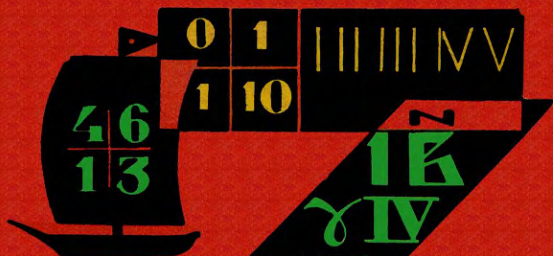


ARITMETICA



I. I. PERELMAN



DISTRACTIVĂ

I. I. PERELMAN

A R I T M E T I C A
D I S T R A C T I V Ă

PROBLEME CURIOASE ȘI GHICITORI
DIN LUMEA CIFRELOR

EDITURA TINERETULUI

Traducere din limba rusă de **MARIUS STOKA**

Desenele reproduse după originalul în limba rusă
Coperta de *D. IONESCU*

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ФИЗИКО-МАТЕМА-
ТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

Cuvînt înainte

În șirul lung al pedagogilor sovietici care au inițiat și au popularizat introducerea învățămîntului politehnic în programul școlilor din U.R.S.S., Iakov Isidorovici Perelman, autorul lucrării „Aritmetica distractivă”, tradusă și publicată acum în limba romînă, ocupă un loc deosebit. Prin numeroasele sale scrieri de popularizare a științelor pozitive — articole și cărți distractive de matematică, de fizică, de astronomie și romane științifico-fantastice — el a ușurat unei întregi generații de dascăli și de școlari orientarea spre învățămîntul politehnic, fiind azi unul din cei mai cunoscuți autori ai genului didactic-distractiv. Dacă pînă la Marea Revoluție Socialistă din Octombrie tirajul total al cărților lui n-a trecut de 10 000 exemplare, în anii Puterii Sovietice s-au editat și s-au difuzat peste 5 000 000 exemplare, cu rezultate pedagogice unanim recunoscute.

Felul cum și-a întocmit I.I. Perelman studiile, cărțile și romanele sale satisface cele mai pretențioase exigențe ale genului, trezind simpatie activă față de disciplinele prezentate și interes constant față de frumoasele și uneori surprinzătoarele jocuri ale minții, cu cifre, cu relații matematice și cu cele mai felurite surprize ale cunoașterii științifice. Autorul ne demonstrează posibilitatea de a învăța, distrîndu-ne. Atenția involuntară, lipsită de efort cu care urmărim construcțiile sale științifico-distractive, ne menține integral pe planul jocului, dar acest joc e unul din mijloacele cele mai eficace — la o anumită vîrstă — în acumularea de cunoștințe. Curiozitatea pe care

o generează produce în conștiință o concentrare către activitate însoțită de un sentiment pe care nu-l putem denumi decît interes. Din acest moment jocul își însușește tot mai mult caracterele muncii și ale activității conștiente, îndreptată spre înțelegerea realității.

Munca, spunea marele pedagog sovietic A.S. Makarenko, este participarea omului la producția socială, la crearea de valori materiale și culturale. Jocul nu urmărește astfel de scopuri, dar le favorizează indirect, obișnuind treptat copilul sau adolescentul cu efortul fizic și psihic necesar pentru muncă, dezvoltînd agerimea minții, prezența de spirit, inițiativa, stăpînirea de sine, pricepera de a cîntări împrejurările și obișnuința de a duce lucrurile începute pînă la sfîrșit. Lucrările de știință distractivă ale lui I.I. Perelman corespund tuturor acestor cerințe, efectul lor pedagogic realizîndu-se îndeosebi prin îndrumarea cititorului spre o activitate voluntară precis orientată, spre realizarea unor scopuri conștient fixate. În această perspectivă trebuie privită și înțeleasă și „Aritmetica distractivă“.

Iakov Isidorovici Perelman s-a născut în vechea Rusie, la 29 noiembrie 1882, în orașul Belostok din gubernia Grodenenskaia, dintr-o familie de mici slujbași, în care tatăl era contabil, iar mama învățătoare. Studiile primare și medii-reale le-a făcut la școlile din orașul natal, sub ochii părinților, care l-au ajutat să îndrăgească de timpuriu numerele și socotelile și i-au dezvoltat armonios înclinațiile pedagogice. Studiile superioare le-a urmat la Institutul silvic din Petersburg, obținînd în 1909 titlul de silvicultor de categoria I, profesiune pe care n-a exercitat-o, dedicîndu-se de la început carierei profesionale în care s-a evidențiat în mod deosebit, atît în ciclul mediu, cît și în învățămîntul superior.

Adevărata vocație a lui I.I. Perelman era însă cea de scriitor și astfel, încă de pe băncile școlii, colaborează la reviste de popularizare a științei. Primul lui articol apare în „Buletinul guberniei Grodenenskaia“ în anul 1899, avînd titlul „În legătură cu ploaia de meteoriți care se așteaptă“, unde explică pe înțelesul tuturor semnificația acestui fenomen căruia i se dădeau cele mai felurite interpretări obscurantiste.

Din anul 1901 colaborează la revista „Natura și oame-
nii“, și în continuare la revistele de știință popularizată
„În atelierul naturii“, „Știința e puterea“, „Tehnica tine-
retului“ și „Informatorul științific“, publicînd în paginile
lor articole din domeniul fizicii, astronomiei și matematici-
lor, care au contribuit foarte mult la formarea vocației
politehnice a tineretului sovietic. Astfel, cunoscutul astro-
nom și doctor în științele fizico-matematice A.G. Masevici
recunoaște într-una din scrierile sale că și-a ales profesiu-
nea sub influența cărții lui Perelman „Astronomia dis-
tractivă“.

Originalitatea scrierilor lui I.I. Perelman apare în
lucrările publicate în volum, lucrări de popularizare a
științei scrise în genul didactic-distractiv, care cunoaște azi
în lume un deosebit succes. Cărțile sale „Matematica vie“,
„Aritmetica distractivă“, „Astronomia distractivă“, „Fi-
zica distractivă“, „Mecanica distractivă“, „Probleme și
experiențe distractive“ și altele, apărute pînă acum în
zeci de ediții, sînt unanim apreciate de cititori și de critică.
Ele prezintă, pe sute de pagini, un material vast, selecțio-
nat cu deosebită grijă de a apropia cît mai mult teoria de
practică și școala de viață.

I.I. Perelman a scris și literatură științifico-fantastică.
Primul său roman, cu titlul „Călătorii interplanetare“,
a apărut în 1924, urmat de romanele „Spre stele cu
racheta“, „Depărtările“, „Zborul în Lună“ și altele.
În toate autorul susține cu talent și cu entuziasm tineresc
ipotezele marilor teoreticieni sovietici ai cuceririi spațiului
cosmic, subliniind faptul că voința de a lupta și a învinge
este caracteristică numai claselor sociale în ascensiune,
claselor care au rol istoric progresist.

Activitatea publicistică a lui I.I. Perelman se comple-
tează și cu o seamă de cărți didactice scrise în cursul celor
patru decenii de profesorat. Dintre acestea cele mai impor-
tante sînt „Geometria și bazele trigonometriei“, „Matema-
tica meșteșugarului“, „Matematica politehnică“ și „Cule-
geri de probleme de geometrie“.

În afara publicisticii, I.I. Perelman a desfășurat și
activitate pedagogică la numeroase instituții de învățămînt
mediu și superior, dintre care reținem: „Institutul de învă-
țămînt public din Pskov“, „Politehnica muncitorească

din Petrograd" și „Școala medie de electrotehnică din Leningrad“.

I.I. Perelman iubea tineretul sovietic nu numai ca pedagog, ci și ca patriot. El era conștient că generației care a înfăptuit revoluția proletară trebuie să-i urmeze cadre noi, bine pregătite sub raport tehnic, care să poată duce la bun sfârșit construcția socialismului. Aceste cadre trebuiau ajutate să-și însușească, fără întârziere, temeinice cunoștințe fizico-matematice și să îndrăgească tehnica. Trebuiau găsite, deci, metode noi pentru predarea acestor discipline în școli și îndeosebi metode noi pentru stimularea formelor de învățămînt fără frecvență și a cursurilor prin corespondență. „Făurirea unei discipline noi în muncă — scria V.I. Lenin — făurirea unor forme noi de legături sociale între oameni, făurirea unor forme și metode noi de antrenarea oamenilor în muncă, aceasta este o sarcină care necesită mulți ani și multe decenii“. Pe linia acestei recomandări a lui Lenin, I.I. Perelman a întocmit un plan de lungă perspectivă pentru politehnizarea învățămîntului sovietic, susținîndu-și ideea și prin întemeierea așa-numitei „științe-distractive“, în care tratarea problemelor de matematică, de fizică și de astronomie, în stil distractiv, reprezenta, la acea vreme, optimismul cu care noua generație sovietică privea viitorul, noua ei concepție despre muncă și despre plăcerea de a munci.

Plăcerea de a munci e o calitate morală esențială omului. A pregăti tineretul înseamnă a-l orienta în primul rînd sub raport moral, a-i insufla dragoste de muncă, a-l pune în situația de a se convinge că munca este o plăcere, cea mai importantă necesitate vitală a omului.

Întocmind cărți de știință distractivă, I.I. Perelman a investit munca intelectuală cu unele din caracteristicile jocului, a ușurat tineretului apropierea de materialul care pare la început arid, al științelor fizico-matematice. El a văzut că valoarea educativă a specializării depinde, în primul rînd, de raportul dintre respectiva specializare și suma cunoștințelor politehnice ale tinerilor. În consecință, în problemele sale distractive el a abordat toate domeniile științelor.

Plăcerea de a se juca izvorăște din plăcerea de a fi în acțiune. Sub acest raport munca și jocul nu se deosebesc

decît prin rezultat. Jocurile intelectuale au o deosebită importanță pentru tineret, mai ales în urma faptului că plasticitatea spirituală e mult mai mare în timpul creșterii decît în perioada maturității.

Problemele publicate de I.I. Perelman în cărțile sale de știință distractivă sînt luate din cîmpul vast al muncii cotidiene și sînt prezentate sugestiv și original. Ele introduc elevii în mod treptat în tainele calculelor și judecăților matematice.

În „Aritmetica distractivă“, I.I. Perelman îl apropie pe cititor de tainele numerelor, fără a-l rătăci prin dificultăți care intimidează și nici pe cărări care ocolesc realitatea. Cartea începe cu cunoștințe vechi și noi despre numere și sfîrșește cu așa-zise „călătorii aritmetice“ în jurul lumii, pe creste de munți, în adîncuri de oceane sau „stînd pe loc“. În 11 capitole și pe circa 200 de pagini autorul tratează un material vast, însumînd evoluția principiilor de calcul mecanic cu abaca străveche, dezvoltarea istorică a calculului aritmetic, diferite sisteme de numerație, galeria curiozităților numerice, scamatoriile numerice, calculele rapide, calculele aproximative, giganții și piticii numerici, curiozități aritmetice etc.

Meritul cel mai de seamă al „Aritmeticii distractive“ este că depășind pe nesimțite expunerea distractiv-didactică, ne face să urcăm cu încredere și optimism primele trepte ale alfabetului matematic. Nu se poate imagina o pedagogie mai bună și o metodă mai eficientă pentru popularizarea acestei discipline.

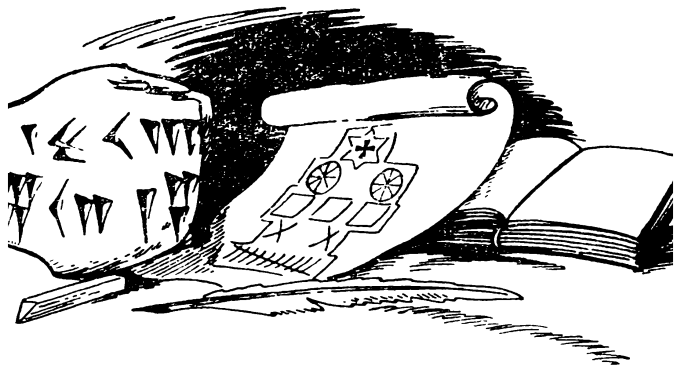
Iakov Isidorovici Perelman nu își poartă cititorii pe linia celei mai mici rezistențe posibile. Nu-i leagă în răsfăț, adică în credința că nu sînt necesare eforturi spre a se obține cunoștințe și deprinderi. El combate, prin toate mijloacele, ca dăunătoare muncii educative, concepția potrivit căreia jocul este o distracție, o pierdere inutilă de timp. Copiii se joacă totdeauna în mod serios și Perelman invită numai la astfel de jocuri, oricît de distractive ar fi ele. În felul acesta scopul pedagogic urmărit este pe deplin atins, iar jocul devine o școală a voinței și a caracterului.

La începutul Marelui Război pentru Apărarea Patriei, deși bolnav, I.I. Perelman a desfășurat o muncă susținută în mijlocul populației din Leningrad în legătură cu apăra-

rea antiaeriană. Când cercul blocadei inamice s-a închis în jurul oraşului-erou, el a refuzat propunerile de evacuare, socotind că experienţa şi cunoştinţele sale vor fi utile pentru apărarea Leningradului. Organismul lui slăbit nu a rezistat însă lipsurilor provocate de blocadă şi la 16 martie 1942 Iakov Isidorovici Perelman a murit.

Traducerea „Aritmeticei distractive“ în limba română va fi de un real folos tineretului. Avântul cu care se dezvoltă industria şi agricultura în patria noastră în anii puterii populare aduce cu sine reforme succesive ale învăţământului de toate gradele, o apropiere tot mai mare a şcolii de viaţă. În aceste condiţii, cărţile lui I.I. Perelman pot fi de foarte mare folos tineretului nostru, stimulându-i interesul pentru ştiinţele fizico-matematice şi uşurându-i însuşirea acestora.

VASILE SUCIU



1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

CAPITOLUL I

VECHI ȘI NOU ÎN NUMERAȚIE ȘI NUMERE

CEA MAI RĂSPÎNDITĂ NUMERAȚIE SCRISĂ

Pentru oricare din voi, cititorii acestei cărți, nu prezintă nici o greutate să scrieți un număr întreg oarecare, chiar pînă la un milion. Pentru scrierea numerelor folosim 10 semne bine cunoscute fiecăruia: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, care se numesc *c i f r e*. Nimănui nu i se mai pare curios că putem scrie orice număr, foarte mare sau foarte mic, întreg sau fracționar cu ajutorul acestor zece semne (cifre).

Numerele de la 1 pînă la 9 le scriem cu ajutorul a numai una din primele nouă cifre de mai sus. Pentru scrierea numerelor de la 10 pînă la 99 ne folosim de două cifre, dintre care una poate fi și zero.

Ca bază a numerației luăm numărul „zece”, de aceea sistemul nostru de numerație se numește z e c i m a l. Aceasta înseamnă că zece unități simple (unități de ordinul I) formează un zece (o unitate de ordinul al II-lea), zece zeci formează o sută (o unitate de ordinul al III-lea), zece sute formează o mie (o unitate de ordinul al IV-lea) și, în general, fiecare zece unități de un ordin oarecare formează o unitate de ordin imediat superior.

Sistemele de numerație au fost zecimale la multe popoare. Aceasta este legat de faptul că mâinile omului au zece degete.

La scrierea numerelor, în marginea din dreapta scriem cifra care arată numărul de unități simple; în stînga ei scriem cifra care notează numărul zecilor, și mai la stînga cifra ce desemnează sutele; în locul al patrulea din stînga scriem cifra cu care se notează miile etc. Astfel, de exemplu, dacă scriem 2 746, aceasta înseamnă că numărul este format din șase unități, patru zeci, șapte sute și două mii.

Dacă numărul nu conține unități dintr-un ordin oarecare, atunci în locul corespunzător punem un zero. De exemplu, numărul format din trei mii și cinci unități se scrie astfel: 3 005. În acest număr lipsesc zecile și sutele, adică unitățile de ordinul al doilea și al treilea, de aceea în locul al doilea și al treilea din dreapta scriem câte un zero.

Iată încă o particularitate curioasă a sistemului de numerație pe care-l utilizăm curent: Pentru scrierea numărului 14 742 noi am folosit de două ori cifra 4: o dată pe locul al doilea de la dreapta la stînga, indicînd că numărul respectiv conține 4 zeci; și aceeași cifră 4, aflată pe locul al patrulea de la dreapta spre stînga, arată că acest număr conține patru mii. Prin urmare, una și aceeași cifră poate indica atît numărul unităților cît și cel al zecilor, al sutelor etc., în funcție de poziția pe care cifra o ocupă în scrierea numărului. De aici a și venit denumirea de sistem de numerație p o z i ț i o n a l.

Să ne întoarcem la numărul 2 746, despre care am vorbit mai înainte. În el, prima cifră din dreapta

(cifra 6) înseamnă 6 unități, cifra a doua din dreapta (4) arată că e vorba de 4 zeci, adică de numărul

$$40 = 4 \cdot 10;$$

cifra a treia din dreapta (7) înseamnă 7 sute, adică numărul

$$700 = 7 \cdot 10 \cdot 10 = 7 \cdot 10^2,$$

și, în sfârșit, cifra a patra (2) indică două mii, adică numărul

$$2\ 000 = 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 10^3$$

Prin urmare, numărul 2 746 poate fi scris sub forma $2\ 746 = 2\ 000 + 700 + 40 + 6 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6$

Fiecare grup de câte trei ordine din număr formează o clasă. Numărătoarea claselor se face tot de la dreapta spre stînga. Pe primul loc stă clasa întâi, formată din unități, zeci și sute, apoi clasa a doua formată din mii, zeci de mii și sute de mii; urmează clasa a treia formată din milioane, zeci de milioane și sute de milioane etc.

V-ați pus oare întrebarea : de ce se fac atît de simplu, de ușor și de repede cele patru operații cu numere: adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea? Aceasta se realizează pe baza principiului de scriere pozițională a numerelor.

Într-adevăr, atunci cînd avem de făcut o operație aritmetică cu numere oarecare noi lucrăm cu zeci, sute și mii, tot așa cum am lucra cu ele dacă ar fi simple unități, și numai la obținerea rezultatului final ținem seama de ordinul lor.

Prin urmare, pentru scrierea numerelor, noi folosim sistemul de numerație zecimal pozițional. Iată ce scrie despre aceasta cunoscutul matematician și fizician francez Laplace (sec. XVIII-XIX): „Idea de a exprima numerele prin nouă semne, acordîndu-le în afară de valoarea dată de formă și pe cea de loc, este atît de simplă, încît tocmai din cauza simplității este greu de înțeles cît de minunată este ea“.

Aproape întreaga omenire folosește acum acest sistem de numerație, cu aceleași principii de construire a sistemului și descriere a cifrelor.

Cum a apărut acest minunat sistem de numerație zecimal pozițional?

Cu toată simplitatea lui aparentă oamenii au avut nevoie de câteva milenii pentru a-l găsi. Și nu vom exagera dacă spunem că la crearea acestui sistem au participat toate popoarele lumii.

Sistemul de numerație zecimal pozițional a apărut la început în India, și la mijlocul sec. al VIII-lea el căpătase deja o mare extindere. Aproximativ în aceeași perioadă sistemul zecimal a pătruns în China și în alte câteva țări ale Orientului. Europeanii au adoptat acest sistem de numerație indian în sec. al XIII-lea, prin intermediul arabilor. De aici i se trage denumirea incorectă de „numerație arabă“.

Ce sisteme de numerație au fost folosite înainte de cel zecimal pozițional? Această problemă este destul de interesantă și merită să ne oprim asupra ei mai amănunțit. Numai așa vom avea posibilitatea să apreciem mai bine avantajele sistemului nostru de numerație.

NUMERAȚIA EGIPTEANĂ VECHĂ

Vom începe cu unul din cele mai vechi sisteme de numerație, cu sistemul de numerație egiptean. El a luat naștere pare-se cu peste cinci mii de ani în urmă, adică cu aproximativ trei mii de ani înaintea erei noastre. În decursul primelor trei milenii sistemul egiptean nu a suferit aproape nici un fel de schimbări. Vom face cunoștință mai îndeaproape cu această numerație veche și vom vedea cum se notau cifrele și cum se scriau numerele cu ajutorul lor.

În numerația egipteană au existat semne speciale (hieroglife) pentru scrierea numerelor: unitate, zece, sută, mie, zece mii, o sută de mii, un milion. Aceste semne sînt reprezentate în figura 1. Pentru a scrie, de exemplu, numărul întreg 23 145 este suficient să se scrie alături două hieroglife cu care se notează zecile de mii, apoi trei hieroglife pentru mii, una pentru sută, patru pentru zeci și cinci hieroglife pentru unitate (fig. 2).

Astfel, la scrierea numărului fiecare hieroglifă poate fi repetată de cel mult nouă ori. În sistemul de numerație egiptean nu existau semne pentru zero.

Acest unic exemplu este suficient pentru a înțelege cum scriau numerele vechii egipteni. Sistemul de numerație

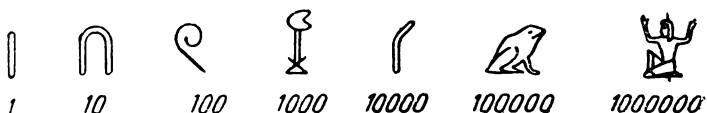


Fig. 1 — Aceste semne (hieroglife) erau folosite de vechii egipteni pentru notarea numerelor.

egiptean este foarte simplu și primitiv; el este pur zecimal, deoarece în reprezentarea numerelor întregi se recurge la principiul zecimal. În acest sistem de scriere fiecare semn reprezintă doar un număr. Astfel,



Fig. 2 — Scrierea numărului 23 145 în sistemul de numerație egiptean.

de exemplu, semnul pentru zece (fig. 1) indică numai zece unități și nu zece zeci sau zece sute. Prin urmare, sistemul de numerație egiptean nu este un sistem pozițional.

VECHE NUMERAȚIE POPULARĂ IN RUSIA

După principiul vechii numerații egiptene au fost construite sistemele de numerație și la alte popoare, de exemplu la grecii antici. Vom reveni (pag. 20) mai amănunțit asupra acestui sistem de numerație.

În vechime, în Rusia era răspândit destul de mult sistemul popular de numerație construit de asemenea

după principiul vechi egiptean; se deosebeau doar semnele prin care se notau numerele.

Este interesant faptul că această numerație populară a fost chiar legiferată; după acest sistem, ceva mai dezvoltat însă, urmau să fie făcute însemnările în caietele de biruri ținute de încasatorii de bir.

«Încasatorul — citim în vechiul „Cod de legi“ — primind de la un proprietar de casă banii ce se cuvin statului, trebuie el însuși sau prin scrib să noteze în caietul de biruri, în dreptul numelui proprietarului de casă care a vărsat banii, câți bani au fost primiți, indicînd mărimea sumei primite prin cifre și semne. Aceste semne sînt aceleași pentru toți și pretutindeni, și anume:

zece ruble să se noteze cu semnul	□
rubla	○
zece copeici	×
copeica	
sfertul de copeică	—

De exemplu, douăzeci și opt de ruble cinci zeci și șapte copeici și trei sferturi se scriau:

(□□○○○○○○○○×××××||||||≡)».

Într-un alt loc din același volum al „Codului de legi“ se mai menționează încă o dată folosirea obligatorie a simbolurilor numerice populare. Se indică simboluri speciale pentru o mie de ruble, sub formă de o stea cu șase colțuri și cu o cruce în centrul ei, și pentru o sută de ruble — sub forma unei roți cu opt spițe. Însă aici simbolurile pentru rublă și pentru zece copeici sînt altele decît cele din legea precedentă.

Iată textul de lege pentru așa-numitele semne de „iasak“¹.

¹ Iasak — bir.

„În fiecare chitanță dată starostelui de clan de la care se va primi iasak-ul, în afara expunerii în cuvinte să fie indicat cu semne speciale numărul de ruble și de copeici primite, astfel încît platnicii să fie convinși

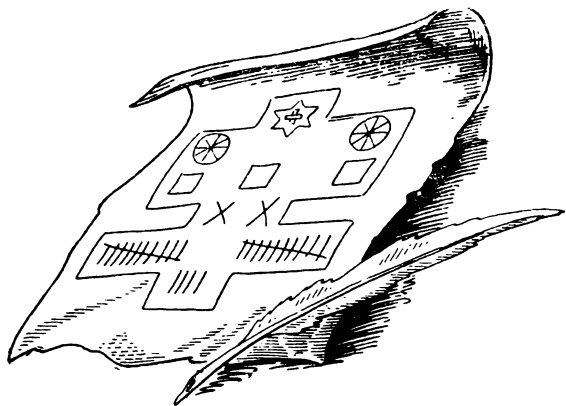


Fig. 3 — Inscripție veche pe chitanța de plată a impozitului („iasak“). Această inscripție indică suma de 1 232 ruble și 24 copeici.

de justețea celor însemnate¹. Semnele folosite în chitanță erau:

(steaua) o mie de ruble

(roata) o sută de ruble

□ zece ruble

× o rublă

||||| zece copeici

| copeica

Ca să nu poată fi făcute nici un fel de adaosuri, aceste semne trebuiau încercuite cu linii drepte. De exemplu, 1 232 ruble 24 copeici se reprezentau ca în figura 3.

NUMERAȚIA ROMANĂ

Dintre toate numerațiile vechi cea romană este poate singura care s-a păstrat pînă în prezent, fiind încă folosită pe o scară largă. Și astăzi cifrele romane sînt

¹ Aceasta arată că semnele descrise erau folosite pe scară largă.

utilizate pentru indicarea secolelor, numerotarea capitolelor din cărți etc.

Pentru scrierea numerelor întregi, în numerația română trebuie să ținem minte modul de reprezentare a următoarelor șapte numere de bază (fundamentale):

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Cu ajutorul lor putem scrie orice număr întreg care nu depășește 4 000; unele cifre (I, X, C, M) se pot repeta, dar cel mult de trei ori.

La scrierea numerelor în sistemul roman cifra mai mică poate sta în dreapta celei mari; în acest caz ea i se adaugă. De exemplu, numărul 283 îl scriem în sistemul roman în felul următor:

CCLXXIII,

adică $200 + 50 + 30 + 3 = 283$. Aici semnul care reprezintă suta este repetat de două ori, iar semnele care indică zecile și respectiv unitățile se repetă de câte trei ori.

Cifra mai mică poate sta și în stânga celei mari, dar atunci ea trebuie scăzută din cea mare. În acest caz repetarea cifrei mai mici nu este admisă. Exemplele de mai jos vă vor ajuta să vă lămuriți pe deplin asupra metodei de scriere a numerelor în sistemul de numerație roman.

Să scriem numerele 94, 944, 1 809, 1 959:

$$XCIV = 100 - 10 + 5 - 1 = 94$$

$$CMXLIV = 1000 - 100 + 50 - 10 + 5 - 1 = 944$$

$$MDCCCIX = 1000 + 500 + 300 + 10 - 1 = 1 809$$

$$MCMLIX = 1000 + 1000 - 100 + 50 + 10 - 1 = 1959$$

Ați observat că în acest sistem nu există nici un semn pentru reprezentarea zeroului? Și totuși ne-am lipsit foarte bine de el la scrierea numărului 1 809.

În figura 4 este reprezentată scrierea, în numerație română, a tuturor numerelor întregi de la 1 pînă la 100.

Cu ajutorul cifrelor romane se pot totuși scrie și numere mai mari. În acest scop, după ce s-au scris

miile se pune jos în dreapta litera m. Pentru exemplificare să reprezentăm numărul 417 986:

CDXVII_m CMLXXXVI

Sistemul de numerație roman, la fel ca și cel vechi egiptean, nu este pozițional: fiecare cifră reprezintă

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XL
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
XLI	XLII	XLIII	XLIV	XLV	XLVI	XLVII	XLVIII	XLIX	L
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
LI	LII	LIII	LIV	LV	LVI	LVII	LVIII	LIX	LX
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
LXI	LXII	LXIII	LXIV	LXV	LXVI	LXVII	LXVIII	LXIX	LXX
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
LXXI	LXXII	LXXIII	LXXIV	LXXV	LXXVI	LXXVII	LXXVIII	LXXIX	LXXX
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
LXXXI	LXXXII	LXXXIII	LXXXIV	LXXXV	LXXXVI	LXXXVII	LXXXVIII	LXXXIX	XC
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
XCI	XCII	XCIII	XCIV	XCV	XCVI	XCVII	XCVIII	IC	C
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. 4 — Astfel se scriu numerele întregi de la 1 pînă la 100 în sistemul de numerație roman.

un singur număr pe deplin determinat. Însă, spre deosebire de sistemul vechi egiptean, cel roman nu este nici pur zecimal. Existența în sistemul roman a unor semne speciale pentru numerele cinci, cinci-

zeci, cinci sute arată că în el există urme destul de pronunțate ale sistemului de numerație cincinal¹.

Numerația romană nu este de loc adaptabilă operațiilor aritmetice în formă scrisă. Acesta este marele ei neajuns.

NUMERAȚIA GREACĂ ANTICĂ

Continuăm prezentarea sistemelor de numerație nepoziționale și numai la sfârșitul capitoulului de față vom descrie amănunțit unul dintre cele mai vechi sisteme de numerație (apărut însă mai târziu decât cel egiptean) — sistemul babilonian, primul sistem pozițional.

Multă asemănare cu sistemul de numerație roman găsim și la numerația așa-zisă atică sau herodianic.

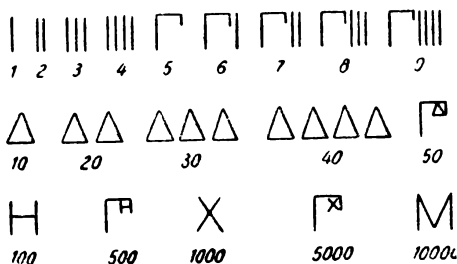


Fig. 5 — Scrierea unor numere în sistemul de numerație atic sau herodianic.

di ană², care era folosită în Grecia antică. În figura 5 sînt reprezentate cîteva numere folosite în acest sistem. Desenul arată că spre deosebire de nume-

¹ Sistemelor de numerație diferite de cel zecimal le vom consacra un capitol întreg (vezi Cap. IV).

² Herodian — istoric grec din secolul II—III e.n. Din operele lui, oamenii de știință au aflat pentru prima oară despre numerația atică. Cea mai veche mențiune despre această numerație datează din secolul VI î.e.n.

rația romană simbolurile pentru numerele 1, 10, 100, 1 000 pot fi repetate de 4 ori, în schimb e s t e i n t e r z i s să se scrie numărul mai mic în stînga celui mai mare.



Fig. 6 — Exemple care explică modul de scriere a numerelor întregi în sistemul de numerație atic.

În figura 6 sînt date exemple de scriere a numerelor întregi în sistemul de numerație atic, care explică pe deplin metoda unei astfel de scrieri.

În secolul III î.e.n., în Grecia, în locul numerației atice, începe să se folosească așa-zisa numerație i o n i a n ă , în care numerele întregi sînt reprezentate prin literele alfabetului grecesc. Deasupra literelor care reprezintă numere se trage o linioară. Acest sistem de numerație se numește a l f a b e t i c .

Numeratia alfabetica ioniana este formata din 27 litere (vezi fig. 7; sub fiecare litera este trecutã denumirea și valoarea ei numericã). În figura 7 sînt menționate trei litere (fau, coppa și sampi), care în prezent au ieșit din uz. Nu ne putem însă lipsi de ele deoarece sînt necesare 27 de semne pentru notarea celor 27 de numere cheie.

Cu ajutorul tabelii din figura 7 putem scrie ușor orice număr întreg de la 1 pînã la 999 inclusiv. Drept exemplu, vom scrie în numerația ionianã numerele 234, 805, 560:

$\overline{\sigma\lambda\delta}$	$\overline{\omega\epsilon}$	$\overline{\varphi\xi}$
234	805	560

ᾠ	ᾢ	ᾣ	ᾤ	ᾥ	ᾦ	ᾧ	ᾨ	ᾩ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ἰ	ἡ	ἢ	ἣ	ἤ	ἥ	ἦ	ἧ	Ἠ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ῤ	ῖ	ῗ	Ῐ	Ῑ	Ὶ	Ί	῜	῝
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Fig. 7 — Scrierea numerelor în numerația alfabetică ioniană.

ᾀ	ᾆ	ᾇ	ᾈ	ᾉ	ᾊ	ᾋ	ᾌ	ᾍ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ἱ	ἲ	ἳ	ἴ	ἵ	ἶ	ἷ	Ἰ	Ἱ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ῥ	῔	῕	ῖ	ῗ	Ῐ	Ῑ	Ὶ	Ί
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Fig. 8 — Scrierea numerelor în numerația alfabetică slavă.

Într-un astfel de sistem de numerație pot fi scrise și numere mai mari decît o mie. Pentru aceasta, lîngă literă (în stînga sus) se pune un apostrof ' (existența apostrofului indică că valoarea literei respective este de o mie de ori mai mare), de exemplu:

'α înseamnă 1 000, 'β înseamnă 2 000,
'ι înseamnă 10 000, 'χ înseamnă 20 000.

