 = (3+6) - 6 = 3$. Numărul 9 se descompune ca suma numerelor 3 şi 6. Dacă din sumă scădem un termen, rămîne celălalt termen.

Cazul - 0 relevă proprietatea scăderii de a avea element neutru pe mulţimea numerelor naturale (0) şi se dezvăluie în baza înţelegerii sensului concret al scăderii.

Tabla scăderii nu se învaţă pe de rost, ci se urmăreşte o memorare conştientă în urma unui sistem de activităţi:
- rezolvarea de exerciţii şi probleme simple cu sau fără suport intuitiv;
- rezolvarea de ecuaţii implicite;
- jocuri didactice;
- concursuri pe echipe şi individuale.

Tema 9. Formarea capacităţilor de calcul legate de scăderea netabelară a numerelor naturale

1. ***Conţinuturile de învăţare legate de scăderea netabelară a numerelor naturale***
2. ***Procedeele de scădere netabelară***

1. Formarea capacităţilor de calcul legate de scăderea netabelară urmează dinamica:
- procedee fără trecere peste ordin;
- procedee cu trecere peste ordin (cu împrumut).

Mai întîi se învaţă procedeele de calcul oral, apoi procedeele de calcul scris, punînd accentul pe calcul oral. Capacitatea de calcul se formează conform următorului itinerariu metodologic:
- familiarizarea cu procedeul de calcul oral şi scris (în contextul unei probleme simple de scădere);
- formarea priceperii de calcul prin aplicarea procedeului respectiv în rezolvarea de exerciţii şi probleme;
- formarea deprinderii de calcul prin transferul priceperii respective în diverse contexte şi situaţii noi.

Familiarizarea cu procedeele de calcul legate de scăderea netabelară a numerelor naturale se organizează după principiul concentric:
- cl.I: concentrele 0-20, 0-30; 0-100 neobligatoriu;
- cl.II.: concentrele 0-100, 0-1000 neobigatoriu;
- cl.III: concentrul 0-1000;
- cl.IV: concentrele 0-1 000 000, 0-1 000 000 000 neobligatoriu.

2. Să exemplificăm prin metodologia familiarizării cu procedeele orale de scădere netabelară în concentrul 0-20.

1) $ZU - U$ Scăderea unui număr de o cifră dintr-un număr de 2 cifre fără trecere peste ordin.

De exemplu: 17 – 5 = (1z + 7) – 5 = 1z + (7 – 5) = 1z + 2 = 12.

Descompunem pe 17 în zeci şi unităţi: 1zece şi 7 unităţi.

Scădem unităţile între ele: 7 – 5 = 2.

Formăm diferenţa: 1 zece şi 2 unităţi formează numărul 12.

În acest procedeu de calcul s-a folosit:

- proprietatea de simetrie a relaţiei de egalitate, cînd am descompus descăzutul în suma termenilor de ordin;
- regula scăderii unui număr dintr-o sumă (pentru a scade un număr dintr-o sumă, putem să-l scădem dintr-un termen al sumei, iar diferenţa obţinută s-o adunăm la celălalt termen)

  (1z + 7) – 5 = 1 z + (7 – 5);
- tabla scăderii: 7 – 5 = 2;
- cunoaşterea componenţei zecimale a numerelor 0-20, cînd am format diferenţa: 1z + 2 = 12.

2) *ZU – ZU*: Scăderea a două numere formate din zeci şi unităţi fără trecere peste ordin.

De exemplu: 17 – 12 = (1z + 7) – (1z + 2) = (1z – 1z) + (7 – 2) = 5.

În acest procedeu ne-am bazat pe regula scăderii a două sume, cînd am scăzut zecile între ele şi unităţile între ele.

3) *ZU – U* cu trecere peste ordin (cu împrumut la ordinul zecilor).

De exemplu: a) 12 – 5 = 12 – (2+3) = (12 – 2) – 3 = 10 – 3 = 7;

b) 12 – 5 = (1z + 2) – 5 = (10 + 2) – 5 = (10 – 5) + 2 = = 5 + 2 = 7;

c)12 – 5 = (7 + 5) – 5 = 7.

Procedeul a) are la bază scăderea unei sume dintr-un număr şi se efectuează *descompunînd scăzătorul în suma termenilor potriviţi*, care apoi se scad succesiv din descăzut. Acest procedeu poartă denumirea de *scădere pe părţi*.

Procedeul b) are la bază scăderea unui număr dintr-o sumă şi se efectuează *descompunînd descăzutul în suma termenilor de ordin*. Apoi urmează transformarea zecii descăzutului în 10 unităţi, scăderea scăzătorului din 10, adunarea diferenţei obţinute cu unităţile descăzutului.

Procedeul c) are la bază cunoaşterea componenţei numerelor 0-20 şi legătura dintre adunare şi scădere (dacă dintr-o sumă scădem un termen, rămîne celălalt termen) şi se efectuează *descompunînd descăzutul în suma termenilor potriviţi*.

Pentru a familiariza elevii cu aceste procedee vom întreprinde mai întîi activităţi concrete cu obiecte concrete. De exemplu, pentru a scade 12 – 5, vom lua un mănunchi de zece beţişoare (1 zece) şi încă 2 beţişoare. Dăm mai întîi la o parte cele 2 beţişoare separate. Pentru a mai scoate încă 3 beţişoare (pînă la 5), dezlegăm mănunchiul (trecem peste ordin) şi luăm 3 beţişoare. Ne rămîn 7 beţişoare.

Procedeele de scădere netabelară în concentrul 0-100 se cercetează în mod analog:

1) *Z – Z* fără trecere peste ordin;

De exemplu: $70 - 40 = 7z - 4z = 3z = 30$ (analog cu scăderea zecilor; înţelegînd zecea ca o nouă unitate de numeraţie, putem opera cu zecile la fel ca şi cu unităţile).

2) *ZU – U* fără trecere peste ordin;

De exemplu: $78 - 2 = (7z + 8) - 2 = 7z + (8 - 2) = 7z + 5 = 75$.

3) *ZU – Z* fără trecere peste ordin;

De exemplu: $78 - 20 = (7z + 8) - 2z = (7z - 2z) +8 = 5z + 8 = 58$.

4) *ZU – ZU* fără trecere peste ordin;

De exemplu: $78 - 26 = (7z + 8)-(2z + 6) = (7z - 2z)+(8- 6) = 5z + 2 = 52$.

5) *ZU – U* cu trecere peste ordin (cu împrumut la ordinul zecilor);

De exemplu:

$42-6 = (4z +2)-6 = (3z +1z +2)-6 = (3z+12)-6= 3z+(12- 6)=3z+6 =36$.

6) *ZU – ZU* cu trecere peste ordin (cu împrumut la ordinul zecilor).

De exemplu: $42 - 16 = (4z + 2) - (1z + 6) = (3z + 1z + 2) - (1z+ +6)=$

$= (3z + 12) - (1z + 6) = (3z - 1z) + (12 - 6) = 2z + 6 = 26$.

În cadrul concentrului 0-1000 devine mai important calculul scris, în care unităţile se scriu sub unităţi, zecile sub zeci, sutele sub sute.

Scăderea fără trecere peste ordin nu prezintă dificultăţi pentru elevi, de aceea ne vom opri doar la procedeele cu trecere peste ordin.

1) *SZU – SZU* cu împrumut la ordinul zecilor.

De exemplu:

$$\begin{array}{l} 684\ - \\ \underline{259} \\ 415 \end{array}$$

Pasul 1. Nu putem scade unităţile ($4<9$). De aceea împrumutăm 1 zece şi o transformăm în 10 unităţi. Avem, în total, 14 unităţi. Scădem unităţile: $14 - 9 = 5$. Scriem cifra 5 la unităţile diferenţei.

Pasul 2. Ne-au rămas 7 zeci. Scădem zecile: $7z - 5z = 2z$. Scriem cifra 2 la zecile diferenţei.

Pasul 3. Scădem sutele: $6s - 2s = 4s$. Scriem cifra 4 la sutele diferenţei.

Pasul 4. Citim diferenţa: 415.

2) *SZU – SZU* cu împrumut la ordinul sutelor.

De exemplu:

948 –
<u>295</u>
653

3) *SZU – SZU* cu împrumut la ordinele zecilor şi sutelor.

De exemplu:

642 –
<u>385</u>
257

4) Cazuri speciale cînd:

- descăzutul conţine zerouri:

  640 – 218 = 422,   306 – 124 = 182,   500 – 248 = 252;

- restul conţine zerouri:

643 –	562 –
<u>238</u>	<u>469</u>
404	93 (zero la sute nu putem scrie).

Familiarizarea cu procedeele de scădere netabelară a numerelor mai mari ca 1000 urmează o dinamică analogică şi, în cazul formării unor deprinderi trainice de scădere netabelară a numerelor 0-1000, nu prezintă dificultăţi pentru elevi.

Tema 10. Metodologia formării noţiunii de înmulţire a numerelor naturale

1. **Introducerea operaţiei de înmulţire în clasa a II-a**
2. **Proprietăţile înmulţirii**
3. **Cazuri speciale**
4. **Tabla înmulţirii**

1. În formarea noţiunii de înmulţire intuiţia nu mai are un rol predominant (ca la adunare), deoarece elevii au dobîndit cunoştinţele şi capacităţile aferente adunării şi învăţătorul se va baza pe acestea în predarea noii operaţii. Însă nu se va renunţa complet la mijloacele intuitive.

Dinamica introducerii operaţiei de înmulţire prevede:

- exersarea adunării repetate, accentuînd modalitatea de verbalizare: 2+2+2 se citeşte *de 3 ori cîte 2*;
- înlocuirea adunării repetate cu înmulţirea: pentru adunările repetate se poate folosi o altă scriere, de exemplu, 2 + 2 + 2 = 3 x 2. Se exersează scrierea adunărilor repetate prin înmulţiri şi invers, accentuînd

semnificaţia numerelor la înmulţire: *primul factor arată de cîte ori se repetă al doilea factor ca termen al adunării repetate*. Se introduce şi denumirea rezultatului înmulţirii - produsul.

2. De la primele lecţii de predare a înmulţirii se urmăreşte scoaterea în evidenţă a proprietăţii de comutativitate a înmulţirii. Din punct de vedere metodic, descoperirea acestei proprietăţi se organizează treptat, pe parcursul a cîteva lecţii, în cadrul unei strategii inductive. Se va ajunge, progresiv, la formularea propoziţiei matematice: "*Dacă schimbăm locul factorilor, produsul rămîne neschimbat*". Această proprietate se va folosi ulterior în predarea-învăţarea tablei înmulţirii. În clasele a III-IV-a comutativitatea înmulţirii se formalizează prin scrierea literală
a x *b* = *b* x *a*.

Proprietatea asociativă a înmulţirii se descoperă printr-un raţionament inductiv, calculînd produsul a trei numere prin asocierea diferită a factorilor. Se formulează: "*Oricum am asocia 3 numere la înmulţire, produsul rămîne acelaşi*". În clasele a III-IV-a asociativitatea înmulţirii se formalizează prin scrierea literală (*a* x *b*) x *c* = *a* x (*b* x *c*).

Comutativitatea şi asociativitatea înmulţirii stau la baza predării procedeelor de înmulţire netabelară.

3. a) *a* x 1 = 1+1+…+1 = *a;*
a x 0 = 0+0+ …+0 = 0.

Aceste cazuri se descoperă în cadrul unui demers logico-euristic inductiv, bazîndu-se pe sensul înmulţirii ca o adunare repetată.

b) 1 x *a*, 0 x *a* sînt excepţii din definiţia înmulţirii.

Primul factor arată cîţi termeni are adunarea repetată. O adunare trebuie să aibă cel puţin 2 termeni, deci, primul factor nu poate fi egal cu 0 sau cu 1.

Pentru a asigura accesibilitatea vîrstei elevilor, aceste cazuri se predau în legătură cu comutativitatea înmulţirii:

1 x *a* = *a* x 1 = *a*, 0 x *a* = *a* x 0 = 0.

4. O lecţie de predare a înmulţirii cu un factor dat (de exemplu, 4) trebuie să parcurgă o dinamică progresivă.

Etapa I. Actualizarea cazurilor de înmulţire învăţate anterior:

2 x 4 = 4 x 2 = 8, 3 x 4 = 4 x 3 = 12.

Etapa II. Descoperirea produselor cu 4 pe locul factorului al doilea:

$4 \times 4 = \underbrace{4 + 4 + 4}_{3 \times 4 = 12} + 4 = 12 + 4 = 16;$

$5 \times 4 = \underbrace{4+4+4+4}_{4 \times 4 = 16}+4 = 16 + 4 = 20.$

Cazurile 6 x 4, 7 x 4, 8 x 4, 9 x 4, 10 x 4 se cercetează analog.

Etapa III. Folosirea comutativităţii înmulţirii pentru cazurile noi:

4 x 5 = 5 x 4 = 20, 4 x 6 = 6 x 4 = 24, …, 10 x 4 = 4 x 10 = 40.

Etapa IV. Scrierea completă a tablei înmulţirii cu un factor 4.

În cadrul lecţiilor, prin activităţi variate, învăţătorul trebuie să conducă elevii către memorarea tablei înmulţirii. Este o greşeală metodologică gravă învăţarea pe de rost a tablei înmulţirii. Trebuie să asigurăm o memorare conştientă, recurgîndu-se cît va fi nevoie la calculul produsului prin adunare repetată, dar stimulînd memorarea prin diverse activităţi atractive.

Tema 11. Formarea capacităţilor de calcul legate de înmulţirea netabelară

1. ***Conţinuturile de învăţare a procedeelor de înmulţire netabelară***
2. ***Algoritmi pentru procedee orale şi scrise***
3. ***Reguli folosite***
4. ***Procedee de înmulţire rapidă***

1. Conţinuturile de învăţare a procedeelor de înmulţire netabelară prevăd:

a) clasa a III-a (concentrul 0-1000):
- înmulţirea cu 10 şi 100 (2 x 10, 2 x 100, 40 x 10, 43 x 10);
- înmulţirea cu numere formate din zeci sau din sute întregi, fără trecere peste ordin (4 x 20, 3 x 200, 20 x 30);
- înmulţirea fără trecere peste ordin a unui număr mai mic decît 10 cu un număr scris cu cel mult trei cifre (2 x 34, 2 x 134, cazuri speciale 2 x 340, 2 x 304);
- înmulţirea cu trecere peste ordin a unui număr mai mic decît 10 cu un număr scris cu două cifre (cu trecere peste ordinul unităţilor 3 x 26, cu trecere peste ordinul zecilor 3 x 40, cu trecere peste ordinele unităţilor şi zecilor 3 x 45);
- înmulţirea cu trecere peste ordin a unui număr de o cifră cu un număr scris cu trei cifre (cu o trecere peste ordin 3 x 128, 2 x 354, cu două treceri peste ordin 4 x 237);

b) clasa a IV-a (numere mai mari decît 1000):
- înmulţirea cu 1000;
- înmulţirea fără trecere peste ordin cu un număr de o cifră;
- înmulţirea cu trecere peste ordin cu un număr de o cifră;
- înmulţirea fără trecere peste ordin cu un număr de 2 cifre (12 x 34, 12 x 342, 12 x 1342);

- înmulţirea cu trecere peste ordin cu un număr de 2 cifre;
- înmulţirea cu un număr de 3 cifre (extindere).