Probabil că ați observat că numerația ioniană este zecimală, dar nu și pozițională. Această mențiune se referă și la celelalte numerații alfabetice.

NUMERAȚIA SLAVĂ

Popoarele slave au folosit și ele numerația alfabetică. În figura 8 sînt reprezentate 27 de litere ale alfabetului slav.

Sub fiecare literă este scrisă valoarea ei numerică. Deasupra literei care reprezintă un număr se pune un semn numit „titlo“ (fig. 8).

NUMERAȚIA BABILONIANĂ

Una din cele mai interesante dintre numerațiile vechi este cea babiloniană, care a apărut aproximativ cu 2 000 de ani înaintea erei noastre. Acesta este primul sistem de numerație pozițională pe care-l cunoaștem. În sistemul babilonian numerele erau reprezentate numai cu ajutorul a două semne: o pană verticală ∇ , cu care se notau unitățile și o pană orizontală \langle , care nota zecile. Astfel de pene se imprimau pe plăci de lut cu niște bețișoare ascuțite de forma unei prisme triunghiulare. De aici a și venit denumirea de „cuneiform“ — pe care o poartă scrierea babilonienilor.

Cu ajutorul celor două semne toate numerele întregi de la 1 pînă la 59 se scriau după sistemul zecimal, ca și în numerația egipteană; adică semnele pentru zeci și pentru unități erau repetate de atîtea ori cîte zeci și unități existau în număr. Dăm cîteva exemple explicative:

$$\begin{array}{c}
 \left\langle\left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle = 20 + 5 = 25 \qquad \left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle \left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle = 40 + 7 = 47 \\
 \begin{array}{c} \left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle \left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle = 50 + 9 = 59
 \end{array}
 \end{array}$$

Pînă aici nu observăm încă nimic deosebit. Începînd însă cu numărul 60 apare o noutate: numărul 60 se scrie cu același semn care e folosit și pentru 1, numai cu un interval mai mare între el și celelalte semne. Mai departe scrierea se face după sistemul zecimal, atît cu unități cît și cu zeci. Dăm și aici exemple:

$$\nabla \left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle = 1 \cdot 60 + 5 = 65, \qquad \nabla \left\langle\left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle = 1 \cdot 60 + 23 = 83,$$

$$\left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle \left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle = 5 \cdot 60 + 2 = 302, \qquad \left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle \left\langle\left\langle\left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle\right\rangle = 12 \cdot 60 + 34 = 754$$

Astfel pot fi reprezentate numerele de la 1 pînă la $59 \cdot 60 + 59 = 3599$.

Mai departe vine unitatea din noua categorie (adică numărul $1 \cdot 60 \cdot 60 = 3600$), care de asemenea se notează cu semnul prevăzut pentru unități, de exemplu:

$$\nabla \left\langle\left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle \left\langle\left\langle\begin{array}{c} \text{▲} \\ \text{▲} \\ \text{▲} \end{array}\right\rangle = 1 \cdot 60 \cdot 60 + 12 \cdot 60 + 21 = 4341$$

În felul acesta unitatea de ordinul al doilea reprezentată cu același semn este de 60 de ori mai mare decît unitatea de ordinul întâi, iar unitatea de ordinul al treilea este de 60 de ori mai mare decît unitatea de ordinul al doilea și de $60 \cdot 60 = 60^2 = 3600$ ori mai mare decît unitatea de ordinul întâi etc.

— Ei, dar ce facem dacă lipsesc unitățile de un ordin intermediar? veți spune dumneavoastră. Cum se scrie, de exemplu, numărul $1.60.60 + 23 = 3\ 623$? Dacă-l vom scrie sub forma:



atunci el poate fi confundat cu numărul $1.60 + 23 = 83$. Pentru a evita o asemenea greșeală s-a introdus mai târziu semnul separator ce a jucat același rol pe care îl are în numerația noastră semnul „zero”. Cu ajutorul acestui semn separator numărul $3\ 623$ se scrie astfel:

$$\nabla \lll \lll \lll = 1.60.60 + 0.60 + 23 = 3623$$

La sfârșitul numărului babilonienii nu puneau niciodată semnul separator. De aceea, numerele 3 , $3.60 = 180$, $3.60.60 = 10\ 800$ etc. erau reprezentate la fel. Trebuia deci să se ghicească după sensul textului despre care din aceste numere este vorba.

Este interesant faptul că în matematica babiloniană pentru scrierea fracțiilor se folosea aceeași scriere ca și pentru numerele întregi. De exemplu, trei pene

verticale scrise alături puteau să însemne $\frac{3}{60}$, sau $\frac{3}{60.60} =$
 $= \frac{3}{3\ 600}$, sau $\frac{3}{60.60.60} = \frac{3}{216\ 000}$ etc.

Prin urmare, ce concluzie putem trage acum asupra particularităților numerației babiloniene?

În primul rând observăm că acest sistem de numerație este pozițional. Într-adevăr, un același semn poate să reprezinte atât 1 cât și 1.60 și $1.60.60 = 1.60^2 = 1.3\ 600$ etc., în funcție de locul pe care-l ocupă în scriere. Tot așa ca și în sistemul nostru de numerație, o aceeași cifră, de exemplu cifra 2, poate reprezenta numerele: 2, ori $2.10 = 20$, ori $2.10.10 = 2.10^2 = 2.100 = 200$ etc., după locul pe care-l ocupă. Dar principiul pozițional se folosește în numerația babiloniană numai în ordinele multiple de 60. De aceea ea se numește numerație pozițională sexagesi-

mală. Numerele pînă la 60 se scriau în acest sistem după principiul zecimal.

În al doilea rînd, numerația babiloniană admite scrierea simplă a fracțiilor cu numitori multipli lui 60, adică a fracțiilor cu numitorul 60, $60.60 = = 3\ 600$, $60.60.60 = 216\ 000$ etc.

Fracțiile cu numitori multipli lui 60 au fost, la timpul lor, foarte răspîndite. Chiar și astăzi noi împărțim o oră în 60 minute, iar un minut în 60 secunde. Tot astfel, împărțim cercul în 360 de părți, iar fiecare parte constituie un grad; gradul îl divizăm în 60 minute, iar un minut în 60 secunde.

După cum vedeți sistemul indian de numerație pe care-l folosim pe scară largă nu este singurul mijloc de scriere a numerelor.

Au existat încă multe alte metode de reprezentare a numerelor; astfel, de exemplu, mulți negustori își aveau semnele lor secrete pentru notarea numerelor — așa-numitele „simboluri“ comerciale. Să vorbim acum și despre ele.

„SIMBOLURILE“ COMERCIALE SECRETE

În perioada de dinainte de revoluție¹, pe obiectele cumpărate de la „ofeni“² sau din magazinele particulare, mai ales în cele de provincie, se puteau observa adesea însemnări cu litere ca:

a v e v u o

Aceste semne reprezentau prețul fix al obiectului, pe care negustorul rus îl însemna pe marfă, astfel încît el să nu poată fi cunoscut de cumpărător. Aruncînd o privire asupra acestor litere, negustorul le înțelegea sensul ascuns și, adăugînd un supliment la preț, spunea cumpărătorului prețul cerut (bineînțeles, încărcat).

¹ Marea Revoluție Socialistă din Octombrie.

² „Ofenia“ este negustorul ambulant care vindea în sate obiecte de galanterie, manufactură, cărți, gravuri.

Sistemul era foarte simplu. Negustorul alegea un cuvînt oarecare, format din zece litere diferite; de cele mai multe ori erau alese cuvintele: „trudoliubie“¹ „pravosudie“. Prima literă din cuvînt însemna 1, a doua 2, a treia 3 etc; cu litera a zecea era notat zeroul. Cu ajutorul acestor litere-cifre negustorul scria pe mărfuri prețul lor, ținînd în secret „cheia“ sistemului său.

Dacă, de exemplu, era ales cuvîntul:

p r a v o s u d i e
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

atunci prețul de 4
ruble și 75 copeici se
scria astfel:

v u o

Uneori prețul se scria pe marfă sub forma unei fracții; de exemplu, dacă pe o carte era notat (fig. 9)

$$\frac{oe}{tro}$$

aceasta, după cheia „trudoliubie“, însemna că prețul cărții este de 50 copeici, iar negustorul cerea pe ea o rublă și 25 de copeici.

PIONI ÎN LOC DE CIFRE

Din cele spuse mai sus este ușor de înțeles că numerele pot fi reprezentate nu numai cu ajutorul cifrelor, ci și al oricăror alte semne sau chiar obiecte: creioane,

¹ În limba rusă diftongul iu se scrie cu o singură literă (ю), astfel încît cuvîntul „trudoliubie“ (hărnicie) este format din zece litere.

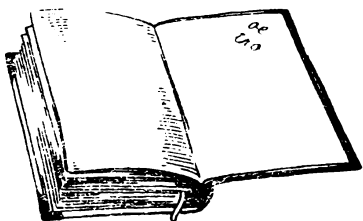


Fig. 9 — „Nota“ comercială de pe copertă (nota reprezentată aici arată că valoarea cărții este de 50 copeici, iar prețul de vînzare 1 rublă și 25 copeici).

penițe, rigle, radiere etc., dacă convenim să-i atribuim fiecărui obiect semnificația unei anumite cifre. Putem reprezenta cu ajutorul acestor cifre-obiecte chiar și operațiuni aritmetice cu numere: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea.

Într-o revistă de șah era propusă următoarea problemă: Să se dezvăluie adevăratul sens al exemplului de împărțire al numerelor reprezentată în figura 10, în care aproape toate cifrele sînt înlocuite cu pionii. Din 28 de cifre se cunosc numai două: una (8) la cît și cealaltă (1) în rest. S-ar părea că este imposibil de găsit valoarea celorlalte 26 de cifre notate cu pionii. Și totuși această problemă este relativ simplă pentru oricine, dacă își dă seama de sensul diferitelor operații care intră în componența împărțirii.

Iată raționamentul care ne conduce la rezultat: Cea de-a doua cifră a cîtului este, fără îndoială, zero, pentru că la restul de la prima scădere nu s-a coborît o singură cifră, ci două. Într-adevăr, după ce am coborît prima cifră s-a format un număr mai mic decît împărțitorul, iar în astfel de cazuri la cît apare în locul respectiv un zero.

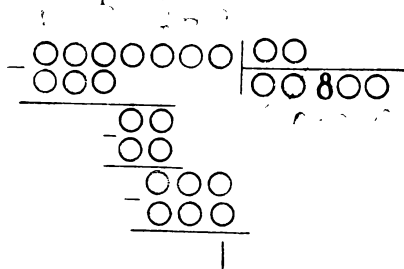


Fig. 10 — Găsiți sensul adevărat al exemplului de împărțire a numerelor din această figură.

Prin raționamente asemănătoare stabilim că cea de-a patra cifră a cîtului este de asemenea zero.

Privind bine așezarea pionilor observăm că împărțitorul format din două cifre, fiind înmulțit cu 8, dă un număr cu două cifre; iar la înmulțirea lui cu prima

cifră (deocamdată necunoscută) a cîtului se obține un număr format din trei cifre. Prin urmare, această primă cifră a cîtului este mai mare decît 8; o astfel de cifră nu poate fi decît 9.

În același mod stabilim că și ultima cifră a cîtului este 9.

Acum cunoaștem cîtul; el este egal cu 90 809. Rămîne să stabilim împărțitorul. După cum se vede în figura 10, împărțitorul este format din două cifre; în afară de aceasta, așezarea pionilor arată că numărul din două cifre, la înmulțirea cu 8, dă tot un număr format din două cifre; dacă însă el este înmulțit cu 9, atunci produsul este format din trei cifre. Ce număr este acesta? Facem încercări începînd cu numărul cel mai mic cu două cifre, 10:

$$10 \times 8 = 80$$

$$10 \times 9 = 90$$

După cum vedem numărul 10 nu satisface condițiile cerute: ambele produse de mai sus sînt numere de cîte două cifre. Facem încercarea cu următorul număr format din două cifre, 11:

$$11 \times 8 = 88$$

$$11 \times 9 = 99$$

După cum se vede, nici numărul 11 nu este bun: din nou ambele produse sînt numere alcătuite din două cifre. Să refaceam calculul pentru numărul 12:

$$12 \times 8 = 96$$

$$12 \times 9 = 108$$

Numărul 12 satisface cerințele de mai sus. Oare mai există numere de acest fel? Să încercăm cu 13:

$$13 \times 8 = 104$$

$$13 \times 9 = 117$$

Ambele produse sînt numere formate din trei cifre; prin urmare, 13 nu este bun. Desigur că nici numerele mai mari decît 13 nu pot fi de folos.

Deci, singurul împărțitor posibil este numărul 12. Cunoscînd împărțitorul, cîtul și restul, găsim ușor deîmpărțitul și putem reface întregul proces al împărțirii:

$$\text{deîmpărțitul} = 90\,809 \times 12 + 1 = 1\,089\,709$$

Așadar, avem următorul exemplu de împărțire inexactă:

$$\begin{array}{r|l} 1089709 & 12 \\ \hline 108 & 90809 \\ \hline & 97 \\ & \underline{-96} \\ & 109 \\ & \underline{-108} \\ & 1 \end{array}$$

După cum se vede, cunoscînd numai două cifre am reușit să aflăm 26 de cifre necunoscute.

ARITMETICA LA MICUL DEJUN

În fața noastră sînt o serie de operații cu numere notate cu ajutorul pieselor din serviciul de masă (fig. 11). Furculița, lingura, cuțitul, urciorul, ceainicul, farfuria — toate acestea sînt simboluri care înlocuiesc fiecare o anumită cifră.

Privind acest grup de cuțite, furculițe, vase etc. căutați să ghiciți ce anume cifre sînt reprezentate aici.

La prima vedere problema pare foarte grea: trebuie să ghicim adevărate hieroglife, după cum a făcut cîndva francezul Champollion¹. Problema noastră este de fapt mult mai ușoară: știm doar că aici cifrele, deși sînt notate cu furculițe, cuțite, linguri etc., sînt

¹ Champollion (1790—1832) este un cunoscut filolog francez, fondator al egiptologiei — știință care studiază limba, istoria și cultura Egiptului antic și a țărilor învecinate lui.

totuși scrise după sistemul numerelor zecimale; adică știm că farfuria care se află pe locul al doilea (numărînd din dreapta) este cifra zecilor, că obiectul din dreapta ei este cifra unităților, iar în stînga se află cifra sutelor. Pe urmă, se cunoaște că așezarea tuturor acestor obiecte are un anumit sens, care decurge din esența operațiilor aritmetice efectuate cu numerele reprezentate cu ajutorul lor. Toate acestea pot însemna mult în rezolvarea problemei propuse.

Iată cum putem găsi sensul obiectelor reprezentate aici: Privind primele trei rînduri din desenul nostru, vedeți că „lingura” înmulțită cu „lingura” dă un „cuțit”. În rîndurile următoare se observă că „cuțitul” minus „lingura” dă „lingură” sau că „lingura” + „lingura” = „cuțit”. Care este cifra care dă același rezultat atît la adunare cît și la înmulțire?

Această cifră nu poate fi decît doi, pentru că $2 \times 2 = 2 + 2$. Astfel, aflăm că „lingura” = 2 și, prin urmare, „cuțitul” = 4.

Acum mergem mai departe. Ce cifră este notată cu „furculița”? Vom încerca să ghicim privind primele trei rînduri în care furculița participă la înmulțire și rîndurile III, IV și V, unde aceeași furculiță figurează în operațiunea de scădere. Din grupa scăderii

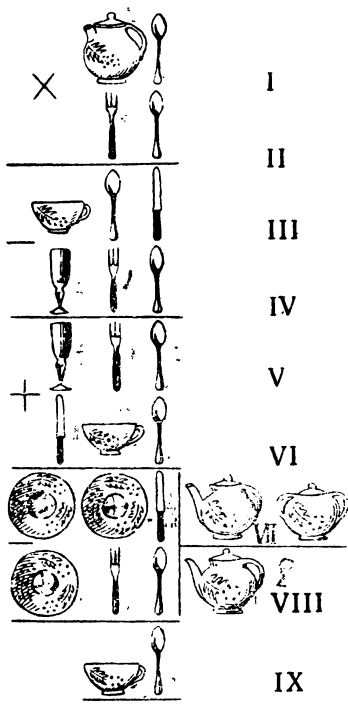


Fig. 11 — Care sînt numerele cu care se efectuează operațiile aritmetice aici?

se observă că scăzînd în ordinul zecilor furculița din lingură se obține la rezultat o furculiță, adică la scăderea 2 — „furculița“ se obține „furculița“. Acest lucru se poate întîmpla în două cazuri: fie „furculița“ = 1 și atunci $2 - 1 = 1$; fie „furculița“ = 6 și atunci scăzînd 6 din 12 (unitatea de ordin superior se împrumută de la „ceașcă“) rezultă 6. Ce alegem: 1 sau 6?

Să vedem dacă 6 este potrivit pentru „furculiță“ și în celelalte operații. Priviți cu atenție înmulțirea numerelor aflate în rîndul I și II. Cînd „furculița“ = 6, atunci în rîndul al II-lea se află numărul 62 (noi știm de acum că lingura = 2). Nu este greu de înțeles că în acest caz în rîndul I trebuie să se afle numărul 12, adică „urciorul“ notează cifra 1. Într-adevăr, dacă „urciorul“ ar fi notat cifra 2 sau orice cifră mai mare, atunci produsul numerelor din rîndul I și II ar fi fost un număr format din patru și nu din trei cifre. Astfel, dacă „furculița“ = 6, atunci în rîndul I se află numărul 12, iar în rîndul II este 62. Produsul lor este $12 \times 62 = 744$.

Dar acest lucru nu se poate întîmpla deoarece cifra zecilor din produs este „lingura“, adică 2 și nu 4, cum am obținut noi. Prin urmare, nu putem admite că „furculița“ = 6, ci trebuie să o acceptăm egală cu unu.

Aflînd pe această cale, prin încercări repetate, că „furculița“ înseamnă cifra 1, mergem mai departe cu pași mult mai siguri și rapizi. Din operația de scădere din rîndurile III și IV se constată că „ceașca“ simbolizează fie 6, fie 8. La 8 însă trebuie să renunțăm, pentru că ar însemna că „păhărelul“ = 4, iar noi știm că cu cifra 4 este notat „cuțitul“. Astfel, „ceașca“ reprezintă cifra 6 și, prin urmare, „păhărelul“ — cifra 3.

Ce cifră este notată în rîndul I cu „urciorul“? Acest lucru poate fi aflat ușor cunoscînd produsul (rîndul III, 624) și unul din factorii înmulțirii (rîndul II, 12). Împărțind 624 cu 12, obținem 52. Prin urmare „urciorul“ = 5.

Semnul „farfurie“ se determină simplu: în rîndul 7 „farfuria“ = „furculița“ + „ceașca“ = „păhărelul“ + „cuțit“, adică „farfuria“ = $1 + 6 = 3 + 4 = 7$.

Rămîne să se stabilească valoarea cifrică a „ceai-
nicului“ și a „zaharniței“ din rîndul 7. Deoarece pentru

cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6 și 7 s-au găsit obiectele respective, rămîne să alegem numai între 8 și 9 și 0. Înlocuind obiectele cu cifrele corespunzătoare, în scăderea reprezentată în ultimele trei rînduri obținem următoarea așezare (cu literele c și z sînt notate „ceainicul“ și „zaharnița“):

$$\begin{array}{r} 774 : cz = c \\ 712 \\ \hline 62 \end{array}$$

După cum vedem, numărul 712 este produsul dintre două numere necunoscute cz și c , care, desigur, nu pot fi nici zero și nici un număr oarecare terminat în zero, deci, nici c și nici z nu pot fi zero. Rămîn două presupuneri: $c = 8$ și $z = 9$ sau invers $c = 9$ și $z = 8$. Însă înmulțind 98 cu 8 noi nu obținem 712; prin urmare, „ceainicul“ simbolizează 8, iar „zaharnița“ 9 (într-adevăr: $89 \times 8 = 712$).

Astfel, pe baza unor calcule aritmetice simple noi am dezlegat scrierea hieroglifică cu obiectele ce fac parte din serviciul de masă:

urciorul	înseamnă 5	cuțitul	4
lingura	2	ceașca	6
furculița	1	păhărelul	3
ceainicul	8	zaharnița	9
farfuria	7		

Iar întregul șir de operații aritmetice, reprezentat prin acest serviciu original, capătă următorul sens:

$$\begin{array}{r} \times 52 \\ 12 \\ \hline 624 \\ - 312 \\ \hline + 312 \\ 462 \\ \hline 774 : 89 = 8 \\ - 712 \\ \hline 62 \end{array}$$

Rebusurile aritmetice reprezintă un joc interesant: ghicirea unui cuvînt prin rezolvarea unei probleme asemenea aceleia date în paragraful precedent. De exemplu: să presupunem că o persoană se gîndește la un cuvînt format din 10 litere care nu se repetă, cum ar fi „potîrniche“, „importanță“. Luînd literele acestui cuvînt drept cifre, se reprezintă cu ajutorul literelor un oarecare caz de împărțire. Dacă cuvîntul ales este „potîrniche“, atunci poate fi luat următorul exemplu de împărțire:

p o t î r n i c h e	—	123564		3548	—	potrnî		trîc
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0		10644		34		penî		tî
deîmpărțitul — potrnî,	—	17124				—		pipoî
123564		14192				—		pîpho
împărțitorul — trîc,		2932						ohto
3548								

Reprezentarea în litere a unui anumit caz de împărțire i se înmînează celui ce ghicește rebusul și care trebuie, privind această îngrămădire de litere lipsită de sens la prima vedere, să afle cuvîntul ales. Cititorul știe deja cum trebuie căutată valoarea cifrică a literelor în cazurile de acest fel; s-a explicat la problema din paragraful precedent. Cu puțină răbdare aceste rebusuri aritmetice pot fi ghicite, dacă exemplul este suficient de lung și dă un material necesar pentru presupuneri și verificări. Cînd sînt alese cuvinte care dau un caz de împărțire prea scurt, de exemplu:

i m p o r t a n ț ă	—	ntaor		impo
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0		impo		aă
deîmpărțitul — ntaor, 86745				
împărțitorul — impo, 1234				ptr

atunci dezlegarea rebusului este foarte grea. În asemenea cazuri trebuie să-l rugăm pe cel care a ales cuvîntul să continue împărțirea pînă la sutimi sau chiar miimi,

adică să obțină la cît încă două sau trei zecimale. Iată un exemplu de împărțire pînă la sutimi:

j u d e c ă t o r i 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	— uătde — uctă	uctă ji, dt
deîmpărțitul — uătde, 26734	— rtei	
împărțitorul — uctă, 2576	— ttuo	
	— uijui	
	— joidu	
	— uiio	

Dacă în cazul acesta ne-am fi oprit la numărul întreg (ji), atunci ghicirea cuvîntului ales nu ar fi fost posibilă.

Cuvintele care pot fi alese drept „cheie“ pentru asemenea rebusuri nu sînt chiar atît de puține pe cît s-ar părea; în afara celor indicate mai sus pot fi folosite cuvintele:

exhaustori , planetobus.

Propunem mai departe cititorului să dezlege singur următorul șir de rebusuri:

Rebusul nr. 1

— m d n ț n p — i e a r	i e a r — i u e
— ț n u n — n u m a	
— i p p n p — i i ț m n	
— i r u u	

Rebusul nr. 2

— s o c n r a — n d s o	d t e — d a s
— i e c r — i s d n	
— o i i a — o s o r	
— c n c	

Rezolvarea acestor rebusuri o puteți vedea la sfîrșitul cărții.

SĂ SE GĂSEASCĂ UN NUMĂR DIN TREI CIFRE

Vom examina încă un rebus aritmetic de un alt tip. Numărul căutat este format din trei cifre diferite A, B, C. Vom scrie acest lucru astfel: ABC, ținînd

minte că C este cifra unităților, B — a zecilor, A — a sutelor. Trebuie găsit acest număr cînd se știe că:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad ABC \\
 \quad \quad BAC \\
 \hline
 + \quad * * * * \\
 \quad * * * A \\
 * * * B \\
 \hline
 * * * * * *
 \end{array}$$

Cu steluțe s-au notat cifrele necunoscute.

Rezolvarea rebusului o facem în ordinea următoare:

Constatăm pentru început că nici A, nici B și nici C nu sînt egale cu 0. Sîntem convinși de lucrul acesta pentru că, în caz contrar, nu s-ar fi putut obține trei produse parțiale.

Observăm mai departe că:

produsul $C \times A$ se termină cu A,

Produsul $C \times B$ se termină cu B;

deducem de aici că C poate fi ori 1, ori 6. În ce privește 1 raționamentul este evident; pentru 6 el se ilustrează cu exemple:

$$6 \times 2 = 12; \quad 6 \times 8 = 48; \quad 6 \times 4 = 24$$

Celelalte cifre nu au aceste proprietăți. Dacă C ar fi egal cu 1, atunci primul produs parțial nu ar fi format din patru cifre, ci numai din trei. Rămîne, evident, o singură posibilitate, $C = 6$.

Ne-am convins acum că $C = 6$ și că, prin urmare, A și B pot fi numai 2, 4 sau 8. Cum cel de-al doilea produs parțial este format numai din trei cifre, înseamnă că A nu poate fi nici 4 și nici 8. Așadar, $A = 2$.

Pentru B rămîn două posibilități: $B = 4$ și $B = 8$. Cum $A = 2$ și $B = 4$, ultimul produs parțial ar avea trei, și nu patru cifre. Prin urmare, $B = 8$.

Astfel, avem: $A = 2$, $B = 8$, $C = 6$. Numărul căutat este 286, iar înmulțirea are forma următoare:

$$\begin{array}{r} \times 286 \\ 826 \\ \hline 1716 \\ 572 \\ 2288 \\ \hline 236236 \end{array}$$

SISTEMUL ZECIMAL ÎN RAFTURILE CU CĂRȚI

Sistemul de numerație zecimal își găsește utilizarea pînă și acolo unde s-ar părea că nu ne putem aștepta, și anume în biblioteci, la așezarea cărților pe domenii.

În unele biblioteci publice se folosește o astfel de clasificare a cărților, în care o aceeași carte este notată pretutindeni cu același număr („cifru“). Acest sistem se numește *z e c i m a l*; el absolvă cititorul de necesitatea de a consulta catalogul atunci cînd vrea să-și aleagă o carte dintr-un anumit domeniu.

Sistemul este simplu și foarte comod. El constă în aceea că fiecare domeniu de cunoștințe este notat cu un număr, care arată prin el însuși locul ce-l ocupă domeniul respectiv în sistemul general de cunoștințe.

Toate domeniile de cunoștințe sînt împărțite, în primul rînd, la zece; notarea se face cu cifre de la 0 pînă la 9:

0. Publicații cu caracter general.

1. Filozofie.

2. Istoria religiei și literatura antireligioasă.

3. Științe sociale. Drept.

4. Filologie. Limbi.

5. Științe fizico-matematice și alte științe ale naturii.

6. Științe aplicate (medicină, tehnică, agricultură etc.).

7. Artă.

8. Literatură.

9. Istoria, geografia, bibliografiile.

Prima cifră a semnului numeric (adică a cifrului) arată direct, conform acestui sistem, domeniul din care face parte cartea respectivă. Fiecare carte de filozofie

are un cifru care începe cu 1, de matematică — cu 5, de tehnică — cu 6 etc. Dacă, de exemplu, cifrul începe cu 4, atunci, chiar fără a deschide cartea, vom ști că ea face parte din domeniul lingvisticii.

Mai departe, fiecare din domeniile enumerate mai sus se împart în zece subdomenii, care se notează de asemenea cu cifre de la 0 pînă la 9; aceste cifre se scriu în cifru pe locul al doilea. De exemplu, capitolul 5, care conține cărțile de fizică, matematică și științe naturale, se împarte în următoarele subcapitole:

50. Lucrări generale de fizică, matematică și științe naturale.

51. Matematica.

52. Astronomia. Geodezia.

53. Fizica. Mecanica teoretică.

54. Chimia. Mineralogia.

55. Geologia.

56. Paleontologia.

57. Biologia. Antropologia.

58. Botanica.

59. Zoologia.

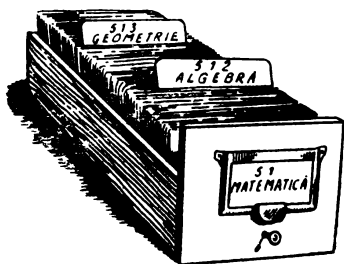


Fig. 12 — Cutia cartonașelor catalogului de bibliotecă întocmit după sistemul zecimal.

În mod corespunzător se împart și celelalte capitole. De exemplu, în capitolul științelor aplicate (6) subcapitolul medicinei se numerează cu 61; agricultura — 63, comerț și căi de comunicații — 65; industria chimică și tehnologie — 66 etc. Tot astfel în capitolul 9 toate cărțile de geografie se notează cu 91 etc.

Adăugînd la primele două cifre o a treia, caracterizăm conținutul cărții și mai precis, arătăm din ce ramură a subdomeniului respectiv face parte (fig. 12). De exemplu, la subcapitolul matematică (51) cifra 1 așezată în locul al treilea arată că lucrarea face parte din domeniul aritmeticii (511); cu cifrul 512 se notează cărțile de algebră, cu 513 — de geometrie. La capitolul fizicii (53) cărțile de electricitate cu cifrul 537, de optică — 535, de termodinamică — 536.

Într-o astfel de bibliotecă organizată după sistemul zecimal căutarea cărții cerute este foarte mult simplificată. Dacă vă interesează geometria, vă duceți direct la dulapurile unde cifrele încep cu 5, găsiți dulapul unde sînt păstrate cărțile cu cifrul 51... și examinați numai acele rafturi în care se găsesc cărțile cu cifrul 513... Aici sînt adunate toate cărțile de geometrie existente în biblioteca respectivă.

Oricît de bogată ar fi biblioteca nu se poate întîmpla să iasă vreo carte din acest sistem de notare.

SEMNELE ȘI DENUMIRILE ARITMETICE LA DIFERITE POPOARE

Se obișnuiește să se creadă că semnele aritmetice sînt, într-o anumită măsură, internaționale, că ele sînt aceleași pentru toate popoarele de cultură europeană. Aceasta este just doar în ce privește majoritatea semnelor, dar nu pentru toate semnele. Semnele + și —, semnele \times și : sînt folosite, cu același sens, atît de nemți, cît și de francezi și englezi. Însă punctul ca semn al înmulțirii nu se folosește la diferite popoare în mod identic. Unii scriu 7.8, alții — 7·8, ridicînd punctul pînă la mijlocul cifrei. Același lucru trebuie să-l spunem și despre semnul cu care indicăm fracția, adică despre semnul care separă partea zecimală de numărul întreg. Unii scriu, ca și noi, 4,5, alții 4.5, iar alții 4·5; așezînd punctul mai sus de mijloc. Englezii și americanii neglijează zeroul din fața fracției zecimale, lucru pe care în continentul european nu-l face nimeni. În cărțile americane întîlnim notații ca: .725, sau ·725, sau chiar ,725 în loc de 0,725.

Nici împărțirea numărului în clase nu se face în același mod. În unele țări se pun între clase puncte (15.000.000), în altele virgule (15,000,000). La noi se obișnuiește să nu se pună între clase nici un semn, lăsînd doar o distanță între ele (15 000 000).

Este interesant de urmărit cum se schimbă denumirea aceluiași număr de la o limbă la alta. De exemplu, numărul 18 îl numim „optsprezece“, adică se pronunță

întîi unitățile (8), și apoi zecile (10). În aceeași succesiune este spus acest număr de un german: achtzen, adică 8...10. Francezul pronunță altfel: 10...8 (dixhuit). Cît de variată este denumirea aceluiași număr 18 la diferitele popoare o arată următorul fragment dintr-o tabelă întocmită de un cercetător:

în rusă8...10
în germană8...10
în franceză10...8
în armeană10 + 8
în greacă8 + 10
în latinăfără 2, 20
în noua zeelandeză11 + 7
în valeză3 + 5...10
în lituană8 peste 10
în ainosă10—2 peste 10
în careacă3...5 peste 10

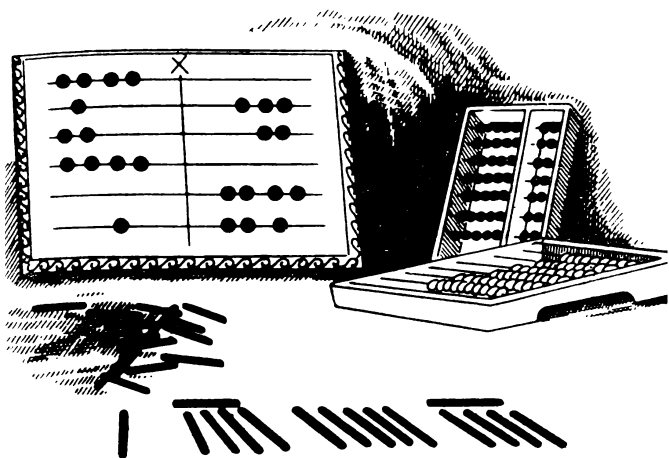
Este curioasă denumirea pe care a căpătat-o același număr 18 la un trib din Groenlanda: „de pe celălalt picior 3“. Cu toate că această denumire este neobișnuită, ea se explică în mod natural prin metoda de a număra cu ajutorul degetelor de la mîini și de la picioare. Să dezvăluim sensul ei:

numărul degetelor ambelor mîini10	
“	“ de la un picior 5
“	“ de la celălalt picior 3
Total		18

Într-un mod asemănător se explică și denumirea caraibă a numărului 18: „toate mîinile mele, 3, mîna mea“ (adică 10 + 3 + 5).

CURIOZITĂȚI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 \\ 1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 - 6 + 7 + 8 \times 9 \\ 1 + 2 \times 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 \\ 1 \times 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9 \end{cases}$$



CAPITOLUL II

VECHIUL ABAC ȘI URMAȘII SĂI

PROBLEMA CEHOVIANĂ

Să ne amintim problema de aritmetică, renumită în felul ei, care l-a pus în încurcătură atât de mult pe elevul de clasa a VII-a Ziberov, din povestirea lui Cehov „Meditatorul“.

„Un negustor a cumpărat 138 arșini de stofă neagră și de stofă albastră cu 540 ruble. Câți arșini a cumpărat el din fiecare, dacă stofa albastră a costat 5 ruble arșinul, iar cea neagră 3 ruble?“

Cehov descrie cu umor fin cât de mult s-au zbătut la această problemă atât meditatorul cât și elevul său Petea, de 12 ani; pînă la urmă i-a scos din încurcătură tatăl lui Petea Udodov.

«Petea repetă problema și pe loc, fără să spună un cuvînt, începe să împartă 540 cu 138.

— Pentru ce împarți? Stai nițel! De altfel, așa-i... continuă! Rămîne un rest? Aici nu poate fi rest. Dă-mi tabla, să fac eu împărțirea!

Ziberov face împărțirea, obține 3 cu un rest și șterge repede totul.

„Ciudat... gîndește el, trecîndu-și degetele prin păr și roșind. Cum naiba s-o fi rezolvînd? Hm!... Asta e

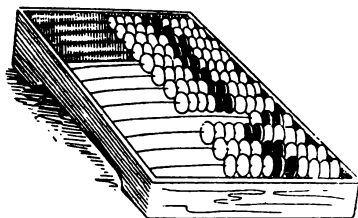


Fig. 13 — Abacul rus.

o problemă de algebră cu două necunoscute și nu o problemă de aritmetică...”

Meditatorul se uită la soluții și vede 75 și 63.

„Hm!... curios... Oare cum se face? Se adună 5 cu 3, și apoi se împarte 540 la 8? Așa o fi? Nu, nu-i așa“.

— Hai, rezolv-o! — îi spune el băiatului.

— Ce te gîndești atîta? Problema e simplă de tot! — îi spune și Udodov lui Petea. — Mare tîmpit mai ești! Rezolvă-i-o dumneata, Egor Alexeici.

Egor Alexeici ia condeiul în mînă și se apucă să rezolve. Începe să se bîlbîie, roșește, pălește.

— La drept vorbind, e o problemă de algebră, — spune el. — Poate fi rezolvată prin x și y . Dar poate fi rezolvată și așa. Vezi, facem împărțirea... ai înțeles de ce? Pe urmă scăderea... Pricepi? Sau știi ce... Gîndește-te și rezolv-o singur pentru mîine...

Petea zîmbește șiret. Udodov zîmbește și el. Amîndoi au înțeles încurcătura profesorului. Elevul de clasa a VII-a se rușinează și mai rău, se scoală în picioare și începe să se plimbe dintr-un colț în altul al încăperii.

— Se poate rezolva și fără algebră, — spune Udodov oftînd și întinzînd mîna spre abac. Poftim...

Țăcănește cu bilele abacului și obține 75 și 63, ceea ce și trebuia.

— Uite... așa socotim noi, cei fără multă știință.»

Această istorioară, care ne face să rîdem de stînjeneala sărmanului meditator, pune trei probleme noi, și anume:

1. Cum intenționa meditatorul să rezolve problema pe cale algebrică?

2. Cum trebuia s-o rezolve Petea?

3. Cum a rezolvat-o tatăl lui Petea, la abac, „fără multă știință“?

La primele două probleme, probabil, vom răspunde fără greutate, dacă nu chiar toți, dar foarte mulți cititori ai cărții noastre.

Cea de a treia problemă nu este tot atît de simplă. Dar, să le examinăm pe rînd.

1. Elevul din clasa a VII-a (meditatorul) era gata să rezolve problema „prin x și y “, fiind convins de faptul că, „la drept vorbind, e o problemă de algebră“. Și el, credem, ar fi rezolvat-o cu ușurință recurgînd la ajutorul unui sistem de ecuații. Întocmirea unui sistem de două ecuații cu două necunoscute, pentru problema dată, este foarte simplă; iată aceste două ecuații:

$$x + y = 138,$$

$$5x + 3y = 540,$$

unde x este numărul de arșini de stofă albastră, iar y — de stofă neagră.

2. Problema poate fi rezolvată ușor și pe cale aritmetică. Dacă ați fi nevoiți să o rezolvați, ați începe cu presupunerea că întreaga cantitate de stofă cumpărată a fost albastră. Atunci pentru 138 arșini de stofă albastră ar fi trebuit să se plătească $5 \times 138 = 690$ ruble; aceasta ar fi fost cu $690 - 540 = 150$ ruble mai mult decît s-a plătit în realitate. Diferența de 150 de ruble arată că s-a cumpărat și o stofă neagră mai ieftină, cu 3 ruble arșinul. S-a cumpărat atîta

stofă ieftină încît din diferența de 2 ruble pentru fiecare arșin s-ar fi format 150 de ruble; este evident că numărul arșinilor de stofă neagră se va afla împărțind 150 cu 2. Obținem răspunsul 75; scăzînd acești 75 arșini din numărul total de 138 arșini, aflăm cîtă stofă albastră s-a cumpărat: $138 - 75 = 63$. Așa trebuia să rezolve problema și Petea.

3. A venit rîndul întrebării a treia: cum a rezolvat problema Udodov senior?

În povestire se spune pe scurt: „Țăcănește cu bilele abacului și obține 75 și 63, ceea ce și trebuia“.

Dar în ce constă oare acest calcul la abac? Care este metoda de rezolvare a problemei cu ajutorul abacului?

Soluția este următoarea: problema se rezolvă la abac prin aceeași metodă ca și pe hîrtie, cu ajutorul aceluiași operații aritmetice. Dar efectuarea lor se simplifică datorită avantajelor pe care abacele le oferă oricui știe să le manevreze. Este evident că „secretarul de gubernie la pensie“ Udodov știa să calculeze bine la abac, pentru că bilele lui, fără ajutorul algebrei, i-au dezvăluit rapid ceea ce meditatorul căuta să afle cu x și y . Să urmărim deci care erau operațiile făcute la abac de tatăl lui Petea.

Înainte de toate el trebuie, după cum știm, să înmulțească 138 cu 5. Pentru aceasta, conform regulilor de efectuare a calculelor la abac, a înmulțit întîi 138 cu 10, adică pur și simplu a trecut numărul 138 cu un rînd mai sus (vezi fig. 14 b), iar apoi a împărțit acest număr în două, tot la abac. Împărțirea se începe de jos: se înjumătățește numărul de bile luate pe fiecare sîrmă: dacă numărul de bile de pe sîrma respectivă este impar, atunci se transformă o bilă de pe această sîrmă în 10 bile de pe sîrma de jos.

În cazul nostru, de exemplu, 1 380 se împarte în două astfel: pe sîrma de jos unde s-au luat 8 bile se îndepărtează 4 bile (4 zeci), pe sîrma de mijloc din trei bile se îndepărtează una, una rămîne, iar a treia se înlocuiește, în gînd, cu zece bile de pe sîrma de jos și se împarte în două, adăugîndu-se 5 (zeci) la bilele de pe sîrma de jos; bila de pe sîrma de sus se transformă în 10 (sute), adăugînd 5 (sute) la bilele de pe sîrma

mijlocie. În rezultat pe sîrma de sus nu mai rămîne nici o bilă, pe sîrma din mijloc

$1 + 5 = 6$ sute, pe cea de jos $4 + 5 = 9$ zeci (fig. 14 c). În total sînt 690 unități. Operațiunile se fac repede, automat.

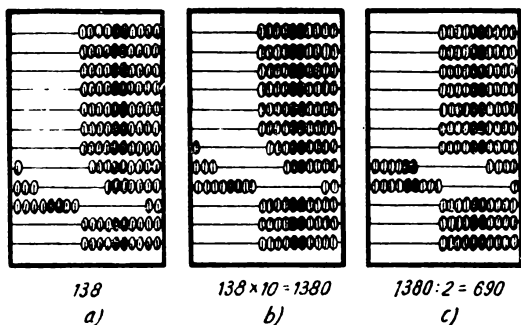


Fig. 14 — El a înmulțit mai întii 138 cu 10, adică a mutat pe abac numărul 138 cu un rînd mai sus, iar apoi a împărțit numărul cu 2.

Mai departe Udodov senior urma să scadă 540 din 690. Cunoaștem cu toții cum se face această operație la abac.

În sfîrșit, diferența obținută, 150, trebuia împărțită în două: Udodov a îndepărtat din 5 bile (zeci) 2, adăugînd 5 unități la rîndul de jos; apoi din bila de pe sîrma sutelor a adunat 5 (zeci) la rîndul de jos: s-au obținut 7 zeci și 5 unități, adică 75.

Toate aceste operații simple se efectuează la abac mult mai repede decît s-a descris aici.

CUM SE SOCOTEA ÎN ANTICHITATE

Oamenii au învățat să socotească din timpuri foarte vechi. Primul instrument natural pentru socotit au fost degetele mîinilor. Aici își are originea sistemul zecimal de numerație al multor popoare antice. Trebuie

să spunem că socotirea cu ajutorul degetelor a servit mult timp drept mijloc practic la diverse popoare, printre care și grecii antici. Să nu credeți că cu ajutorul degetelor se poate socoti numai pînă la zece. Din monumentele literaturii antice grecești, ajunse pînă la noi, aflăm că în secolele V și VI înainte de era noastră cal-

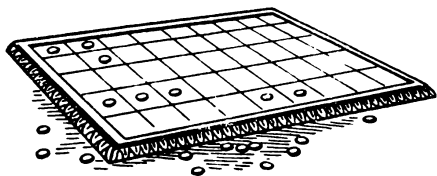


Fig. 15 — Anticii foloseau pentru calcul „abaca“.

culul pe degete era foarte răspîndit și putea să depășească o mie.

Mai târziu la egipteni, greci, romani, chinezi și la alte cîteva popoare antice apare un dispozitiv pentru socoteli, care prin ideea lui amintește abacul nostru și se cunoștea în antichitate sub denumirea de „abacă“. Aspectul lui era diferit la diferite popoare. Astfel, abaca greacă reprezenta o tablă (o masă), împărțită în benzi (fig. 15), pe care se deplasau niște fișe speciale, ce

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PRIMA POSSIBILITATE						—	—	—	—
A DOUA POSSIBILITATE	—	==	≡	≡	≡				

Fig. 16 — Două metode de reprezentare a cifrelor pe tabla de calcul chineză.

aveau același rol ca și bilele de pe abacul nostru. Abaca romană avea forma unei plăci de cupru cu șanțulețe (tăieturi), în care se deplasau niște butoni.

În China antică pentru reprezentarea numerelor pe placa de socoteli se foloseau niște bastonașe cu lungimea

de 10 cm și grosimea de 1 cm. În jurul anului 150 e. n. în China se cunoșteau pe o scară destul de largă chiar metodele de efectuare, cu ajutorul plăcii de socoteli, a celor patru operații aritmetice.

Existau două metode de reprezentare a cifrelor pe placa de socoteli chineză. Ele sînt arătate în tabela din fig. 16.

La scrierea numărului pe placa de socoteli de obicei se proceda în felul următor: prima lui cifră (numărînd din dreapta spre stînga) se reprezenta prin prima metodă, cea de-a doua cifră — prin metoda a doua, cea de a treia se reprezenta din nou prin metoda întîi, iar a patra prin metoda a doua etc. Cu alte cuvinte, toate cifrele numărului aflate pe locuri i m p a r e (numărînd din-spre dreapta) erau reprezentate prin metoda întîi, iar cifrele de pe locurile p a r e — prin metoda a doua. De exemplu, numerele 78 639, 4 576 și 1 287 erau reprezentate pe placa de socoteli așa cum se arată în fig. 17.

Să vedem pe scurt cum se efectuau adunările și înmulțirile pe o astfel de placă de socoteli.

A d u n a r e a . Se cere de exemplu să se găsească suma a două numere: 9 876 și 5 647. Le reprezentăm întîi pe placa de socoteli:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \begin{array}{c} | \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array} & \begin{array}{c} ||| \\ | \\ | \\ | \end{array} & \begin{array}{c} | \\ \equiv \\ \equiv \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ | \\ | \end{array} & & \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ | \\ | \end{array} & \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ | \\ | \end{array} \\
 \hline
 9 & 8 & 7 & 6 & + & 5 & 6 & 4 & 7
 \end{array}$$

Adunarea se efectua începînd cu unitățile de ordin superior, adică din stînga.

E t a p a 1 : adunăm miile

$$9 + 5 = 14$$

Reprezentăm aceasta în felul următor :

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 \text{I} & \equiv & \overline{\text{III}} & \overline{\text{I}} & & \overline{\text{I}} & \equiv & \overline{\text{II}} & (2) \\
 \text{I} & \equiv & \overline{\text{III}} & \overline{\text{I}} & & \equiv & \overline{\text{I}} & \equiv & \overline{\text{II}} & (1) \\
 \hline
 \equiv & & \equiv & \equiv & & \equiv & & \equiv & &
 \end{array}$$

adică deasupra termenilor adunării formăm un al doilea rând, scriind în stînga cifrei 9 numărul 14, așa încît cifra 4 să fie exact deasupra cifrei 9, iar restul primului termen al adunării îl transcriem fără schimbări. Deasupra celui de-al doilea termen al adunării îi repetăm toate cifrele, afară de cifra 5 care a fost deja folosită.

E t a p a 2 : adunăm sutele

$$8 + 6 = 14$$

și pentru că am obținut la adunare o unitate de ordin superior, o adăugăm la suma dinainte :

$$\begin{array}{r}
 + 14 \\
 14 \\
 \hline
 154
 \end{array}$$

Astfel, rîndul 3 se va scrie (primele două rînduri le repetăm fără nici o schimbare) :

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 \text{I} & \equiv & \text{III} & \overline{\text{I}} & & \equiv & \overline{\text{II}} & (3) \\
 \text{I} & \equiv & \overline{\text{III}} & \overline{\text{I}} & & \overline{\text{I}} & \equiv & \overline{\text{II}} & (2) \\
 \hline
 \text{I} & \equiv & \overline{\text{III}} & \overline{\text{I}} & & \equiv & \overline{\text{I}} & \equiv & \overline{\text{II}} & (1) \\
 \equiv & & \equiv & \equiv & & \equiv & & \equiv & &
 \end{array}$$

În stînga, în rîndul 3 este scris 154, iar apoi s-au repetat ultimele două cifre (76) ale primului termen al adunării; în dreapta sînt repetate ultimele două cifre (47) ale celui de-al doilea termen al adunării (celelalte cifre au fost deja folosite).

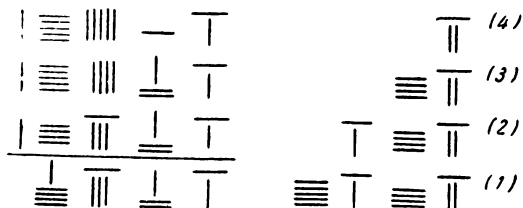
E t a p a 3 : adunăm zecile

$$7 + 4 = 11$$

prin urmare, împreună cu rezultatul precedent obținem :

$$\begin{array}{r} + 154 \\ 11 \\ \hline 1551 \end{array}$$

Acest număr 1 551 îl reprezentăm în stînga, în rîndul 4;



E t a p a 4: a rămas să adunăm unitățile
 $6 + 7 = 13$

și suma celor două numere date va fi găsită; ea este egală cu 15 523:

$$\begin{array}{r} + 1551 \\ 13 \\ \hline 15523 \end{array}$$

Numărul obținut, 15 523, se scrie în rîndul al cincilea din coloana stîngă și schema adunării are, definitiv, înfățișarea din fig. 18.

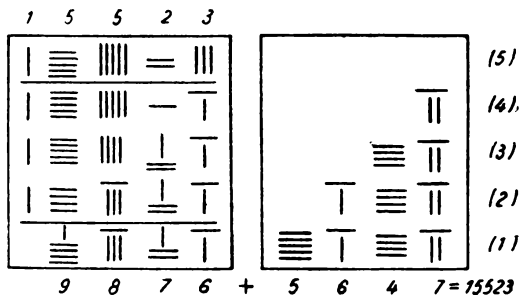


Fig. 18 — Aceasta este schema după care s-ar efectua adunarea numerelor 9876 și 5647 pe tabla de calcul chineză.

Î n m u l ț i r e a . În China antică înmulțirea se făcea cu ajutorul plăcii de socoteli, începînd cu cifrele care reprezintă unități de ordin superior, și trecînd treptat la cele de ordin inferior. În secolul I al erei noastre se folosea deja tabla înmulțirii.

Să presupunem că trebuie să înmulțim 346 cu 27. În notațiile noastre procesul înmulțirii cu placa de socoteli ar fi arătat aproximativ astfel :

$$\begin{array}{r}
 \times 346 \\
 \underline{\quad} \\
 6 \\
 21 \\
 8 \\
 28 \\
 12 \\
 42 \\
 \hline
 9342
 \end{array}$$

Noi am înmulțit întii 3 cu 2 și am obținut 6 — cifra unităților de ordin superior al produsului (miile). După aceea am înmulțit 3 cu 7, iar 4 cu 2; numerele obținute pentru sute, 21 și 8, le-am scris sub cifra 6 ținînd seama de ordinul lor, arătat mai sus. Apoi am înmulțit 4 cu 7, iar 6 cu 2 (aceasta ne-a dat numărul zecilor 28 și 12) și, în sfîrșit, am înmulțit 6 cu 7 (am obținut 42 de unități). Toate aceste numere le-am scris după cum s-a arătat mai sus și am adunat. Ca rezultat am obținut produsul 9 342.

Placa de socoteli și metodele de efectuare a calculelor cu ajutorul ei (despre metodele adunării și înmulțirii am mai vorbit) s-au păstrat în China pînă în secolul XIII. În acea vreme au început să folosească zeroul, care cu ajutorul bastonașelor de calcul se reprezenta sub forma unui pătrat \square .

În secolul al XIII-lea pe placa de socoteli se reprezentau și fracțiile zecimale. De exemplu numărul 106 368,6312 era reprezentat aproximativ așa cum se arată în fig. 19.

În secolul al XV-lea în China și în Japonia, pentru efectuarea celor patru operații aritmetice, se folosea de-

ja abacul cu șapte bile (în China se numea „suan-pan“¹, iar în Japonia — „soroban“, vezi fig. 20). Aceste dispozitive de calcul originale s-au păstrat pînă în zilele noastre și se bucură de o mare popularitate.

Iată, de exemplu, ce spunea cîndva despre soroban un savant japonez: „cu toată vechimea lui sorobanul depășește toate dispozitivele

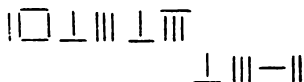


Fig. 19 — Reprezentarea numărului mixt 106 368,6312 pe tabla de calcul chineză.

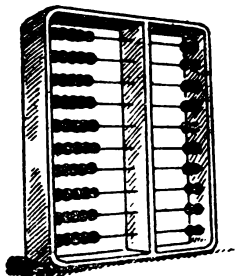


Fig. 20 — Abacul cu 7 bile folosit în China și Japonia.

de calcul modern prin ușurința de manevrare, simplitatea construcției și prețul redus“.

ABACUL RUS (SCIOTÎ).

Există multe obiecte utile pe care nu le apreciem suficient numai pentru că, găsindu-le mereu la îndemînă, ele au devenit prea banale. Printre aceste obiecte insuficient apreciate se numără și abacul de contabilitate — dispozitiv de calcul popular rus, care reprezintă o variantă a renumitei „abace“ sau „placă de socoteli“ a înaintașilor.

Occidentul nu cunoaște aproape de loc abacele. Ele se folosesc numai în școlile elementare ca material demonstrativ în predarea numerației.

Abacul de contabilitate, cu toată simplitatea construcției, prin rezultatele ce le dă poate concura, în unele privințe, chiar și mașinile de calcul. În mâini pricepute acest dispozitiv simplu face adevărate minuni. Un specialist care înainte de revoluție a lucrat

¹ Abacul suan-pan prezintă dimensiuni diferite, unele dintre cele mai mici (17 mm lungime și 8 mm lățime). Se folosesc abace și cu 6 bile: 5 bile de o parte a despărțiturii, una de cealaltă parte. (Pe modelul pe care-l posed sînt 21 de șiruri de bile.)

într-o mare firmă rusească la vânzarea mașinilor de calcul povestea că de multe ori a uimit cu abacul rus pe străinii care aduceau mostre de mecanisme de calcul complicate. El organiza întreceri între doi calculatori, dintre care unul lucra cu o mașină străină „de adiție” scumpă (adică mașină de adunat), iar celălalt se folosea de abacul rus. Și nu o dată se întâmpla că acesta din urmă — ce e drept un mare maestru — câștiga în concursul cu posesorul minunii străine în ce privește rapiditatea și exactitatea calculelor. Se întâmpla uneori că străinul uimit de rapiditatea calcului la abac, se recunoștea imediat învins, își așeza mașina în geaman-tan, nemaisperînd să vîndă în Rusia nici un exemplar.

Ce este drept, la abacul rus nu se pot efectua toate operațiile care se fac cu ajutorul mașinilor. Însă în multe privințe — de exemplu la adunare și scădere — el poate rivaliza cu aparatele cele mai complexe. De altfel, în mîini dibace înmulțirea și împărțirea sînt de asemenea efectuate cu rapiditate la abac, dacă se cunosc metodele de efectuare a acestor operații.

Să facem cunoștință cu cîteva din ele.

ÎNMULȚIREA LA ABAC

Iată cîteva metode care vor permite oricărei persoane care știe să adune la abac să efectueze în mod rapid *î n m u l ț i r i l e* ce se ivesc în practică.

Înmulțirea cu 2 și 3 este înlocuită cu adunarea dublă și triplă.

La înmulțirea cu 4 se înmulțește întîi cu 2 și apoi se adună rezultatul cu el însuși.

Înmulțirea unui număr cu 5 se efectuează la abac astfel: se mută întregul număr cu o sîrmă mai sus, adică se înmulțește cu 10, iar apoi se împarte numărul astfel obținut în două (împărțirea cu doi la abac am explicat-o la pag. 44).

În locul înmulțirii cu 6 se înmulțește cu 5 și se adaugă deînmulțitul. Pentru înmulțirea cu 7 se înmulțește cu 10 și se scade deînmulțitul de 3 ori.

Înmulțirea cu 8 se înlocuiește prin înmulțirea cu 10—2.
În același fel se face înmulțirea cu 9: se înlocuiește cu înmulțirea cu 10—1.

La înmulțirea cu 10 întregul număr se mută, după cum am mai spus, cu un rînd mai sus.

Probabil că cititorul și-a dat deja seama cum trebuie să procedeze în cazul înmulțirii cu numere mai mari ca 10 și ce fel de înlocuiri sînt mai potrivite. Înmulțitorul 11 va trebui, desigur, înlocuit cu $10 + 1$.

Înmulțitorul 12 se înlocuiește cu $10 + 2$, sau practic cu $2 + 10$; adică întîi se dublează numărul, iar apoi i se adaugă numărul înmulțit cu 10. Înmulțitorul 13 se înlocuiește cu $10 + 3$ etc.

Să examinăm cîteva cazuri particulare de înmulțitori care nu depășesc o sută:

$$20 = 10 \times 2$$

$$32 = 22 + 10$$

$$22 = 11 \times 2$$

$$42 = 22 + 20$$

$$25 = (100 : 2) : 2$$

$$43 = 33 + 10$$

$$26 = 25 + 1$$

$$45 = 50 - 5$$

$$27 = 30 - 3$$

$$63 = 33 + 30 \text{ etc.}$$

De altfel, se vede ușor că la abac este foarte comod să se facă înmulțirea cu numere ca: 22, 33, 44, 55 etc.; de aceea trebuie să căutăm ca la descompunerea înmulțitorului să ne folosim de astfel de numere formate prin repetarea unei cifre.

La aceleași procedee se recurge și la înmulțirea cu numere mai mari decît o sută. Dacă asemenea metode artificiale sînt obositoare, putem, desigur, să facem înmulțirea la abac după regula generală, înmulțind cu fiecare cifră a înmulțitorului și scriind produsele parțiale — chiar și această metodă scurtează întrucîtva timpul necesar efectuării operației.

IMPĂRȚIREA LA ABAC

Efectuarea împărțirii la un abac de contabilitate este mult mai grea decît înmulțirea; pentru aceasta trebuie să se memoreze o serie întreagă de metode speciale,

uneori destul de complicate. Cei pe care-i interesează asemenea metode pot apela la manuale speciale. Aici vom prezenta doar cele mai comode metode de împărțire la abac, cu numere care nu-l depășesc pe zece (cu excepția numărului 7 cu care împărțirea se face mult mai greu).

Știm deja cum se face împărțirea cu doi (pag. 44), această metodă este foarte simplă.

Mult mai complicată este metoda de împărțire cu 3: ea constă în înlocuirea împărțirii prin înmulțirea cu fracția periodică infinită $0,333\dots$ (se știe că $0,33\dots = \frac{1}{3}$).

Ne este cunoscut deja procedeul înmulțirii la abac cu 3; este ușoară de asemenea împărțirea cu 10: trebuie doar să mutăm deîmpărțitul cu un rând mai jos. După câteva exerciții această metodă de împărțire cu 3, care la prima vedere apare cam complicată, practic este destul de comodă.

Împărțirea cu 4 este înlocuită, desigur, prin împărțirea dublă cu 2.

Și mai simplă este împărțirea cu 5: ea se substituie prin împărțirea la 10 și dublarea rezultatului.

Împărțirea cu 6 se face în două etape: întâi la 2, iar apoi rezultatul se împarte la 3.

Împărțirea cu 7, după cum am mai arătat, nu o vom expune aici.

Împărțirea cu 8 se face în trei etape: întâi cu 2, rezultatul iar cu 2 și apoi încă o dată cu 2.

Este interesantă metoda împărțirii cu 9. Ea se bazează pe faptul că $\frac{1}{9} = 0,1111\dots$. Evident, în locul împărțirii cu 9 se pot aduna succesiv 0,1 din deîmpărțit + 0,01 din același număr¹ și așa mai departe.

După cum vedem, cea mai simplă este împărțirea cu 2, 10 și 5 și, desigur, cu multiplii lor pari: 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Aceste cazuri de împărțire nu prezintă greutatea nici chiar pentru un manipulator mai puțin experimentat.

¹ Acest procedeu este util și pentru împărțirea în minte cu 9

De strămoșii îndepărtați ai abacei noastre de contabilitate sînt legate unele rămășițe ale vremurilor vechi în limbă și obiceiuri. Puțini își dau seama, de exemplu, că făcînd uneori nod la batistă ca să nu uităm ceva, imităm un gest cu mult substrat al strămoșilor noștri —

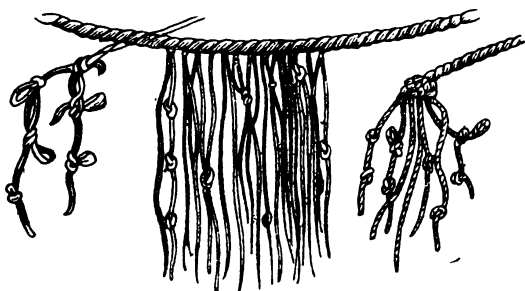


Fig. 21 — Dispozitivul de calcul al locuitorilor antici din Peru — „cvipos“.

în felul acesta notau ei rezultatul unei socoteli efectuate cu ajutorul șireturilor. Un număr oarecare de curele sau de frînghii cu noduri reprezentau cîndva un aparat de socotit (fig. 21), analog în principiu cu abacul. Aceasta era „abaca de frînghie“ peruviană, așa-numitul „cvipos“. Un nod simplu pe frînghie însemna 10, unul dublu 100, triplu — 1000 etc.

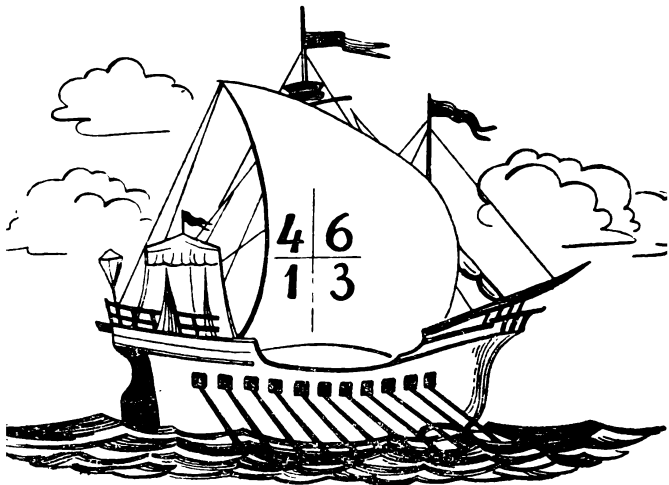
Tot de abac sînt legate și cuvintele, atît de răspîndite astăzi, „bancă“ și „cec“. În limba germană „bank“ înseamnă bancă (de grădină). Ce poate exista comun între o instituție financiară — bancă în sensul actual al cuvîntului, și o bancă de grădină? S-a constatat că aceasta nu este doar o simplă coincidență a denumirilor. Abacul în formă de bancă a fost folosit pe scară largă în cercurile comerciale ale Germaniei. În secolele XV—XVI, fiecare birou de schimb sau oficiu bancar se caracteriza, în primul rînd, prin existența unei „bănci de calcul“; deci apare natural faptul că banca ca instituție financiară și banca de grădină au devenit sinonime.

Contingența mai puțin directă cu abacul are cuvântul „cec”. Acest cuvânt este de origine engleză și derivă de la verbul „checker” — a linia. În secolele XVI—XVII „checkered” se numea un șervețel de piele, liniat în formă de abac; el era purtat de comercianții englezi și în caz de necesitate desfăcut pe masă pentru efectuarea calculelor. Formularele pentru calcule se liniau după modelul acestor abace, și nu este de mirare că asupra lor a trecut, în formă prescurtată, însăși denumirea acestor dispozitive de calcul: de la cuvântul „checkered” s-a format cuvântul „ceck”.

Este interesantă providența expresiei „a rămîne pe bobii”, pe care o folosim astăzi vorbind despre un om care și-a pierdut toți banii. Ea își are originea de asemenea în vremurile cînd toate calculele bănești se efectuau cu ajutorul abacei, a mesei de numărătoare sau a băncii cu ajutorul bobilor, care înlocuiau bilele de pe abac. „Unul numără cu ajutorul pietricelilor, iar altul — cu al bobilor”, — citim în cartea lui Campanella „Cetatea Soarelui” (1602). Omul ce își pierdea banii rămînea numai cu bobii, care exprimau suma pierderii lui, — de aici și expresia respectivă.

CURIOZITĂȚI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 12+3-4+5+6+7+8+9 \\ 12-3-4+5-6+7+8+9 \\ 123+4-5+6-7-8+9 \end{cases}$$



CAPITOLUL III

PUȚINĂ ISTORIE

„ÎMPĂRȚIREA-I TREABĂ GREA“

Puțini își dau seama că metodele de astăzi folosite pentru efectuarea operațiilor aritmetice n-au fost totdeauna chiar atât de simple și comode, și nu au dus direct și rapid la rezultatul căutat.

Strămoșii noștri foloseau metode mult mai greoaie și mai încete. Dacă un elev din sec. al XX-lea ar putea să se transporte cu patru sau chiar numai cu trei secole înapoi, el i-ar uimi pe înaintași prin rapiditatea și corectitudinea calculelor sale aritmetice. I s-ar fi dus vestea prin școlile și mănăstirile învecinate, întunecînd gloria

celor mai abili calculatori din acea epocă, și din toate colțurile ar fi venit oameni pentru a învăța metodele de calcul ale marelui maestru nou apărut.