Metodele didactice principale recomandate pentru predarea procedeelor de înmulţire netabelară sînt problematizarea şi descoperirea în baza unui demers logico-euristic inductiv.

Pentru formarea şi antrenarea capacităţilor de calcul se recomandă dictări matematice, jocuri şi concursuri de calcul rapid organizate frontal sau în grupuri, contraexemple, compuneri şi rezolvări de probleme etc.

2. Să aducem cîteva exemple:

1) 2 x 300 = 300 + 300 = 600 (în baza definiţiei înmulţirii ca o adunarea repetată);
2) 20 x 30 = (2 x 10) x (3 x 10) = (2 x 3) x (10 x 10) = 6 x 100 = 600 (în baza asociativităţii înmulţirii);
3) 43 x 20 = (40 + 3) x 20 = 40 x 20 + 3 x 20 = 800 + 60 = 860 (în baza distributivităţii înmulţirii în raport cu adunarea);
4) 2 x 327 = 2 x (300+20+7) = 2 x 300 + 2 x 20 + 2 x 7 =

= 600 + 40 + 14= 654 (procedeul oral se bazează pe distributivitatea înmulţirii în raport cu adunarea).

$$\begin{array}{r} 327 \times \\ \underline{2} \\ 654 \end{array}$$

Procedeul scris se bazează la fel pe distributivitatea înmulţirii în raport cu adunarea, dar şi pe înţelegerea proprietăţii sistemului de numeraţie de a fi zecimal: fiecare 10 unităţi de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior.

Pasul 1: Înmulţim 2 cu unităţile: 2 x 7 = 14 sau 1 zece şi 4 unităţi. Scriem 4 la unităţile produsului, iar 1 zece o memorăm pentru a o aduna la produsul zecilor.

Pasul 2: Înmulţim 2 cu zecile: 2 x 3 = 6z. Adunăm zecea memorată: 6z + 1z = 7z. Scriem 7 la zecile produsului.

Pasul 3: Înmulţim 2 cu sutele: 2 x 3s = 6s. Scriem 6 la sutele produsului.

Pasul 4: Citim produsul obţinut: 654.

5)12 x 640 = 12 x (64 x 10) = (12 x 64) x 10. Din asociativitatea înmulţirii rezultă că cifra 0 poate fi neglijată la înmulţirea în coloniţă, coborînd-o doar, la dreapta produsului obţinut.

$$\begin{array}{rl} 640 \times & \\ \underline{12} & \\ 128 & \leftarrow \text{(zeci) primul produs parţial} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{64} \leftarrow \text{(sute) al doilea produs parţial} \\ 7680 \leftarrow \text{produs final} \end{array}$$

Al doilea produs parţial se începe a scrie sub zeci, iar sub unităţi se subînţelege cifra 0.

3. Pe parcursul formării capacităţilor de înmulţire netabelară, elevii descoperă şi folosesc următoarele reguli:

a) pentru a înmulţi un număr cu o sumă, distribuim numărul la fiecare termen al sumei (distributivitatea înmulţirii în raport cu adunarea);
b) pentru a înmulţi un număr cu 10/100/1000, scriem la dreapta numărul 1/2/3 cifre de zero;
c) pentru a înmulţi două numere care se termină cu zerouri, procedăm astfel:
- înmulţim numerele neglijînd zerourile;
- scriem la dreapta produsului obţinut atîtea zerouri cîte au, în total, ambii factori.

4. În cadrul formării tehnicilor de calcul rapid elevii descoperă şi folosesc următoarele procedee.

a) Asociativitatea înmulţirii care permite asocierea convenabilă a factorilor.

De exemplu, 7 x 4 x 5 = 7 x (4 x 5) = 7 x 20 = 7 x (2 x 10) = (7 x 2) x 10= = 14 x 10 = 140.

b) Distributivitatea înmulţirii în raport cu adunarea şi scăderea.

De exemplu:
- înmulţirea rapidă cu 11:

  17 x 11 = 17 x (10+1) = 17 x 10 + 17 = 170 + 17 = 187;
- înmulţirea rapidă cu 9:

  17 x 9 = 17 x (10 – 1) = 17 x 10 – 17 = 170 – 17 = 153.

c) Înmulţirea cu un cît:
- 32 x 5 = 32 x (10 : 2) = (32 x 10) : 2 = 320 : 2 = 160 sau
  32 x 5 = 32 x (10 : 2) = 32 : 2 x 10 = 16 x 10 = 160;
- 32 x 25 = 32 x (100 : 4) = (32 x 100) : 4 = 3200 : 4 = 800 sau
  32 x 25 = 32 x (100 : 4) = (32 : 4) x 100 = 8 x 100 = 800;
- 32 x 50 = 32 x (100 : 2) = (32 x 100) : 2 = 3200 : 2 = 1600 sau
  32 x 50 = 32 x (100 : 2) = (32 : 2) x 100 = 16 x 100 = 1600.

Tema 12. Metodologia formării noţiunii de împărţire a numerelor naturale

1. Generalităţi

2. ***Introducerea noţiunii de împărţire***
3. ***Tabla împărţirii***
4. ***Cazuri speciale de împărţire***

1. Operaţia de împărţire se introduce în clasa a II-a. Predarea înmulţirii şi împărţirii poate fi organizată şi desfăşurată în baza a două accepţiuni metodologice: separat sau paralel.

Conform manualelor şcolare de bază aceste operaţii se predau separat. Această alegere este mai indicată întrucît elevii învaţă operaţiile de înmulţire şi împărţire pentru prima dată, iar esenţiale pentru ei sînt legăturile dintre înmulţire şi adunare repetată, împărţire şi scădere repetată, dar nu legătura dintre înmulţire şi împărţire. Învăţarea separată a înmulţirii şi împărţirii permite elevilor să se concentreze asupra operaţiei noi, pătrunzînd mai profund în esenţa acesteia.

2. Operaţia de împărţire a numerelor naturale se introduce după ce la elevi s-a format conceptul de înmulţire şi ei au însuşit tabla înmulţirii. Împărţirea se introduce conform conţinuturilor contextelor problematice concrete legate de împărţire:

- împărţirea în părţi egale;
- împărţirea prin cuprindere.

Împărţirea în părţi egale este mai accesibilă înţelegerii copilului. Exprimarea ei verbală este în concordanţă cu procesul gîndirii care are loc, iar justificarea operaţiei nu prezintă dificultăţi pentru elevi.

Sensul concret al împărţirii în părţi egale *constă în clasificarea unei mulţimi finite date, clasele reprezentînd submulţimi echivalente. Se ştie cîte clase se formează, iar prin împărţire se află cîte elemente conţine fiecare clasă.*

Metoda principală de introducere a împărţirii în părţi egale este bazată pe acţiuni concrete cu obiecte concrete. De exemplu, 12 creioane se împart în mod egal la 3 elevi:

- se iau 3 creioane şi se împart cîte unul la fiecare dintre cei trei elevi; la tabla se scrie operaţia efectuată 12 – 3;
- se continuă analog, pînă se termină creioanele.

La tabla se obţine şirul de scăderi repetate:

$$12 - \underbrace{3 - 3 - 3 - 3}_{\text{de 4 ori}} = 0.$$

În concluzie, împărţind 12 creioane în mod egal la 3 elevi se obţin cîte 4 creioane la fiecare elev. Se explică elevilor că această scădere repetată se poate scrie 12 : 3 = 4.

Se introduce simbolul operaţiei de împărţire (**:**) şi denumirile numerelor la împărţire: deîmpărţit, împărţitor, cît. Este esenţial ca elevul să înţeleagă *semnificaţia cîtului: cîtul arată de cîte ori putem scade împărţitorul din deîmpărţit.*

Împărţirea prin cuprindere se introduce în confruntare cu împărţirea în părţi egale, adică simultan cu aceasta, conducînd progresiv elevii la unificarea celor două procedee de împărţire.

Sensul concret al împărţirii prin cuprindere *constă, de asemenea, în clasificarea mulţimii finite date în submulţimi echivalente. Însă, de această dată, se cunoaşte numărul de elemente în fiecare clasă, iar numărul claselor trebuie aflat.*

Se acţionează, iarăşi, în plan concret. De exemplu, 12 creioane trebuie împărţite cîte 3 elevilor:

- din 12 creioane se iau 3 şi se dau primului elev. La tablă se scrie operaţia efectuată 12 – 3;
- se continue analog pînă se termină creioanele. Scriind toate scăderile se obţine exerciţiul:

$$12 - \underbrace{3 - 3 - 3 - 3}_{\text{de 4 ori}} = 0.$$

În concluzie, 12 creioane pot fi împărţite cîte 3 la 4 elevi.

Această scriere elevii au întîlnit-o anterior la împărţirea în părţi egale şi o vor scrie la fel 12 : 3 = 4.

Astfel se atinge unificarea celor două procedee de împărţire, în părţi egale şi prin cuprindere, înţelegînd că, *indiferent de procedeul efectuat, cîtul arată de cîte ori putem scade împărţitorul din deîmpărţit.*

Totuşi, împărţirea prin cuprindere prezintă un grad de dificultate sporit în raport cu împărţirea în părţi egale, deoarece justificarea operaţiilor şi ilustrarea concretă sînt mai dificile.

Terminologia aferentă “în părţi egale” şi “prin cuprindere” se introduce abia în clasa a III-a, fără a accentua folosirea acesteia.

Prin contraexemple se va scoate în evidenţă proprietatea: *deîmpărţitul nu poate fi mai mic decît împărţitorul.*

3. Tabla împărţirii se predă şi se învaţă în baza înţelegerii şi aplicării legăturii dintre înmulţire şi împărţire.

De exemplu, din împărţirea 3 x 4 = 12 se obţin două împărţiri

12 : 3 = 4 şi 12 : 4 = 3.

Tabla împărţirii se memorează conştient, aplicînd un sistem bine gîndit de activităţi speciale: dictări matematice, jocuri şi concursuri, ecuaţii implicite ş.a.

4. Cazurile speciale ale împărţirii se descoperă în baza unei strategii inductive.

a) *Împărţirea la 1*. A afla cîtul împărţirii lui 3 la 1 înseamnă a calcula de cîte ori putem scădea 1 din 3:

$$3 - \underbrace{1 - 1 - 1}_{\text{de 3 ori}} = 3, \text{ deci } 3 : 1 = 3.$$

După cercetarea a cîteva cazuri particulare se ajunge la generalizarea "cîtul împărţirii unui număr la 1 este egal cu acel număr" şi formalizarea prin scrierea literală $a : 1 = a$.

b) *Împărţirea la acelaşi număr*. Se descoperă, în mod analog, printr-o strategie inductivă că numărul poate fi scăzut din sine însuşi o singură dată, deci $a : a = 1$.

c) *Împărţirea lui 0*. Se cercetează, de asemenea, cîteva cazuri particulare, de exemplu 0 : 2, 0 : 3 etc., observînd că orice număr poate fi scăzut din 0 de 0 ori, deci, $0 : a = 0$, $a \neq 0$.

Acest caz special se ilustrează în manualul de clasa a II-a printr-o problemă-glumă: "Doi ciobănaşi vor să împartă în mod egal perele dintr-un brad. Cîte pere va primi fiecare ciobănaş?"

d) *Împărţirea la 0*. Acest caz special se abordează din două perspective.

- *Împărţirea ca o scădere repetată*. Se încearcă a scrie împărţirea 7 : 0 ca o scădere repetată 7 – 0 – 0 – 0 … şi se observă că este imposibil de a afla cîtul (numărul scăderilor repetate pînă la restul zero), deoarece niciodată nu se va ajunge la restul 0.
- *Legătura dintre înmulţire şi împărţire*. A împărţi 7 la 0 înseamnă a găsi un număr care înmulţit la 0 ne dă 7, ceea ce este imposibil. Elevii ajung la cocnluzia: ***împărţirea la 0 nu are sens.***

Tema 13. Metodologia formării noţiunii de împărţire cu rest a numerelor naturale

1. ***Introducerea operaţiei de împărţire cu rest***
2. ***Descoperirea probei împărţirii cu rest***
3. ***Cazuri speciale***
4. ***Formarea tehnicii de calcul la împărţirea cu rest a numerelor naturale***

1. Operaţia de împărţire cu rest se introduce în clasa a III-a în confruntare cu împărţirea exactă, conducînd elevii la înţelegerea faptului că împărţirea exactă este un caz particular al împărţirii cu rest (cînd restul este nul).

Se porneşte de la o situaţie-problemă comună, de exemplu: pentru împodobirea pomului de Crăciun, copiii au confecţionat steluţe colorate.

• Împărţirea cu rest se introduce în contextul împărţirii prin cuprindere: “Într-o cutie încap 4 steluţe. Cîte cutii poate completa Dan cu cele 14 steluţe confecţionate ?” (problema 1)

Problema poate fi abordată în plan concret sau urmărind imaginile din manual. Se iau cîte 4 steluţe din cele 14 şi se pun într-o cutie, completînd, astfel, 3 cutii şi rămînînd 2 steluţe. Se scrie operaţia efectuată mai întîi prin scăderi repetate 14 – 4 – 4 – 4 = 2, apoi prin împărţire 14 : 4 = 3, rest 2. Se introduce denumirea noii componente, restul, atenţionînd semnificaţia numerelor obţinute în rezultatul împărţirii cu rest:

- *cîtul arată de cîte ori poate fi scăzut împărţitorul din deîmpărţit;*
- *restul reprezintă rezultatul ultimei scăderi.*

• Împărţirea exactă se abordează, în continuare, în contextul împărţirii în părţi egale: “Doina vrea să repartizeze cele 8 steluţe în mod egal pe 4 ramuri ale pomului. Cîte steluţe va pune pe fiecare ram?” (problema 2)

La fel putem acţiona în mod concret sau urmărind imaginile din manual. Operaţia se scrie mai întîi ca o scădere repetată 8 – 4 – 4 = 0, apoi ca o împărţire 8 : 4 = 2.

În concluzie, se pun cîte 2 steluţe pe fiecare ram şi nu rămîne nici o steluţă. Deci, se împarte exact 8 la 4 şi se obţine cîtul 2 şi restul 0. Se accentuează semnificaţia cîtului şi restului, în mod analog problemei precedente.

2. Pentru a descoperi proba împărţirii cu rest se direcţionează cercetarea elevilor pe două direcţii.

• Problema 1 abordată anterior se verifică, pornind de la situaţia obţinută spre cea iniţială, dată în problema.

În urma rezolvării concrete a problemei 1 s-au obţinut 3 cutii cu cîte 4 steluţe şi încă 2 steluţe. Această situaţie se descrie prin exerciţiul 3 x 4 + 2, care se verbalizează denumind numerele ca la împărţirea cu rest, obţinînd propoziţia matematică cu formula *C* x *I* + *R* = *D*.

• Se propune elevilor a observa relaţia de comparaţie între rest şi împărţitor în cadrul împărţirilor cu rest cu acelaşi împărţitor şi cu deîmpărţitele reprezentînd numere consecutive.

De exemplu:

7 : 3 = 2, rest 1
8 : 3 = 2, rest 2
9 : 3 = 3
10 : 3 = 3, rest 1
11 : 3 = 3, rest 2

12 : 3 = 4
13 : 3 = 4, rest 1
14 : 3 = 4, rest 2
15 : 3 = 5

Se observă faptul că restul este întotdeauna mai mic decît împărţitorul: *R<I.*

Pentru a consolida înţelegerea acestei proprietăţi, se propun contraexemple. De exemplu, se cere de a corecta exerciţiile:

31 : 6 = 4, rest 7; 18 : 4 = 3, rest 6 etc.

Astfel se ajunge la ***proba împărţirii cu rest*** **C x I + R = D, R < I.**

3. a) *Împărţirea la 0* a fost cercetată anterior, în cadrul predării-învăţării operaţiei de împărţire exactă în clasa a II-a. Se actualizează faptul că împărţirea la zero nu are sens, extrapolînd acest caz special al împărţirii exacte asupra împărţirii cu rest nenul.

b) Un alt caz special al împărţirii cu rest îl constituie *cazul cînd deîmpărţitul este mai mic decît împărţitorul.*

Acest caz se abordează în contextul unei situaţii-problemă: "Mati are 5 steluţe. Poate să le împartă în mod egal pe cele 8 ramuri ale pomului de Crăciun?" Răspunsul este, evident, negativ. Exerciţiul corespunzător este 5 : 8. Nu putem nici o dată să scădem 8 din 5, deci, cîtul acestei împărţiri este 0. Ne rămîn rest cele 5 steluţe. Astfel, 5 : 8 = 0, rest 5.

Generalizînd şi formalizînd acest procedeu, obţinem scrierea literală ***dacă D < Î, atunci C = 0 şi R = D***.

4. Vom exemplifica algoritmul împărţirii cu rest prin exerciţiul 27 : 6.

Pasul 1: Estimăm de cîte ori 27 îl cuprinde pe 6:   de 4 ori.
Deci, cîtul este 4.
Pasul 2: Aflăm produsul dintre 4 şi 6:   4 x 6 = 24.
Pasul 3: Aflăm restul: 27 – 24 =3.
Pasul 4: Verificăm dacă *R < Î:*   1< 3.
Scriem: 27 : 6 = 4, rest 3.
Proba: 4 x 6 + 3 = 27, 1< 3.

Efectuarea corectă a operaţiei de împărţire cu rest reprezintă fundamentul formării capacităţilor de împărţire netabelară.

Tema 14. Formarea capacităţilor de calcul legate de împărţirea netabelară

1. ***Conţinuturile predării-învăţării procedeelor de împărţire netabelară***
2. ***Algoritmi pentru procedee orale şi scrise***

3. Reguli folosite
4. Procedee de împărţire rapidă

1. a) *Clasa a III-a*:

- împărţirea exactă a numerelor care se termină cu zero (40 : 10, 400 : 100, 400 : 10, 420 : 10, 40 : 2, 40 : 20, 400 : 2, 400 : 200, 400 : 20);
- împărţirea unui număr de două cifre la un număr de o cifră, cînd zecile deîmpărţitului se împart exact la împărţitor (68 : 2; cazul cu rest 49 : 4; caz special 62 : 3, cînd cîtul conţine zero);
- împărţirea unui număr de două cifre la un număr de o cifră, cînd zecile deîmpărţitului nu se împart exact la împărţitor (78 : 2; cazul cu rest 78 : 5; cazul special 80 : 3 cînd deîmpărţitul conţine zero);
- împărţirea unui număr de trei cifre la un număr de o cifră, cînd sutele şi zecile deîmpărţitului se împart exact la împărţitor (686 : 2; cu rest 285 : 2; cazuri speciale: a) cînd la cît se obţine zero 692 : 3 = 230, rest 2; b) cînd deîmpărţitul are zero la zeci 805 : 4 = 201, rest 1; c) cînd deîmpărţitul se termină cu zero: 480 : 2 = 240);
- împărţirea unui număr de trei cifre la un număr de o cifră cînd numărul zecilor nu se împarte exact la împărţitor (984 : 3; cu rest 498 : 4; cazuri speciale: a) cînd deîmpărţitul conţine cifra zero 860 : 4; b) cînd cîtul conţine cifra zero 538 : 5 = 107, rest 3);
- împărţirea unui număr de trei cifre la un număr de o cifră, cînd numărul sutelor nu se împarte exact la împărţitor (536 : 3 cînd numărul sutelor este mai mare decît împărţitorul; 235 : 3, cînd numărul sutelor este mai mic decît împărţitorul; cazuri speciale: a) cînd deîmpărţitul conţine zerouri 205 : 3, 240 : 5; b) cînd cîtul conţine zerouri 321 : 4 = 80, rest 1; c) cînd şi deîmpărţitul şi cîtul conţin zerouri 500 : 2 = 250).

b) *Clasa a IV-a:*

- împărţirea unui număr mai mic decît 1 000 000 la un număr de o cifră (658 : 2, 1865 : 9);
- împărţirea cînd împărţitorul este scris du două cifre (6625 : 53; cazuri speciale: a) cînd deîmpărţitul conţine zerouri 200348 : 39; b) cînd cîtul conţine zerouri: 2575 : 25 = 103; c) cînd şi deîmpărţitul şi cîtul conţin zerouri: 9430 : 46 = 205; d) cînd deîmpărţitul şi împărţitorul se termină cu zerouri 51640 : 40 = 1291).

2. Metodele didactice principale recomandate pentru predarea-învăţarea procedeelor de împărţire netabelară sînt problematizarea şi descoperirii în baza unui demers logico-euristic inductiv.

Pentru formarea şi antrenarea capacităţilor de calcul se recomandă dictări matematice, jocuri şi concursuri, contraexemple, compuneri şi rezolvări de probleme etc.

Să aducem cîteva exemple:

1) *În baza legăturii dintre împărţire şi înmulţire* se cercetează cazurile:

40 : 10 = 4, deoarece 40 = 4 x 10;
600 : 300 = 2, deoarece 600 = 2 x 300;
900 : 30 = 30, deoarece 900 = 30 x 30;
240 : 10 = 24, deoarece 240 = 24 x 10.

2) *În baza distributivităţii împărţirii în raport cu adunarea* se cercetează cazurile:

a) 68 : 2 (descompunerea deîmpărţitului în suma termenilor de ordin):

Procedeu oral: 68 : 2 = (60 + 8) : 2 = 60 : 2 + 8 : 2 = 30 + 4 = 34.

Procedeu scris:

Pasul pregătitor: *Determin cu cîte cifre va fi scris cîtul.*
Pot împărţi zecile deîmpărţitului la împărţitor (6 > 2), deci, cîtul va conţine zeci. Scriu două puncte la cît: pentru cifra zecilor şi pentru cifra unităţilor.

Pasul 1. *Aflu cifra zecilor la cît*:
- *împart* zecile: 6 îl cuprinde pe 2 de 3 ori. Scriu 3 la zecile cîtului;
- *înmulţesc* şi aflu cîte zeci am împărţit: 2 x 3z = 6z. Scriu 6 sub zecile deîmpărţitului;
- *scad* şi aflu restul zecilor: 6z – 6z = 0z. Nu pot scrie zero la zeci, de aceea nu scriu nimic sub linia de scădere.

Pasul 2. *Aflu cifra unităţilor la cît:*
- cobor cifra unităţilor şi
  împart: 8 îl cuprinde pe 2 de 4 ori. Scriu 4 la zecile cîtului;
- *înmulţesc* şi aflu cîte unităţi am împărţit: 2 x 4 = 8;
- *scad* şi aflu restul unităţilor: 8 – 8 = 0. Scriu 0 sub linia de scădere.

Dacă se obţine un rest nenul, acesta se compară mai întîi cu împărţitorul (*R* < *Î*) şi apoi se continuă împărţirea.

Procedeul scris se verbalizează la început în forma extinsă, apoi treptat se restrînge.

b) 78 : 2 (descompunerea deîmpărţitului în termeni potriviţi).

Procedeu oral: 78 : 2 = (60 + 18) : 2 = 60 : 2 + 18 : 2 = 30 + 9 = 39.

3. În procesul învăţării procedeelor de împărţire netabelară elevii vor fi dirijaţi spre descoperirea şi antrenaţi ulterior în aplicarea următoarelor reguli:

- *pentru a împărţi exact la 10/100/1000 un număr care se termină cu zerouri, se elimină 1/2/3 de zero de la dreapta numărului;*
- *pentru a împărţi exact două numere ce se termină cu zerouri, eliminăm la deîmpărţit şi împărţitor acelaşi număr de zerouri, apoi continuăm împărţirea.*

4. În cadrul formării capacităţilor de împărţire rapidă se descoperă şi se aplică următoarele procedee:

a) *împărţirea succesivă (împărţirea la un produs)*:

56 : 14 = 56 : (7 x 2) = (56 : 7) : 2 = 8 : 2 = 4;

b) împărţirea la un cît:

- 130 : 5 = 130 : (10 : 2) = (130 : 10) x 2 = 13 x 2 = 26 sau
  135 : 5 = 135 : (10 : 2) = (135 x 2) : 10 = 270 : 10 = 27;
- 700 : 25 = 700 : (100 : 4) = (700 : 100) x 4 = 7 x 4 = 28sau
  700 : 25 = 700 : (100 : 4) = (700 x 4) : 100 = 2800 : 100 = 28;
- 4250: 50 = 4250 : (100 : 2) = (4250 x 2) : 100 = 8500 : 100 = 58 sau
  4200: 50 = 4200 : (100 : 2) = (4200 : 100) x 2 = 42 x 2 = 84;

c) distributivitatea împărţirii în raport cu adunarea:

4202 : 2 = (4200 + 2) : 2 = 2100 + 1 = 2101;

d) distributivitatea împărţirii în raport cu scăderea:

4198 : 2 = (4200 - 2) : 2 = 2100 – 1 = 2099.

Tema 15. Metodologia studierii legăturii dintre operaţiile aritmetice

1. ***Orientări generale***
2. ***Aplicarea legăturii dintre operaţii pentru descoperirea şi efectuarea probelor operaţiilor***
3. ***Activitatea de rezolvare a ecuaţiilor***

1. Legătura dintre cele patru operaţii aritmetice o putem sintetiza prin următoarele propoziţii:

- adunarea şi scăderea sînt operaţii inverse;
- înmulţirea şi împărţirea sînt operaţii inverse;
- înmulţirea este o adunare repetată:

  $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{\text{de b ori}} = b \times a;$
- împărţirea este o scădere repetată:

  dacă $c - \underbrace{a - a \ldots - a}_{\text{de b ori}} = 0$, atunci c : a = b şi c : b = a.

- înmulţirea şi împărţirea sînt distributive în raport cu adunarea şi scăderea:

a) $a \times (b + c) = (b + c) \times a = b \times a + c \times a;$
$a \times (b - c) = (b - c) \times a = b \times a - c \times a;$

b) $(a + b) : c = a : c + b : c;$
$(a - b) : c = a : c - b : c,$ dacă a şi *b* se împart exact la *c*.

Aceste legături se descoperă în clasele a II-III-a, fiind pregătite în clasa I, şi se utilizează în cadrul formării capacităţilor de calcul tabelar şi netabelar, la efectuarea probelor operaţiilor şi la rezolvarea de ecuaţii.

2. a) În clasa întîi, elevii formează blocuri de 4 exerciţii, două de adunare şi două de scădere, cu aceleaşi numere. De exemplu,

$3 + 2 = 5$
$2 + 3 = 5$
$5 - 3 = 2$
$5 - 2 = 3.$

Prin asemenea blocuri, copiii se familiarizează cu legătura dintre adunare şi scădere. Mişcîndu-se mintal în acest bloc: a) de sus în jos: ei observă că primul exerciţiu, adunarea, poate fi probat prin celelalte trei exerciţii; b) de jos în sus, ei observă că ultimul exerciţiu, scăderea, poate fi probat prin celelalte trei exerciţii.

În clasa a II-a se descoperă probele adunării şi scăderii.
Să exemplificăm prin adunare: 3 + 2 = 5.

- Se citesc numerele: 3 – termen, 2 – termen , 5 – suma.
- Se scriu celelalte exerciţii din bloc, citind numerele aşa ca anterior şi se obţin <u>probele adunării</u>:

2 + 3 = 5 – proba adunării în baza comutativităţii adunării:

5 – 3 = 2, 5 – 2 = 3 – proba adunării prin scădere: “Dacă din sumă se scade unul dintre termeni, se obţine celălalt termen”.

În mod analog se descoperă <u>probele scăderii</u>:

- Pentru a afla descăzutul, se adună restul cu scăzătorul;
- Pentru a afla scăzătorul, se scade restul din descăzut.

b) În clasa a II-a se începe studierea legăturii dintre înmulţire şi împărţire pornind de la un bloc analog (de exemplu: 3 x 2 = 6, 2 x 3 = 6, 6 : 3 = 2, 6 : 2 = 3) şi descoperind:

- <u>Probele înmulţirii</u> (3 x 2 = 6):
  - în baza comutativităţii înmulţirii (2 x 3 = 6);
  - prin împărţire: dacă împărţim produsul la un factor obţinem celălat factor (6 : 3 = 2, 6 : 2 = 3).
- <u>*Probele împărţirii*</u> (6 : 3 = 2):

- prin înmulţire: pentru a afla deîmpărţitul, înmulţim cîtul la împărţitor (6 = 2 x 3);
- prin împărţire: pentru a afla împărţitorul împărţim deîmpărţitul la cît (3 = 6 : 2).