În vechime erau deosebit de complicate și grele operațiile de înmulțire și mai ales cele de împărțire. „Înmulțirea e chinul meu, iar cu împărțirea e curată nenorocire“, — se spunea în vechime. Pe atunci nu existau încă metode unice elaborate și confirmate de practică pentru fiecare operație. Dimpotrivă, erau în vigoare, simultan, aproape o duzină de metode diferite de înmulțire și împărțire, metode foarte încurcate, pe care nu reușea să le memoreze un om cu aptitudini mediocre. Fiecare profesor care învăța pe alții să socotească își apăra metoda favorită, fiecare „magistru al împărțirii“ (existau astfel de specialiști) lăuda o metodă proprie de efectuare a acestei operații.

În cartea lui V. V. Belliustin „Cum au ajuns oamenii pînă la aritmetica actuală“ (1914) sînt expuse 27 de metode de înmulțire. Autorul menționează: „Este foarte posibil că mai există și altele (metode), păstrate în ascunzătorile depozitelor de cărți, risipite în lucrări numeroase, mai ales în manuscrise“. Și toate aceste metode — „în șah“, „prin îndoire“, „pe părți sau rupt“, „în cruciulițe“, „în rețea“, „cu spatele în față“, „în romb“, „în triunghi“, „în cupe“, „în diamant“ etc.¹, precum și toate metodele de împărțire, care purtau și ele denumiri destul de curioase, se întreceau în ce privește complexitatea și greutatea folosirii. Ele se învățau cu mare greutate și numai după o practică îndelungată. Pentru însușirea unei înmulțiri și împărțiri rapide și corecte a numerelor formate din mai multe cifre se considera necesar un talent înnăscut, aptitudini deosebite; se credea că oamenii de rînd nu pot să-și însușească această înțelepciune. „Împărțirea-i treabă grea“ (dura cosa e la partita) — spunea o veche zicală italiană; ea era într-adevăr o treabă grea dacă se luau în considerație metodele obositoare, folosite pe atunci pentru efectuarea a-

¹ Exemplele de înmulțire enumerate mai sus sînt indicate în vechea „aritmetică“ a lui Niccolo Tartaglia. Metoda actuală de înmulțire este descrisă acolo sub denumirea de metodă „în șah“.

cestor operații. Unele metode purtau câteodată denumiri destul de jucăușe, sub o denumire hazlie se ascundeau un șir de operații lungi și încurcate. În sec. XVI, cea mai scurtă și cea mai comodă era împărțirea „în barcă sau galeră”. Renumitul matematician italian din acele

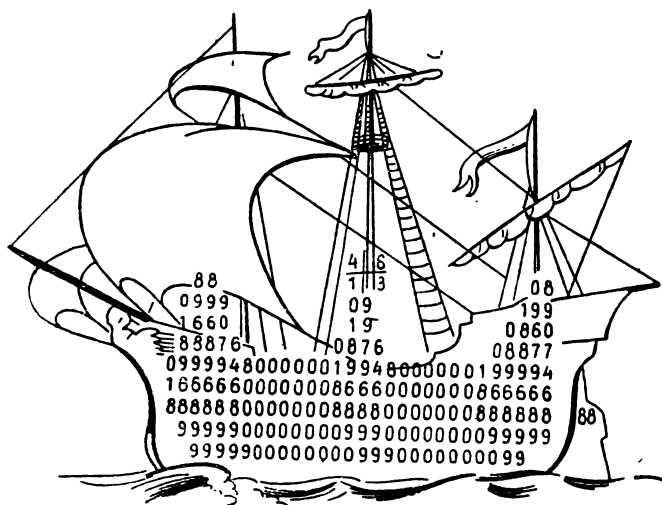


Fig. 22 — Împărțirea numerelor după vechea metodă a „galerei”. „Figura formează din numere o galeră cu prora și pupă, catarg, vele și lopeți”, — scria matematicianul Tartaglia în sec. XVI.

timperi, Niccolo Tartaglia, scria în cuprinzătorul său manual de aritmetică următoarele:

„Cea de-a doua metodă a împărțirii se numește la Veneția¹ b a r c ă sau g a l e r ă, datorită unei oarecare asemănări a figurii obținute (fig. 22), la îm-

¹ În sec. XIV—XVI Veneția și câteva alte state din Italia făceau comerț maritim pe scară largă; în aceste țări metodele de calcul au fost elaborate în scopuri comerciale, mai înainte decât în altele. Cele mai bune lucrări de aritmetică au apărut în Veneția. Mulți termeni italieni din aritmetica comercială s-au păstrat pînă în prezent. Vechiul manual de matematică rusesc cuprinde toate capitolele matematicii cunoscute în acea epocă (inclusiv cunoștințe de astronomie maritimă). El reprezintă una din

părțirea unor numere — cu o barcă, iar a altora — cu galera; uneori se obține o galeră utilată cu toate cele necesare, ea este formată din numere așezate astfel încât se disting pupa și prova, catargul, pînzele, și vîslele“.

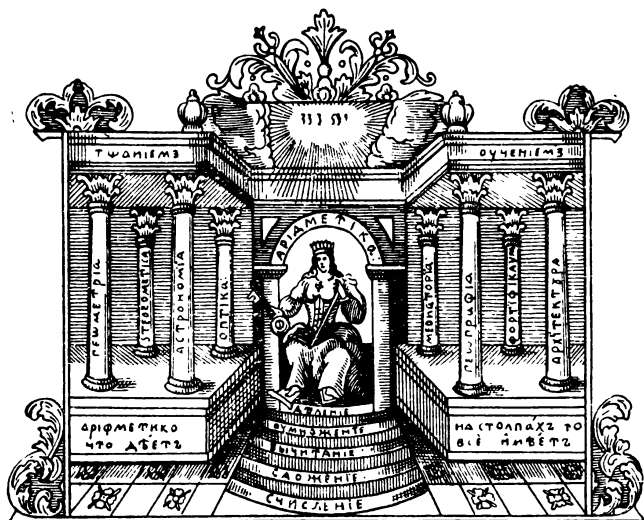


Fig. 23 — Vinieta din „Aritmetica“ lui Magnițki (ed. 1703). În figură este reprezentat „Templul Întelepciunii“. Întelepciunea stă pe tron, iar pe trepte sînt indicate operațiile aritmetice. Pe coloane sînt înscrise denumirile ființelor în care își găsește aritmetica aplicarea: geometria, stereometria, astronomia, optica (cunoștințe asimilate prin „străduință“), mercatoria (adică cartografia), geografia, fortificația, arhitectura (cunoștințe obținute prin „învățatură“).

Este interesant să recunoști acest lucru: imediat îți imaginezi că plutești pe o mare de cifre cu galera aritmetică cu pînze. Și, deși acest matematician reco-

cele două cărți pe care Lomonosov le-a denumit „porțile științei sale“. Titlul ei amănunțit este următorul:

„Aritmetica, adică știința numerelor, la porunca țarului Petru Alexeevici în marele oraș Moscova, pentru uzul tinerilor ruși iubitori de înțelepciune și al celorlalți oameni de orice rang și vîrstă, a fost tipărită în anul 1703 de la nașterea cuvîntului lui D-zeu“.

mandă metoda respectivă ca „cea mai elegantă, cea mai ușoară, cea mai sigură, cea mai uzuală și cea mai generală din cele existente, utilă pentru împărțirea tuturor numerelor“, eu nu mă încumet s-o expun aici, temîndu-mă că însăși cel mai răbdător dintre dumneavoastră va închide cartea, refuzînd să citească mai departe. Cu toate acestea, deși o metodă obositoare, era cea mai bună din acea epocă. În Rusia ea a fost folosită pînă la mijlocul secolului al XVIII-lea în „Aritmetica“ lui Leontie Magnițki, fiind descrisă printre cele șase metode propuse acolo (din care nici una nu se aseamănă cu cea actuală) și recomandată în mod special de autor; pe parcursul întregii sale cărți voluminoase — 640 de pagini de format mare — Magnițki utilizează exclusiv „metoda galerei“, fără a folosi însă această denumire.

În continuare vom prezenta cititorului această „galeră“ numerică, folosind un exemplu din cartea lui Tartaglia, pomenită mai sus :

	4 6	
88	1 3	08
0999	09	199
1660	19	0850
88876	0876	08877

099994800000019948000000199994
 1666660000000866660000000866666
 deîmpărțitul—8888880000000888880000000888888
(88—cîtul)
 împărțitorul ¹ — 99999000000009990000000099999
 9999900000000099900000000999

Ajungînd aici după un calcul atît de greu, strămoșii noștri considerau ca absolut necesară verificarea acestui rezultat obținut cu sudoarea frunții. Desigur, asemenea metode greoaie trezeau neîncrederea față de rezultatele lor. Pe o cale lungă și întortocheată este mai ușor să te rătăcești, decît pe calea dreaptă a metodelor contemporane. Iată cum a apărut vechiul obicei de a

¹ Ultimii doi de 9 au fost adăugați la împărțitor în procesul împărțirii.

v e r i f i c a fiecare operație aritmetică efectuată—o regulă bună pe care ar trebui s-o respectăm și noi.

Metoda de verificare preferată era așa-numita „metodă a lui nouă“. Dat fiind eleganța ei este descrisă adesea și în unele manuale contemporane de aritmetică.

Verificarea cu nouă se bazează pe „regula restului“ care spune: restul de la împărțirea unei sume cu un număr oarecare este egal cu suma resturilor de la împărțirea fiecărui termen cu același număr. Tot astfel, restul produsului este egal cu produsul dintre resturile factorilor. Pe de altă parte se știe¹ că la împărțirea cu nouă a numărului se obține același rest ca și la împărțirea sumei cifrelor acestui număr cu nouă; de exemplu, dacă împărțim 758 la 9 obținem rest 2 și același lucru se întâmplă dacă împărțim $7 + 5 + 8$ la 9. Comparînd ambele proprietăți arătate mai sus, ajungem la metoda de verificare cu 9, adică prin împărțirea cu 9. Pentru a arăta în ce constă această metodă e suficient un singur exemplu.

Se cere să se verifice rezultatul a d u n ă r i i din următoarea coloană:

38932 ...	7
+ 1096 ...	7
+ 4710043 ...	1
589106 ...	2
5339177 ...	8

Adunăm în minte cifrele fiecărui termen al adunării și dacă obținem numere din două cifre le adunăm din nou (lucrul acesta se face în însuși procesul adunării numerelor) pînă cînd obținem un număr format dintr-o singură cifră. Aceste rezultate (resturi de la împărțirea cu 9) le scriem, așa cum s-a arătat în exemplu, alături de termenul respectiv al adunării. Adunînd toate resturile ($7+7+1+2=17$; $1+7=8$) obținem 8. Tot 8 trebuie să fie suma cifrelor rezultatului (5 339 177), dacă operația a fost corect efectuată; într-adevăr: $5+3+3++9+1+7+7=35$, iar $3+5=8$.

¹ Se clarifică la deducerea regulii de divizibilitate prin 9.

Verificarea scăderii se efectuează la fel, dacă se consideră descăzutul drept sumă, iar scăzătorul și diferența drept termeni ai adunării. De exemplu:

$$\begin{array}{r} 6913 \dots \\ - 2587 \dots \\ \hline 4326 \dots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$4 + 6 = 10;$$

$$1 + 0 = 1$$

Această metodă este deosebit de comodă pentru verificarea înmulțirii după cum se vede din următorul exemplu:

$$\begin{array}{r} \times 8713 \dots \\ \quad 264 \dots \\ \hline 34852 \\ 52278 \\ 17426 \\ \hline 2300232 \dots \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 1 \\ \quad 3 \\ \hline 3 \\ 3 \end{array}$$

Dacă la o astfel de verificare a înmulțirii se va descoperi că rezultatul e greșit, pentru a determina unde anume se ascunde greșeala se poate verifica prin metoda lui nouă fiecare produs parțial în parte; iar dacă aici totul este corect, atunci rămâne să se verifice a d u n a r e a produselor parțiale.

Cum putem verifica prin această metodă împărțirea? Dacă avem un caz de împărțire exactă, atunci deîmpărțitul este produsul dintre împărțitor și cât. Când însă împărțirea este cu rest, ne folosim de faptul că deîmpărțitul = împărțitorul \times câtul + restul.

De exemplu:

$$\underbrace{16201387}_1 : \underbrace{4457}_2 = \underbrace{3635}_8; \text{ rest } \underbrace{192}_3$$

suma cifrelor:

$$2 \times 8 + 3 = 19$$

$$1 + 9 = 10;$$

$$1 + 0 = 1$$

Redăm din „Aritmetica“ lui Magnițki o așezare comodă propusă pentru verificarea cu 9:

P e n t r u î n m u l ț i r e :

$$\begin{array}{r}
 365 \\
 \underline{24} \\
 1460 \\
 \underline{730} \\
 8760
 \end{array}
 \quad
 3 \frac{5}{6} 3 \text{ „Este conform, deci este bine“}$$

P e n t r u î m p ă r ț i r e :

$$\begin{array}{r}
 \text{cîtul} \\
 8 \\
 \text{deîmpărțitul} \quad 1 \frac{1}{2} 1 \text{ „Este conform, împărțirea este} \\
 \text{împărțitorul} \quad \underline{2} \text{ bună“} \\
 16 \\
 \\
 \text{restul total} \quad \underline{3} \\
 1
 \end{array}$$

Este neîndoielnic faptul că o asemenea verificare a operațiilor este ideală în ce privește rapiditatea și comoditatea în calcul. Nu se poate spune același lucru și despre siguranță: greșeala poate totuși să se strecoare. Într-adevăr, o aceeași sumă a cifrelor o pot avea numere diferite; nu numai inversarea cifrelor, dar uneori chiar și înlocuirea unor cifre cu altele rămîne nedescoperită la verificare. Nedescoperite vor fi și nouăle, precum și zerourile de prisos, pentru că ele nu influențează suma cifrelor. De aceea ar fi fost greșit să ne bazăm întru-totul pe un asemenea mod de verificare. Strămoșii noștri își dădeau seama de acest lucru și nu se limitau numai la verificarea prin metoda lui nouă; ei efectuau o verificare suplimentară, de cele mai multe ori cu ajutorul lui ș a p t e. Această metodă se bazează pe aceeași „regulă a resturilor“, dar nu este atît de comodă ca metoda lui nouă, pentru că împărțirea cu șapte trebuie efectuată complet pentru a găsi resturile (și în această situație sînt posibile greșeli chiar în cursul verificării).

Cele două verificări — cu nouă și cu șapte — dau posibilitatea unui control mai sigur: ceea ce scapă unuia va fi descoperit în cursul celuilalt. Greșeala nu va fi descoperită numai în cazul când diferența dintre rezultatul real și cel obținut este multiplul numărului $7 \times 9 = 63$. Cum această întâmplare este totuși posibilă, nici verificarea dublă nu dă siguranță deplină că rezultatul este corect.

De altfel, pentru calculele obișnuite, unde greșeala nu poate fi mai mare decît una sau două unități, ne putem limita numai la verificarea cu 9. Verificarea suplimentară cu 7 este prea greoaie, și nu ne poate asigura un control bun.

Dacă, cu toate acestea, efectuînd un calcul de mare importanță, veți dori să faceți pentru siguranță o verificare dublă, atunci în locul împărțitorului 7 este mai bine să folosiți împărțitorul 11. Această verificare poate fi mult simplificată dacă se utilizează următoarea regulă de divizibilitate prin 11: numărul dat se împarte de la dreapta spre stînga în grupuri, cîte două cifre în fiecare grup (grupul din extrema stîngă poate să cuprindă o singură cifră); grupurile se adună și suma obținută va avea, la împărțirea cu 11, același rest ca și numărul dat.

Vom explica cele afirmate cu ajutorul unui exemplu.

Se cere să se găsească restul de la împărțirea numărului 24 716 cu 11.

Împărțim numărul în grupuri și le adunăm:

$$2 + 47 + 16 = 65$$

Deoarece 65 împărțit cu 11 dă rest 10, și numărul 24 716, la împărțirea lui cu 11 trebuie să dea același rest, ceea ce se întîmplă într-adevăr¹.

Propun această metodă pentru că ea dă simultan numărul care la împărțirea cu 9 are același rest ca și numărul dat. Astfel noi avem posibilitatea de a efectua verificarea concomitent cu ajutorul a doi divizori: 9 și 11. Acestei verificări poate să-i scape numai o greșeală multiplă de 99, adică o greșeală foarte puțin probabilă.

¹ Motivarea acestei metode este dată în cartea „Matematica vie” de I. Perelman.

Metodele de înmulțire vechi erau greoaie și inco-
mode; se pune însă întrebarea: metoda pe care o fo-
losim astăzi este chiar atât de bună încât nu i se mai
pot aduce nici un fel de îmbunătățiri. Nu, nici metoda
noastră nu este perfectă; pot fi găsite metode de cal-
cul mai rapide și mai sigure. Din câteva îmbunătățiri
ce pot fi propuse vom arăta deocamdată numai una,
care nu accelerează efectuarea operației, ci îmbună-
tățește siguranța ei. Ea constă în aceea că, atunci când
avem un înmulțitor cu mai multe cifre, înmulțirea nu
începe cu ultima cifră a înmulțitorului, ci cu p r i -
m a c i f r ă . Înmulțirea efectuată la pag. 63 va
deveni:

$$\begin{array}{r}
 \times 8713 \\
 \quad 264 \\
 \hline
 17426 \\
 \quad 52278 \\
 \quad \quad 34852 \\
 \hline
 2300232
 \end{array}$$

După cum vedem, ultima cifră a fiecărui produs par-
țial se scrie sub cifra înmulțitorului cu care se face în-
mulțirea.

Avantajul unei asemenea așezări constă în aceea că
cifrele produselor parțiale, de care depind primele, cele
mai de răspundere cifre ale rezultatului, se obțin la
începutul operației când atenția nu este încă obosită și,
prin urmare, probabilitatea de a face o greșeală este
mai mică (afară de aceasta, metoda simplifică folosi-
rea așa-numitei înmulțiri „prescurtate“, despre care
nu vom vorbi aici).

METODA DE ÎNMULȚIRE „RUSĂ“

Nu puteți efectua înmulțirea unor numere formate din
mai multe cifre — chiar nici din două cifre, — dacă
nu țineți minte toate rezultatele obținute prin înmul-

țirea numerelor de o cifră, adică ceea ce se numește tabla înmulțirii. În „Aritmetica“ lui Magnițki, despre care am mai vorbit, necesitatea cunoașterii tablei înmulțirii este cîntată în versuri — atît de stranii pentru urechea contemporanului — ca:

Acel ce nu reține
tabelele-nmulțirii,
aceluia, vezi bine,
că nu-i va fi ușor
să se descurce-n știință
fără ajutorul lor.
Cu sîrguință-nvață,
că n-o să-ți prindă
rău tabelele de față.

Autorul acestor versuri probabil nu știa sau a scăpat din vedere faptul că există o metodă de a înmulți numerele și fără cunoașterea tablei înmulțirii. Metoda, care nu aduce cu metodele școlare de astăzi, se folosea în calculele vechi rusești și a fost moștenită din timpurile cele mai îndepărtate. Esența constă în aceea că înmulțirea oricăror două numere se reduce la un șir de împărțiri succesive ale unuia din numere cu doi și dublarea simultană a celuilalt număr. Iată, de pildă:

$$\begin{aligned} 32 \times 13 \\ 16 \times 26 \\ 8 \times 52 \\ 4 \times 104 \\ 2 \times 208 \\ 1 \times 416 \end{aligned}$$

Înjumătățirea continuă pînă cînd se obține la cît 1, dublîndu-se totodată cel de-al doilea număr. Ultimul număr dublat reprezintă tocmai rezultatul căutat.

Nu este greu de înțeles pe ce se bazează această metodă. Produsul nu se schimbă dacă un factor se împarte cu 2, iar celălalt se înmulțește cu 2. De aceea este clar că în rezultatul unei repetări multiple a acestei operații se va obține produsul căutat:

$$32 \times 13 = 1 \times 416$$

Cum trebuie să procedăm cînd avem de-a face cu un număr impar?

Metoda populară învinge ușor această greutate. Regula spune că în cazul numărului impar trebuie să i se scadă o unitate și restul să se împartă cu doi; în schimb, la ultimul număr din coloana dreaptă va trebui să se adauge toate acele numere din coloană care stau în dreptul numerelor impare din coloana stîngă; suma va fi tocmai produsul căutat. Practic aceasta se face astfel: toate rîndurile cu numere pare, din coloana stîngă, se șterg; rămîn numai acelea care conțin în stînga un număr impar. Dăm următorul exemplu (steluțele indică că rîndul respectiv trebuie șters):

$$\begin{array}{r} 19 \times 17 \\ 9 \times 34 \\ 4 \times 68^* \\ 2 \times 136^* \\ 1 \times 272 \end{array}$$

Adunînd numerele care nu au fost șterse, obținem rezultatul perfect corect: $17 + 34 + 272 = 323$

Pe ce se bazează această metodă?

Justețea metodei devine clară dacă vom ține seama că:

$$\begin{array}{l} 19 \times 17 = (18 + 1) \times 17 = 18 \times 17 + 17 \\ 9 \times 34 = (8 + 1) \times 34 = 8 \times 34 + 34 \text{ etc.} \end{array}$$

Se înțelege că numerele 17, 34 etc., pierdute în timpul împărțirii în două a numărului impar, trebuie adăugate la rezultatul ultimei înmulțiri pentru a obține produsul respectiv.

DIN ȚARA PIRAMIDELOR

Este foarte probabil că metoda descrisă mai sus ne-a venit dintr-o țară îndepărtată a antichității—Egipt. Noi știm foarte puțin despre modul de a efectua operațiile aritmetice în țara piramidelor. S-a păstrat însă

un document interesant — un papirus în care au fost scrise exercițiile aritmetice ale unui elev din școala de hotarnici din Egiptul antic; acesta este așa-numitul „papirus al lui Rhind“, ce datează din perioada dintre anii 2 000 și 1 700 î.e.n.¹ și care este o copie a unui manuscris și mai vechi, scris de un oarecare Ahmes. Scribul² Ahmes, găsind „caietul de școlar“ al unui elev din această epocă îndepărtată, a reprodus cu grijă toate exercițiile aritmetice ale viitorului hotarnic — împreună cu greșelile și corecturile profesorului — și a dat copiei sale un titlu fastuos, care a ajuns pînă la noi în următoarea formă incompletă:

„Indicație cum pot fi obținute cunoștințe asupra tuturor lucrurilor întunecate... tuturor tainelor ascunse în lucruri.

Întocmit în timpul regelui Egiptului de Sus și de Jos Ra-a-use, care dă viață, după modelul vechilor opere de pe timpul regelui Ra-en-mat de către scribul Ahmes“.

Papirusul lui Rhind se termină cu sfaturi foarte originale: „Prinde șerpil, șoarecii; smulge buruienile la timp; capătă țesături din belșug. Cere-i zeului Ra căldură, vînt și apă multă“.

Unul din papirusurile matematice egiptene este păstrat la Moscova, la Muzeul de arte „A.S. Pușkin“. Descifrarea acestui papirus a fost începută de academiciantul B.A. Turaev în anul 1914 și terminată de academicianul V.V. Struve în anul 1927.

În papirusul lui Rhind — acest document interesant care are aproape 40 de veacuri și este o mărturie a unei antichități și mai îndepărtate — găsim patru

¹ Papirusul a fost găsit de egiptologul englez Henri Rhind. Desfășurat, are o lungime de 20 m și lățimea de 30 cm. E păstrat la Muzeul britanic din Londra.

² Scribii făceau parte din clasa a III-a a preoților egipteni; în competența lor intra „tot ce era legat de construcția și proprietatea imobilă a templului. Preocuparea lor principală o formau științele matematice, astronomice și geografice (V. Bobînin).

exemple de înmulțire, efectuate după o metodă care amintește foarte mult de metoda rusă populară. Iată aceste exemple (punctele din fața numerelor indică numărul unităților înmulțitorului; cu semnul + s-au notat numerele care urmează să fie adunate):

(8×8)	(9×9)
.8	.9 +
..16	..18
....3236
:::64	:::72+

Total....81

(8×365)	(7×2801)
.365	.2801 +
..730	..5602 +
....146011204 +

Total...19607

Se vede că încă cu câteva milenii înaintea noastră egiptenii au folosit o metodă de înmulțire foarte asemănătoare cu metoda rusă populară (fig. 24); această me-

(8×8)	(8×8)
· ⇒	::: : Ḥ
· · ≡Λ	· · · Ḥ
· · · 4λ	· · Ḥ
: : : : 44 III (64)	Ḥ
	Ḥ (64)



Fig. 24 — Există metode de calcul care au pătruns probabil în Rusia din Egiptul antic.

toată a ajuns pe căi necunoscute din antica țară a piramidelor în epoca contemporană. Dacă i s-ar fi propus, de exemplu, unui locuitor din pământul faraonilor să înmulțească 19×17 , el ar fi efectuat această operație în modul următor: ar fi scris o serie de dublări ale numărului 17:

1	17+
2	34+
4	68
8	136
16	272+

și apoi ar fi adunat acele numere care sînt notate cu semnul +, adică $17+34+272$. El ar fi obținut, desigur, un rezultat corect: $17+(2 \times 17)+(16 \times 17)=19 \times 17$. În esență, această metodă este foarte apropiată de metoda rusă populară (înlocuirea înmulțirii printr-o serie de dublări succesive).

Este greu de spus dacă numai țărani ruși foloseau această metodă veche de înmulțire; autorii englezi o numesc însă „metodă țărănească rusă“.

Ne-ar interesa foarte mult să primim de la cititori informații cu privire la faptul dacă în prezent se folosește undeva această metodă veche de înmulțire, care are un trecut atît de îndelungat și original.

În general ar trebui să acordăm o mare atenție matematicii populare: să căutăm să înțelegem metodele de calcul și măsurătoare folosite de popor, să culegem și să notăm aceste monumente ale creației matematice populare ajunse pînă azi din adîncurile vremurilor îndepărtate.

Lucrul acesta a fost arătat încă de mult de V.V. Bobînin, care s-a ocupat de istoria matematicii și a propus chiar un program scurt de culegere a monumentelor matematicii populare. Credem că nu va fi de prisos să dăm aici lista a ceea ce a crezut el că trebuie cules și notat:

- 1) numerația și calculul,
- 2) metode de măsurătoare și cîntărire,
- 3) informații în legătură cu geometria și expresia lor concretizată în construcții, îmbrăcăminte și podoabe,

4) metode de parcelare,
 5) probleme populare,
 6) zicători, ghicitori, în general, opere din folclorul popular care au vreo legătură cu cunoștințele de matematică;

7) monumentele matematicii populare aflate în manuscrise, muzee, colecții etc. sau găsite cu prilejul săpăturilor făcute în vechile cimitire, cetăți etc.

În continuare dau o mică informație asupra faptului când au apărut pentru prima dată semnele operațiilor aritmetice, atît de uzuale astăzi, notărea fracțiilor, a puterii etc. :

+ și — în manuscrisele lui Leonardo da Vinci (1452—1519);

× în lucrarea lui Utred (1631);

. și : în lucrarea lui Leibnitz (1646—1716);

$\frac{a}{b}$ în lucrarea lui Fibonacci (1202);

a^n în lucrarea lui Chuget (1484);

= în lucrarea lui Recorde (1557);

< și > în lucrarea lui Harriot (1631);

() și [] în lucrarea lui Girard (1629).

Pe cel care dorește să cunoască mai amănunțit istoria aritmeticii îl sfătuiesc să citească cartea lui V. Belliustin „Cum au ajuns oamenii treptat pînă la aritmetica actuală. Studii accesibile pentru amatorii de aritmetică“ (1914).

CURIOZITĂȚI ARITMETICE :

$$100 = \begin{cases} 123 + 45 - 67 + 8 - 9 \\ 123 - 45 - 67 + 89 \\ (1 + 2 - 3 - 4) \cdot (5 - 6 - 7 - 8 - 9) \end{cases}$$

$$2 \times 2 = 11$$

$$3 \times 3 = 14$$

CAPITOLUL IV

SISTEMELE DE NUMERAȚIE NEZECIMALE

O AUTOBIOGRAFIE MISTERIOASĂ

Îmi voi permite să încep acest capitol cu o problemă pe care am prezentat-o cândva pentru cititorii unui vechi jurnal foarte răspândit¹, drept exemplu de „problemă pentru premiu“. Iată-o:

Printre hîrțile unui matematician a fost găsită autobiografia lui. Ea începea cu următoarele rînduri:

„Eu am terminat universitatea la vîrsta de 44 de ani. După un an, fiind un tînăr de 100 ani, m-am însurat cu o fată de 34 ani. Diferența neînsemnată de vîrstă dintre noi — de numai 11 ani — a contribuit la comunitatea noastră de interese și idei. Peste cîțiva ani aveam deja

¹ „Priroda i lidi“ (Ulterior problema a fost publicată în culegerea lui E. I. Ignatiev „În împărăția istețimii“).

o mică familie cu 10 copii. Salariul meu era de 200 ruble, din care $\frac{1}{10}$ îi dădeam surorii mele, așa încît noi, cu copiii, am trăit cu 130 ruble pe lună” etc.

Cum pot fi explicate contradicțiile curioase dintre numerele prezentate în acest fragment?

Rezolvarea problemei este dictată de însăși denumirea acestui capitol: sistem de numerație nezeecimal—iată singura cauză a contradicției aparente dintre numerele date mai sus. Sesizînd această idee nu este greu să ne dăm seama în ce anume sistem de numerație au fost reprezentate numerele găsite printre însemnările matematicianului. Secretul este trădat de fraza: „după un an (peste 44 ani), fiind un tînăr de 100 ani...” Dacă prin adăugarea unei unități numărul 44 se transformă în 100, aceasta înseamnă că cifra 4 este cea m a i m a r e în acest sistem (așa cum este 9 în sistemul zecimal) și prin urmare baza sistemului este 5. Fantezistului matematician i-a venit ideea de a scrie toate datele biografiei sale în s i s t e m u l d e n u m e r a Ț i e c i n c i n a l, adică într-un sistem în care unitatea de ordin superior nu este de 10, ci de 5 ori mai mare decît unitatea de ordin inferior. În primul loc din dreapta sînt așezate unitățile simple (care nu depășesc 4), în locul al doilea nu sînt zecile, ci cincile; pe locul al treilea nu se află sutele, ci „douăzeci și cincile” etc. De aceea numărul „44” dat în textul de mai sus nu înseamnă $4 \times 10 + 4$, ca în sistemul zecimal, ci $4 \times 5 + 4$, adică douăzeci și patru. Tot astfel numărul „100” din autobiografie indică o unitate de ordinul al treilea în sistemul cincinal, adică 25. Celelalte numere înseamnă respectiv ¹:

$$\begin{aligned} \text{„34”} &= 3 \times 5 + 4 = 19 \\ \text{„11”} &= 5 + 1 = 6 \\ \text{„200”} &= 2 \times 25 = 50 \\ \text{„10”} &= 5 \\ \text{„}\frac{1}{10}\text{”} &= \frac{1}{5} \\ \text{„130”} &= 25 + 3 \times 5 = 40 \end{aligned}$$

¹ Aici și în cele ce urmează se pun între ghilimele numerele care nu sînt scrise în sistemul de numerație zecimal.

Restabilind adevăratul sens al numerelor din noțiță, vedem că în ea nu există nici un fel de contradicții:

„Eu am terminat universitatea la vârsta de 24 ani. După un an m-am însurat, fiind tînăr de 25 ani, cu o fată de 19 ani. Diferența mică de vîrstă dintre noi — de numai 6 ani — a contribuit la comunitatea noastră de interese și idei. Peste cîțiva ani aveam deja o mică familie cu 5 copii. Salariul meu lunar era de 50 ruble, din care $1/5$ îi dădeam surorii mele, așa încît noi, cu copiii, am trăit cu 40 ruble pe lună“.

Este oare greu să reprezentăm numerele în alte sisteme de numerație? Nicidecum. Presupunem că doriți să reprezentați numărul 119 în sistemul cincinal. Împărțiți 119 cu 5 pentru a afla cîte unități de ordinul întii are acest număr:

$$119 : 5 = 23, \text{ rest } 4$$

Prin urmare, numărul unităților simple va fi 4. Mai departe, cele 23 de cinci nu pot sta toate în ordinul al doilea; cifra superioară în sistemul cincinal este 4, și nu pot exista mai mult de 4 unități în nici un ordin. De aceea împărțim 23 cu 5:

$$23 : 5 = 4, \text{ rest } 3$$

Aceasta arată că în ordinul al doilea („al cincilor“) se va afla cifra 3, iar ordinul al treilea („al douăzeci și cincilor“) 4.

Astfel, $119 = 4 \times 25 + 3 \times 5 + 4$ sau, în sistemul c i n c i n a l, „434“.

Pentru comoditate, operațiile de mai sus se orînduiesc în modul următor:

$$\begin{array}{r|l} 119 & 5 \\ \hline 4 & \frac{23}{3} \quad \left| \quad \frac{5}{4} \right. \end{array}$$

Cifrele notate cursiv (putem să le și subliniem cînd le scriem) se scriu de la dreapta spre stînga și se obține imediat reprezentarea căutată a numărului într-alt sistem.

Dăm încă câteva exemple:

E x e m p l u l 1. Să se reprezinte 47 în sistemul cu baza 3.