În clasa a III-a blocurile descrise anterior se formalizează:

adunarea –	a + b = c	
probele adunării	b + a = c	probele scăderii
	c – a = b	
	c – b = a	– scăderea

înmulţirea	a x b = c	
	b x a = c	probele împărţirii
probele înmulţirii	c : a = b	
	c : b = a	– împărţirea

c) Distributivitatea înmulţirii în raport cu adunarea se descoperă în clasa a III-a comparînd exerciţiile de rezolvare a unei probleme prin două metode.

Problema: La tombola de la carnaval, Andrei a cîştigat 3 colecţii cu cîte 4 maşinuţe roşii şi cîte 2 maşinuţe albastre. Cîte maşinuţe a cîştigat, în total, Andrei la tombolă?

Metoda I: 3 x (4 + 2) = 3 x 6 = 18.

Metoda II: 3 x (4 + 2) = 3 x 4 + 3 x 2 = 12 + 6 = 18.

În concluzie se formulează regula: *pentru a înmulţi un număr cu o sumă, distribuim numărul la fiecare termen al sumei*.

În mod analog se descoperă distributivitatea înmulţirii în raport cu scăderea.

Pentru a descoperi distributivitatea împărţirii în raport cu adunarea se procedează analog, în baza unei probleme, ca: “La un concurs de canotaj participă 42 băieţi şi 18 fete. Dacă în fiecare barcă se aşează cîte 6 concurenţi, cîte bărci sînt necesare?”

Metoda I: (42 + 18) : 6 = 60 : 6 = 10.

Metoda II: (42 + 18) : 6 = 42 : 6 + 18 : 6 = 7 + 3 = 10.

În concluzie, se obţine regula: *dacă fiecare termen al unei sume se împarte exact la un număr, atunci putem împărţi suma la numărul dat, împărţind fiecare termen la acel număr şi adunînd cîturile* .

Se verifică prin calcul distributivitatea împărţirii în raport cu scăderea.

Este foarte important să aducem contraexemple:

80 : (8+2) = 80 : 8 + 80 : 2 = 10 + 40 = 50.

Efectuînd proba: 50 x (8 + 2) = 500, 500 $\neq$ 80, elevii vor înţelege că regula descoperită nu se poate transfera asupra împărţirii unui număr la o sumă.

3. Dinamica formării capacităţilor de rezolvare a ecuaţiilor porneşte de la ecuaţiile implicite, în care necunoscuta se înlocuieşte printr-un simbol abstractizant-intuitiv (pătrăţel liber, asterisc, semn de întrebare etc.).

Ecuaţiile implicite se abordează în baza:

- *cunoaşterii componenţei numerelor naturale 0-10.*
  3 + ? = 5; ? + 2 = 5; 5 – ? = 3; ? – 3 = 5.
- cunoaşterii tablei înmulţirii şi împărţirii:
  3 x ? = 6; ? x 3 = 6; 6 : ? = 3; ? : 3 = 6.

Următoarea etapă prevede rezolvarea ***ecuaţiilor explicite simple*** ($a \pm x = b$, $x \pm a = b$, $x \times a = b$, $a \times x = b$, $a : x = b$, $x : a = b$), în baza probelor operaţiilor. De exemplu, $x - 2 = 6$.

Avem o scădere, la care cunoaştem scăzătorul 2, restul 6 şi nu cunoaştem descăzutul *x*. Pentru a afla descăzutul *x*, adunăm restul 6 cu scăzătorul 2 :

$x = 6 + 2$.

Calculăm $x = 8$.

Verificăm 8 – 2 = 6, adevărat (A).

În continuare, în clasa a III-a ecuaţiile devin mai complexe:

a) partea dreaptă a ecuaţiei reprezintă o expresie matematică simplă, de exemplu $x \times 2 = 42 : 7$;
b) partea stîngă a ecuaţiei reprezintă o expresie matematică compusă:
- fără paranteze: $3 \times x + 15 = 75$;
- cu paranteze: $(3 + x) \times 5 = 15$.

Aceste ecuaţii se abordează prin metoda mersului invers. De exemplu:

$$(3+x) \times 5 = 15:$$

- se determină ordinea efectuării operaţiilor în expresia din partea stîngă a ecuaţiei (ultima operaţie este înmulţirea);
- se marchează componentele ultimei operaţii:

$$\underbrace{(3 + x)}_{F_1} \times \underbrace{5}_{F_2} = \underbrace{15}_{P}$$

- se stabileşte componenta necunoscută 3 + x;
- se continuă judecînd în baza probei înmulţirii:

$$\underbrace{(3 + x)}_{F_1} = \underbrace{15}_{P} : \underbrace{5}_{F_2}$$

Astfel s-a reuşit diminuarea gradului de dificultate a ecuaţiei.

Tema 16. Metodologia studierii ordinii efectuării operaţiilor

1. ***Orientări generale***
2. ***Ordinea efectuării operaţiilor în exerciţii fără paranteze***
3. ***Ordinea efectuării operaţiilor în exerciţii cu paranteze***

1. Ordinea efectuării operaţiilor se cercetează începînd cu clasa a III-a. În clasele I-II, exerciţiile şi problemele se alcătuiesc în aşa mod, încît să nu se ridice întrebări legate de ordinea efectuării operaţiilor.

Procedeul cercetării se bazează pe rezolvarea cu plan a problemelor cu două operaţii şi observarea ordinii efectuării operaţiilor.

Mai întîi se abordează exerciţiile care nu conţin paranteze, apoi exerciţiile cu paranteze. Pentru înţelegerea temei, este foarte eficientă metoda contraexemplului, cînd elevilor li se propune să corecteze greşelile în exerciţii rezolvate incorect. De exemplu: 4 + 3 x 5 = 7 x 5 = 35.

În clasa a IV-a se abordează exerciţiile în care apar mai multe paranteze, efectuînd mai întîi operaţiile din parantezele rotunde ( ), apoi din cele drepte [ ], apoi din cele figurative { }.

2. Se abordează probleme ce necesită efectuarea operaţiilor de grad diferit (înmulţirea/împărţirea şi adunarea/scăderea), de exemplu: "Adriana avea 5 creioane. Ea mai primeşte încă 3 cutii cu cîte 6 creioane. Cîte creioane are, în total, Adriana?"

- Se rezolvă problema cu plan, efectuînd mai întîi înmulţirea 3 x 6 = 18, apoi adunarea 5 + 18 = 23.
- Se sintetizează rezolvarea printr-un exerciţiu: 5 + 3 x 6 = 23.
- Se observă că, mai întîi s-a efectuat înmulţirea, apoi adunarea.

Exerciţiile în care apar operaţii de acelaşi grad (înmulţirea şi împărţirea sau adunarea şi scăderea) se abordează prin observare şi analiză, de exemplu:

48 : 8 x 3 = 6 x 3 = 18

25 + 15 – 30 = 40 – 30 = 10.

În concluzie, se formulează regulile:

- *într-un exerciţiu fără paranteze efectuăm mai întîi înmulţirea şi împărţirea, apoi adunarea şi scăderea;*
- *într-un exerciţiu fără paranteze, în care apar numai adunări şi scăderi sau numai înmulţiri şi împărţiri, efectuăm operaţiile în ordinea în care sînt scrise.*

3. Exerciţiile cu paranteze se abordează analog prin probleme, de exemplu: "Victor are 24 de creioane, 6 simple şi restul colorate. Creioanele colorate sînt aranjate în mod egal în 3 cutii. Cîte creioane colorate sînt în fiecare cutie?"

Se rezolvă problema cu plan, efectuînd mai întîi scăderea
26 – 6 = 18, apoi împărţirea 18 : 3 = 6. Se sintetizează rezolvarea printr-un exerciţiu (24 – 6) : 3 = 6, observînd că, mai întîi, s-a efectuat operaţia dintre paranteze.

Este important contraexemplul: "Tic a uitat să scrie paranteze şi a obţinut exerciţiul 24 – 6 : 3. Ce răspuns a primit Tic? Oare rezolvarea lui este corectă?"

În concluzie se formulează regula: *în exerciţiile cu paranteze efectuăm mai întîi operaţia din paranteze.*

Tema 17. Metodologia studierii mărimilor şi unităţilor de măsură

1. ***Prevederi curriculare***
2. ***Cerinţe metodologice generale***
3. ***Transformări ale unităţilor de măsură***
4. ***Probleme de comparaţie***

1. Studiul mărimilor şi a unităţilor de măsură în şcoala primară urmăreşte ca, pe baza observărilor şi reprezentărilor intuitive, elevii să ia cunoştinţă cu unele mărimi şi unităţi de măsură uzuale, necesare omului. De asemenea, se urmăreşte formarea deprinderii de măsurare, de utilizare a unor instrumente de măsură, formarea capacităţii de a estima unele măsuri, precum şi a înţelege necesitatea adoptării unităţilor standard de măsură.

Cunoaşterea unităţilor de măsură şi formarea capacităţilor de utilizare a acestora dezvoltă la elevi rigurozitatea raţionamentului, precizia şi exactitatea. Operaţiile cu unităţile de măsură şi transformările lor duc simultan la dezvoltarea gîndirii active şi operaţionale.

Conţinuturile învăţării la tema "Măsuri şi măsurări" prevăzute currciular sînt:

- *lungimea*: unitatea standard metrul (*m*); submultiplii milimetrul (*mm*), centimetrul (*cm*), decimetru (*dm*); multiplii decametru (*dam*), hectometru (*hm*), kilometru (*km*);
- *capacitatea*: unitatea standard litru (*l*); submultiplii *ml, cl, dl*; multiplii *dal, hl, kl*;

- *masa*: unitatea standard: kilogramul (kg); submultiplii *mg, cg, dg, g, dag, hg*; multiplii qintalul (*q*), tona (*t*);
- *timpul*: unitatea de măsură standard secunda (*s*); multiplii ora (h), ziua, săptămîna, luna, anul, deceniul, secolul, mileniul.

Se învaţă unităţile monetare, folosite pentru măsurarea valorii obiectelor în ţara noastră: *leul* şi *banul*; formele de circulaţie a acestora: *bancnotele* şi *monedele*. În legătură cu acestea se formează noţiunile de:

- *cost*: exprimă valoarea mărfii;
- *preţ*: arată costul unei unităţi de marfă.

În clasa a III-a se cercetează relaţia dintre *cantitatea* unităţilor de marfă, *preţul* şi *costul* mărfii: *cantitatea* x *preţul* = *costul*. Această dependenţă se antrenează în rezolvarea problemelor cu mărimi proporţionale.

Mărimile *perimetru* al poligonului şi *arie* a suprafeţei unei figuri geometrice se studiază în legătură cu elementele de geometrie şi se prevăd pentru clasa a IV-a. Aceste mărimi sînt derivate ale lungimii.

Instrumentele folosite pentru măsurarea:

- lungimilor: rigla, ruleta, metrul croitorului;
- capacităţilor: cana de 1 *l*, păharul;
- masei: cîntarul cu arc, balanţa, cîntarul electronic etc.;
- timpului: ceasul mecanic şi electronic, calendarul.

2. *A măsura o mărime înseamnă a compara această mărime cu o alta, luată ca unitate de măsură.* Măsurarea este un proces mai complicat decît numărarea, numărarea fiind o componentă a procesului de măsurare. Încă din preşcolaritate, copiii îşi formează capacităţi de măsurare a unei mărimi cu unităţi nestandarde. Observînd, că dacă se măsoară aceeaşi mărime cu diferite unităţi se obţin rezultate diferite, elevii ajung să înţeleagă *necesitatea introducerii măsurilor standard*. Este foarte important să se dea cîteva date istorice legate de măsurări în ţara noastră şi în alte ţări, din care să se vadă că în procesul intensificării schimbărilor economice şi ştiinţifice a rezultat necesitatea unificării unităţilor de măsură.

Sub aspect metodologic, predarea-învăţarea mărimilor şi măsurărilor se bazează pe o practică activă în clasă şi în afara ei. Se impune o conştientizare a legăturii dintre factorii care trebuie luaţi în considerare:

- compararea măsurilor aceeiaşi mărimi;
- tehnica de măsurare;
- necesitatea unei unităţi standard;

- necesitatea unei medii a înregistrărilor rezultatelor măsurării.

3. Transformările unităţilor de măsură se învaţă conform dinamicii:

a) transformări simple (ale unităţilor de măsură aflate în raport 1 : 10 sau 10 : 1):

70 dam = ? m	70 dm = = m
1 dam = 1 m x 10 70 dam = 70 m x 10 = 700 m	1 dm = 1 m : 10 70 dm = 70 m : 10 = 7 m

b) transformări compuse, care se reduc la o succesiune de transformări simple:

70 km = ? m	700 cm = ? m
1 km = 1 m x 1000 70 km = 70 m x 1000 = 70000 m	1 cm = 1 m : 100 700 cm = 700 m : 10 = 7 m

Progresiv se vor detaşa (în cl.III) regulile: *pentru a transforma în unităţi de măsură mai mici (mai mari), efectuăm înmulţirea (împărţirea).*

4. În legătură cu compartimentul "Unităţi de măsură", în clasa a III-a se introduc problemele de comparaţie, rezolvabile prin metoda eliminării unei mărimi prin reducere.

Exemplu: "La un magazin s-au adus 2 saci cu făină şi 6 saci cu orez, în total 580 kg. La un alt magazin s-au adus 2 saci cu făină şi 4 saci cu orez, cîntărind la un loc 440 kg. Cît cîntăreşte un sac cu făină ? Dar un sac cu orez ?"

Este importantă organizarea enunţului în schemă:

	Făină	*Orez*	*Masa totală*
I m.	2 s.	6 s.	580 kg
II m.	2 s.	4 s.	440 kg

Pasul 1: Se scad rîndurile termen cu termen.

Pasul 2: Se află masa unui sac cu orez (reducerea la unitate).

Pasul 3: Se înlocuieşte masa aflată a unui sac cu orez în una dintre relaţiile din schema problemei.

Pasul 4: Se află masa a 2 saci cu făină.

Pasul 5: Se află masa unui sac cu făină (reducerea la unitate).

Pasul 6: Se verifică răspunsul înlocuind măsurile aflate în ambele relaţii etalate în schema problemei.

Treptat, se introduc probleme care necesită egalarea datelor prin amplificarea sau simplificarea relaţiilor intre datele problemei.

Exemplu:

12 urcioare	10 bidoane	106 lei
15 urcioare	25 bidoane	220 lei

Se observă că fiecare termen din primul rînd poate fi împărţit la 2, iar fiecare termen din rîndul al doilea – la 5. Astfel, se egalează datele din coloana a doua şi putem reduce o mărime (capacitatea bidonului).

Problemele de comparaţie (de eliminare a unei mărimi prin reducere) constituie o bază pentru formarea ulterioară a capacităţilor de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare. Scrierea rezolvării acestor probleme cu plan sau cu justificări pune elevii în situaţia de a aborda conştient şi a argumenta operaţiile cu unităţile de măsură. Se atenţionează la scrierea unităţilor de măsură în exerciţii, ceea ce consolidează sensul operaţiilor aritmetice. De exemplu: 3 m + 2 m = 5 m; 2 x 4 lei = 8 lei;
9 lei : 3 = 3 lei, 9 kg : 3 kg = 3 (ori).

Tema 18. Metodologia predării-învăţării fracţiilor în clasa a IV-a

1. ***Introducerea noţiunii de fracţie***
2. ***Compararea fracţiilor***
3. ***Operaţii cu fracţii***
4. ***Probleme cu fracţii***

1. Noţiunea de fracţie se introduce în clasa a IV-a, după ce în clasa a II-a, în cadrul studierii operaţiei de împărţire, s-au format şi ulterior au fost dezvoltate reprezentările despre unitatea fracţionară (jumătate, a doua parte; treime, a treia parte; sfert etc.). Elevii ajung să înţeleagă faptul că:

- pentru a afla a *n*-a parte dintr-un număr, se împarte acel număr la *n*;
- a *n*-a parte dintr-un număr este de *n* ori mai mică decît acel număr.

În clasa a IV-a aceste reprezentări se generalizează, conducînd progresiv elevii la înţelegerea noţiunii de fracţie. În acest scop se va folosi un material intuitiv bogat şi sugestiv, se vor utiliza metode didactice care vor activiza conduita intelectuală a elevilor. Procesul introducerii noţiunii de fracţie urmează dinamica:

1) ***o fază acţională*** în care:

- întregul se concretizează printr-un obiect real (măr, foaie de hîrtie), iar operaţia de fracţionare a întregului este, de asemenea, concretă (tăierea mărului, decuparea sau plierea foii de hîrtie în părţi egale);
- întregul se concretizează printr-o mulţime de obiecte concrete (de exemplu, cuburi), iar operaţia de fracţionare a întregului constă în

clasificarea mulţimii în submulţimi echivalente (formarea de stîlpuşoare din acelaşi număr de cuburi);

2) ***o fază semiabstractă*** (a reprezentărilor), în care:

- întregul se reprezintă prin figuri geometrice (segment, dreptunghi etc.), iar operaţia de fracţionare a întregului se reprezintă prin trasare de linii care împart figura în părţi egale şi haşurarea sau colorarea părţilor luate în considerare;
- întregul se reprezintă printr-o mulţime de figuri geometrice, iar operaţia de fracţionare a întregului se reprezintă prin încercuirea submulţimilor echivalente în care se clasifică mulţimea de figuri;

3) o fază abstractă, în care întregul constituie un număr natural, iar operaţia de fracţionare a întregului se înţelege ca împărţirea acelui număr în părţi egale.

De fiecare dată se atenţionează elevii la:

- *numărul de părţi egale în care a fost împărţit întregul: numitorul fracţiei;*
- *numărul de părţi egale luate în considerare în fracţie: numărătorul fracţiei.*

<u>Definiţie:</u> m părţi luate din întregul împărţit în n părţi egale se numeşte fracţie $\frac{m}{n}$, m şi n sînt numere naturale, n diferit de 0.

Pentru a compara fracţiile este necesar să se descopere, mai întîi, <u>proprietatea fundamentală</u>: *Mărimea fracţiei depinde de mărimea întregului*. Această descoperire se organizează în baza unui demers logico-euristic inductiv, comparînd mărimea unei şi aceleiaşi fracţii luate din doi întregi de mărimi diferite. De exemplu, se observă că jumătatea unui măr mare constituie mai mult decît jumătatea unui măr mic.

Cunoscînd şi înţelegînd această proprietate, în continuare, pentru a compara două fracţii, acestea se vor cerceta în baza întregilor de aceeaşi mărime.

Compararea fracţiilor se desfăşoară conform următoarei dinamici:

a) introducerea noţiunii de fracţii egale (echivalente);
b) compararea fracţiilor cu întregul;
c) compararea fracţiilor cu acelaşi numitor şi a fracţiilor cu acelaşi numărător.

a) Intuitiv, se formează reprezentarea despre fracţii egale, apoi se formulează definiţia: *două sau mai multe fracţii se numesc egale dacă fiecare reprezintă aceeaşi parte din întreg*. Se antrenează capacitatea de a obţine fracţii egale înmulţind/împărţind numitorul şi numărătorul unei fracţii la acelaşi număr (amplificarea/simplificarea fracţiilor), înţelegînd că se pot obţine o infinitate de fracţii egale cu cea dată.

b) Revenind asupra faptului că un întreg poate fi exprimat printr-o fracţie în care numitorul este egal cu numărătorul, se defineşte *fracţia echiunitară* ca orice fracţie egală cu un întreg. Apoi se introduc noţiunile de *fracţie subunitară* (numărătorul este mai mic decît numitorul) şi *fracţie supraunitară* (numărătorul este mai mare decît numitorul). Se antrenează reprezentarea prin desen a fracţiilor echiunitare şi supraunitare analog reprezentării anterioare a fracţiilor subunitare.

Copiii sînt dirijaţi spre observarea faptului că:
- orice fracţie subunitară este mai mică decît un întreg;
- orice fracţie supraunitară este mai mare decît un întreg;
- orice fracţie subunitară este mai mică decît orice fracţie echiunitară sau supraunitară.

c) În baza reprezentărilor acţionale şi iconice, elevii ajung la concluzia că:
- dintre două fracţii cu acelaşi numitor este mai mare fracţia care are numărătorul mai mare;
- dintre două fracţii cu acelaşi numărător, este mai mare fracţia care are numitorul mai mic.

Elevii sînt antrenaţi în exerciţii de ordonare crescătoare şi descrescătoare a şirurilor de fracţii care au acelaşi numitor sau acelaşi numărător. Ordonarea şirurilor de fracţii cu acelaşi numitor este mai dificilă pentru copii, deoarece ea se face în sens invers ordonării numărătorilor.

3. În clasa a IV-a se studiază adunarea şi scăderea fracţiilor cu acelaşi numitor. Introducerea acestor operaţii necesită un suport intuitiv pe acelaşi întreg. În baza descoperirii inductive, elevii vor fi conduşi progresiv spre descoperirea regulilor:
- la adunarea/scăderea a două fracţii cu acelaşi numitor se obţine o fracţie cu numărătorul egal cu suma/diferenţa numărătorilor fracţiilor date, iar numitorul egal cu cel a fracţiilor date.

4. Problemele cu fracţii abordate în clasa a IV-a:

a) aflarea unei fracţii dintr-un întreg;
b) aflarea întregului după o parte a sa;
c) probleme din rest în rest.

Probleme de tipul a) se rezolvă prin împărţire, iar cele de tipul b) – prin înmulţire, însă enunţurile lor se aseamănă. Din acest motiv, elevii tind să le confunde şi să ghicească operaţia de rezolvare, dar să nu o aleagă conştient. Pentru a preveni această situaţie, problemele de tipurile a) şi b) se introduc prin confruntare, concomitent, cerînd elevilor să justifice de fiecare dată alegerea operaţiei.

Exemple:

a) $\frac{3}{8}$ din 24 elevi ai clasei sînt băieţi. Cîţi băieţi învaţă în acea clasă ?

Rezolvare: 24 : 8 x 3 = 9 (băieţi).

b) $\frac{3}{8}$ din elevii clasei sînt băieţi. Cîţi elevi învaţă în acea clasă, dacă băieţi sînt 9 ?

Rezolvare: $\frac{3}{8}$ din $x = 9$

$x = 9 : 3 \times 8$

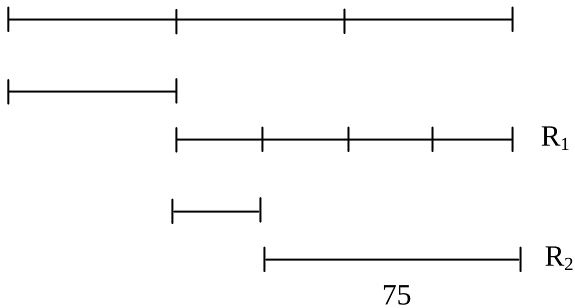
$x = 24$

Verificare: $\frac{3}{8}$ din 24 = 24 : 8 x 3 = 9 (A)

Problemele din rest în rest se rezolvă prin metoda mersului invers şi se bazează pe tipurile a) şi b).

Exemplu: Să se determine un număr natural, dacă scăzînd o treime din el, apoi un sfert din rest se obţine 75.

Este foarte importantă organizarea enunţului într-o schemă figurativă:



Rezolvare:

1) 75 : 3 x 4 = 100 – R_1;
2) 100 : 2 x 3 = 150 – numărul căutat.

Tema 19. Metodologia predării-învăţării elementelor de geometrie

1. Prevederi curriculare

2. ***Cerinţe metodologice generale***
3. ***Metode şi procedee de formare a raţionamentului specific geometric la elevii de vîrstă şcolară mică***

1. Predarea-învăţarea elementelor de geometrie în şcoala primară are drept obiectiv major dezvoltarea reprezentărilor spaţiale la copil, necesare pentru însuşirea ulterioară a cursului sistematic de geometrie, deci, asigurarea unei baze reale şi trainice pentru dezvoltarea raţionamentului despre fenomenele spaţiale ale materiei.

Geometria comportă pentru şcolarul de vîrstă mică valenţe educaţionale pronunţate, contribuind la:
- dezvoltarea spiritului de observaţie;
- rafinarea operaţiilor de analiză şi sinteză în baza descoperirii legăturilor dintre proprietăţile figurilor şi detaşarea treptată a relaţiilor speciale în structura figurilor;
- formarea unei conduite rezolutive vizînd construcţia unor noi căi de rezolvare a problemelor sau de verificare a adevărurilor geometrice;
- adăugarea unor elemente care pregătesc formarea concepţiei ştiinţifice despre lume (de exemplu, faptul că şcolarul începe să gîndească spaţiul înconjurător ca nesfîrşit şi înţelege că spaţiul poate fi cercetat pe zone oricît de mici).

Obiectivele generale predării-învăţării geometriei în clasele primare pot fi sintetizate ca:
- ***dobîndirea de cunoştinţe ştiinţifice***: formele anumitor obiecte ale lumii reale, mărimi şi diverse proprietăţi ale acestora, poziţiile relative dintre obiete şi diverse relaţii de mărime dintre aceste obiecte sau dintre elemente ale aceluiaşi obiect;
- ***dezvoltarea capacităţii de a aplica cunoştinţele de geometrie:*** prin rezolvarea de probleme cu conţinut geometric şi soluţionarea unor situaţii-problemă variate din cotidian sau alte discipline;
- ***dezvoltarea raţionamentului specific geometric şi a motivaţiei favorabile acestuia:*** se urmăreşte dezvoltarea rigurozităţii raţionamentului, bazat pe strategii de tip structural-spaţial, concomitent cu educarea unor trăsături psihice pozitive (motivaţie şi interes, gust estetic etc.).

Conţinuturile predării-învăţării elementelor de geometrie în clasele primare prevăd următoarele noţiuni:
- ***forme plane***: punct, linie dreaptă, linie curbă, linie frîntă, segment, semidreapta, unghi, poligon, triunghi, pătrat, dreptunghi, romb, trapez, paralelogram , cerc;

- ***forme spaţiale***: sferă, cub, prismă, cilindru, con, piramidă;
- ***poziţii ale dreptelor pe plan***: oblic, vertical, orizontal;
- ***poziţii reciproce ale dreptelor pe plan***: paralele, concurente, perpendiculare;
- ***unghiuri***: ascuţite, drepte, obtuze.

Problemele cu conţinut geometric pot urmări:

- construcţia (desenul) figurilor geometrice sau modelarea corpurilor geometrice;
- aflarea perimetrului unui poligon sau/şi a ariei suprafeţei unei figuri geometrice;
- aprecierea valorii de adevăr a unei propoziţii referitoare la noţiuni geometrice.

2. **Cerinţele metodice generale** în predarea-învăţarea elementelor de geometrie în şcoala primară pot fi sintetizate ca:

- învăţarea noţiunilor geometrice prin procese intuitive şi formarea lor iniţială pe calea inductivă;
- respectarea rigurozităţii geometriei în condiţiile accesibilităţii vîrstei elevilor;
- asigurarea funcţionalităţii cunoştinţelor geometrice.

Aceste cerinţe metodice sugerează următoarea **dinamică a formării conceptelor geometrice**:

- intuirea obiectelor care evidenţiază materializat noţiunea, cu dirijarea atenţiei elevilor către observarea proprietăţilor esenţiale ale acesteia;
- evidenţierea proprietăţilor caracteristice noţiunii respective;
- transferul cunoştinţelor dobîndite pe un material didactic care reprezintă iconic noţiunea;
- reprezentarea prin desen a noţiunii, indicînd elementele stabilite prin observarea directă, făcînd notaţii şi evidenţiind din nou proprietăţile caracteristice;
- formularea unei definiţii sau descrieri explicative (în funcţie de accesibilitatea vîrstei elevilor) şi a propoziţiilor care exprimă proprietăţile caracteristice (intră în conţinutul noţiunii) într-un limbaj specific geometric;
- identificarea figurii în alte situaţii din mediul înconjurător;
- construirea materializată a noţiunii (folosind carton, hîrtie etc.);
- clasificarea formelor geometrice care fac parte din volumul noţiunii;
- utilizarea noţiunii în rezolvarea problemelor specifice şi transferul acesteia în situaţii geometrice noi.

Reuşita în atingerea obiectivelor predării-învăţării geometriei în şcoala primară depinde de un complex de factori, printre care **metodele didactice** au un rol predominant. Cuplul de metode care trebuie să deţină cea mai mare pondere este *problematizarea* şi *învăţarea prin descoperire*, prin care elevii sînt conduşi spre descoperirea unor adevăruri geometrice necunoscute lor prin eforturi proprii. Astfel, vom contribui în mare măsură la dezvoltarea spiritului de investigare, a imaginaţiei şi creativităţii elevilor.