Rezolvare:

$$\begin{array}{r|l} 47 & 3 \\ \hline 2 & 15 \\ & \hline & 0 & 3 \\ & & \hline & & 5 & 3 \\ & & & \hline & & 2 & 1 \end{array}$$

Răspuns: „1202“. Verificarea: $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 3 + 2 = 47$

E x e m p l u l 2. Să se reprezinte numărul 200 în sistemul septenal.

Rezolvare:

$$\begin{array}{r|l} 200 & 7 \\ \hline 60 & 28 \\ & \hline 4 & 0 & 7 \\ & & \hline & & 4 \end{array}$$

Răspuns: „404“. Verificarea: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$

E x e m p l u l 3. Să se reprezinte numărul 163 în sistemul cu baza doisprezece.

Rezolvare:

$$\begin{array}{r|l} 163 & 12 \\ \hline 43 & 13 \\ & \hline 7 & 1 & 12 \\ & & \hline & & 1 \end{array}$$

Răspuns: „117“. Verificarea: $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$.

Acum nu-i va fi greu cititorului să reprezinte orice număr în orice sistem de numerație. Singura piedică care poate interveni este datorită faptului că în unele cazuri vor fi insuficiente simbolurile pentru cifre. Într-adevăr, la reprezentarea numărului în sistemele cu baza mai mare decât zece (de exemplu în sistemul cu baza 12) apare necesitatea de a avea simboluri — cifre pentru „zece“ și „unsprezece“. Nu este greu de învins această piedică, alegînd pentru cifrele noi oarecare semne convenționale sau litere, fie chiar, de exemplu, literele *k* și *l* care în alfabetul

rusesc ocupă locul al zecelea și al unsprezecelea. Astfel numărul 1 579 în sistemul cu baza 12 se va reprezenta în modul următor. :

$$\begin{array}{r}
 1579 \quad | \quad 12 \\
 \hline
 12 \quad | \quad 131 \quad 12 \\
 \hline
 37 \quad | \quad 11 \quad 10 \\
 \hline
 19 \\
 \hline
 7
 \end{array}$$

Răspuns: „(10) (11) 7“, sau KL7.

Verificarea: $10 \times 144 + 11 \times 12 + 7 = 1\,579$

P r o b l e m a 1. Să se exprime numărul 1 926 în sistemul cu baza 12¹.

P r o b l e m a 2. Să se exprime numărul 273 în sistemul cu baza 12.

CEL MAI SIMPLU SISTEM DE NUMERAȚIE

Nu este greu să ne dăm seama că în fiecare sistem cifra cea mai mare care poate fi necesară este egală cu baza acestui sistem minus 1. De exemplu, în sistemul zecimal, cifra cea mai mare este 9, în cel șesenal — 5, în cel cu baza 3 este 2, în sistemul cu baza 15 va fi 14 etc.

Sistemul de numerație cel mai simplu este, desigur, acela pentru care sînt necesare cele mai puține cifre. În sistemul zecimal sînt necesare 10 cifre (considerîndu-l și pe zero), în cel cincinal — 5 cifre, în sistemul cu baza 3—3 cifre (1, 2 și 0), în cel binar — numai două cifre (1 și 0). Există oare un sistem cu baza 1? Desigur: acesta este sistemul în care unitățile de ordin superior sînt o dată mai mari decît unitățile de ordin inferior, adică sînt egale; cu alte cuvinte, se poate numi sistem cu baza 1 sistemul în care unitățile din toate ordinele au aceeași valoare. Acesta este sistemul „cel mai pri-

¹ Vezi răspunsul de la sfîrșitul cărții.

mitiv“; el a fost folosit de omul primitiv care făcea pe copaci atâtea semne cîte obiecte număra. Între acest sistem și toate celelalte sisteme de numerație există însă o deosebire foarte mare: el este lipsit de avantajul principal pe care-l oferă numerația noastră — de așa-numita valoare pozițională a cifrelor (în funcție de locul pe care-l ocupă). Într-adevăr, în sistemul cu baza 1, semnul care ocupă locul 3 sau 5 are aceeași valoare ca și cel de pe locul 1. În același timp, în sistemul binar unitatea ce stă pe locul 3 (numărînd din dreapta) este deja de 4 ori (2×2) mai mare decît aceea care ocupă locul 1, iar cea din locul 5 este de 16 ori mai mare ($2 \times 2 \times 2 \times 2$). Pentru reprezentarea unui număr oarecare în sistemul cu baza 1 este nevoie de atâtea semne cîte obiecte sînt numărate. Pentru a scrie 100 de obiecte sînt necesare o sută de semne. În sistemul binar însă sînt necesare numai 7 semne („1100100“), iar în cel cinci-nal numai 3 („400“).

Iată de ce sistemul cu baza 1, de fapt, nici nu poate fi numit un „sistem“; el nu poate fi pus alături de celelalte sisteme, deoarece se deosebește de ele în mod principial — nu dă nici o economie în ce privește reprezentarea numerelor. Dacă nu ținem seama de acest sistem, atunci sistemul de numerație cel mai simplu trebuie considerat sistemul binar, care folosește numai două cifre: 1 și 0. Cu ajutorul unității și al zero-ului poate fi reprezentată mulțimea infinită a numerelor! Acest sistem este însă puțin comod pentru numerația verbală și scrisă: se obțin numere prea lungi¹. Sistemul binar însă s-a dovedit foarte util într-o serie de studii teoretice. În ultimul timp rolul sistemului binar a crescut deosebit de mult, pentru că el stă la baza efectuării calculelor cu mașinile electronice de calcul. El are cîteva particularități interesante, care sînt proprii numai acestui sistem; de altfel, aceste particularități pot fi folosite într-o serie de scamatorii matematice, despre care vom vorbi amănunțit într-un capitol viitor.

¹ În schimb, după cum vom vedea mai departe, pentru acest sistem, se simplifică la extrem tabla adunării și tabla înmulțirii.

Noi ne-am obișnuit atît de mult cu operațiile aritmetice, încît le efectuăm în mod mecanic, fără să ne mai gîndim aproape la ceea ce facem. Dar aceleași operații ne cer un efort destul de mare, dacă vom încerca să le aplicăm la numerele care nu sînt scrise în sistemul zecimal. Să încercăm, de exemplu, să efectuăm adunarea următoarelor două numere scrise în sistemul c i n c i n a l :

$$\begin{array}{r} + \text{„}4203\text{“} \\ \text{„}2132\text{“} \end{array} \quad (\text{în sistem cincinal})$$

Adunăm începînd cu unitățile, adică din dreapta spre stînga: $3 + 2$ este egal cu cinci; dar noi nu putem scrie 5, pentru că o astfel de cifră nu există în sistemul cincinal: 5 este deja o unitate de ordin superior. Prin urmare suma nu conține de loc unități; scriem zero, iar 5, adică unitatea de ordin imediat superior o ținem minte. Mai departe: $0 + 3 = 3$ plus unitatea pe care am reținut-o dă în total 4 unități de ordinul al doilea. Pentru ordinul al treilea obținem $2 + 1 = 3$. În ordinul al patrulea $4 + 2 = 6$, adică $5 + 1$; scriem 1, iar cinci, unitate de ordin superior, o scriem mai la stînga. Suma căutată = „11340“.

$$\begin{array}{r} + \text{„}4203\text{“} \\ \text{„}2132\text{“} \\ \hline \text{„}11340\text{“} \end{array} \quad (\text{în sistem cincinal})$$

Îl lăsăm pe cititor să verifice această adunare, transformînd în prealabil numerele între ghilimele în numere scrise în sistem zecimal.

În mod asemănător se efectuează și celelalte operații aritmetice. Dăm mai jos, pentru exercițiu, cîteva probleme¹ al căror număr cititorul îl poate mări și singur :

	Problema 3	Problema 4	Problema 5
În sistem cincinal	$\begin{array}{r} \text{— „}2143\text{“} \\ \text{„}334\text{“} \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \text{„}213\text{“} \\ \text{„}3\text{“} \end{array}$	$\begin{array}{r} \times \text{„}42\text{“} \\ \text{„}31\text{“} \end{array}$

¹ Răspunsul la probleme este dat la sfîrșitul cărții.

În sistem
cu baza 3

$$\begin{array}{r}
 \text{„212“} \\
 + \text{„120“} \\
 \hline
 \text{„201“}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{r}
 \text{„122“} \\
 \text{„20“} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{„220“} : \text{„2“} = \\
 \text{„201“} : \text{„12“} =
 \end{array}$$

La efectuarea acestor operații reprezentăm mai întâi în minte numerele scrise în sistemul zecimal cu care sîntem obișnuiți; obținînd rezultatul, le reprezentăm din nou în sistemul nezeecimal cerut de problemă. Putem proceda și altfel: întocmim o „tablă a adunării“ și o „tablă a înmulțirii“ în aceleași sisteme în care ne sînt date numerele și ne folosim direct de aceste table.

De exemplu, tabla adunării în sistem c i n c i n a l se prezintă astfel:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Cu ajutorul acestei table noi am fi putut aduna numerele „4203“ și „2132“, scrise în sistemul cincinal, concentrîndu-ne mai puțin atenția decît în metoda aplicată mai sus.

Se înțelege ușor că se simplifică și operația de scădere.

Întocmim tabla înmulțirii („lui Pitagora“) pentru sistemul c i n c i n a l:

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Avînd acest tabel în fața ochilor putem ușura foarte mult operația de înmulțire (și împărțire) a numerelor în sistemul cincinal. De exemplu, la înmulțire:

$$\text{În sistem cincinal} \left\{ \begin{array}{l} \text{„213“} \\ \times \text{„3“} \\ \hline \text{„1144“} \end{array} \right.$$

raționăm astfel: 3 ori 3 „14“ (din tabel); scriem 4, ținem 1 minte. 1 înmulțit cu 3 dă 3, plus încă unu — scriem 4. 2 ori 3 = „11“; scriem 1 și mutăm 1 în stînga. Ca rezultat obținem „1144“.

Cu cît este mai mică baza sistemului, cu atît sînt mai mici și tablele adunării și înmulțirii respective. De exemplu, pentru sistemul cu baza 3, cele două table se prezintă astfel:

Tabla adunării pentru sistemul cu baza 3:

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Tabla lui Pitagora pentru sistemul cu baza 3:

1	2
2	11

Ele pot fi ținute minte și folosite la efectuarea operațiilor. Tablele de adunare și de înmulțire cele mai mici se obțin pentru sistemul b i n a r :

Tabla adunării pentru sistemul binar:

0	1
1	10

Tabla înmulțirii pentru sistemul binar:

$1 \times 1 = 1$

Cu ajutorul acestor „table“ simple pot fi efectuate în sistemul binar toate cele patru operații! Cît privește înmulțirea în acest sistem, în esență ea parcă nici n-ar exista: doar a înmulți cu 1 înseamnă a lăsa numărul fără nici o schimbare; iar înmulțirea cu „10“, „100“, „1000“ (adică cu 2,4,8) se reduce la simpla adăugare în dreapta deînmulțitului a unui număr corespunzător de zerouri. Pentru efectu-

area adunării trebuie să ținem minte un singur lucru, și anume că în sistemul binar $1 + 1 = 10$. Deci am avut dreptate când am numit sistemul binar cel mai simplu sistem din toate cele posibile. Lungimea numerelor din această aritmetică originală este compensată de simplitatea efectuării tuturor operațiilor aritmetice.

Presupunem, de exemplu, că trebuie să înmulțim;

$$\text{În sistemul binar} \left\{ \begin{array}{r} \times \text{ „1001011101“} \\ \quad \text{„100101“} \\ \hline \text{„1001011101“} \\ + \text{ „1001011101“} \\ \text{„1001011101“} \\ \hline \text{„101011101110001“} \end{array} \right.$$

Efectuarea operației se reduce la transcrierea numerelor date într-o anumită ordine; aceasta cere eforturi mintale mult mai mici, decât înmulțirea aceluiași numere în sistemul zecimal ($605 \times 37 = 22\,385$). Dacă am fi adoptat sistemul binar, atunci studiul calculelor scrise ar fi cerut un efort mental mai mic (în schimb o cantitate maximă de hîrtie și cerneală). În calculul oral însă aritmetica binară este mult inferioară celei zecimale, în ce privește efectuarea operațiilor.

Dăm mai jos și un model de împărțire, efectuată în sistemul de calcul binar:

$$\begin{array}{r} 10000010 : 111 = 10010 \\ \underline{111} \\ 1001 \\ \underline{111} \\ 100 \end{array}$$

În sistemul zecimal, obișnuit nouă, această operație s-ar fi prezentat astfel:

$$\begin{array}{r} 130 : 7 = 18 \\ \underline{7} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 4 \end{array}$$

În ambele cazuri deîmpărțitul, împărțitorul, cîtul și restul sînt, în esență, egale, fiind diferite doar calculele intermediare.

PAR SAU IMPAR?

Fără a vedea numărul este greu, desigur, să ghicim dacă el este par sau impar. Dar să nu credeți că veți putea totdeauna să răspundeți la această întrebare imediat ce veți vedea numărul dat. Spuneți, de exemplu, dacă numărul 16 este par sau impar?

Dacă știți că el este scris în sistemul zecimal, atunci sînteți în drept să afirmați că acest număr este par. Dar cînd este scris într-un alt sistem, atunci putem fi oare convinși că el reprezintă într-adevăr un număr par?

Constatăm că nu este așa. Dacă, de exemplu, baza este 7, atunci „șaisprezece“ înseamnă $7 + 6 = 13$, adică un număr impar. Același lucru se va întîmpla pentru orice bază impară (pentru că orice număr impar $+ 6$ este de asemenea un număr impar).

De aici tragem concluzia că regula cunoscută nouă de divizibilitate prin 2 (ultima cifră pară) este sigur utilă numai pentru sistemul de numerație zecimal, iar pentru celelalte sisteme nu este totdeauna utilă. Și anume, ea mai servește numai în sistemele de numerație cu baza *p a r ă*: 6, 8 etc. Care este deci regula de divizibilitate prin 2 pentru sistemul cu baza *i m p a r ă*? Este suficient să ne gîndim puțin pentru a stabili această regulă: suma cifrelor trebuie să fie pară. De exemplu, numărul „136“ este par în orice sistem de numerație, chiar și în cel cu bază impară; într-adevăr, în ultimul caz avem: număr impar¹ + număr impar + par = număr par.

Tot atît de prudenți trebuie să fim și la rezolvarea următoarei probleme: numărul 25 se împarte întot-

¹ Numărul impar înmulțit cu el însuși (adică cu impar) dă totdeauna un număr impar (de ex.: $7 \times 7 = 49$; $11 \times 11 = 121$ etc.).

deuna cu 5? În sistemul cu baza 7 sau 8 numărul astfel reprezentat nu se împarte cu 5 (pentru că el este egal cu 19 sau cu 21). Cît privește regula binecunoscută a divizibilității prin 9 (dacă suma cifrelor este divizibilă cu 9), ea este justă numai pentru sistemul zecimal. În sistemul cincinal însă această regulă este valabilă pentru 4, iar în cel cu baza 7 — pentru 6. Astfel, numărul „323” în sistemul cincinal se împarte cu 4, pentru că $3 + 2 + 3 = 8$, iar numărul „51” în sistemul cu baza 7 — cu 6 (ne convingem de lucrul acesta transformînd numerele în sistemul zecimal: obținem respectiv 88 și 36). De ce este așa, cititorul își va da seama singur, dacă va înțelege bine modul de deducere a regulii de divizibilitate prin 9 și va folosi același raționament la deducerea regulii de divizibilitate cu 6, cu schimbările respective pentru sistemul cu baza 7.

Este mai greu să se demonstreze pe cale pur aritmetică justetea următoarelor :

$$\left. \begin{array}{l} 121 : 11 = 11 \\ 144 : 12 = 12 \\ 21 \times 21 = 441 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{în toate sistemele de numerație} \\ \text{(în care există cifrele respective).} \end{array}$$

Cei care cunosc bazele algebrei vor găsi ușor explicația acestor egalități. Ceilalți cititori pot să le verifice pentru diferite sisteme de numerație.

PROBLEME ÎNSTRUCTIVE

- 1) Cînd $2 \times 2 = 100$?
- 2) Cînd $2 \times 2 = 11$?
- 3) Cînd 10 este număr impar ?
- 4) Cînd $2 \times 3 = 11$?
- 5) Cînd $3 \times 3 = 14$?

Răspunsul la aceste întrebări nu va părea greu de găsit celor care au citit capitolul de față.

- 1) $2 \times 2 = 100$ cînd 100 este scris în sistemul binar.
- 2) $2 \times 2 = 11$ cînd 11 s-a scris în sistemul cu baza 3.

3) 10 este număr impar cînd el a fost scris în sistemul cu baza 5, precum și în sistemele cu bazele 3, 7 și 9.

4) $2 \times 3 = 11$ cînd 11 s-a scris în sistemul cu baza 5.

5) $3 \times 3 = 14$ cînd 14 s-a scris în sistemul cu baza 5.

FRACȚII FĂRĂ NUMITOR

Noi ne-am obișnuit cu faptul că se scriu fără linie de fracție numai fracțiile z e c i m a l e. De aceea, la prima vedere se pare că fracțiile $2/7$ sau $1/3$ nu pot fi scrise fără linie de fracție. Lucrurile ni se vor prezenta însă altfel, dacă ne vom aminti că fracțiile fără linie de fracție sînt posibile și în alte sisteme de numerație. Ce înseamnă, de exemplu, fracția „0,4” în sistemul cu baza 5? Desigur, $4/5$. Frația „1,2” în sistemul cu baza 7 înseamnă $1^2/7$. Dar ce înseamnă, în același sistem cu baza 7, fracția „0,33”? Aici rezultatul este mai complicat: $3/7 + 3/49 = 24/49$.

Vom examina cîteva fracții nezezimale fără linie de fracție. Cu cît sînt egale:

a) „2,121” în sistemul cu baza 3?

b) „1,011” în sistemul binar?

c) „3,431” în sistemul cu baza 5?

d) „2,(5)” în sistemul cu baza 7?

Răspunsuri:

$$a) 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = 2 \frac{16}{27}$$

$$b) 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 \frac{3}{8}$$

$$c) 3 + \frac{4}{5} + \frac{3}{25} + \frac{1}{125} = 3 \frac{116}{125}$$

$$d) 2 + \frac{5}{7} + \frac{5}{49} + \frac{5}{343} + \dots = 2 \frac{5}{6}$$

Cititorul se va convinge de justetea ultimei egalități, dacă va încerca să aplice la cazul de față, cu schimbă-

rile corespunzătoare, raționamentele legate de transformarea fracțiilor zecimale și periodice în fracții simple.

Acum vom examina câteva probleme speciale (vezi răspunsul la sfârșitul cărții).

Problema 10. În ce sistem de numerație este efectuată următoarea adunare:

$$\begin{array}{r} 756 \\ + 307 \\ + 2456 \\ + 24 \\ \hline 3767 \end{array}$$

Problema 11. În ce sistem de numerație este efectuată împărțirea:

$$\begin{array}{r} 4415400 : 4532 = 543 \\ - 40344 \\ \hline 34100 \\ - 31412 \\ \hline 22440 \\ - 22440 \\ \hline 0 \end{array}$$

Problema 12. Scrieți numărul „o sută treizeci“ în toate sistemele de numerație, de la cel binar pînă la cel zecimal inclusiv.

Problema 13. Cu cît este egal numărul „123“ dacă-l considerăm scris în toate sistemele de numerație, inclusiv cel cu baza 9? Este posibil ca acest număr să fi fost scris în sistemul binar? Dar în cel cu baza 3? În cazul că a fost scris în sistemul cu baza 5, atunci puteți afla, fără a-l transforma în sistemul zecimal, dacă el se împarte fără rest cu 6? Dacă numărul a fost scris în sistemul zecimal, atunci se împarte fără rest cu 4?

CURIOZITATE ARITMETICĂ:

$$2^5 \cdot 9^2 = 2\ 592$$

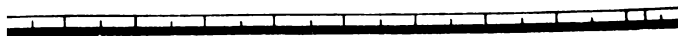


10 SAU 12 ?

UN PICIOR = 12 DEGETE



UN METRU = 10 DECIMETRI



CAPITOLUL V

GALERIA CURIOSITĂȚILOR NUMERICE

MUZEUL DE CURIOSITĂȚI ARITMETICE

În lumea cifrelor, ca și în lumea ființelor, se întâlnesc adevărate curiozități, exemplare rare care posedă proprietăți excepționale. Din astfel de numere s-ar fi putut întocmi un muzeu de rarități numerice, un adevărat muzeu „de curiozități aritmetice“. În vitrinele lui și-ar fi găsit loc nu numai uriașii numerici, despre care vom vorbi într-un capitol aparte, ci și numere de dimensiuni modeste, care ies din comun prin anumite proprietăți neobișnuite. Unele dintre ele atrag atenția cititorului chiar la prima vedere, celelalte își manifestă particularitățile lor deosebite numai la examinarea mai atentă.

Exemplele interesante prezentate în „galeria“ noastră de numere nu au nimic comun cu acele curiozități imaginare, pe care le întrezăresc în unele numere amatorii a tot ce este misterios. Un exemplu de asemenea superstiție în legătură cu numerele îl poate prezenta următorul raționament aritmetic, exprimat cu imprudență de cunoscutul scriitor francez Victor Hugo:

„Trei — este un număr perfect. Pentru numărul 3 unitatea este același lucru ca și diametrul pentru cerc. Printre celelalte numere 3 reprezintă același lucru ca și cercul printre figuri. Numărul 3 este singurul care are un centru. Celelalte numere sînt niște elipse, care au două focare. De aici următoarea particularitate, caracteristică numai pentru numărul 3: adunați cifrele oricărui număr multiplu de 3 — suma se împarte totdeauna cu 3, fără rest.“

În acest raționament nebulos și aparent „profund“ nu este nimic just; în fiecare frază fie o prostie, fie o totală lipsă de sens. Este justă numai observația cu privire la proprietatea sumei cifrelor, însă această proprietate nu decurge din cele spuse și, pe lângă aceasta, nu reprezintă o particularitate exclusivă a numărului 3; aceeași proprietate caracterizează, în sistemul zecimal, și numărul 9,

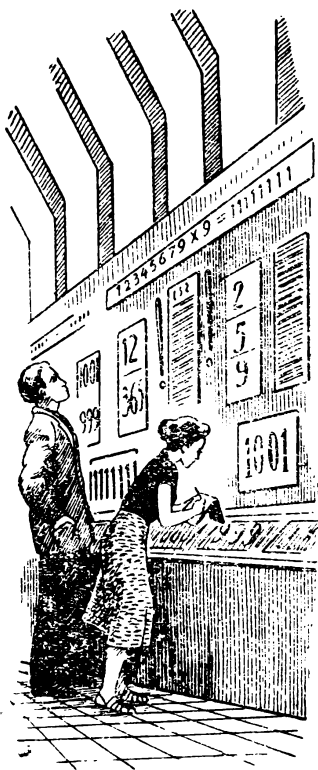


Fig. 25 — Vitrina curiozităților numerice.

iar în celelalte sisteme — numerele mai mici cu o unitate decît baza.

Curiozitățile din „galeria“ noastră sînt de alt gen: în ele nu există nimic misterios, nimic de neînțeles.

Îl invit pe cititor să facă o vizită în galeria acestor curiozități numerice și să cunoască unele din ele.

Vom trece, fără se ne oprim, pe lîngă primele vitrine care cuprind numere ale căror proprietăți le cunoaștem bine. Bănuim deja de ce a nimerit în galeria curiozităților numărul 2: nu pentru că el este primul număr par¹, ci pentru că el este baza celui mai interesant sistem de numerație (vezi pag. 81-82).

Nu ne vom mira nici atunci cînd vom găsi aici numărul 9, desigur, nu ca „simbolul fidelității“², ci ca număr care ne ușurează verificarea tuturor operațiilor aritmetice (vezi pag. 61-65).

NUMĂRUL 12

Ce particularitate are acest număr? Este numărul lunilor dintr-un an și numărul de unități dintr-o duzină. Dar ce reprezintă, în fond, neobișnuit o duzină? Sînt puțini cei care cunosc că 12 este un concurent vechi și cît p-aci învingător al numărului 10 în lupta pentru locul de onoare ca bază a sistemului de numerație. Unul din popoarele cele mai culte din Orientul antic — babilonienii și strămoșii lor sumerienii — efectuau calcule în sistemul de numerație cu baza 12. În unele domenii folosim și noi acest sistem, cu toate că victorios a ieșit sistemul zecimal. Predilecția noastră pentru duzine și „groși“³, împărțirea unei zile și nopți în două duzini de ore și a orei în cinci duzini de minute, împărțirea minutului în tot atîtea secunde, împărțirea cercului în 30 de duzini de grade și, în sfîrșit, împărțirea piciorului în 12 țoli — toate acestea nu sînt oare o mărturie a mării influențe a sistemului antic în zilele noastre?

¹ Primul număr par poate fi considerat 0 și nu 2.

² Anticii (urmașii lui Pitagora) considerau că 9 este simbolul fidelității „pentru că toate numerele multiple lui 9 au suma cifrelor multiplă lui 9“.

³ Un gros = 12 duzini. Într-o cutie de penițe este 1 gros — 144 bucăți.

Este bine oare că în lupta dintre duzină și zece a învins acesta din urmă? Desigur că aliații cei mai puternici ai zecelui au fost și rămân mîinile noastre proprii cu cele 10 degete — mașini de calcul vii. Dacă nu ar fi fost acest lucru atunci ar fi trebuit, fără îndoială, să-l preferăm pe 12 în loc de 10. Este mult mai comodă efectuarea calculelor în sistemul cu baza 12, decît în sistemul zecimal. Aceasta pentru că numărul 10 se împarte fără rest cu 2 și cu 5, în timp ce 12 se împarte cu 2,3,4,6. Numărul 10 nu poate fi împărțit decît de două numere fără rest, pe cînd 12 are patru divizori. Avantajele sistemului cu baza 12 ne vor deveni și mai clare dacă vom ține seama de faptul că în acest sistem numărul care se termină cu zero este divizibil și cu 2, și cu 3, și cu 4, și cu 6; gîndiți-vă cît de comod este să împarți un număr cînd și $1/2$, și $1/3$, și $1/4$, și $1/6$ din el sînt numere întregi! Dacă însă numărul exprimat în sistemul cu baza 12 se termină cu două zerouri, atunci el trebuie să se împartă fără rest cu 144, prin urmare și la toți divizorii lui 144, adică la următorul șir de numere:

2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,36,48,72,144

Avem deci 14 divizori în locul celor 8 pe care-i au numerele scrise în sistemul zecimal, atunci cînd ele se termină cu două zerouri (2,4,5,10,20,25,50, și 100). În sistemul nostru numai fracțiile de tipul $1/2$, $1/4$, $1/5$, $1/20$ etc. pot fi transformate în zecimale finite; în sistemul cu baza 12 putem scrie, fără numitor, fracții mult mai variate: $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/6$, $1/8$, $1/9$, $1/12$, $1/16$, $1/18$, $1/24$, $1/36$, $1/48$, $1/72$, $1/144$ care, respectiv, vor deveni:

0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09; 0,08; 0,06;
0,04; 0,03; 0,02; 0,01

Am greși însă dacă am crede că divizibilitatea numărului poate depinde de sistemul în care este reprezentat. Dacă nucile cuprinse într-un sac pot fi împărțite în 5 grămezi egale, atunci, desigur, această proprietate a lor nu se va schimba în funcție de sistemul de numerație în care va fi reprezentat numărul și nici de faptul că acest număr a fost luat pe abacă, scris cursiv, sau, în sfîrșit, într-un oarecare alt mod. Cînd numărul scris

în sistemul cu baza 12 se împarte cu 6 sau cu 72, atunci fiind exprimat într-un alt sistem de numerație, de exemplu în cel zecimal, el trebuie să aibă aceiași divizori. Diferența constă numai în faptul că în sistemul cu baza 12 divizibilitatea cu 6 sau cu 72 poate fi mai ușor remarcată (numărul se termină cu unul sau cu două zerouri).

Ținând seama de avantajele oferite de sistemul cu baza 12, nu este de mirare că printre matematicienii unii cereau trecerea completă în acest sistem. Noi însă ne-am obișnuit prea mult cu sistemul zecimal pentru a ne hotărî să facem o astfel de reformă.

Marele matematician francez Laplace spunea în legătură cu această problemă: „baza sistemului nostru de numerație nu se împarte cu 3 și cu 4, adică cu cei doi divizori care sînt atît de mult folosiți datorită simplității lor. Adăugarea a două semne (cifre) ar fi dat sistemului de numerație acest avantaj; însă inovația ar fi fost, fără îndoială, refuzată. Noi am fi pierdut avantajul care a dat naștere aritmeticii noastre — posibilitatea de a număra cu ajutorul degetelor de la mîini“.

Pentru a introduce însă uniformitate în toate calculele ar fi trebuit să se treacă la același sistem de numerație și pentru măsurarea arcelor de cerc.

S-a încercat să se facă această reformă în Franța, dar ea nu a prins. Însuși Laplace a fost un partizan convins al acestei reforme. Cunoscuta lui carte „Expunerea sistemului lumii“ este un exemplu de folosire a subîmpărțirii zecimale a unghiurilor; la el este numit grad fracțiunea a o suta și nu a nouăzecea parte din unghiul drept, minutul constituie a suta parte din grad etc. Laplace milita chiar pentru subîmpărțirea zecimală a orelor și a minutelor. „Uniformitatea sistemelor de măsură necesită ca ziua să fie împărțită în 100 ore, ora în 100 minute și minutul în 100 secunde“, scria el.

Vedeți prin urmare că duzina are o istorie îndelungată și că pe bună dreptate numărul 12 a intrat în galeria curiozităților numerice. În schimb, vecina lui, „duzina dracului“, 13, nu figurează aici pentru că ar

fi deosebit de interesantă, ci poate tocmai datorită faptului că nu prezintă nici un interes, deși are o faimă atît de sumbră. Oare nu este de mirare faptul că un număr, care nu are nici un fel de particularități interesante, a pûut deveni atît de „teribil“ pentru oamenii superstițioși?

Cît de răsîndită era această superstiție (care a luat naștere în Babilonul antic), se vede din faptul că în epoca țarismului, cînd s-a construit linia de tramvai electric la Petersburg, mult timp nu au îndrăznit să introducă linia nr. 13 și s-a trecut dintr-o dată la nr. 14; autoritățile credeau că publicul nu va accepta transportul în vagoane care poartă un număr atît de „nenorocos“. Este curios de asemenea că la Petersburg erau multe case în care lipseau locuințele cu nr. 13... Adesea în hoteluri nu existau camere cu nr. 13. Cîndva, în apus (de exemplu în Anglia) erau înființate chiar „cluburi ale nr. 13“ pentru a lupta împotriva acestei superstiții numerice nefondate...

În vitrina următoare a muzeului de curiozități aritmetice avem în fața noastră:

NUMĂRUL 365

El este remarcabil, înainte de toate, prin faptul că indică numărul zilelor dintr-un an. Mai departe, la împărțirea cu 7 el dă ca rest 1; această particularitate a numărului 365, deși aparent neesențială, are mare importanță pentru calendarul nostru bazat pe săptămîna de 7 zile.

O altă particularitate a numărului 365, care nu este legată de calendar:

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

adică, 365 este egal cu suma pătratelor a trei numere consecutive, începînd cu 10:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$$

365

Fig. 26 — Cunoașteți particularitățile acestui număr?



Fig. 27 — Tabloul pictorului Bogdanov-Belski „O problemă grea“.

Cu aceasta însă nu am terminat, același rezultat îdă și suma pătratelor a două numere imediat următoare, 13 și 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$$

Pe această proprietate a numărului 365 s-a bazat problema lui S. A. Racinski, reprezentată în cunoscutul tablou „O problemă grea“ a lui Bogdanov-Belski (fig. 27):

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = ?$$

Sînt puține numere de acest fel în galeria noastră de curiozități aritmetice.

TREI DE NOUA

În vitrina următoare găsim numărul cel mai mare dintre toate numerele de trei cifre: 999. Este neîndoielnic faptul că acest număr este mult mai interesant decît imaginea lui răsturnată — 666 — renumitul „număr al fiarelor“ din apocalips, care trezea o frică neîntemeiată în sufletele multor oameni superstițioși, dar prin proprietățile sale aritmetice nu prezintă nimic deosebit în rîndul celorlalte numere.



Fig. 28 — Un număr cu care se înmulțește ușor.