3. Unul din procedee principale care urmăreşte formarea raţionamentului specific geometric este *contraexemplul*: acesta reprezintă un germene al demonstraţiei de la absurd cu care elevii vor fi familiarizaţi în clasele gimnaziale.

De exemplu, se cere să se aprecieze valoarea de adevăr a propoziţiei: “Poligonul care are laturile opuse paralele între ele este un paralelogram”. Schiţarea unui contraexemplu, a unui hexagon regulat, conduce elevii la următorul raţionament:

-  este un poligon şi are laturile paralele două cîte două.

- însă  nu este un paralelogram, deoarece are 6, dar nu 4 laturi.

- deci, propoziţia dată este falsă.

Se evidenţiază eroarea (comisă intenţionat de învăţător) în formularea propoziţiei. Se corectează propoziţia: “patrulaterul care are laturile opuse paralele două cîte două este un paralelogram”. Propoziţia corectă se ilustrează prin exemple, desenînd toate formele paralelogramului (incluzînd dreptunghiul, pătratul, rombul).

Asemenea, activităţi (cl.IV) se organizează în scopul rafinării raţionamentului specific geometric şi al educaţiei rigurozităţii în utilizarea limbajului aferent. Greşelile comise intenţionat în formularea propoziţiilor pot viza genul proxim al noţiunii (a vedea în exemplu de mai sus) sau diferenţa ei de specie, de exemplu: “Patrulaterul care are 2 laturi paralele este un paralelogram” (aici drept contraexemplu serveşte trapezul).

O altă activitate vizează cerinţa ca o propoziţie geometrică riguroasă să conţină strictul necesar de informaţie, elevii avînd tendinţa sa sporească conţinutul informaţional în detrimentul stricteţii logice şi geometrice. De exemplu (cl.IV), se pune în discuţie “definiţia” eronată a patrulaterului: “Paralelogramul cu *toate* laturile de lungimi egale se numeşte pătrat". În cadrul cercetării, elevii vor fi dirijaţi să înţeleagă faptul că este suficient să stipulăm egalitatea lungimilor a două laturi consecutive (celelalte două vor avea aceeaşi lungime, deoarece laturile opuse ale unui paralelogram sînt de lungimi egale).

Un alt context didactic oportun rafinării raţionamentului specific geometric îl constituie ***problemele de construcţie***, în care fiecare pas trebuie argumentat prin formularea unui adevăr geometric.

De exemplu, se cere să se construiască un romb cu diagonalele de 4 cm şi 6 cm (cl.IV).

Pasul 1. Construim un segment *AC* = 4 cm.

Pasul 2. Ştim că diagonalele rombului sînt concurente şi se împart în punctul de intersecţie în jumătate. De aceea, împărţim segmentul AC în jumătate şi obţinem punctul *O*.

Pasul 3. Ştim că diagonalele rombului sînt reciproc perpendiculare, de aceea trasăm prin punctul *O* o dreaptă BD perpendiculară pe *AC*.

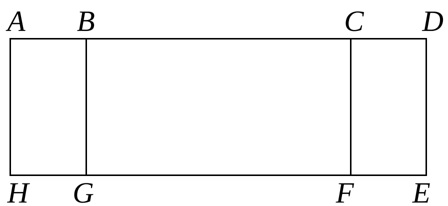
Pasul 4. Ştim că punctul *O* reprezintă mijlocul diagonalei *BC*, de aceea depunem pe dreapta *BD* două segmente

$$OB = OD = 6 \text{ cm} : 2 = 3 \text{ cm}.$$

Pasul 5. Unim prin segmente consecutive punctele *A*, *B*, *C* şi *D*.

Problemele de identificare a figurilor şi corpurilor geometrice obligă, de asemenea efectuarea unui raţionament geometric riguros.

De exemplu, se cere de a determina numărul de dreptunghiuri în figura (cl.II-IV):



Pentru a găsi toate dreptunghiurile, 6 la număr, (*ABGH*, *ACFH*, *BCFG*, *CDEF*, *BDEG*, *ADEH*) elevul trebuie să-şi activizeze spiritul de observaţie şi cunoştinţele geometrice aferente.

Tema 20. Metodologia predării-învăţării perimetrului poligonului şi ariei suprafeţei

1. ***Formarea noţiunii de perimetru al poligonului***
2. ***Formarea noţiunii de arie a suprafeţei***
3. ***Descoperirea formulelor pentru aria pătratului şi aria dreptunghiului***

1. Noţiunea de ***perimetru*** ca ***suma lungimilor laturilor unui poligon*** se prevede a fi introdusă în clasa a IV-a. Elevii sînt dirijaţi pe o cale inductivă, bazîndu-se pe o intuiţie activă, către descoperirea formulelor pentru perimetrul pătratului şi al dreptunghiului.

$P_{\square} = a + a + a + a = 4 \text{ x } a$

$P_{\square} = l + L + l + L = 2 \text{ x } l + 2 \text{ x } L = 2 \text{ x } (l + L)$.

2. Învăţarea-formarea noţiunii de arie urmează dinamica:

- *formarea reprezentărilor despre suprafaţă*: prin observarea şi cercetarea (activizînd simţul tactil) corpurilor din mediul înconjurător. Detaşînd, progresiv, suprafeţele plane şi cele curbe, elevii vor fi conduşi spre înţelegerea suprafeţei ca ceea ce desparte un corp de mediul înconjurător;
- *compararea prin suprapunere a două figuri plane (congruente) identice,* care se deosebesc prin proprietăţi neesenţiale (formă, culoare, material); elevii vor fi dirijaţi spere înţelegerea propoziţiei "spunem că figurile care coincid la suprapunere, au aceeaşi arie";
- *compararea prin suprapunere a două figuri de aceeaşi formă (omotetice),* dar de mărimi evident inegale, concluzionînd: "chiar dacă figurile au aceeaşi formă, ele pot delimita suprafeţe de arii diferite";
- *compararea prin suprapunere a două figuri geometrice de forme diferite* alese astfel, încît să delimiteze suprafeţe cu aceeaşi arie; de exemplu, un pătrat cu latura 4 cm şi un dreptunghi cu l = 2 cm, iar L = 8 cm. Elevii sînt chemaţi să încerce a demonstra că aceste figuri delimitează suprafeţe la fel de mari, indiferent de faptul că au forme diferite. Se decupează din dreptunghiul dat un dreptunghi mai mic cu l = 2 cm şi L = 4 cm şi se demonstrează că, acum, figurile pot fi făcute să coincidă prin suprapunere. Deci, într-adevăr, figurile date delimitează suprafeţe de aceeaşi arie.
- *compararea prin suprapunere a figurilor de formă diferită,* care delimitează suprafeţe de mărimi inegale, dirijînd elevii spre înţelegerea faptului că dacă figurile au forme diferite, ele pot delimita suprafeţe de arii diferite
- Aceste activităţi vor conduce elevii la înţelegerea faptului că suprapunerea nu oferă informaţii suficiente pentru determinarea ariei suprafeţei. Astfel, se va contura necesitatea unui procedeu care să permită soluţionarea unor asemenea situaţii. Cum elevii au confruntat o situaţie analogică la noţiunea de lungime a segmentului, vor stabili cu uşurinţă că metoda potrivită este măsurarea. În lumina acestei idei,

necesitatea stabilirii unei unităţi de măsură pentru arii devine un imperativ.

- Treptat, elevii vor fi conduşi spre a deprinde tehnica de măsurare a ariei, acoperind suprafaţa figurii date cu diverse figuri geometrice de aceeaşi mărime (triunghiuri echilaterale, hexagoane regulate, dreptunghiuri, pătrate etc.). Se va înţelege, că a măsura aria suprafeţei unei figuri înseamnă a stabili cîte unităţi de măsură a ariei încap în suprafaţa dată.
- Se prezintă unitatea standard pentru măsurarea ariilor: pătratul cu latura de 1 m, confecţionat din carton, hîrtie etc. Elevii vor intui vizual şi tactil-motric această figură materializată, familiarizîndu-se şi cu notaţia 1 m^2.
- Se prezintă submultiplii 1 dm^2 şi 1 cm^2, descoperind pron procese intuitive, pe o cale inductivă, relaţiile

  1 m^2 = 100 dm^2, 1 dm^2 = 100 cm^2, 1 m^2 = 10 000 cm^2.
- Antrenarea tehnicii de măsurare a ariilor folosind un pătrat materializat din carton sau utilizînd reţeaua de pătrăţele din caiet.
- Se introduc multiplii 1 ar = 100 m^2, 1 ha = 100 ari = 10 000 m^2. Elevii sînt antrenaţi în transformări ale unităţilor de măsură a ariilor.

3. a) Pentru a descoperi formula pentru aria dreptunghiului ne vom baza pe o intuiţie activă şi vom organiza o strategie inductivă. Materiale didactice necesare: cîte un pătrat cu aria 1 cm^2 şi cîte un set din 3 dreptunghiuri, toate avînd lungimea de 6 cm, iar lăţimile, respectiv, 1 cm, 2 cm şi 3 cm.

- Elevii depun pe primul dreptunghi cele 6 pătrate mici, fiecare cu aria 1 cm^2 şi determină aria suprafeţei acestuia, 6 cm^2.
- Se manipulează dreptunghiul cu aria de 6 cm^2 şi se stabileşte în aria celui de al doilea dreptunghi 2 x 6 cm^2 = 12 cm^2. Amintind dimensiunile dreptunghiului, se observă că 2 x 6 cm^2 = l x L.
- Se continuă în mod analog, găsind aria celui mai mare dreptunghi: 3 x 6 cm^2 = 18 cm^2. Se observă, că 3 x 6 cm^2 = l x L. Astfel, elevii sînt conduşi pe o cale inductivă, în baza intuiţiei active, către formularea concluziei: *aria unui dreptunghi cu dimensiunile l şi* L*, măsurate cu aceeaşi unitate de măsură, se calculează prin formula l* x L.

b) Aria pătratului se va stabili printr-o strategie deductivă.

- Ştim că pătratul este un dreptunghi la care lungimea este egală cu lăţimea $l = L = a$.
- Substituim a în formula pentru aria dreptunghiului. Obţinem formula pentru aria pătratului: $A_{\square} = a \times a$.

c) Pentru a consolida înţelegerea importanţei formulelor de calcul a ariilor, precum şi pentru stimularea imaginaţiei geometrice este indicat să fie abordate anumite situaţii-problemă cerute sau puse de calculul ariilor unor figuri exprimate grafic. În rezolvare se vor implica compuneri sau descompuneri bazate pe dreptunghiuri, astfel, încît să se poată calcula dimensiunile dreptunghiurilor care apar şi, de aici, aria figurii date în problemă.

Tema 21. Metodologia activităţii de rezolvare a problemelor simple

1. Introducerea problemelor simple la elevii claselor I
2. Clasificarea problemelor simple
2.1. Matricea problemelor simple de adunare şi de scădere
2.2. Matricea problemelor simple de înmulţire şi de împărţire
3. Greşeli tipice în rezolvarea problemelor simple. Metode şi procedee pentru prevenirea şi combaterea acestora

1. Etimologiă cuvîntului *problemă* (din limba greacă veche) pro-balleim - peste barieră.

Definiţie: *Problema de matematică reprezintă transpunerea unei situaţii practice (sau a unui complex de situaţii practice) în relaţii cantitative, în care se cere determinarea unor valori necunoscute în baza unor valori cunoscute şi a unor relaţii date între acestea.*

Pentru a-i face pe copii să conştientizeze încă din clasa I necesitatea rezolvării de probleme, este necesar ca micii şcolari să înţeleagă faptul că, în cotidian, întîlnim frecvent situaţii care impun găsirea de răspunsuri la diverse întrebări.

În această perioadă de început, primele probleme simple se introduc sub formă de joc, au un caracter acţional sînt bazate pe un material ilustrativ bogat şi variat. În faza incipientă, activitatea rezolutivă este foarte aproape de cea de calcul, avînd drept unul dintre obiective formarea capacităţii de transpunere a acţiunilor concrete în relaţii matematice. Elevii se familiarizează cu terminologia aferentă: problemă, condiţie, întrebare, rezolvare, răspuns.

Activitatea de rezolvare a problemelor simple parcurge itinerariul metodologic: probleme acţionale, probleme ilustrate prin simboluri abstractizant-intuitive, probleme schematizate logic şi rezolvate fără suport intuitiv.

2.1. Matricea problemelor simple de adunare şi scădere (vezi anexa 1)

2.2. Matricea problemelor simple de înmulţire şi împărţire (vezi anexa 2)

3. În general, problemele simple sînt uşor înţelese şi rezolvate de către copii. Totuşi, există dificultăţi, cele mai frecvente fiind de tipul:

- neglijarea întrebării;
- includerea răspunsului în enunţ;
- neglijarea unei date;
- alegerea greşită a operaţiei de rezolvare;
- schematizarea greşită, deci, înţelegerea eronată a structurii logice a problemei;
- scrierea greşită a unităţilor de măsură în exerciţiul de rezolvare;
- formularea greşită a răspunsului etc.

Pentru depăşirea acestora se recomandă:

- rezolvarea unui număr suficient de probleme, structurate metodologic corect într-un sistem optim;
- abordarea unei varietăţi mari de tematici pentru enunţuri;
- analiza temeinică a fiecărei probleme;
- activităţi de compunere a problemelor: modificarea întrebării sau a condiţiei, completarea enunţului cu date plauzibile, alcătuirea de probleme după desen, schemă, dialog etc.

Pentru a evita greşeli în schematizarea logică a enunţului problemei simple, cel mai important este a descoperi corect cuvintele-cheie ale problemei. Acestea nu întotdeauna sînt evidente şi pentru a le descoperi se recomandă a repovesti problema, aranjînd succesiv în timp evenimentele descrise în enunţ.

De exemplu: *Ce rest primeşte Ionel din 10 lei, cumpărînd un pix de 3 lei?*

Repovestim problema, punîndu-ne în locul lui Ionel şi aranjînd evenimentele succesiv în timp: “Ionel s-a pornit la cumpărături. El *avea* 10 lei. Cumpărînd un pix, el *a cheltuit* 3 lei. Cîţi lei *i-au rămas* lui Ionel?”

Obţinem schema:

Avea – 10 lei
A cheltuit – 3 lei
I-au rămas – ? lei

Rezolvarea problemei se face scriind unităţile monetare în exerciţiu: 10 lei – 3 lei = 7 lei, dar nu 10 – 3 = 7 (lei). Această scriere corectă contribuie la conştientizarea operaţiilor cu numere concrete.

O altă greşeală frecventă este confundarea problemelor de aflare a unui termen necunoscut cu problemele de aflare a scăzătorului.

De exemplu: *Într-un buchet sînt 5 flori roşii şi galbene. Cîte flori roşii sînt în buchet, dacă galbene sînt 2 ?* (tipul: de aflare a unui termen necunoscut).

Schema logică a acestei probleme este:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Roşii} \quad - \ ?\ \text{f.}\\ \text{Galbene} - 2\ \text{f.}\end{array}\right\}\ 5\ \text{f.}$$

Frecvent, putem întîlni o schematizare eronată:

Erau – 5 f.
Roşii - ? f.
Galbene – 2 f.

Această schemă nu permite înţelegerea structurii logice a problemei, nu evidenţiază operaţia de rezolvare.

De fapt, se urmăreşte nu învăţarea problemelor, dar formarea capacităţilor de a domina varietatea lor, care este foarte mare. De exemplu, problemele de egalizare nu se includ în mod evident în matricea problemelor simple de adunare şi scădere.

De exemplu: *Pe masă sînt 8 pahare. Cîte pahare mai trebuie puse pentru a putea servi cu suc 10 persoane?* În această problemă trebuie făcută corespondenţa biunivocă între mulţimile de 10 persoane şi de 10 pahare necesare. Atunci, evident, problema, se tipizează ca o problemă de comparare prin scădere şi are schema:

Păhare – 8
cu ?
Persoane - 10

Rezolvarea de probleme simple este unul din primii paşi orientaţi spre exersarea flexibilităţii şi fluidităţii gîndirii. Prin rezolvarea lor, elevii ajung să opereze în mod real cu numere abstracte şi concrete, să compună şi să descompună numere, să folosească strategii mintale anticipative.

Tema 22. Metodologia activităţii de rezolvare a problemelor compuse

1. ***Introducerea problemelor compuse***
2. ***Etapele de lucru asupra unei probleme compuse***
3. ***Activităţi de postrezolvare***

1. Problemele, pentru rezolvarea cărora sînt necesare două sau mai multe operaţii se numesc probleme compuse.

O problemă compusă se structurează într-o succesiune de probleme simple. Însă, dificultatea principală nu o constituie rezolvarea acestor probleme simple, dar stabilirea legăturii dintre aceste probleme simple, adică, construirea raţionamentului rezolutiv. De aceea este necesară o perioadă de tranziţie de la problemele simple la cele compuse.

Se începe cu rezolvarea de probleme simple în lanţ. Acestea pot fi ambele de adunare (ex.1) sau una de adunare şi alta de scădere (ex.2).

Ex.1. a*) Ion are 3 mere, iar Ana cu 2 mere mai multe. Cîte mere are Ana ?*

b) *Ion are 3 mere, iar Ana are 5 mere. Cîte mere au copii, în total?*

În sinteză se obţine problema: *Ion are 3 mere, iar Ana cu 2 mere mai multe. Cîte mere au copiii, în total?*

Ion – 3 mere

? mere

Ana - ? mere, cu 2 mere mai mult

Formula de rezolvare: a + (a + b).

Ex.2.a*) În autobus erau 8 pasageri. La staţie au mai urcat 2 pasageri. Cîţi pasageri sînt acum în autobus?*

b) *În autobus erau 10 pasageri. Cîţi au rămas după ce au coborît 3 pasageri?*

În sinteză se obţine problema: *În autobus erau 8 pasageri. La staţie au mai urcat 2 şi au coborît 3 pasageri. Cîţi pasageri sînt acum în autobus?*

Erau – 8 p.
Au urcat – 2 p.
Au coborît – 3 p.
Au rămas – ? p.

Formula de rezolvare: $a + b - c$.

2. Etapele de lucru asupra unei probleme compuse sînt:

1. **Citirea şi înţelegerea enunţului**. În cadrul acestei etape elevii separă condiţia şi întrebarea problemei şi evidenţiază cuvintele principale, care stau la baza înţelegerii structuri logice a problemei.
2. **Schematizarea enunţului** trebuie să prezinte structura logică a problemei, valorile cunoscute, cele necunoscute şi relaţiile dintre acestea. O schemă corectă va ajuta elevul să planifice rezolvarea problemei.
3. **Planificarea rezolvării problemei** poate fi organizată printr-un raţionament sintetic, analitic sau unul analitico-sintetic. Fiecare dintre aceste raţionamente urmăreşte descompunerea problemei date în probleme simple care, prin rezolvare succesivă, duc la găsirea soluţiei

finale. Deosebirea dintre aceste raţionamente constă în punctul de plecare. Sinteza porneşte de la datele problemei spre întrebare, iar analiza porneşte de la întrebarea problemei spre datele acesteia.

În practică, s-a demonstrat că raţionamentul sintetic este mai accesibil, dar nu solicită prea mult gîndirea elevilor. Mai mult, există pericolul ca elevii să fie tentaţi să afle nişte mărimi care nu sînt necesare în rezolvarea problemei.

Raţionamentul analitic pare mai dificil, dar solicită mai mult gîndirea şi permite o privire de ansamblu asupra problemei, fiind permanent în atenţie întrebarea problemei.

Exemplu: *1 balon cu heliu costă 9 lei. Pentru împodobirea sălii s-au cumpărat 5 baloane roşii şi 8 baloane albastre. Cît a costat cumpărătura?*

1 balon	9 lei
? (5 şi 8) baloane	? lei

Raţionament sintetic

- Ce putem afla din datele problemei? (Putem afla cîte baloane au fost cumpărate, în total.)
- Prin ce operaţie vom afla? (Prin adunare: 5 + 8.)
- Dacă vom şti cîte baloane au fost cumpărate în total, ce putem afla în continuare? (Putem răspunde la întrebarea problemei, adică, putem afla costul cumpărăturii).
- Prin ce operaţie vom afla costul total? (Prin înmulţire: înmulţim numărul total de baloane cu preţul acestora).

Raţionament analitic

- Ce trebuie să cunoaştem pentru a răspunde la întrebarea problemei? (numărul total de baloane cumpărate şi preţul acestora).
- Cunoaştem aceste valori ? (Ştim preţul, dar nu ştim numărul total de baloane).
- Ce trebuie să ştim pentru a afla numărul total de baloane? (Numărul total de baloane roşii şi de baloane albastre).
- Avem aceste date ? (Da).
- Ce operaţie vom face cu ele? (Adunarea: 5 + 8).
- Ce vom efectua în continuare? (Vom înmulţi această sumă cu preţul baloanelor).

Raţionament analitico – sintetic

- Putem răspunde direct la întrebarea problemei ? (Nu)
- De ce ? (Fiindcă nu ştim cîte baloane s-au cumpărat în total)

- Dar putem să aflăm direct din condiţiile problemei cîte baloane s-au cumpărat în total ? (Da)
- Cum ? (Adunînd 5 cu 8)
- Cum vom proceda în continuitate ? (Vom înmulţi numărul total de baloane cu preţul acestora)

4. **Scrierea rezolvării** se poate efectua:
- ***cu plan***, cînd formulările paşilor de rezolvare se scriu prin propoziţii depline, enunţiative şi interogative;
- ***prin exerciţiu***, care sintetizează operaţiile de rezolvare a problemei;
- ***cu justificări***, cînd după operaţie se scrie o scurtă explicaţie.

5. **Verificarea** rezolvării problemei se poate efectua prin:
- substituţia soluţiei în condiţia problemei;
- alcătuirea şi rezolvarea unei probleme inverse (este aplicabilă doar în cazul unei probleme simple, în alt caz această metodă de verificare este prea solicitantă);
- rezolvarea problemei printr-o altă metodă.

6. **Scrierea răspunsului** poate fi realizată printr-o propoziţie enunţiativă deplină sau prescurtată. Dacă ultima operaţie este însoţită de justificare sau rezolvarea s-a scris cu plan, atunci răspunsul se scrie prescurtat.

Pentru a facilita scrierea răspunsului, vom reveni la întrebarea problemei.

3. În scopul cultivării creativităţii, a inteligenţei, a imaginaţiei elevilor, se organizează diverse **activităţi de postrezolvare**.

Acestea, în primul rînd, ţin de formarea capacităţilor de compunere a problemelor şi pot viza:
- compunerea de probleme avînd ca suport: tablou sau imagine; schemă; exerciţiu, formulă sau operaţii de rezolvare; tipul problemei; tematica sau mărimile date;
- modificarea condiţiei sau întrebării problemei;
- crearea liberă de probleme.

Activităţile de postrezolvare mai pot viza:
- rezolvarea problemei printr-o altă metodă;
- o altă modalitate de scriere a rezolvării (de exemplu, prin exerciu);
- alcătuirea şi rezolvarea de probleme inverse etc.

Este necesar ca în activitatea de compunere a problemelor învăţătorul să contribuie la exprimarea corectă a copiilor, orală şi în scris, atît din punct de vedere matematic, cît şi gramatical. Compunerea de probleme constituie o premisă reală pentru sporirea rolului formativ al instruirii matematice primare în strînsă corelaţie cu celelalte discipline de îvăţămînt.

Tema 23. Metodologia activităţii de rezolvare a problemelor prin metoda figurativă

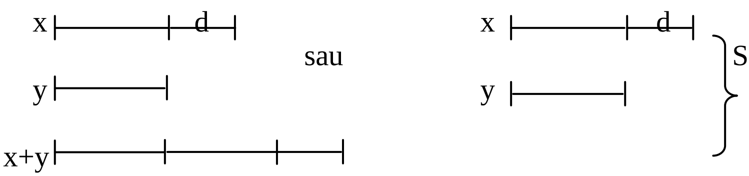
1. Descrierea generală
2. Aplicarea la rezolvarea problemelor-tip
2.1. Probleme de aflare a două numere necunoscute după suma şi diferenţa acestora
2.2. Probleme de aflare a două numere necunoscute după suma şi cîtul (raportul) acestora
2.3. Probleme de aflare a două numere necunoscute după diferenţa şi cîtul (raportul) acestora
2.4. Probleme de eliminare a unei mărimi prin substituţie

1. Deseori, pentru a înţelege mai bine datele problemei şi relaţiile comportate în enunţ, rezolvitorul simte nevoia să figureze toate acestea într-un desen, o schemă, un model etc. Cu cît rezolvitorul are o vîrstă mai mică, cu atît aceasta figurare este mai detaliată, mai apropiată de concret. Odată cu înaintarea în vîrstă şi dezvoltarea gîndirii logice, figurarea devine mai abstractă, evidenţiind doar esenţialul.

Anume această figurare a enunţului problemei printr-o modalitate mai intuitivă sau mai abstractă, caracterizează metoda figurativă.

2.1. Să luăm cazul general: "*Să se afle două numere x şi y, dacă se cunoaşte suma lor S = x + y şi diferenţa d = s – y*".

Figurăm enunţul într-o schemă pornind de la numărul mai mic, *y*.



Rezolvare

I metodă (egalarea după numărul mai mic):

1) Egalăm numerele S – d
2) Aflăm pe y (S – d) : 2
3) Aflăm pe x y + d sau S – y

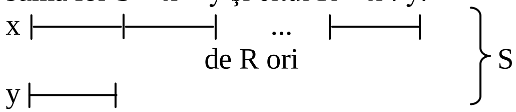
II metodă (egalarea după numărul mai mare):

1) Egalăm numerele S + d
2) Aflăm pe x (S +d) : 2
3) Aflăm pe y x – d sau S – x.

Verificare x + y = S, x – y = d.

Exemplu: Într-o clasă sînt 21 elevi. Cîte fete şi cîţi băieţi învaţă în această clasă, dacă se ştie că fete sînt cu 3 mai multe?

2.2. Să se afle două numere necunoscute x şi y, dacă se cunoaşte suma lor S = x + y şi cîtul R = x : y.



Rezolvare:

1) Aflăm numărul mai mic, y:

S : (R + 1) (în total, avem R + 1 segmente de lungimi egale);

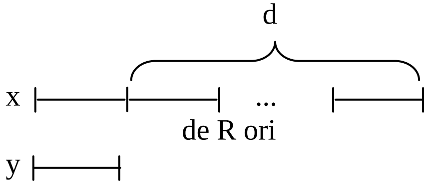
2)Aflăm numărul mai mare, x:

R x y sau S – y

Exemplu: Ana este de 3 ori mai tînără ca mama. Cîţi ani are fiecare, dacă, în total, Ana şi mama au 40 ani ?

Aceste două tipuri de probleme se introduc în clasa a III-a, folosind procedeul contrapunerii. Adică, ele se introduc simultan, la aceeaşi lecţie şi se alternează în sistemul de probleme. Această metodă de predare este motivată prin faptul că elevii tind să confundă semnificaţia sintagmelor “cu … mai mult/puţin” şi “de … ori mai mult/puţin”. Confruntarea acestor două tipuri de probleme impune elevilor o alegere conştientă a operaţiilor şi o figurare conştientă a enunţului în schemă.

2.3. Să se afle două numere x şi y, dacă se cunoaşte diferenţa lor d = x – y şi cîtul R = x – y.



Observăm că *d* cuprinde (R – 1) segmente de lungimea *y*.

Rezolvare:

1) Aflăm numărul mai mic, *y*: *d :* (R – 1)
2) Aflăm numărul mai mare: *y* + *d* sau *R x y*

Acest tip de probleme se introduce la sfîrşitul clasei a III-a, cînd s-a format deprinderea de a rezolva problemele de cele 2 tipuri descrise anterior.
Exemplu: Ion a rezolvat cu 15 probleme mai mult decît Dan. Cîte probleme a rezolvat fiecare dacă se ştie că Dan a rezolvat de 4 ori mai puţine probleme decît Ion?

2.4. În clasa a IV-a se introduc problemele de eliminare a unei mărimi prin substituţie, de exemplu: "*Trei rucsacuri şi 2 mingi costă, în total, 120 lei. Cît costă un rucsac şi cît costă o minge, dacă se ştie că un rucsac costă cît 2 mingi?*"

o minge ____
un rucsac ____ ____ ____
total ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____
120 lei

Observăm că cei 120 lei cuprind de 8 ori preţul mingii, deci:
120 lei : 8 = 15 lei – preţul mingii.

Atunci putem afla preţul rucsacului:
2 x 15 lei = 30 lei.

Verificăm: 30 lei : 12 lei = 2 (A)
3 x 30 lei + 2 x 15 lei = 120 lei (A)

În continuare, metoda figurativă se va antrena la rezolvarea problemelor ce comportă tipurile descrise anterior ca elemente ale enunţului.