O particularitate curioasă a numărului 999 se manifestă la înmulțirea lui cu orice alt număr format din trei cifre. În urma înmulțirii se obține un produs format din șase cifre: primele trei cifre reprezintă numărul

cu care am înmulțit, micșorat cu o unitate, iar celelalte trei cifre „completează“ pe cele dintâi pînă la 9. De exemplu:

$$573 \times 999 = \begin{array}{r} 572 \\ 572\ 427 \\ \hline 999 \end{array}$$

Pentru a înțelege de unde provine această particularitate este suficient să urmărim rîndul care urmează:

$$573 \times 999 = 573 \times (1\ 000 - 1) = \begin{cases} 573\ 000 \\ -\ 573 \\ \hline 572\ 427 \end{cases}$$

Cunoscînd această particularitate, putem înmulți „instantaneu“ cu numărul 999 orice număr format din trei cifre:

$$\begin{aligned} 947 \times 999 &= 946\ 053 \\ 509 \times 999 &= 508\ 491 \\ 981 \times 999 &= 980\ 019 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Și, deoarece $999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$ puteți scrie cu o rapiditate uimitoare coloane întregi de numere formate din șase cifre, multiple lui 37; cititorul care nu cunoaște proprietățile numărului 999, desigur, nu va fi în stare să facă acest lucru. Cu alte cuvinte, veți putea face încercări de „înmulțiri și împărțiri instantanee“.

NUMĂRUL ȘEHERAZADEI

Numărul care vine la rînd este numărul 1 001 — cunoscutul număr al Șeherazadei. Probabil nici nu știți că în însăși denumirea vestitei culegeri de povești arabe găsim o minune sui-generis, care ar fi putut să frapeze imaginația sultanului din povești, cel puțin în aceeași măsură ca celelalte minuni ale Orientului, dacă el ar fi fost capabil să se intereseze de curiozitățile aritmetice.

Prin ce este oare remarcabil numărul 1 001? La prima vedere el pare foarte obișnuit. Nici măcar nu face parte din categoria numerelor „prime“ — o categorie a numerelor alese. El se împarte însă fără rest

1001

Fig. 29 — Numărul Șeherezadei.

și cu 7, și cu 11 și cu 13 — adică cu trei numere prime consecutive, al căror produs este de fapt. Dar aceasta nu constituie trăsătura care imprimă curiozitatea numărului; este interesant că atunci când un număr alcătuit din trei cifre este înmulțit cu 1 001, rezultatul va fi format din deînmulțitul însuși scris de două ori, de exemplu:

$$\begin{aligned}873 \times 1\,001 &= 873\,873 \\207 \times 1\,001 &= 207\,207 \text{ etc.}\end{aligned}$$

Rezultatul este evident, pentru că $873 \times 1\,001 = 873 \times 1\,000 + 873 = 873\,000 + 873$; totuși, folosind proprietatea arătată mai sus a „numărului Șeherezadei“, se pot obține rezultate cu totul neașteptate, cel puțin pentru un om neinițiat.

Iată, puteți să uimiți un cerc de tovarăși, care nu cunosc tainele aritmeticii, arătându-le următoarea scamatorie. Cereți unuia dintre ei să scrie pe o hîrtie, fără să v-o arate, un număr cu trei cifre, iar apoi să alătore la acesta încă o dată același număr. Se obține un număr de 6 cifre, compus din trei cifre care se repetă. Propuneți acum aceluiași tovarăș sau vecinului lui să împartă, fără să vedeți ce scrie el, acest număr cu 7; îl preveniți totodată că nu va avea rest. Rezultatul este transmis unui alt vecin, care la propunerea dumneavoastră îl împarte cu 11; și, deși nu cunoașteți deîmpărțitul, afirmați totuși cu curaj că și acesta se va împărți fără rest. Rezultatul obținut îl treceți unui

alt tovarăș, pe care-l rugați să împartă numărul cu 13, prevenindu-l că împărțirea se face tot fără rest. Rezultatul celei de-a treia împărțiri, fără a privi numărul obținut, îl înmânați primului tovarăș spunându-i: „Acesta este numărul pe care l-ați scris!”

Este just, ați ghicit.

Care este secretul scamatoriei?

Această frumoasă scamatorie aritmetică se explică foarte simplu: amintiți-vă că a scrie în dreapta unui număr de trei cifre același număr înseamnă a-l înmulți cu 1 001, adică cu produsul $7 \times 11 \times 13$. Numărul de șase cifre, pe care tovarășul dumneavoastră îl obține după ce scrie alături de două ori numărul ales, va trebui, prin urmare, să se împartă fără rest și cu 7, și cu 11, și cu 13; rezultatul împărțirii succesive cu aceste trei numere (adică cu produsul lor — 1 001) va trebui să dea din nou numărul inițial.

Această scamatorie poate să fie schimbată, după dorință, astfel încât totuși să avem posibilitatea de a declara celui care și-a ales un număr rezultatul calculelor lui. Știți că numărul de șase cifre, care stă la baza calculelor, este egal cu produsul dintre: numărul ales $\times 7 \times 11 \times 13$.

De aceea, dacă cereți să se împartă acest număr de șase cifre întâi cu 7, apoi cu 11, iar după aceea cu numărul ales, atunci puteți să afirmați cu convingere că rezultatul final al tuturor împărțirilor este 13.

Repetând scamatoria veți cere să se efectueze împărțirile într-o altă ordine: întâi cu 11, apoi cu numărul ales și, în sfârșit, cu 13. Ultima împărțire trebuie să dea rezultatul 7. Ordinea mai poate fi următoarea: întâi 13, apoi numărul ales și la sfârșit 7; rezultatul final — 11.

NUMĂRUL 10101

După cele spuse despre numărul 1 001 nu ne vom mira găsind în vitrinele galeriei noastre numărul 10 101. Vă dați seama, cred, ce proprietate anume îl face să se bucure de atîta cinste. El, ca și numărul 1 001, dă

rezultate interesante la înmulțirea numerelor formate din două cifre; fiecare număr de două cifre înmulțit

10101

Fig. 30 — Număr util pentru scamatorii.

cu 10 101 dă ca rezultat un număr egal cu de trei ori numărul ales.

De exemplu:

$$73 \times 10\ 101 = 737\ 373$$

$$21 \times 10\ 101 = 212\ 121$$

Cauza se află din:

$$73 \times 10\ 101 = 73 (10\ 000 + 100 + 1) = \left\{ \begin{array}{r} 730\ 000 \\ + 7\ 300 \\ \quad 73 \\ \hline 737\ 373 \end{array} \right.$$

Putem face oare cu ajutorul acestui număr scamatorii de genul celor prezentate anterior, la numărul 1 001?

Da, putem. Scamatoria aceasta este chiar mai interesantă, dacă avem în vedere faptul că 10 101 este un produs a patru numere simple:

$$10\ 101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$$

Propunînd unui tovarăș să scrie un număr oarecare format din două cifre, îi cereți celui de-al doilea să adauge același număr, iar unui al treilea să repete încă o dată numărul. Pe cel de-al patrulea îl rugați să împartă numărul de 6 cifre, astfel obținut, de exemplu cu 7; al cincilea tovarăș trebuie să împartă rezultatul cu 3; un al șaselea face împărțirea rezultatului cu 37, și, în sfîrșit, al șaptelea împarte acest rezultat cu 13; anunțați în prealabil că toate cele patru operații se

efectuează fără rest. Rezultatul ultimei împărțiri rugați să fie transcris primului tovarăș; acest rezultat este chiar numărul pe care l-a ales.

La repetare, scamatoria puteți s-o variați în oarecare măsură, folosind de fiecare dată alți divizori. Astfel, în loc de patru divizori $3 \times 7 \times 13 \times 37$ veți lua următoarele grupuri de trei termeni:

$$21 \times 13 \times 37; 7 \times 39 \times 37; 3 \times 91 \times 37; 7 \times 13 \times 111$$

Această scamatorie poate fi ușor schimbată, așa cum s-a explicat în cazul precedent (în legătură cu numărul 1 001).

S-ar putea spune chiar că numărul 10 101 este mai interesant decât numărul Șeherezadei, deși proprietățile lui extraordinare sînt mai puțin cunoscute. De altfel, despre el s-a scris încă cu 200 de ani în urmă, în „Aritmetica“ lui Magnițki. Aici e citat ca exemplu de înmulțire care prezintă „oarecari curiozități“. Cu atît mai îndreptățiti sîntem noi să-l includem în colecția noastră de curiozități aritmetice.

NUMĂRUL 10 001

Și acest număr se pretează la scamatoriile de genul celor de mai sus, deși ele nu sînt chiar atît de atră-



The image shows the number 10001 written in a large, bold, black serif font. The number is underlined with a wavy line. The final '1' has a decorative flourish or tail extending upwards and to the right.

Fig. 31 — Un alt număr folosit în scamatorii.

gătoare. Aceasta pentru că numărul din paragraful de față este un produs a numai două numere simple: $10\ 001 = 73 \times 137$.

Cum putem folosi acest lucru la efectuarea operațiilor aritmetice care prezintă „oarecari curiozități“, cred că cititorul și-a dat seama din cele spuse mai sus.

ȘASE UNITĂȚI

În vitrina următoare întâlnim o nouă curiozitate a muzeului de rarități aritmetice — un număr format din șase unități. Cunoscînd proprietățile numărului 1 001 ne dăm seama imediat că $111\ 111 = 111 \times 1\ 001$.



Fig. 32 — Un număr util pentru cel care ghicește.

Cum $111 = 3 \times 37$, iar $1\ 001 = 7 \times 11 \times 13$, deduce că noul nostru fenomen numeric, format numai din unități, reprezintă un produs de cinci factori simpli. Combinînd acești cinci factori în două grupuri, în diferite feluri, obținem 15 perechi de termeni care dau același număr 111 111:

$$3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) = 3 \times 37\ 037 = 111\ 111$$

$$7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) = 7 \times 13\ 873 = 111\ 111$$

$$11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) = 11 \times 10\ 101 = 111\ 111$$

$$13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) = 13 \times 8\ 547 = 111\ 111$$

$$37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) = 37 \times 3\ 003 = 111\ 111$$

$$(3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) = 21 \times 5\ 291 = 111\ 111$$

$$(3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) = 33 \times 3\ 367 = 111\ 111$$

etc.

Prin urmare, puteți da la 13 tovarăși să se ocupe cu înmulțirea și, deși fiecare va înmulți o altă pereche de numere, toți vor obține același rezultat: 111 111.

Numărul 111 111 poate fi folosit și pentru ghicirea numerelor alese, de genul scamatoriilor efectuate cu ajutorul lui 1 001 și 10 101. În cazul de față se propune să se aleagă numere formate dintr-o singură cifră, care să se repete de șase ori. Drept divizori aici pot servi cinci numere simple: 3, 7, 11, 13, 37 și produsele lor: 21, 33, 39 etc. Aceasta dă posibilitatea de a varia foarte mult efectuarea scamatoriei.

Din exemplul numărului 111 111 cititorul vede cum poate fi folosit, în scamatoriile aritmetice, un număr format numai din unități, dacă acest număr se descompune în factori. Din fericire pentru amatorii unor asemenea scamatorii, multe numere nu sînt prime, ci compuse.

Din primele 17 numere de acest gen numai două (cele mai mici) — 1 și 11 — sînt numere prime, iar celelalte sînt compuse. Iată cum se descompun în factori primii primele zece numere compuse formate numai din unități:

$$111 = 3 \times 37$$

$$1\ 111 = 11 \times 101$$

$$11\ 111 = 41 \times 271$$

$$111\ 111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$$

$$1\ 111\ 111 = 239 \times 4\ 649$$

$$11\ 111\ 111 = 11 \times 73 \times 101 \times 137$$

$$111\ 111\ 111 = 9 \times 37 \times 333\ 667$$

$$1\ 111\ 111\ 111 = 11 \times 41 \times 271 \times 9\ 091$$

$$11\ 111\ 111\ 111 = 21\ 649 \times 513\ 239$$

$$111\ 111\ 111\ 111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9\ 901$$

Toate numerele de mai sus pot fi folosite pentru scamatorie; în unele cazuri însă această scamatorie l-ar sili pe cel care efectuează operațiile să facă o muncă prea complicată. Numerele formate din 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12 unități sînt cele mai utile în acest scop. Modelele de folosire a acestora pentru scamatorii aritmetice vor fi date la sfîrșitul capitolului următor.

În vitrinele următoare ale galeriei noastre ne uimesc curiozități aritmetice de un alt gen — un fel de piramide formate din cifre.

Cum se explică asemenea rezultate originale ale înmulțirii?

Pentru a înțelege această regularitate curioasă, luăm ca exemplu unul din rîndurile primei piramide (fig. 33) numerice: $123\ 456 \times 9 + 7$. În locul înmulțirii cu 9 se poate face înmulțirea cu $(10-1)$, adică să se adauge 0 și să se scadă deînmulțitul:

$$123\ 456 \times 9 + 7 = 1\ 234\ 560 + 7 - 123\ 456 = \left\{ \begin{array}{r} 1\ 234\ 567 \\ - \quad 123\ 456 \\ \hline 1\ 111\ 111 \end{array} \right.$$

Este suficient să privim ultima scădere ca să înțelegem de ce obținem un rezultat format numai din unități.

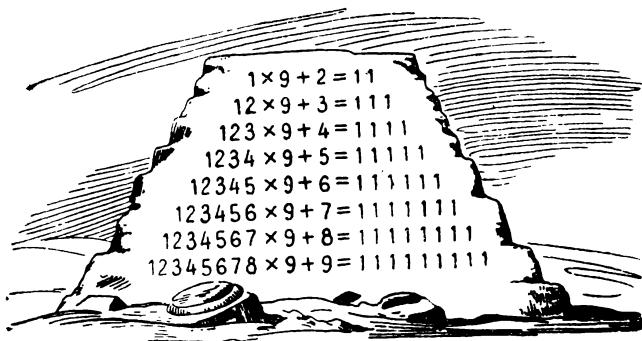


Fig. 33 — Prima piramidă numerică.

Putem să ne lămurim și pornind de la alte raționamente. Pentru ca numărul de forma 12 345... să se transforme într-un număr de forma 11 111... este necesar ca din cifra lui a doua să se scadă 1, din cea de-a treia — 2, din cea de-a patra — 3, din a cincea — 4 etc.; sau,

cu alte cuvinte, să se scadă din el același număr de tipul 12 345..., scurtat cu ultima lui unitate, adică micșorat de 10 ori și lipsit în prealabil de ultima lui cifră. Acum este limpede că pentru obținerea rezultatului căutat numărul nostru trebuie înmulțit cu 10, să i se adauge cifra care urmează după ultima și să

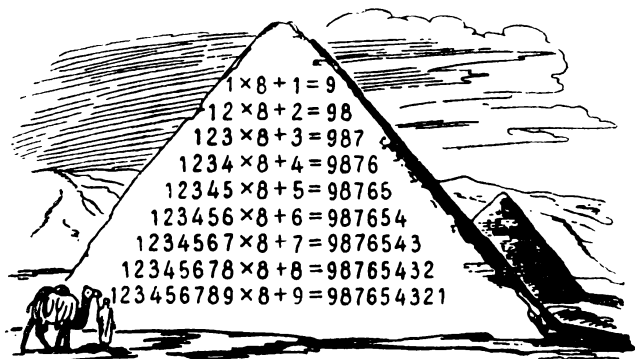


Fig. 34 — A doua piramidă numerică.

se scadă din rezultat numărul inițial (or a înmulți cu 10 și a scădea numărul inițial înseamnă a înmulți cu 9).

În mod asemănător se explică și formarea piramidei numerice următoare (fig. 34), care se obține la înmulțirea unui anumit șir de cifre cu 8 și adăugarea cifrelor care cresc succesiv. Deosebit de interesant este ultimul șir din piramidă, unde în rezultatul înmulțirii cu 8 și a adăugării lui 9 are loc transformarea șirului natural al cifrelor în același șir, dar cu așezarea inversă.

Vom încerca să explicăm această particularitate.

Dacă privim rîndul care urmează observăm:

$$12\ 345 \times 8 + 5 = \left\{ \begin{array}{l} - 12\ 345 \times 9 + 6 \\ - 12\ 345 \times 1 + 1 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} - 111\ 111^1 \\ - 12\ 346 \end{array} \right.$$

¹ De ce $12\ 345 \times 9 + 6$ dă tocmai 111 111 s-a arătat la piramida numerică precedentă.

adică $12\ 345 \times 8 + 5 = 111\ 111 - 12\ 346$. Scăzînd însă din numărul 111 111 numărul 12 346, format dintr-un șir de cifre crescătoare, noi, cum se poate ușor înțelege, trebuie să obținem un șir de cifre descrescătoare 98 765.

Iată, în sfîrșit, cea de-a treia piramidă numerică care necesită de asemenea explicații (fig. 35).

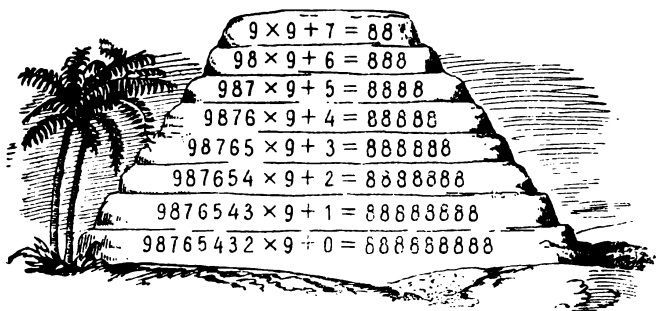


Fig. 35 — A treia piramidă numerică.

Această piramidă este urmarea directă a primelor două. Legătura se stabilește foarte ușor. Din prima piramidă, de exemplu, știm deja că:

$$12\ 345 \times 9 + 6 = 111\ 111$$

Înmulțind ambele părți cu 8 avem:

$$(12\ 345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = 888\ 888$$

Din cea de-a doua piramidă se știe că:

$$12\ 345 \times 8 + 5 = 98\ 765, \text{ deci } 12\ 345 \times 8 = 98\ 760$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} 888\ 888 &= (12\ 345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = (98\ 760 \times 9) + 48 = \\ &= (98\ 760 \times 9) + (5 \times 9) + 3 = (98\ 760 + 5) \times 9 + 3 = \\ &= 98\ 765 \times 9 + 3 \end{aligned}$$

Iată deci, că toate aceste piramide numerice nu sînt chiar atît de misterioase pe cît ni se par. Totuși mulți le consideră încă inexplicabile. Mi s-a întîmplat să

le văd tipărite într-un ziar german cu explicația:
 „Cauza acestei regularități uimitoare nu a fost explicată pînă în prezent de nimeni“...

NOUĂ CIFRE EGALE

Ultimul rînd din prima „piramidă“ examinată (fig. 33)

$$12\ 345\ 678 \times 9 + 9 = 111\ 111\ 111$$

reprezintă un model de un întreg grup de curiozități aritmetice interesante, culese în muzeul nostru și aranjate într-un tabel (vezi fig. 36).

12345679	×	9	=	111111111
12345679	×	18	=	222222222
12345679	×	27	=	333333333
12345679	×	36	=	444444444
12345679	×	45	=	555555555
12345679	×	54	=	666666666
12345679	×	63	=	777777777
12345679	×	72	=	888888888
12345679	×	81	=	999999999

Fig. 36 — Cazuri interesante de înmulțire.

De unde provine această regularitate observată în rezultate?

Vom ține seama de faptul că

$$\begin{aligned} 12\ 354\ 678 \times 9 + 9 &= (12\ 345\ 678 + 1) \times 9 = \\ &= 12\ 345\ 679 \times 9 \end{aligned}$$

De aceea,

$$12\ 345\ 679 \times 9 = 111\ 111\ 111$$

Iar de aici decurge direct că:

$$12\ 345\ 679 \times 9 \times 2 = 222\ 222\ 222$$

$$12\ 345\ 679 \times 9 \times 3 = 333\ 333\ 333$$

$$12\ 345\ 679 \times 9 \times 4 = 444\ 444\ 444$$

SCARA NUMERICĂ

Este interesant ce se va întâmpla dacă numărul 111 111 111, cu care am avut de-a face mai sus, va fi înmulțit cu el însuși?

Dacă știți să desenați bine în imaginație rîndurile de cifre, atunci veți reuși să găsiți rezultatul chiar fără să recurgeți la calcule pe hîrtie. De fapt aici lucrurile se reduc numai la așezarea corespunzătoare a produselor parțiale, pentru că înmulțirea se face tot timpul numai cu 1. O asemenea operație poate să prezinte greutatea cel mult lui Mitrofanușka al lui Fonvizin, care a stat pe gînduri la înmulțirea lui „unu cu unu”. Iar adunarea produselor parțiale se reduce la o simplă numărătoare a unităților.¹ Iată rezultatul acestei înmulțiri unice în genul ei (la efectuarea căreia nu trebuie niciodată să recurgem la înmulțirea propriu-zisă):

$$\begin{array}{r} 111111111 \\ 111111111 \\ \hline 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ \hline 12345678987654321 \end{array}$$

¹ După cum am mai explicat, în sistemul de numerație binar (vezi pag. 82) toate înmulțirile sînt de acest gen. Exemplul de mai sus ne convinge încă o dată de avantajele sistemului binar.

Cifrele rezultatului descresc simetric de la mijloc spre ambele capete.

Cititorii, pe care i-a obosit trecerea în revistă a curiozităților numerice, pot părăsi aici „galeria“, trecînd la celelalte secțiuni, unde se arată scamatorii, și sînt expuși uriașii și piticii numerici; vreau să spun că ei pot întrerupe citirea acestui capitol, trecînd la capitolele următoare. Cei ce doresc să mai cunoască cîteva rarități din lumea numerelor, pot vizita împreună cu mine încă cîteva vitrine din vecinătate.

Curiozitățile numerice, despre care va fi vorba acum, necesită o întrevvedere cu așa-numitele fracții periodice infinite. Pe cei care nu cunosc aceste fracții îi rog să transforme, după metoda cunoscută, următoarele fracții ordinare în fracții zecimale:

$$\frac{1}{4} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{3} ; \text{ și } \frac{1}{11}$$

Este ușor să ne convingem de faptul că primele două fracții, la transformarea lor în fracții zecimale, dau un număr de cifre finit: $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{1}{8} = 0,125$. La transformarea celorlalte fracții în fracții zecimale se obțin șiruri infinite de cifre, care se repetă într-o anumită ordine:

$$\frac{1}{3} = 0,3333\dots; \frac{1}{11} = 0,09090909\dots$$

Aceste fracții se numesc *p e r i o d i c e*, iar grupul de cifre care se repetă — *p e r i o a d ă*.

INELE MAGICE

Ce inele interesante sînt expuse în următoarea vitrină a galeriei noastre! În fața noastră (fig. 37) se află trei inele plane, care se rotesc unul în altul.

Pe fiecare inel sînt scrise șase cifre în aceeași ordine, și anume, ele formează numărul: 142 857. Inelele au

următoarea proprietate: oricum ar fi rotite, la adunarea a două numere scrise pe ele — începînd de la orice cifră în direcția de rotire a acelor de ceasornic — obținem în toate cazurile același număr de șase cifre (bineînțeles dacă rezultatul va fi un număr format din șase cifre), deplasat numai puțin! De exemplu, în poziția reprezentată în figura alăturată obținem la adunarea celor două inele exterioare:

$$\begin{array}{r} + 142\ 857 \\ + 428\ 571 \\ \hline 571\ 428 \end{array}$$

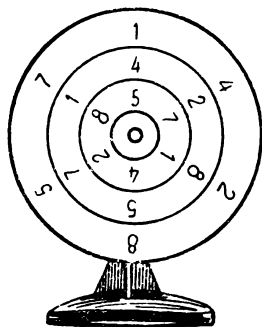


Fig. 37 — Inele numerice ce se rotesc.

adică din nou aceeași serie de cifre: 142 857, doar că cifrele 5 și 7 au trecut la început.

Dacă inelele sînt așezate altfel unul față de celălalt, atunci avem următoarele cazuri:

$$\begin{array}{r} + 285\ 714 \\ + 571\ 428 \\ \hline 857\ 142 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 714\ 285 \\ + 142\ 857 \\ \hline 857\ 142 \end{array} \text{ etc.}$$

Excepție face cazul cînd la rezultat se obține 999 999

$$\begin{array}{r} + 285\ 714 \\ + 714\ 285 \\ \hline 999\ 999 \end{array}$$

(Cititorul va înțelege cauza altor abateri de la regula arătată mai sus, cînd va citi acest paragraf pînă la capăt).

Nu numai atît. Același șir de cifre, în aceeași succesiune, se obține și la s c ă d e r e a numerelor scrise pe inele.

E x e m p l u :

$$\begin{array}{r} 428\ 571 \\ - 142\ 857 \\ \hline 285\ 714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 571\ 428 \\ - 285\ 714 \\ \hline 285\ 714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714\ 285 \\ - 142\ 857 \\ \hline 571\ 428 \end{array}$$

Excepție face cazul cînd coincid cifre de același fel; se înțelege că atunci diferența este egală cu zero.

Dar nici cu aceasta nu am terminat. Înmulțim numărul 142 857 cu 2,3,4,5 sau cu 6. Veți obține un număr format din aceleași cifre însă permutate circular cu una sau mai multe cifre:

$$142\ 857 \times 2 = 285\ 714$$

$$142\ 857 \times 3 = 428\ 571$$

$$142\ 857 \times 4 = 571\ 428$$

$$142\ 857 \times 5 = 714\ 285$$

$$142\ 857 \times 6 = 857\ 142$$

Căruia fapt se datoresc toate aceste particularități misterioase ale numărului nostru?

Vom găsi calea spre rezolvare dacă vom continua puțin tabelul de mai sus și vom încerca să înmulțim numărul nostru cu 7: se va obține ca rezultat 999 999. Aceasta înseamnă că numărul 142 857 nu este altceva decît a șaptea parte din 999 999 și, prin urmare, fracția

$\frac{142\ 857}{999\ 999} = \frac{1}{7}$. Într-adevăr, dacă veți transforma $\frac{1}{7}$ în fracție zecimală, obțineți:

$$1 : 7 = 0,142\ 857\dots \text{adică } 1/7 = 0,(142\ 857)$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 30 \\ \hline 20 \\ \hline 60 \\ \hline 40 \\ \hline 50 \\ \hline 1 \end{array}$$

Deci numărul de mai sus este perioada unei fracții periodice infinite, care se obține la transformarea fracției $1/7$ în fracție zecimală. Acum înțelegem de ce la dublarea, triplarea etc. a acestui număr are loc doar

o mutare a unui grup de cifre în alt loc. Numai înmulțirea acestui număr cu doi îl face egal cu $2/7$ și, prin urmare, este echivalentă cu transformarea în fracție zecimală a lui $2/7$ și nu a lui $1/7$. Încercînd să transformăm fracția $2/7$ în fracție zecimală, veți observa imediat că cifra 2 este unul din acele resturi pe care le-am obținut și la transformarea lui $1/7$; desigur că trebuie să se repete din nou șirul de cifre ale cîtului, începînd însă cu o altă cifră; cu alte cuvinte trebuie să se obțină aceeași perioadă, dar numai cîteva cifre de la începutul ei se vor găsi la sfîrșit. Același lucru se va petrece și la înmulțirea cu 3, 4, 5 și 6, adică cu toate numerele obținute în rest. La înmulțirea cu 7 trebuie să obținem 1, sau — ceea ce este același lucru — 0,9999...

Rezultatele interesante obținute prin a d u n a r e a și s c ă d e r e a numerelor de pe inele își găsesc explicația în același fapt că 142 857 este perioada fracției egale cu $1/7$. Într-adevăr, ce facem, propriu-zis, rotind inelul cu cîteva cifre? Noi mutăm grupul de cifre de la început la sfîrșit, adică, conform celor spuse mai sus, înmulțim numărul 142 857 cu 2, 3, 4 etc. Prin urmare, toate operațiile de adunare sau scădere a numerelor scrise pe inele se reduc la adunarea sau scăderea fracțiilor $1/7$, $2/7$, $3/7$ etc. Desigur că, în rezultat, noi trebuie să obținem cîteva șeptimi, adică din nou șirul de cifre 142 857, într-o altă permutare circulară. Face excepție numai cazul cînd se adună fracțiile care dau în sumă 1 sau mai mult de 1.

Chiar aceste din urmă cazuri nu sînt complet deosebite; ele, ce e drept, nu dau un rezultat identic cu cele examinate, dar cu toate acestea asemănător. Să vedem ce trebuie să se întîmple dacă înmulțim respectiv cu un factor mai mare decît 7, adică cu 8, 9 etc. Pentru a înmulți 142 857, de exemplu, cu 8 procedăm astfel: înmulțim întîi numărul cu 7 și adăugăm apoi la produs (adică la 999 999) numărul nostru:

$$142\ 857 \times 8 = 142\ 857 \times 7 + 142\ 857 = 999\ 999 + \\ + 142\ 857 = 1\ 000\ 000 - 1 + 142\ 857 = 1\ 000\ 000 + \\ + (142\ 857 - 1)$$

Rezultatul final — 1142856 — diferă față de deîn-
 mulțitul 142 857 numai prin faptul că înaintea lui
 mai avem un unu, iar ultima cifră este micșorată cu
 o unitate. După o regulă asemănătoare se obțin pro-
 dusele lui 142 857 cu orice alt număr mai mare decât 7
 după cum putem vedea imediat mai jos:

$$\begin{aligned}
 142\ 857 \times 8 &= (142\ 857 \times 7) && + \\
 142\ 857 \times 9 &= (142\ 857 \times 7) && + \\
 142\ 857 \times 10 &= (142\ 857 \times 7) && + \\
 142\ 857 \times 16 &= (142\ 857 \times 7 \times 2) && + \\
 142\ 857 \times 39 &= (142\ 857 \times 7 \times 5) && + \\
 &+ 142\ 857 && = 1\ 142\ 856 \\
 &+ (142\ 857 \times 2) && = 1\ 285\ 713 \\
 &+ (142\ 857 \times 3) && = 1\ 428\ 570 \\
 &+ (142\ 857 \times 2) && = 2\ 285\ 712 \\
 &+ (142\ 857 \times 4) && = 5\ 571\ 423
 \end{aligned}$$

Aici regula generală este următoarea: la înmulțirea
 lui 142 857 cu orice înmulțitor trebuie să se înmulțească
 numai cu restul de la împărțirea înmulțitorului cu 7;
 în fața acestui produs se pune numărul care arată câți
 de 7 sînt cuprinși în înmulțitor, același număr scă-
 zîndu-se și din rezultat¹. Presupunem că dorim să înmul-
 țim 142 857 cu 88. Înmulțitorul 88, la împărțirea lui
 cu 7, dă cîțul 12 și rest 4. Prin urmare rezultatul înmul-
 țirii este următorul:

$$12\ 571\ 428 - 12 = 12\ 571\ 416$$

Efectuînd înmulțirea $142\ 857 \times 365$ obținem (deoa-
 rece 365 la împărțirea lui cu 7 dă cîțul 52 și rest 1):

$$52\ 142\ 857 - 52 = 52\ 142\ 805$$

Însușindu-ne această regulă simplă și ținînd minte
 rezultatele înmulțirii numărului cu înmulțitorii de la
 2 pînă la 6 (ceea ce nu este greu, pentru că trebuie să

¹ Dacă înmulțitorul este un multiplu de 7, atunci rezultatul
 este egal cu numărul 999 999 înmulțit cu numărul care arată
 de cîte ori 7 se cuprinde în înmulțitor; această înmulțire poate
 fi efectuată în minte. De exemplu:

$$142\ 857 \times 28 = 999\ 999 \times 4 = 4\ 000\ 000 - 4 = 3\ 999\ 996$$

ținem minte numai cu ce cifră încep ele), puteți să-i uimiți pe cei da față înmulțind rapid numere formate din șase cifre. Iar pentru a reține acest număr util în calcule, observăm că el a provenit de la $1/7$ sau — ceea ce este același lucru — de la $2/14$: să zicem că ați aflat primele trei cifre din numărul nostru: 142. Celelalte trei se obțin prin scăderea acestora din 999:

$$\begin{array}{r} 999 \\ - 142\ 857 \\ \hline 857 \end{array}$$

Noi am mai avut de-a face cu astfel de numere, și anume, atunci când am făcut cunoștință cu proprietățile numărului 999. Amintindu-ne de cele spuse la paragraful respectiv, ne vom da seama imediat că numărul 142 857 este, evident, rezultatul înmulțirii numărului 143 cu 999:

$$142\ 857 = 143 \times 999$$

Însă $143 = 13 \times 11$. Ținând seama de observația făcută mai înainte cu privire la numărul 1 001, egal cu $7 \times 11 \times 13$, vom putea, fără să efectuăm vreo operație, să spunem ce rezultat se obține prin înmulțirea $142\ 857 \times 7$:

$$\begin{aligned} 142\ 857 \times 7 &= 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 = \\ &= 999 \times 1\ 001 = 999\ 999 \end{aligned}$$

(toate aceste transformări le putem face, desigur, în minte).

O FAMILIE FENOMENALĂ

Numărul 142 857 este membru al unei familii întregi de numere care posedă aceeași proprietate. Iată încă un număr de acest gen: 0 588 235 294 117 647 (0 din față este necesar). Dacă înmulțim numărul acesta de

exemplu cu 4, atunci vom obține același șir de cifre numai că primele patru cifre se vor afla la sfârșit:

$$0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \times 4 = 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588$$

Așezînd cifrele care formează numărul pe cîteva inele mobile (fig. 38), ca și în cazul precedent, la adunarea numerelor de pe două inele vom obține un număr format din aceleași cifre permutate însă circular:

$$\begin{array}{r} +\ 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \\ +\ 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588 \\ \hline 2\ 941\ 176\ 470\ 588\ 235 \end{array}$$

La așezarea pe inele numerele celor trei rînduri sînt, desigur, identice.