Tema 24. Metodologia activităţii de rezolvare a problemelor cu mărimi proporţionale

1. Orientări generale
2. Aspecte metodologice
2.1. Probleme de aflare a celei de a patra părţi proporţionale
2.2. Probleme de împărţire în părţi proporţionale
2.3. Probleme de aflare a două numere necunoscute după două diferenţe

1. ***Definiţie***: Două mărimi, care depind una de alta în aşa fel încît raportul a două valori arbitrare ale primei mărimi este egal cu raportul valorilor corespunzătoare ale mărimii a doua se numesc *mărimi direct proporţionale*.

Adică, dacă mărimea X ia valorile x_1, x_2, x_3, …, x_n, iar mărimea Y ia valorile y_1, y_2, y_3, …y_n şi dacă $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ sau $x_2 : x_3 = y_2 : y_3$;, …; $x_{n-1} : x_n = y_{n-1} : y_n$, rezultă că mărimile x şi y sînt direct proporţionale.

Proprietate: Dacă mărimile x şi y sînt direct proporţionale, atunci la mărirea/micşorarea uneia dintre mărimi de un anumit număr de ori raportul acestora nu se schimbă.

Adică $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = ... = \frac{y_n}{x_n} = k$, unde k $\in$ Q^+.

Conform acestei proprietăţi, dependenţa direct proporţională poate fi exprimată prin formula $y = kx$, unde x este variabila independentă, y variabila dependentă, k este un număr raţional pozitiv.

Exemple de dependenţe direct proporţionale, utilizate în cadrul problemelor de matematică în şcoala primară:

- *cantitatea x preţul = costul*;
- *timpul x viteza = drumul*;
- *timpul de muncă* x *productivitatea muncii = volumul de muncă* etc.

Se mai cunosc şi dependenţe invers proporţionale, care pot fi exprimate prin formula $y = \frac{k}{x}$, unde x este variabila independentă, iar y este variabila dependentă, iar k$\in$ Q^+.

Exemple de dependenţe invers proporţionale utilizate în cadrul problemelor de matematică în clasele primare:

- V = S : t, t = S : V;
- cantitatea = costul : preţ, preţul = costul : cantitate;
- dimensiunile unui dreptunghi de o arie dată: L = A : *l*, *l* = A : L etc.

Pentru a forma cu succes capacităţile de rezolvare a problemelor cu mărimi proporţionale este necesar, în primul rînd, să formăm la elevi reprezentări despre aceste mărimi şi despre dependenţă între ele. Acest lucru se poate realiza prin rezolvarea de probleme simple cu mărimi proporţionale, organizînd datele în tabel. De exemplu:

	Cantitate	Preţ	Cost
a) maiouri	4	6 lei	? lei
b) pixuri	?	3 lei	15 lei
c) mingi	6	? lei	48 lei

a) 1 maiou ……… 6 lei
4 maiouri …….. ? lei
Rezolvare: 4 x 6 lei = 24 lei

b) 1 pix ………3 lei
? pixuri …….15 lei
Rezolvare: 15 lei : 3 lei = 5 (pixuri)

c) 6 mingi ……. 48 lei
1 minge ………? lei
Rezolvare: 48 lei : 6 = 8 lei.

Problema *c)* se rezolvă prin *procedeul reducerii la unitate* care, mai tîrziu, va deveni baza rezolvării problemelor compuse cu mărimi proporţionale prin *regula de trei simplă*.

2.1. În problemele de aflare a celei de a patra părţi proporţionale sînt date trei mărimi direct sau invers proporţionale, dintre care una este constantă, iar două sînt variabile. Se cunosc două valori ale uneia dintre mărimile variabile şi o valoare corespunzătoare a celeilalte mărimi variabile. Se întreabă cea de a doua valoare corespunzătoare. (vezi anexa 3).

Se observă că problemele 1-4 comportă dependenţe direct proporţionale, iar problemele 5-6 comportă dependenţe invers proporţionale. Elevii vor fi familiarizaţi cu ambele metode de rezolvare şi vor fi îndrumaţi să o aleagă pe cea mai facilă pentru ei. Atenţionăm, că metoda proporţiilor ajută elevii să conştientizeze mai bine dependenţa dintre mărimile problemei şi cere un spirit practic dezvoltat.

2.2. Matricea problemelor de împărţire în părţi proporţionale (doar cu mărimi direct proporţionale) (vezi anexa 4).

2.3. Matricea problemelor de aflare a 2 numere necunoscute după 2 diferenţe (vezi anexa 5).

Tema 25. Evaluarea rezultatelor şcolare la matematică în clasele primare

1. ***Orientări generale***
2. ***Metodologia organizării dictărilor matematice***
3. ***Metodologia elaborării unui test standardizat de evaluare sumativă***

1. Problema evaluării rezultatelor şcolare la matematică în clasele primare este subordonată preocupărilor generale de evaluare a eficienţei procesului de predare-învăţare, constituind un obiect de studiu al didacticii. Conceptul de evaluare, particularizat la disciplina matematica păstrează caracteristicile generale ale evaluării, dar implică note specifice.

Evaluarea rezultatelor şcolare la matematică se realizează în următoarele scopuri:

a) ***Evaluarea iniţială: diagnosticarea stadiului iniţial de la care se pleacă în abordarea unei secvenţe de instruire***, în vederea proiectării şi realizării eficiente a noii activităţi de învăţare.

Evaluarea iniţială se organizează la începutul studierii unui capitol, temă, semestru, an şcolar. Pentru aceasta se rezervează 5-7 minute din lecţie. Aprecierea rezultatelor se poate face prin calificative sau note, trecînd în registru doar notele 8-10. Scopul evaluării iniţiale este diagnosticul situaţiei cognitive şi elaborarea de programe individuale şi diferenţiate: de reînvăţare-recuperare, de ameliorare-dezvoltare.

Elaborînd itemii pentru probele de evaluare iniţială ne vom limita la domeniul cognitiv *cunoaştere şi înţelegere*. Metodele de evaluare iniţială pot fi diverse: examinarea orală sau proba scrisă, dictare matematică, joc etc. Modurile de organizare a clasei, de asemenea, pot fi diferite: frontal, individual sau în grupuri.

b) ***Evaluarea formativă: stabilirea nivelului la care a ajuns fiecare elev în procesul formării setului de capacităţi implicat în obiective***.

Evaluarea formativă se organizează pe parcursul studierii unei unităţi de învăţare, rezervîndu-i-se cel mai mult 20 minute la sfîrşitul sau începutul unei lecţii. Rezultatele nu se notează. Scopul evaluării formative este racordarea procesului de predare de către învăţător cu procesul învăţării elevului. Învăţătorul are şansa de a corecta procesul predării în funcţie de ritmul însuşirii elevilor şi erorile de comprehensiune comise. Elevii îşi vor stimula capacităţile de autoevaluare şi încrederea în forţele proprii. Lipsa notării va favoriza motivaţia extrisecă pentru învăţare şi va face să dispară stresul legat de evaluare.

Metodele de evaluare formativă, la fel ca şi modurile de organizare a clasei, pot şi trebuie să fie diverse.

c) ***Evaluarea sumativă***: ***confirmarea atingerii obiectivelor propuse pentru o anumită unitate didactică***

În proiectul tematic de perspectivă pentru un an de studiu la matematică în clasele primare, evaluării sumative i se rezervează cîte 2 ore: prima pentru evaluarea propriu-zisă, a doua – pentru analiza rezultatelor. Analiza rezultatelor evaluării sumative permite sporirea performanţelor elevilor prin elaborarea şi administrarea unor sarcini diferenţiate: de reînvăţare-recuperare sau de ameliorare-dezvoltare. Este important să precizăm că în sistemul evaluării matematice pentru clasele

I-IV se conturează o conduită evaluativă a învăţătorului, care satisface prioritar cel puţin trei criterii de apreciere (nu de măsurare propriu-zisă) şi anume:

- prin raportare la o normă impusă de cerinţele curriculare (defineşte condiţiile de *eficacitate* ale predării şi învăţării): **evaluarea normativă**;
- prin raportare la nivelul real atins de elevii clasei (defineşte condiţiile de *eficienţă* ale predării-învăţării): **evaluare criterială**;
- prin raportare la posibilităţile fiecărui elev, aceasta fiind o **evaluare de progres**.

2. Dictarea matematică este o metodă des utilizată pentru evaluarea iniţială şi evaluarea formativă.

Dictarea matematică se proiectează ca un sistem de exerciţii şi probleme care se propun elevilor oral, aceştia scriind în caiete doar răspunsurile.

Cerinţele metodologice generale faţă de o dictare matematică sînt:

- sistemul de sarcini să fie structurat conform principiilor generale – stereotipicitate, repetare continuă, confruntare, includerea sarcinilor ce reprezintă contraexemplul didactic (provoacă elevii la greşeli şi permite elucidarea greşelilor tipice);
- nivelul de dificultate trebuie să fie mediu, deoarece toate operaţiile de calcul şi rezolvarea se vor face oral;
- numărul de sarcini trebuie să corespundă timpului în care majoritatea elevilor de vîrsta respectivă sînt capabili să-şi menţină atenţia concentrată;
- în formularea sarcinilor se va utiliza un limbaj matematic bogat şi corect; dacă sarcinile sînt stereotipice, formularea lor trebuie să fie diferită. De exemplu, “Calculaţi şi scrieţi corect suma numerelor 3 şi 2; măriţi cu 4 numărul 5; primul termen este 3, al doilea termen şase, scrieţi suma”;
- dictarea se va finisa printr-o sarcină de postrezolvare; de exemplu: în şirul de numere obţinut subliniaţi numerele pare;
- evaluarea rezultatelor se va face frontal, elevii vor exprima acordul sau dezacordul cu fiecare răspuns rostit de un elev. Dacă se observă greşeli, acestea vor fi analizate.

3. Testul standardizat este constituit din următoarele elemente componente:

- matricea de specificaţii;
- itemii;

- baremul de corectare şi notare;
- scara sau tabelul de conversie a punctajului acumulat în note.

Matricea de specificaţii etalează capacităţi ce urmează a fi evaluate, structurate pe domeniile cognitive (cunoaştere şi înţelegere, aplicare, integrare) conform conţinuturilor de învăţare supuse evaluării. Pentru fiecare element structural se prezintă şi ponderea cantitativă şi procentuală.

De exemplu:

Conţinut de învăţare / Domenii cognitive	C_1	C_2	C_3	C_4	*Total*
Cunoaştere şi înţelegere		I_4, I_6			*2 itemi (20%)*
Aplicare	I_2, I_3	I_5	I_7	I_{10}	*5 itemi (50%)*
Integrare		I_1		I_8, I_9	*3 itemi (30%)*
Total	*2 itemi (20%)*	*4 itemi (40 %)*	*1 item (10 %)*	*3 itemi (30 %)*	***10 itemi (100%)***

Baremul de corectare şi notare se structurează:

Nr. item	Punctaj maxim	Răspuns corect	Acordarea punctajului	Observaţii

Pentru a face conversia punctajului în note poate fi aplicată formula

$$\text{nota} \approx \frac{\text{punctaj acumulat}}{\text{punctaj maxim}} \times 10 .$$

Itemii din care se constituie testul trebuie să fie diverşi:

1) ***obiectivi***:

- cu alegere duală (A sau F, Da sau Nu etc.)

De exemplu: Citeşte cu atenţie propoziţia de mai jos. Dacă o consideri adevărată încercuieşte litera A, iar dacă o consideri falsă încercuieşte litera F.

"Predecesorul numărului 100 este 101"

A F

- cu alegere multiplă:

De exemplu: Care dintre numerele de mai jos se citeşte două sute doi? Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.

A 22 *B* 220 *C* 202 *D* 222

- tip-pereche:

De exemplu: Asociază exerciţiile cu acelaşi răspuns:

16 – 6 + 7	15 + 2 – 3
15 + 3 – 4	12 + 4 + 1
13 + 5 + 0	14 + 5 – 7
3 + 16 – 1	

Notă: Numărul elementelor de intrare trebuie să fie diferit de numărul elementelor de ieşire, pentru a asigura alegerea conştientă a fiecărei perechi.

2) ***semiobiectivi***:

- <u>cu răspuns deschis:</u>

De exemplu: Completează propoziţia de mai jos cu numărul potrivit.

Dacă micşorăm cu ■ numărul 9, obţinem numărul 7.

- *întrebări structurale*:

De exemplu:

	baloane	steguleţe	coifuri
Ana	12	3	5
Nicu	7	13	12

Calculează şi completează propoziţiile:

Ana a pregătit, în total ____ obiecte decorative;

Ana şi Nicu au pregătit, în total, ___ steguleţe;

Nicu a pregătit cu ___ coifuri mai mult decît Ana.

3) ***cu răspuns deschis: tip – rezolvare de probleme***.

Observarea sistematică a comportamentului cognitiv al elevului la orele de matematică, a modului de realizare a temelor pentru acasă, sprijinită de analiza rezultatelor evaluărilor poate oferi o imagine completă a nivelului de performanţă atins de elev.

Bibliografie selectivă

1. Gh. Dascălu ş.a. „Metodica predării matematicii în clasele primare”, Editura „Lumina”, Chişinău, 1996.
2. Gh. Herescu, A. Dumitru, I. Aron „Matematica pentru învăţători”, E.D.P., Bucureşti, 1996.
3. M. Bulboacă, M. Alecu „Metodica activităţilor matematice în grădiniţă şi în clasa I”, editura „Sigma”, Bucureşti, 2000.
4. D. Bell, E. R. Huges, J. Rojers „Arie, masă, volum. Îndrumarea şi încurajarea formării şi dezvoltării acestor concepte la copii”, E. D. P., Bucureşti, 1970.
5. G. Polya „Cum rezolvăm o problemă?”, E. D. P. , Bucureşti, 1965.
6. Curriculum şcolar clasele I-IV, Editura „Lumina”, 2003.
7. Standarde educaâionale. Învăţămînt primar. Editura Lumina, Chişinău, 2004
8. V. Pâslaru, V. Cabac ş. a. „Evaluarea în învăţămînr. Orientări conceptuale”, Chişinău, 2002
9. Matematica, manuale pentru clasele I-IV, ghiduri pentru învăţători şi părinţi, Editura „Prut Internaţional”2002 – 2004.
10. Ursu L. „Patrulatere speciale”, editura Lyceum, Chişinău, 2000
11. Ursu L. „Teste de evaluare sumativă”, clasele I-IV, Editura „Prut Internaţional, 2003-2004