Scăzînd numerele de pe două inele obținem din nou același cerc de cifre:

$$\begin{array}{r} -\ 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588 \\ -\ 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \\ \hline 1\ 764\ 705\ 882\ 352\ 941 \end{array}$$

În sfârșit, acest număr, ca și cel examinat mai sus, este format din două jumătăți; cifrele din cea de-a doua jumătate completează cifrele din prima jumătate pînă la 9.

Vom căuta să găsim explicația unor asemenea particularități. Nu este greu să ne dăm seama în ce mod numărul acesta a devenit o rudă apropiată a numărului 142 857; 142 857 reprezintă perioada fracției periodice infinite egale cu $1/7$, iar numărul nou este, probabil, perioada unei alte fracții periodice. Într-adevăr așa este, numărul lung de cifre nu este altceva decît perioada fracției periodice infinite care se obține prin transformarea în fracție zecimală a fracției $1/17$:

$$1/17 = 0, (0588235294117647)$$

Iată de ce la înmulțirea acestui număr cu un înmulțitor de la 1 pînă la 16 se obține același șir de cifre, în care numai una sau cîteva din cifrele de la începutul numărului sînt trecute la sfârșitul lui. Dimpotrivă, trecîndu-se una sau cîteva cifre de la începutul șirului

la sfârșitul lui, mărim astfel numărul de câteva ori (de la 1 pînă la 16 inclusiv). Adunînd două inele, rotite unul față de celălalt, noi efectuăm adunarea a două numere înmulțite — de exemplu, triplate sau înmulțite cu 10; desigur, trebuie să obținem același inel de cifre, pentru că înmulțirea cu $3 + 10$, adică cu 13, duce doar la o deplasare în grupul de cifre, deplasare care nu se observă la așezarea circulară.

La o anumită poziție a inelelor se obțin însă sume care diferă puțin de șirul inițial. Dacă, de exemplu, rotim inelul astfel încît să fim nevoiți să adunăm un număr înmulțit cu 6 cu un număr înmulțit cu 15, atunci în sumă trebuie să obținem un număr înmulțit cu $6 + 15 = 21$. Acest produs se prezintă întrucîtva

altfel decît produsul cu un factor mai mic decît 17. Într-adevăr, deoarece numărul nostru este perioada unei fracții egale cu $1/17$, el fiind înmulțit cu 17 trebuie să dea 17 de 9 (adică atîția cîte cifre sînt în perioada fracției noastre periodice), sau 1 cu 17 zerouri minus 1. De aceea la înmulțirea cu 21, adică cu $4 + 17$, trebuie să obținem numărul nostru înmulțit cu 4, în fața căruia stă un 1, iar din unități simple se scade 1. Dar numărul înmulțit cu 4 începe cu cifrele ce se obțin la transformarea în fracție zecimală a fracției simple $4/17$:

$$4 : 17 = 0,23\dots$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \hline 60 \\ \hline 9 \end{array}$$

Ordinea celorlalte cifre se cunoaște: 5294... Prin urmare, numărul respectiv înmulțit cu 21 va fi:

$$12\ 352\ 941\ 176\ 470\ 587$$

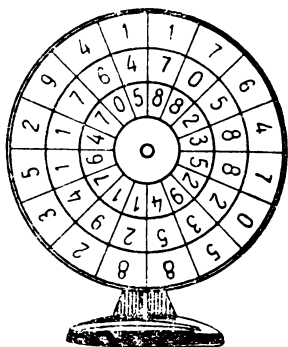


Fig. 38 — Încă un număr interesant.

Tot atîta se obține și prin adunarea cercurilor de cifre, cînd ele sînt așezate corespunzător. Un astfel de caz, bineînțeles, nu poate fi obținut prin scăderea inelelor numerice.

Există foarte multe numere asemenea celor două cu care am făcut cunoștință mai sus. Ele formează o familie întregă, pentru că au o origine comună — transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale infinite. Însă nu fiecare perioadă a fracției zecimale are proprietatea interesantă de a da la înmulțire o permutare circulară a cifrelor. Fără a mai aprofunda teoria, menționăm că aceasta are loc numai pentru fracțiile pentru care numărul de cifre al perioadei este cu o unitate mai mică decît numitorul fracției ordinare corespunzătoare. Astfel, de exemplu:

1/7	dă	la	perioadă	6	cifre
1/17	„	„	„	16	„
1/19	„	„	„	18	„
1/23	„	„	„	22	„
1/29	„	„	„	28	„

Dacă proprietatea indicată mai sus (în ce privește numărul de cifre ale perioadei) nu este respectată, atunci perioada respectivă dă un număr care nu face parte din familia de numere de care ne ocupăm în acest paragraf. De exemplu, 1/13 dă o fracție zecimală cu 6 și nu cu 12) cifre în perioadă:

$$1/13 = 0,076923$$

Înmulțind cu 2 obținem un număr cu totul diferit:

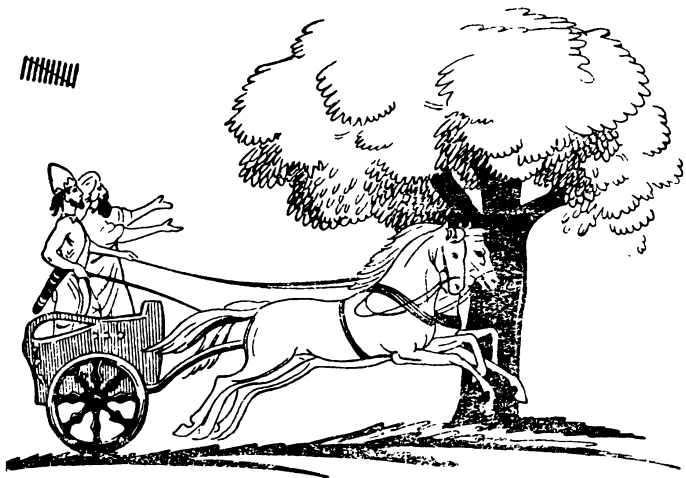
$$2/13 = 0,153846$$

De ce? Pentru că printre resturile împărțirii 1 : 13 nu există numărul 2. Resturi diferite au fost atîtea cîte cifre sînt în perioadă, adică 6; înmulțitori diferiți pentru fracția 1/13 avem 12; prin urmare, nu toți înmulțitorii vor exista printre resturi, ci numai 6. Aceștia sînt următorii: 1, 3, 4, 9, 10, 12. Înmulțirea cu aceste 6 numere dă o permutare circulară a cifrelor

(076 923 \times 3 = 230 769) iar înmulțirea, cu celelalte nu.
Iată de ce fracția 1/13 dă un număr care este util numai
în parte pentru „inelul magic“.

CURIOZITĂȚI ARITMETICE

$$100 = \left\{ \begin{array}{l} 91 + \frac{5823}{647} \\ 94 + \frac{1578}{263} \\ 96 + \frac{1428}{357} \end{array} \right.$$



CAPITOLUL VI

SCAMATORII FĂRĂ ÎNȘELĂTORIE

ARTA CALCULATORULUI INDIAN

Scamatoriile aritmetice nu caută să amăgească, să adoarmă atenția spectatorului. Pentru efectuarea scamatoriei aritmetice nu este necesară nici abilitatea extraordinară a mâinilor, nici rapiditatea uimitoare a mișcărilor, nici talente artistice sau deprinderi care să ceară antrenamente îndelungate. Secretul scamatoriei aritmetice constă în studiul amănunțit și în folosirea proprietăților interesante ale numerelor, cunoscând particularitățile lor. Cine află dezlegarea unei astfel de scamatorii o va găsi simplă și clară; pentru cel care nu cunoaște însă aritmetica, chiar și operația cea mai obișnuită apare ca un fel de scamatorie.

A existat o vreme când priceperea de a efectua operații aritmetice obișnuite cu numere mari, operații cunoscute astăzi oricărui școlar, era o artă cunoscută numai unor oameni care păreau că dețin aptitudini deosebite, supranaturale. În povestirea veche indiană „Nal și Damaianti“ găsim ecoul unei astfel de concepții. Nal, care știa foarte bine să conducă caii, îl plimba o dată pe calculatorul Ritupern pe lângă un copac foarte ramificat — Vibitaka.

„Ascultă, spuse el. Aici pe pământ nimeni nu cunoaște totul: în arta de a conduce caii tu ești primul; în schimb eu cunosc arta calculului...”

Și pentru a-și demonstra arta, calculatorul numără într-o clipă frunzele de pe Vibitaka stufoasă. Uimit, Nal îl rugă pe Ritupern să-i dezvăluie taina artei sale și acesta se învoi.

„...Îndată ce și-a rostit Ritupern cuvântul său, lui Nal i s-au deschis ochii și el a putut număra pe loc toate ramurile fructele și frunzele Vibitakăi...”

Secretul consta în aceea că numărătoarea directă a frunzelor care necesita timp mult și răbdare, era înlocuită prin numărătoarea frunzelor unei singure ramuri; rezultatul se obținea prin înmulțirea acestui număr cu numărul de rămurele ale fiecărei crengi și apoi cu numărul de crengi ale copacului (presupunând că toate crengile conțineau același număr de rămurele, iar rămurelele același număr de frunze).

Dezlegarea celor mai multe scamatorii aritmetice este tot atât de simplă ca și secretul lui Ritupern. Trebuie să aflăm doar în ce constă secretul scamatorii și vom cunoaște imediat modul ei de efectuare. La baza fiecărei scamatorii aritmetice stă o anumită particularitate interesantă a numerelor și, de aceea, cunoașterea lor este distractivă și instructivă în același timp.

FĂRĂ A DESCHIDE PUNGILE

Scamatorul pune pe masă o grămadă de monezi care însumează 3 ruble și vă propune să rezolvați următoarea problemă: să repartizați banii în 9 pungi, astfel încât

să puteți plăti orice sumă pînă la trei ruble fără a deschide pungile.

Acest lucru poate să pară irealizabil. Să nu credeți însă că scamatorul v-a întins o cursă, folosind un joc de cuvinte sau dînd acestor cuvinte o anumită răsălmăcire. Iată, scamatorul se apucă singur de treabă. Așezînd monezile în pungile și legînd de fiecare pungă cîte un bilețel pe care este notată suma ce-o cuprinde (fig. 39), el vă propune să numiți orice sumă care să nu depășească 3 ruble.

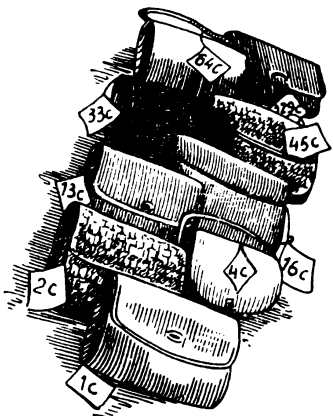


Fig. 39 — Scamatoria cu 9 port-monee

Numiți prima sumă ce vă vine în minte: să zicem 2 ruble și 69 copeici.

Fără să stea pe gînduri scamatorul alege și vă întinde 4 pungile. Le deschideți și găsiți:

în prima.....	64 c.
în a doua.....	45 c.
în a treia.....	1 r. 28 c.
în a patra	32 c.

Total: 2 r.69 c.

Sînteți gata să-l învinuiți că a înlocuit cu abilitate pungile și cereți să se repete scamatoria. El vă întinde pungile și atunci numiți o nouă sumă — de exemplu 1 rublă, sau 7 copeici, sau 2 ruble 93 copeici; el vă arată imediat care din pungile ce le aveți în față reprezintă suma numită de dumneavoastră. Și anume:

pentru 1 rublă — 6 pungile (32 copeici, 1 copeică, 45 copeici, 16 copeici, 2 copeici, 4 copeici);

pentru 7 copeici — 3 pungi (1 copeică, 2 copeici, 4 copeici);

pentru 2 rube 93 copeici — 7 pungi (1 rublă 28 copeici, 32 copeici, 8 copeici, 45 copeici, 64 copeici, 16 copeici).

La dorința scamatorului pungile sînt gata totdeauna să formeze orice sumă numită (pînă la 3 rube).

Cum se explică acest lucru ?

Secretul constă în repartizarea corespunzătoare a monedelor: 1 copeică, 2 copeici, 4 copeici, 8 copeici, 16 copeici, 32 copeici, 64 copeici, 128 copeici și, în sfîrșit, în ultima pungă — restul banilor adică:

$$\begin{aligned} 300 - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) &= \\ &= 300 - 255 = 45 \text{ copeici} \end{aligned}$$

Din primele 8 pungi putem forma ușor orice sumă de la 1 pînă la 255 copeici; dacă se dă însă o sumă mai mare, atunci se folosește și ultima pungă cu 45 de copeici, iar diferența se completează din primele 8 pungi.

Puteți verifica utilitatea unei astfel de grupări a numerelor făcînd oricîte probe și vă veți convinge că din ele se poate întocmi, într-adevăr, orice număr care nu depășește trei sute. Vă interesează probabil și cauza pentru care șirul de numere 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 etc. are o proprietate atît de interesantă. Acest lucru nu este greu de înțeles dacă ne amintim că numerele din șirul nostru reprezintă puteri ale lui 2: 2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3 , 2^4 etc.¹. și, prin urmare, pot fi privite ca niște categorii ale sistemului de numerație binar. Deoarece fiecare număr poate fi scris în sistemul binar, înseamnă că orice număr poate fi întocmit din suma puterilor lui 2, adică din numere ale seriei 1, 2, 4, 8, 16 etc. Atunci cînd alegeți pungile pentru a întocmi din conținutul lor numărul dat, exprimați de fapt numărul dat în sistemul de nume-

¹ Cei care au învățat algebră știu că numărul 1 poate fi considerat ca 2 la puterea zero.

rație binar. De exemplu, numărul 100 poate fi reprezentat cu ușurință în sistemul binar astfel:

100	2						
0	50	2					
	0	25	2				
		1	12	2			
			0	6	2		
				0	3	2	
					1	1	

$$\begin{aligned}
 100 &= 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\
 &\quad 64 \quad 32 \quad (16) \quad (8) \quad 4 \quad (2) \quad (1) \\
 100 &= 64 + 32 + 4
 \end{aligned}$$

Amintim că în sistemul binar pe locul întâi din dreapta stau unitățile simple, pe locul al doilea unitățile de ordinul II, adică formate din 2 unități simple, pe locul al treilea — unități de ordinul III formate din 2^2 unități simple, pe locul al patrulea — unități de ordinul IV, formate din 2^3 adică 8 unități simple și așa mai departe.

SE GHICEȘTE NUMĂRUL CHIBRITURILOR

De proprietățile sistemului binar ne putem folosi și pentru scamatoria următoare. Propuneți unei persoane să pună pe masă o cutie de chibrituri nu tocmai plină; iar alături, în stînga ei, să așeze 7 bucățele de hîrtie de formă dreptunghiulară. Rugați apoi persoana să facă în lipsa dumneavoastră următoarele: lăsînd în cutie o jumătate din numărul chibriturilor, să pună cealaltă jumătate pe hîrtia cea mai apropiată; dacă numărul chibriturilor este impar, atunci chibritul de prisos să-l așeze alături de hîrtie. Chibriturile de pe hîrtie (în afara celui de alături) trebuie împărțite în două părți egale: jumătate în cutie, iar cealaltă jumă-

tate se trece pe hîrtia de-alături; cînd numărul este impar, chibritul rămas se pune alături de cea de-a doua hîrtie. Mai departe se procedează în același fel, punînd de fiecare dată jumătate de chibrituri înapoi în cutie,

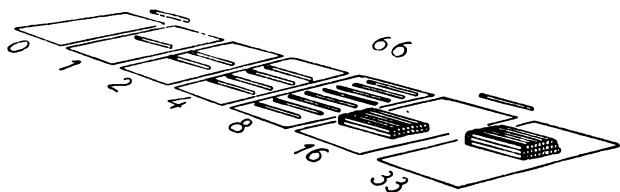


Fig. 40 — Aflarea numărului de chibrite. Se pot urmări operațiile succesive efectuate de cel care rezolvă problema.

iar cealaltă jumătate mutînd-o pe hîrtia următoare; în cazul cînd numerele sînt impare, să nu se uite să se pună chibritul de prisos alături de hîrtie. În cele din urmă toate chibriturile, afară de cele rămase alături de bucățelele de hîrtie, sînt introduse în cutie (fig. 40 și 41).

După ce s-a făcut această operație vă înapoițați în cameră, și, aruncînd o privire asupra bucățelelor de hîrtie goale, spuneți numărul de chibrituri care era în cutie.

Cum poate fi ghicit după hîrtioarele goale și după cîteva chibrituri izolate, așezate lîngă ele, numărul inițial al chibriturilor din cutie?

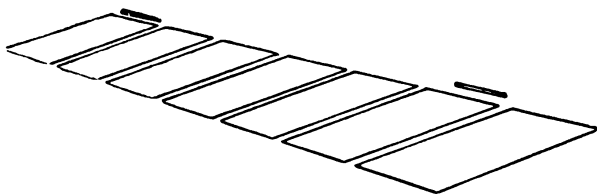


Fig. 41 — Continuarea scamatoriei — poziția finală a hîrtilor.

În cazul de față bucățelele de hîrtie „goale“ sînt foarte edificatoare; cu ajutorul lor și al chibriturilor izolate se poate citi numărul căutat, pentru că el este scris pe masă în sistemul de numerație binar. Expli-

căm această cu ajutorul unui exemplu. Presupunem că în cutie au fost 66 de chibrituri. Operațiile succesive, precum și aspectul final al hîrțiilor, sînt date în schemele din figurile 40 și 41.

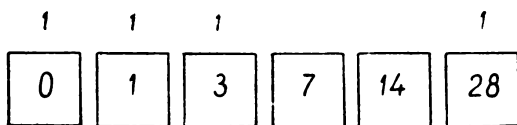


Fig. 42 — Un alt caz. Se poate observa prima operație a scamatoriei.

Nu este greu să ne dăm seama că operațiile cu chibrituri sînt de fapt cele pe care le-am fi făcut dacă vream să exprimăm numărul chibriturilor din cutie în sistemul de numerație binar; schema finală va reprezenta direct acest număr în sistem binar, în cazul cînd hîrțiile goale vor fi considerate drept zerouri, iar hîrțiile marcate cu chibrituri drept unități. Citind schema de la stînga spre dreapta obținem:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 64 & (32) & (16) & (8) & (4) & 2 & (1) &
 \end{array}$$

iar în sistemul zecimal: $64 + 2 = 66$

Dacă am fi avut 57 de chibrituri, obțineam alte scheme, identice cu cele indicate în figurile 42 și 43.

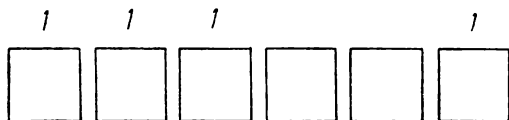


Fig. 43 — Sfîrșitul scamatoriei.

Numărul căutat, scris în sistemul binar, este:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 32 & 16 & 8 & (4) & (2) & 1
 \end{array}$$

iar în sistem zecimal: $32 + 16 + 8 + 1 = 57$

Cea de-a treia variantă a aceleiași scamatorii reprezintă o metodă originală de ghicire a unui număr cu ajutorul chibriturilor. Cel care și-a fixat în gînd un



Fig. 44 — Aflarea numărului ales cu ajutorul chibriturilor: ce face cel care propune problema.

număr trebuie să-l împartă, tot în gînd, în două, jumătatea obținută din nou în două etc. (de la numărul impar se va scădea o unitate); la fiecare împărțire va pune în fața sa, pe masă, un chibrit așezat orizontal dacă numărul împărțit este par, și vertical dacă acest număr este impar. La sfîrșitul operației se obține o figură de genul celei reprezentate alăturat.

Dumneavoastră priviți această figură și numiți fără greș numărul ales: 137.

Cum îl aflați?

Metoda devine clară dacă în exemplul ales (137) se va nota succesiv, lîngă fiecare chibrit, acel număr a cărui împărțire a fost notată cu chibritul respectiv (fig. 45).

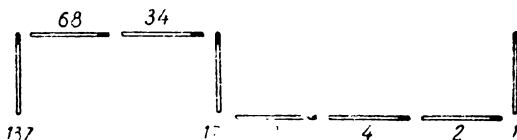


Fig. 45 — Secretul scamatorii: ce face cel care rezolvă problema.

Deoarece ultimul chibrit indică în toate cazurile numărul 1, pornind de la el spre împărțirile precedente, nu este greu să ajungem la numărul ales inițial. De exemplu, cu ajutorul figurii 46 puteți afla că s-a ales inițial numărul 664. Într-adevăr, efectuînd succesiv

înmulțirea cu 2 (începînd de la capăt) și adăugînd acolo unde este necesar 1, obținem numărul ales (fig. 47).

În felul acesta, folosind chibriturile urmăriți gîndul celui care a efectuat operația și restabiliți întregul lanț al calculelor.

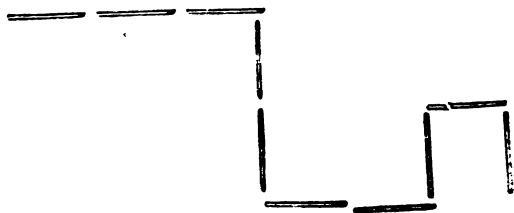


Fig. 46 — Ce număr a fost reprezentat aici?

Același rezultat se poate obține și altfel, dîndu-ne seama de faptul că chibritul orizontal trebuie să corespundă, în sistemul binar, zeroului (împărțirea cu 2 fără rest), iar cel vertical cu unitatea.

⋮	= 1
—	= 2
⋮	= 5
—	= 10
—	= 20
⋮	= 41
⋮	= 83
—	= 166
—	= 332
—	= 664

Astfel, în primul exemplu avem (citind de la dreapta spre stînga) numărul :

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$128 \quad (64) \quad (32) \quad (16) \quad 8 \quad (4) \quad (2) \quad 1$$

sau în sistem zecimal :

$$128 + 8 + 1 = 137$$

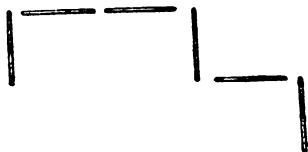


Fig. 47 — Răspuns la problema din fig. 46.

Fig. 48 — Ce număr este reprezentat în această figură?

În cel de-al doilea exemplu numărul ales se va reprezenta, în sistemul binar, în felul următor:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 512 & (256) & 128 & (64) & (32) & 16 & 8 & (4) & (2) & (1) \end{array}$$

sau în sistemul zecimal:

$$512 + 128 + 16 + 8 = 664$$

Acum încercați să aflați ce număr reprezintă schema din figura 48.

Acest lucru este relativ simplu. Într-adevăr, numărului „10010101“, în sistem binar, îi corespunde în sistemul zecimal:

$$128 + 16 + 4 + 1 = 149$$

Menționăm că unitatea obținută la ultima împărțire trebuie însemnată cu un chibrit *v e r t i c a l*.

GARNITURA DE GREUTĂȚI IDEALĂ PENTRU CÎNTAR

Probabil că unii cititori și-au și pus întrebarea: de ce oare pentru efectuarea experiențelor descrise mai sus folosim tocmai sistemul *b i n a r*? Doar fiecare număr poate fi reprezentat în orice sistem, inclusiv cel zecimal. Cum se explică preferința acordată aici sistemului binar?

Ea se explică prin faptul că în acest sistem în afară de zero se folosește o singură cifră — unitatea, și prin urmare numărul este constituit din diferitele puteri ale lui 2, luate o singură dată. Dacă în scamatoria cu pungile am fi împărțit banii, de exemplu, după sistemul cincinal, atunci am fi putut forma orice sumă, fără a deschide pungile, numai când fiecare pungă s-ar repeta de cel puțin patru ori (pentru că în sistemul cincinal afară de zero se mai folosesc patru cifre).

De altfel, sînt cazuri când este mai comod să folosim sistemul cu baza 3 și nu cel binar. Printre astfel de cazuri se numără cunoscuta „problemă a greutateilor“, care poate face subiectul unei scamatorii aritmetice.

Să zicem că vi s-a propus să găsiți o garnitură de patru greutăți, cu ajutorul cărora să puteți cântări orice număr de kilograme de la 1 pînă la 40. Sistemul binar vă ajută la aflarea garniturii următoare:

1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, 16 kg,

cu care pot fi cântărite toate greutatele de la 1 pînă la 31 de kg. Dar, evident, aceasta nu satisface condițiile cerute nici cu privire la numărul greutăților, nici în ce privește greutatea maximă (sînt 31 kg în loc de 40). Pe de altă parte, dumneavoastră nu ați folosit aici posibilitatea de a așeza greutatele numai pe un singur taler al cântarului, ci pe ambele talere, adică de a utiliza atît suma greutăților, cît și diferența lor. Această posibilitate permite așa de multe combinații, încît vă puteți pierde în căutări fără a alege un anumit sistem.

Desigur, dacă nu găsiți calea cea justă, veți fi tentați să vă îndoiiți chiar de posibilitatea de rezolvare a acestei probleme.

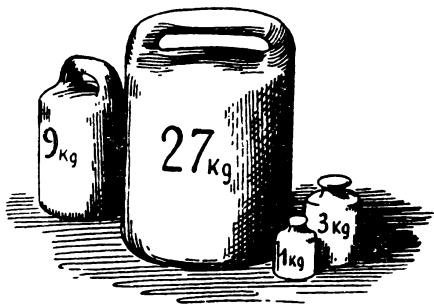


Fig. 49 — Cu ajutorul acestor patru greutăți se poate cântări orice obiect de la 1 kg pînă la 40 kg.

O persoană inițiată alege însă cu ușurință aproape uimitoare următoarele patru greutăți (fig. 49):

1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg.

Orice număr întreg de kg, pînă la 40 kg, poate fi cântărit cu aceste greutăți, punîndu-le cînd pe un taler,

cînd pe ambele talere ale cîntarului (vezi tabelul de la pag. 131).

Nu dăm exemple, pentru că oricine se poate convinge de utilitatea acestei garnituri de greutate în rezolvarea problemei noastre. Să ne oprim mai bine asupra întrebării: de ce oare acest șir are proprietatea enunțată? Cititorii au observat probabil că numerele de mai sus constituie șirul de puteri¹ ale numărului 3:

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3$$

Înseamnă că aici ne folosim de sistemul de numerație cu baza 3. Greutățile sînt cifrele acestui sistem de numerație. Dar cum să-l utilizăm, dacă greutatea cerută se obține sub forma diferenței a două greutateți? Și cum să se evite necesitatea de dublare a greutateților (doar în sistemul de numerație cu baza 3, afară de zero, se folosesc două cifre: 1 și 2)?

Și una, și cealaltă se realizează prin introducerea cifrelor „negative“. Aceasta se reduce la folosirea lui $3 - 1$ în locul cifrei 2, adică a unității de ordin superior din care se scade o unitate de ordin inferior. De exemplu, în sistemul de numerație cu baza 3 astfel transformat, numărul 2 nu se notează cu cifra 2, ci cu $1\bar{1}$, unde semnul — deasupra cifrei unităților arată că această unitate se scade. De asemenea, numărul 5 nu se va reprezenta prin 12, ci cu $1\bar{1}\bar{1}$ (adică $9 - 3 - 1 = 5$).

Acum este clar că dacă orice număr poate fi reprezentat în sistemul de numerație cu baza 3 cu ajutorul zeroului (adică a semnelui care indică lipsa numărului) și a unei singure cifre, și anume a unității care se adaugă sau se scade, atunci din numerele 1, 3, 9, 27 se pot forma, adunîndu-le sau scăzîndu-le, toate numerele de la 1 la 40. Adunarea corespunde, la cîntărire, cazului cînd toate greutatețile se așază pe același taler, iar scăderea — situației cînd o parte din greutateți sînt pe talerul cu marfă și, prin urmare, greutatea lor se

¹ Unitatea poate fi privită ca puterea zero a lui 3 (în general ca puterea zero a oricărui număr).

Greutatea	Talerul drept	Talerul stîng	Greutatea	Talerul drept	Talerul stîng
1	1	0	21	27+3	9
2	3	1	22	27+3+1	9
3	3	0	23	27	3+1
4	3+1	0	24	27	3
5	9	3+1	25	27+1	3
6	9	3	26	27	1
7	9+1	3	27	27	0
8	9	1	28	27+1	0
9	9	0	29	27+3	1
10	9+1	0	30	27+3	0
11	9+3	1	31	27+3+1	0
12	9+3	0	32	27+9	3+1
13	9+3+1	0	33	27+9	3
14	27	9+3+1	34	27+9+1	3
15	27	9+3	35	27+9	1
16	27+1	9+3	36	27+9	0
17	27	9+1	37	27+9+1	0
18	27	9	38	27+9+3	1
19	27+1	9	39	27+9+3	0
20	27+3	9+1	40	27+9+3+1	0

s c a d e din celelalte greutateți de măsură. Zeroul corespunde l i p s e i de greutate.

După cum se știe, acest sistem nu se folosește în practică. În toate țările lumii în care este introdus sistemul metric de măsură se folosește garnitura de 1, 2, 2, 5 unități și nu de 1, 3, 9, 27, deși cu ajutorul celor dintâi se pot cîntări mărfuri care nu depășesc 10

unități, iar cu ajutorul celorlalte — pînă la 40. Garnitura de 1, 3, 9, 27 nu a fost folosită nici înainte de introducerea sistemului metric. Care este oare cauza renunțării în practică la această garnitură de greutăți care ni se pare atît de perfectă?

Cauza constă în aceea că garnitura ideală este comodă numai pe hîrtie. În practică însă acest sistem de cîntărire este foarte greoi. Dacă ar trebui să cîntărim numai numărul dat de unități — de exemplu, 400 g de unt sau 2 500 g zahăr — atunci sistemul de greutăți de 100, 300, 900, 2 700 ar fi putut folosi în practică (deși chiar în aceste cazuri ar fi trebuit să alegem mult timp combinația corespunzătoare). Dar atunci cînd sîntem nevoiți să determinăm cît cîntărește marfa respectivă, această garnitură este foarte incomodă: pentru a adăuga la greutățile așezate în taler o singură unitate, adesea ar trebui să înlocuim total combinația precedentă cu o altă combinație nouă. În aceste condiții cîntărirea se face foarte încet și este foarte obositoare. Nu oricine își va da ușor seama, de exemplu, că o greutate de 19 kg se va obține dacă pe un taler se așază greutățile de 27 și 1 kg, iar pe celălalt 9 kg; că greutatea de 20 kg se determină cînd pe un taler așezăm greutățile de 27 și 3 kg, iar pe celălalt 9 kg și 1 kg. La fiecare cîntărire am fi nevoiți să rezolvăm asemenea probleme. Garnitura de greutăți de 1, 2, 2, 5 nu prezintă astfel de neajunsuri.

AFLĂM SUMA UNOR NUMERE NESCRISE

Unul din „numerele“ cele mai uimitoare, efectuate de fenomenalul calculator sovietic R. S. Arrago, este adunarea fulgerătoare — dintr-o singură privire — a unei întregi coloane de numere formate din mai multe cifre.

Dar ce putem spune despre o persoană care scrie suma chiar înainte de a i se dicta toți termenii adunării?

Este vorba, desigur, de o scamatorie care se desfășoară în felul următor: Persoana care ghicește nume-

rele vă propune să scrieți la alegere un număr oarecare format din mai multe cifre. Aruncînd o privire asupra acestui prim termen al adunării, cel care ghicește scrie pe o hîrtie suma întregii coloane de termeni ce urmează și vă înmînează această hîrtie spre păstrare. Vă roagă (el sau o altă persoană din cele prezente) să mai scrieți un termen oarecare. Iar apoi scrie repede un al treilea termen al adunării. Dumneavoastră adunați cei trei termeni și obțineți cu exactitate rezultatul scris în prealabil pe hîrtia ce o aveți în păstrare.

Dacă, de exemplu, ați scris pentru început numărul 83 267, atunci cine ghicește scrie suma 183 266. Apoi scrieți, să zicem, 27 935, iar ghicitorul adaugă cel de-al treilea termen — 72 064 :

Idumneavoastră	83 267
IIIdumneavoastră	27 935
IVcel care ghicește	72 064
IIsuma :	183 266

Se obține exact suma prescrisă, deși cel ce ghicește numărul nu putea ști care va fi al doilea termen al adunării. De asemenea se poate prezice suma a 5 sau 7 termeni, însă atunci însuși cel care ghicește scrie doi sau trei dintre aceștia. Aici nu poate fi nici o bănuială că hîrtia cu rezultatul a fost înlocuită, pentru că pînă în ultima clipă ea este păstrată în buzunarul dumneavoastră. Este evident că ghicitorul recurge la o proprietate anumită a numerelor, pe care cei de față nu o cunosc. Care anume?

Aici se folosește faptul că prin adăugarea la un număr, să zicem din cinci cifre, a unui număr format din 5 de 9 (99 999), primul crește cu 100 000 — 1, adică în fața lui apare un 1, iar ultima cifră se micșorează cu 1. De exemplu :

$$\begin{array}{r}
 83\,267 \\
 + 99\,999 \\
 \hline
 183\,266
 \end{array}$$

Această sumă, adică suma dintre numărul scris de dumneavoastră și 99 999, este înregistrată pe hîrtie ca

viitorul rezultat al adunării. Iar pentru a obține acest rezultat, cel care ghicește, văzînd al doilea termen dat de dumneavoastră, își alege un al treilea termen, astfel încît împreună cu al doilea să formeze numărul 99 999, adică scade fiecare cifră a celui de-al doilea termen din 9. Aceste operații le puteți urmări în exemplul precedent, precum și în următoarele două exemple :

Idumneavoastră	379 264
IIIdumneavoastră	4 873
IVcel care ghicește	995 126
		<hr/>
IIsuma	1 379 263
Idumneavoastră	9 035
IIIdumneavoastră	5 669
IVcel care ghicește	4 330
		<hr/>
IIsuma	19 034

Bineînțeles că-l veți pune în încurcătură pe cel care ghicește dacă al doilea termen ales va avea mai multe cifre decît primul; el nu va putea scrie un termen care să micșoreze al doilea număr pentru a justifica rezultatul prea mic pe care l-a prezis. De aceea, trebuie să fim destul de prevăzători și să limităm libertatea de alegere, punînd dinainte această condiție.

Scamatoria este mai de efect dacă la alegerea termenilor adunării participă cîteva persoane. După ce s-a scris primul termen, de exemplu 437 692, cel care ghicește prezice deja suma tuturor celor 5 numere, scriînd 2 437 690 (aici se vor adăuga de două ori cîte 999 999, adică 200 000 — 2). Cele ce urmează decurg ca în schema :

Idumneavoastră ați scris :	437 692
IIIaltul a scris :	822 541
Val treilea a scris :	263 009
IVcel care ghicește a adăugat :	177 458
VI" " " " " "	736 990
		<hr/>
IIs-a prezis :	2 437 690

Încă un exemplu :

Idumneavoastră ați scris :	7 400
IIIaltul a scris :	4 732
Val treilea a scris :	9 000
IV cel care ghicește a adăugat :	5 267
VI ” ” ” ” ”	999
IIs-a prezis :	<hr/> 27 398

Cred că nu va fi lipsit de interes pentru cititor să facă cunoștință cu descrierea aceleiași scamatorii de către scriitorul sovietic Șișkov, în romanul său „Pelerinii“.

„Ivan Petrovici a rupt din carnetel o foiță, a întins-o băiețușului, și a întrebat :

— Ai creion? Scrie orice număr.

Băiețelul a scris. Ivan Petrovici aruncă o privire asupra acestui număr, scrise pe o altă bucățică de hîrtie un număr oarecare, apoi ascunse hîrtia în paie și o acoperi cu o pălărie.

— Scrie sub el altul. Ai scris? Acum voi scrie și eu unul. Acum adună cele trei numere. Numai fii atent, nu greși.

După două minute era gata răspunsul. Inginerul Voșkin (porecla băiatului) i-a arătat calculele făcute :

$$\begin{array}{r} 46\ 853 \\ +\ 21\ 398 \\ \hline 78\ 601 \\ \hline 146\ 852 \end{array}$$

— O sută patruzeci și șase de mii opt sute cincizeci și doi, Ivan Petrovici.

— Cam mult timp numeri. Iar răspunsul meu — iată-l. Eu îl cunoșteam atunci cînd tu ai scris numai primul număr. Ia-l de sub pălărie.

Băiatul a apucat hîrtia. Acolo scria : 146 852“.

În roman scamatoria rămîne fără comentarii. Dumneavoastră însă acum cunoașteți care este explicația sa aritmetică.

În anul 1916, în toiul războiului imperialist, unele ziare din Elveția neutră se ocupau cu „ghicitul“ aritmetic în legătură cu . . . soarta viitoare a împăraților Germaniei și Austriei. „Prorocii“ adunau următoarele coloane de numere:

Pentru Wilhelm al II-lea:

anul nașterii	1859
anul urcării pe tron	1888
numărul anilor domniei	28
vârsta	57
suma:		<u>3 832</u>

Pentru Franz Iosef:

anul nașterii	1830
anul urcării pe tron	1848
numărul anilor domniei	68
vârsta	86
suma:		<u>3 832</u>

În această coincidență a sumelor „prorocii“ vedeau un semn rău pentru persoanele încoronate și, deoarece fiecare din sume reprezentau dublul lui 1916, ambilor împărați li se prezicea pieirea tocmai în acest an.

Din punct de vedere matematic, această coincidență a rezultatelor nu era ceva neașteptat. Este suficient să schimbăm doar puțin ordinea termenilor adunării și vom înțelege imediat de ce rezultatul reprezintă un număr de două ori mai mare decât 1916. Într-adevăr să așezăm termenii în modul următor:

anul nașterii,
vârsta,
anul urcării pe tron,
numărul anilor domniei.

Ce se întâmplă dacă la anul nașterii se adaugă vârsta? Bineînțeles că se obține anul în care se face calculul.

Tot astfel, dacă la anul urcării pe tron se adaugă numărul anilor de domnie rezultă, din nou, anul în care se efectuează calculul. Și atunci rezultatul obținut prin adunarea celor patru termeni nu poate fi decât dublul anului în care s-a efectuat calculul. Este evident deci că soarta împăraților nu depindea de loc de o asemenea aritmetică...

Cum nu toți cunosc cele spuse mai sus, le putem folosi pentru o scamatorie aritmetică nostimă. Propuneți-i cuiva să scrie, fără să vedeți, patru numere:

anul nașterii,
anul intrării în școală (în serviciu etc.),
vîrsta,
numărul anilor de școală (de serviciu).

Anunțați că veți ghici suma acestor numere, deși nu cunoașteți nici unul din ele. Pentru aceasta dublați anul în care se face scamatoria și spuneți rezultatul. Dacă de exemplu, scamatoria este făcută în anul 1962, atunci suma va fi 3 924.

Pentru a avea posibilitatea de a repeta scamatoria de cîteva ori, fără a dezvălui secretul, îi siliți pe interlocutorii dumneavoastră să facă cu suma pe care o obțin cîteva operații aritmetice, mascînd în felul acesta metoda folosită.

ÎMPARȚIREA INSTANTANEE

Din numeroasele variante ale scamatoriilor de acest gen vom descrie una bazată pe proprietatea factorului format numai din 9, pe care o cunoșteam deja; cînd se înmulțește cu acesta un număr care conține tot atîtea cifre, atunci se obține un rezultat format din două jumătăți: prima este numărul înmulțit micșorat cu o unitate, iar a doua jumătate este rezultatul obținut prin scăderea primei jumătăți din înmulțitor.

De exemplu, $247 \times 999 = 246\,753$;

$1\,372 \times 9\,999 = 13\,718\,628$ etc. Cauza poate fi aflată din rîndul următor :

$$\begin{aligned} 247 \times 999 &= 247 \times (1\,000 - 1) = 247\,000 - 247 = \\ &= 246\,999 - 246 \end{aligned}$$

Folosind această proprietate, propuneți unui grup de tovarăși să efectueze împărțirea unor numere formate din mai multe cifre : unuia — $68\,933\,106 : 6\,894$, altuia — $8\,765\,112\,348 : 99\,999$, celui de-al treilea — $543\,456 : 544$, celui de-al patrulea — $12\,948\,705 : 1\,295$ etc. Declarați că-i veți întrece pe toți în rezolvarea aceluiași probleme. Și, înainte ca ei să se apuce de lucru, înmînați fiecăruia un bilețel pe care ați notat rezultatul împărțirii efectuate : celui dintîi — $9\,999$, pentru al doilea — $87\,652$, al treilea — 999 , iar celui de-al patrulea — $9\,999$.

După modelul de mai sus puteți găsi singuri un șir de alte mijloace de a-i uimi pe cei neinițiați cu metoda de efectuare rapidă a împărțirilor ; pentru aceasta folosiți cîteva proprietăți ale numerelor despre care s-a vorbit în capitolul „Galeria curiozităților numerice“ (vezi Cap. V).

CIFRA PREFERATĂ

Rugați pe cineva să vă spună cifra lui preferată. Admitem că v-a fost numită cifra 6.

— Uimitor! — exclamați dumneavoastră. Aceasta este cifra cea mai minunată.

— Dar prin ce este ea minunată ? întrebă interlocutorul cu interes.

— Iată : înmulțiți cifra preferată cu numărul cifrelor semnificative, adică cu 9, și numărul obținut (54) scrieți-l ca înmulțitor sub numărul $12\,345\,679$:

$$\begin{array}{r} \times \quad 12\,345\,679 \\ \quad \quad \quad 54 \\ \hline \end{array}$$

Ce vom obține drept produs :

Interlocutorul efectuează înmulțirea și obține, uimit, un rezultat format numai din cifra lui preferată :

666 666 666

— Vedeți ce gust aritmetic fin aveți — spuneți dumneavoastră. Ați știut să alegeți dintre toate cifrele tocmai pe acea care are această proprietate minunată!

Care este însă explicația :

De un gust tot atît de rafinat ar fi dat dovadă interlocutorul dacă ar fi ales orice altă cifră de la 1 pînă la 9, pentru că fiecare din ele are aceeași proprietate :

12 345 679	12 345 679	12 345 679
× 4 × 9	× 7 × 9	× 9 × 9
-----	-----	-----
444 444 444	777 777 777	999 999 999

De ce se petrec lucrurile așa, veți înțelege imediat dacă vă amintiți ceea ce s-a vorbit despre numărul 12 345 679 la „Galeria curiozităților numerice“.

GHICIREA DATEI NAȘTERII

Scamatoriile din această categorie pot fi foarte diferite. Voi descrie una din variantele acestei scamatorii destul de complicată, dar deosebit de interesantă pentru cei neinițiați.

Presupunem că v-ați născut la 18 mai și că aveți acum 23 de ani. Eu, desigur, nu cunosc nici data nașterii, și nici vîrsta dumneavoastră. Cu toate acestea vă promit că ghicesc și una și cealaltă, punîndu-vă să faceți numai cîteva calcule.

Iată acest calcul: numărul de ordine al lunii (mai este luna a 5-a) trebuie înmulțit cu 100, se adaugă la produsul astfel obținut ziua nașterii (18); se va dubla suma, și se adună 8 la rezultat; numărul obținut se înmulțește cu 5; se mai adaugă la produs 4; rezultatul se va înmulți cu 10; se adaugă încă 4 și la numărul astfel obținut se adună vîrsta pe care o aveți (23).

După ce efectuați toate operațiile îmi veți comunica rezultatul final al calculelor făcute. Eu voi scădea din el 444, iar rezultatul obținut îl voi împărți în grupuri de câte două cifre, de la dreapta spre stînga; obțin imediat ziua și luna nașterii dumneavoastră, precum și vîrsta.

Într-adevăr, să efectuăm succesiv toate operațiile indicate mai sus:

$$\begin{array}{r}
 5 \times 100 = 500 \\
 500 + 18 = 518 \\
 518 \times 2 = 1\ 036 \\
 1\ 036 + 8 = 1\ 044 \\
 1\ 044 \times 5 = 5\ 220 \\
 5\ 220 \div 4 = 5\ 224 \\
 5\ 224 \times 10 = 52\ 240 \\
 52\ 240 + 4 = 52\ 244 \\
 52\ 244 + 23 = 52\ 267
 \end{array}$$

Făcînd scăderea 52 267—444, obținem numărul 51 823.

Acum împărțim acest număr în grupuri de câte două cifre fiecare, de la dreapta spre stînga. Avem:

$$5-18-23$$

adică luna a 5-a (mai), ziua 18, vîrsta 23 ani.

Cum am obținut acest rezultat?

Secretul îl dă următoarea egalitate:

$$\begin{aligned}
 \{[(100 m + t) \times 2 + 8] \times 5 + 4\} \times 10 + 4 + n - 444 = \\
 = 10\ 000 m + 100 t + n
 \end{aligned}$$

Cu litera m s-a notat numărul de ordine al lunii, cu t — ziua, cu n — vîrsta. Partea stîngă a egalității exprimă toate operațiile efectuate succesiv, iar cea dreaptă — rezultatul care trebuie obținut dacă se fac toate operațiunile arătate de semne și paranteze. În expresia $10\ 000 m + 100 t + n$ nici m , nici t și nici n nu pot fi mai mari decît niște numere de două cifre; de aceea numărul obținut drept rezultat, la împărțirea în grupuri de câte două cifre, trebuie totdeauna să cuprindă trei părți, exprimate prin numerele căutate m , t , și n .

Credem că cititorul va fi suficient de inventiv pentru a găsi diferite variante ale acestei scamatorii, adică alte combinații ale operațiilor aritmetice care să dea același rezultat.

Propunem cititorului să găsească secretul următoarei scamatorii simple, care a fost descrisă în „Aritmetica“ lui Magnițki în capitolul „Despre câteva operații distractive bazate pe aritmetică“.

Să aleagă cineva un număr oarecare referitor la bani, la zile, la ore sau la un obiect oarecare care poate fi numărat. Ne vom opri

asupra exemplului cu inelul îmbrăcat pe falanga a doua a degetului mic (adică a celui de-al cincilea deget) de către o a patra persoană din cele opt de față. Când în această societate apare ghicitorul, el este întrebat: la care din cele opt persoane (numerate cu cifre de la 1 pînă la 8), pe ce deget și pe care falangă se găsește inelul?

„Iar el spune: cineva dintre dumneavoastră să-l înmulțească pe acela care l-a luat cu 2 și să adauge 5, apoi să înmulțească din nou cu 5, să adune degetul pe care este inelul (adică numărul degetului cu inelul). În

continuare înmulțește cu 10, adaugă falanga pe care se află inelul și spune numărul obținut.

Ei au procedat așa cum le-a propus, înmulțindu-l pe al patrulea om care a luat inelul și efectuînd

$$\begin{array}{r}
 4 \text{ лицѣ} \\
 2 \text{ множи:} \\
 \hline
 8 \\
 5 \text{ приложй:} \\
 \hline
 13 \\
 5 \text{ множи:} \\
 \hline
 65 \\
 5 \text{ приложй и перств:} \\
 \hline
 70 \\
 10 \text{ множи:} \\
 \hline
 700 \\
 \text{составъ 2 приложй.} \\
 702 \\
 250 \\
 \hline
 452
 \end{array}$$

Fig. 50 — Așa e prezentată scamatoria matematică în „Aritmetica“ lui Magnițki.

toate celelalte operații cerute (vezi calculele); au găsit numărul 702, din care s-a scăzut 250, a rămas 452; răspunsul este: omul al patrulea, degetul al cincilea, falanga a doua.“

Nu trebuie să ne mire faptul că această scamatorie aritmetică era cunoscută încă de acum 200 de ani; o problemă asemănătoare am găsit și într-una din primele culegeri de probleme distractive matematice — „Probleme numerice distractive și plăcute“ a lui Bache-de-Mésiraique, care a apărut în 1612 — fiind luată din lucrarea lui Leonardo din Pisa (Fibonacci) (1202). Trebuie să menționăm că în general marea majoritate a jocurilor, ghicitorilor și scamatoriilor matematice care se folosesc și în prezent sînt de origine foarte veche.

GHICIREA NUMERELOR

Fără a vă întreba ceva, voi ghici rezultatul pe care îl veți obține în urma unor operații efectuate cu numărul ales de dumneavoastră.

Alegeți orice cifră afară de zero. Înmulțiți-o cu 37. Înmulțiți rezultatul cu 3. Tăiați ultima cifră a produsului, iar numărul rămas împărțiți-l cu cifra aleasă inițial; nu veți avea rest.

Eu nu pot să vă spun ce număr ați aflat, deși l-am scris cu mult înainte să începeți lectura acestei cărți.

Ați obținut numărul 11.

A doua oară facem această scamatorie cu mici schimbări. Alegeți un număr format din două cifre. Adăugați în dreapta lui încă o dată același număr. Numărul obținut astfel împărțiți-l la cel ales inițial; împărțirea se va face fără rest. Adunați toate cifrele cîtului.

Ați obținut 2.

Dacă nu este așa, atunci verificați cu atenție calculele și vă veți convinge de faptul că ați greșit dumneavoastră, și nu eu.

Care este explicația acestor scamatorii?

E x p l i c a ț i e . În primul exemplu numărul ales se înmulțea întîi cu 37, iar apoi cu 3. Dar $37 \times 3 = 111$,

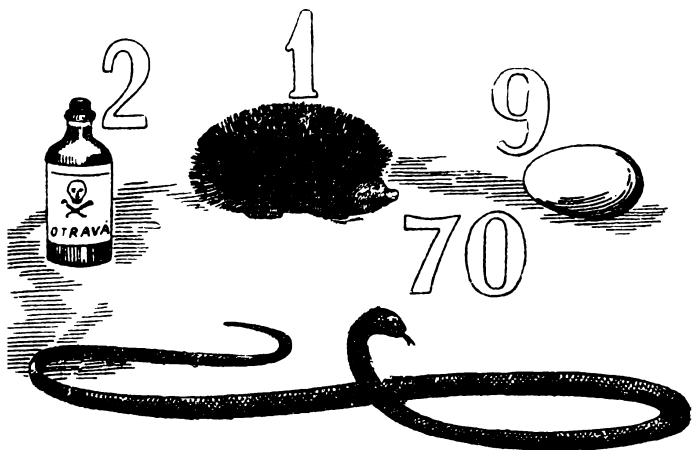
și a înmulți o cifră cu 111 înseamnă a obține un număr din trei cifre egale (de exemplu $4 \times 37 \times 3 = 444$). Ce-am făcut mai departe? Am tăiat ultima cifră și, prin urmare, am găsit un număr format din două cifre de același fel (44) care, desigur, trebuie să se împartă cu numărul ales și să dea câtul 11.

În cel de-al doilea exemplu numărul de două cifre ales l-am scris de două ori; de exemplu, alegînd 29 am scris 2 929. Asta înseamnă că am înmulțit numărul ales cu 101 (într-adevăr, $29 \times 101 = 2\,929$). O dată ce știu acest lucru, pot să prevăd cu siguranță că în urma împărțirii unui astfel de număr format din patru cifre cu numărul ales inițial se va obține 101 și, prin urmare, suma cifrelor cîtului ($1+0+1$) este egală cu 2.

După cum vedeți, explicația o găsim în înseși proprietățile numerelor 111 și 101; sîntem îndreptățiți deci să plasăm aceste două numere în vitrina noastră de curiozități aritmetice.

CURIOZITĂȚI ARITMETICE

$$100 = \begin{cases} 24 \frac{3}{6} + 75 \frac{9}{18} \\ 47 \frac{3}{6} + 52 \frac{9}{18} \end{cases}$$



CAPITOLUL VII

CALCULE RAPIDE

FENOMENE REALE ȘI IMAGINARE

Cei care au participat la spectacolele calculatorului sovietic Arrago, fără îndoială, nu au putut să nu rămână uimiți de rapiditatea cu care efectua calculele. De exemplu, Arrago a calculat în minte cubul numărului 4 729 în mai puțin de un minut (rezultatul: 105 756 712 489), iar pentru înmulțirea numerelor $679\,321 \times 887\,064$, efectuată tot în minte, lui nu i-au trebuit decât 1 1/2 minute. Aici nu mai este vorba de scamatorii, ci de aptitudini naturale deosebite. Eu am avut posibilitatea de a urmări calculele acestui calculator fenomenal nu numai pe estradă, ci și în casă, între patru ochi, și m-am convins că el nu folosește

nici un fel de metode speciale de calcul, efectuînd operațiile în minte așa cum le facem noi pe hîrtie. Numai memoria lui neobișnuită în ce privește numerele îl ajută să nu se folosească de scrierea rezultatelor intermediare, ci să opereze cu numerele formate din două cifre tot așa de ușor cum lucrăm noi cu numerele alcătuite dintr-o singură cifră. Datorită acestui fapt, pentru el înmulțirea unui număr format din șase cifre cu un alt număr de șase cifre nu prezintă mai multă greutate decît cea pe care o întîmpinăm cînd înmulțim două numere de cîte trei cifre.

Astfel de fenomene ca Arrago în U.R.S.S., sau ca Inodi, Diamandi Rückle, doctor Frid Brauns în apus, se întîlnesc rar. Pe lîngă ei însă apar pe scena de estradă matematicieni de alt gen, care își bazează arta pe anumite trucuri aritmetice. Poate că ați auzit sau ați participat la „spectacolele unor matematicieni geniali“ care calculau cu o rapiditate uimitoare cîte zile ați trăit, cîte minute, secunde, în ce zi a săptămînii v-ați născut etc. Numai că pentru majoritatea acestor calcule nu sînt necesare aptitudini matematice deosebite. Trebuie să știm numai cîteva secrete ale acestor scamtatorii, de a căror dezvăluire ne vom și ocupa imediat.

MEMORIZAREA NUMERELOR

Cel care efectuează calcule rapide trebuie să aibă în primul rînd o memorie deosebită a numerelor. Cît de dezvoltată poate fi această memorie la cei mai buni calculatori ne arată următoarele recorduri. Cunoscutul calculator german Rückle a învățat pe dinafară un număr format din 504 cifre în numai 35 de minute, iar compatriotul lui, Dr. Brauns, a depășit acest record învățînd același număr în mai puțin de 13 minute!

Bineînțeles, puțini oameni au de la natură asemenea memorie fenomenală. Calculatorii profesioniști care nu au o memorie deosebită a numerelor se ajută de diferite metode artificiale (așa-numite „mnemonice“). În viața de toate zilele și noi încercăm să folosim aceste

metode și în majoritatea cazurilor trebuie să recunoaștem că le alegem destul de prost. Dorim, de exemplu, să memorăm numărul de telefon 25—49; noi ne punem speranțele în faptul că acest număr poate fi readus cu ușurință în memorie pentru că este format din două pătrate perfecte: $25 = 5^2$, $49 = 7^2$. Însă atunci când trebuie să ni-l reamintim, constatăm că avem la dispoziție un șir de numere din care putem alege:

49—25, 36—64, 25—16, 64—16, 81—25 etc.

Încurcături se ivesc și în alte cazuri. Fie numărul de telefon 17—53; ne hotărîm să-l memorăm folosindu-ne de faptul că suma primelor două cifre ($1 + 7$) este egală cu suma ultimelor două ($5 + 3$). Rezultatul final însă nici acum nu este mai bun decît în cazul precedent. Și cînd te gîndești că mai trebuie să ții minte cine este posesorul telefonului la a cărui memorare s-a folosit metoda respectivă. Este uimitor cu cîtă perseverență caută oamenii să folosească această metodă, evident inutilă. De această pasiune și-a bătut joc cu mult spirit scriitorul I. Hašek în cunoscutele lui „Peripețiile bravului soldat Švejk“:

«Iar Švejk citi pe patul carabinei numărul de serie și izbucni:

— 4268! Numărul ăsta l-a avut o locomotivă de cale ferată de pe linia șaisprezece din gara Peciky. Trebuia dusă la depoul din Lysa pe Labem, pentru reparație, dar n-a fost chiar așa de ușor, d-le plutonier, pentru că mecanicul care urma s-o conducă pînă acolo avea slabă ținare de minte la cifre. Impiegatul de mișcare l-a chemat la el la canțelarie și i-a spus:

„Pe linia șaisprezece se află locomotiva cu numărul 4268. Eu știu că dumneata n-ai ținare de minte la cifre și că, atunci cînd ți se scrie un număr pe hîrtie, pierzi hîrtia. Dar fii cu băgare de seamă la ce-ți spun, dacă nu ții minte cifrele: am să-ți arăt ce ușor e să ții minte orice cifră. Numai să fii cu băgare de seamă: locomotiva pe care trebuie s-o duci la depoul din Lysa pe Labem are numărul 4268. Va să zică, atenție: prima cifră e 4, a doua 2. Ții minte 42, adică 2 ori 2; asta înseamnă că dacă începi de la stînga ai mai întîi 4

pe care-l împarți la 2, și-ți dă 2, așa că iar ai frumos aranjat, unul lângă altul, 4 și 2. Ei, și acum să nu te sperii. Cît face doi ori 4, opt, nu? Bun, întipărește-ți în minte că din numărul 4268 cifra opt este ultima la rînd. Dacă ții minte că prima este 4, a doua 2, a patra 8, nu mai rămîne decît să fii deștept și să ții minte și pe 6, care vine înainte de opt. Lucru-i la mîntea cocoșului: prima cifră este 4, a doua doi, patru și cu doi fac șase. Care va să zică, acum ești sigur că a doua de la capăt este șase; de acum în colo ordinea cifrelor nu-ți mai iese din minte. Îți rămîne în cap numărul 4268. Sau, putem ajunge la același rezultat, pe o cale și mai simplă...

.....

Și atunci a început să-i explice o metodă mai simplă, ca să-și amintească de numărul 68. Șase fără doi fac 4, care va să zică are 4—68, nu mai rămîne decît să-l bage pe 2 și gata: 4—2—6—8. De altfel nu-i prea greu dacă socoteala se face și altfel: cu ajutorul înmulțirii și împărțirii. Se ajunge la același rezultat. Ții minte, — i-a spus impiegatul — că de două ori 42 fac 84. Anul are 12 luni. Se scade 12 din 84 și ne rămîne 72, din care mai scădem 12 luni și rămînem cu 60. Așadar pe 6 îl avem asigurat, iar pe zero îl ștergem. Va să zică avem așa: 42,68,4. Dacă l-am tăiat pe zero, îl tăiem și pe 4 din coadă și ne asigurăm iarăși, foarte ușor, 4268, numărul locomotivei pe care trebuie s-o duci la depoul din Lysa pe Labem.“»

Metodele folosite de calculatorii de estradă sînt de cu totul alt gen. Iată una dintre ele, care la nevoie poate fi utilă pentru oricare din noi.

Calculatorul leagă de cifre anumite consoane. Deoarece s-au ales numai consoanele, ele pot fi, fără să ne temem de vreo încurcătură, combinate cu vocalele, formîndu-se cuvinte scurte.

Aceasta este numai una din metodele mnemotehnice folosite de calculatori ¹. Există, desigur, și alte metode, dar asupra lor nu ne vom opri.

¹ Vezi mai amănunțit în cartea mea „Scamatorii și distracții“

Pentru a putea determina cu repeziciune, după numărul anilor, numărul zilelor, calculatorul recurge la următoarea metodă: înmulțește jumătate din numărul anilor cu 73 și adaugă un zero — rezultatul va fi tocmai numărul căutat. Procedeu devine clar dacă observăm că $730 = 365 \times 2$. Dacă eu am 24 de ani, atunci numărul de zile se va obține înmulțind $12 \times 73 = 876$ și, adăugând un zero — 8 760. Însăși înmulțirea cu 73 se face într-un mod prescurtat, lucru despre care se va vorbi mai jos.

Corecția de cîteva zile care provine de la anii bisecți de obicei nu se ia în considerație, deși ea poate fi făcută cu ușurință adăugîndu-se la rezultat un sfert din numărul anilor; în exemplul nostru, $24 : 4 = 6$; prin urmare, rezultatul total este 8 766¹.

Bineînțeles, cu cunoștințele de pînă acum cititorul va putea încerca calcularea minutelor.

„CÎTE SECUNDE AM?“

Cînd vîrsta celui ce întrebă este exprimată printr-un număr par care nu depășește 26, atunci la această întrebare se poate răspunde destul de repede folosind următoarea metodă: jumătate din numărul anilor se înmulțește cu 63; apoi, aceeași jumătate se înmulțește cu 72, rezultatul se scrie alături de primul și se adaugă trei zerouri. Dacă, de exemplu, numărul anilor este 24, atunci pentru determinarea numărului de secunde se procedează astfel:

$$63 \times 12 = 756; \quad 72 \times 12 = 864, \quad \text{rezultatul este} \\ 756 \ 864 \ 000.$$

¹ Cu ajutorul metodelor de înmulțire rapidă arătate mai departe, aceste operații sînt mult simplificate și rezultatul, care conține milioane, se obține foarte rapid. Îl sfătuiesc pe cititor să încerce să efectueze aceleași calcule pe cale obișnuită, pentru a se convinge cîtă economic de timp se face prin folosirea formulei de mai sus și a metodelor indicate mai departe.

Ca și în exemplul precedent, aici nu se ține seama de anii bisecți — o eroare pe care nimeni nu i-o va imputa calculatorului atunci cînd el are de-a face cu sute de milioane (ea poate fi corectată adăugîndu-se numărul de secunde care sînt cuprinse în numărul de zile egal cu a patra parte din numărul anilor).

Pe ce se bazează metoda arătată mai sus?

Pentru a determina numărul de secunde cuprins în numărul respectiv de ani este necesar să se înmulțească anii (în exemplul nostru 24) cu numărul de secunde dintr-un an, adică: $365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31\,536\,000$. Vom face același lucru numai că factorul 31 536 îl împărțim în două (adăugarea de zerouri se înțelege de la sine). În locul înmulțirii lui 24 cu 31 536, înmulțim 24 cu 31 500 și cu 36; pentru comoditate însă înlocuim aceste calcule cu altele, după cum se vede din schema de mai jos:

$$24 \times 31\,536 = \begin{cases} 24 \times 31\,500 = 12 \times 63\,000 = 756\,000 \\ 24 \times \quad 36 = 12 \times \quad 72 = \quad 864 \end{cases}$$

756 864

Rămîne doar să adăugăm trei zerouri și avem rezultatul căutat: 756 864 000.

METODE DE ÎNMULȚIRE RAPIDĂ

Am menționat mai sus că pentru efectuarea acelor operații de înmulțire, în care se defalcă fiecare din procedeele indicate mai sus există metode foarte potrivite. Unele din ele sînt extrem de simple; ele ușurează atît de mult calculele, încît credem că nu ar fi de prisos ca cititorul să le memoreze și să le folosească în mod obișnuit. Astfel este, de exemplu, metoda înmulțirii încrucișate, foarte comodă pentru efectuarea operațiilor cu numere de două cifre. Metoda nu este nouă; ea a fost folosită din antichitate de către greci și indieni și se numea „metoda fulgerului“ sau „înmulțirea în

cruce". Acum este aproape uitată și credem că nu-i rău s-o amintim.

Presupunem că trebuie să înmulțim 24×32 . Așezăm în minte numerele unul sub altul după schema următoare:

$$\begin{array}{r} 2 \\ | \\ 3 \end{array} \times \begin{array}{r} 4 \\ | \\ 2 \end{array}$$

Efectuăm succesiv următoarele operații:

- 1) $4 \times 2 = 8$, este ultima cifră a rezultatului.
 - 2) $2 \times 2 = 4$; $4 \times 3 = 12$; $4 + 12 = 16$; 6 este penultima cifră a rezultatului; 1 ținem minte.
 - 3) $2 \times 3 = 6$, la care adăugăm unitatea ținută minte; se obține 7, adică prima cifră a rezultatului.
- Prin urmare, avem produsul 768.

După câteva exerciții această metodă este foarte ușor însușită.

În continuare vom prezenta altă metodă, care constă în folosirea așa-numitelor „completări“, comodă în cazul când numerele înmulțite se apropie de 100.

Presupunem că este necesar să înmulțim 92×96 . „Completarea“ pentru 92 pînă la 100 va fi 8, pentru 96 va fi 4. Operația se efectuează după schema următoare:

$$\begin{array}{l} \text{factorii: } 92 \text{ și } 96 \\ \text{„completările“ } 8 \text{ și } 4 \end{array}$$

Primele două cifre ale rezultatului se obțin prin scădere simplă din deînmulțit a „completării“ înmulțitorului, sau invers din înmulțitor a „completării“ deînmulțitului; adică din 92 se scade 4 sau din 96 se scade 8. În ambele cazuri avem 88; lângă număr se scrie produsul „completărilor“: $8 \times 4 = 32$. Obținem rezultatul 8832.

Din transformările de mai jos se vede că rezultatul este corect:

$$92 \times 96 = \begin{cases} 88 \times 96 = 88(100-4) = 88 \times 100 - 88 \times 4 \\ 4 \times 96 = 4(88+8) = 4 \times 8 + 88 \times 4 \end{cases}$$
$$\frac{\quad}{92 \times 96} = \frac{\quad}{8\ 832+0}$$

Iată alt exemplu:

Trebuie înmulțit 78 cu 77.

Factorii înmulțirii: 78 și 77,

„completările“: 22 și 23

$$78-23 = 55$$

$$22 \times 23 = 506$$

$$5\ 500 + 506 = 6\ 006$$

Un al treilea exemplu:

Să se înmulțească 99×98 .

Factorii înmulțirii: 99 și 98,

„completările“: 1 și 2

$$99-2 = 97$$

$$1 \times 2 = 2$$

În cazul de față trebuie să ținem minte că 97 reprezintă numărul de sute. De aceea adunăm:

$$9\ 700 + 2 = 9\ 702$$

PENTRU CALCULELE COTIDIENE

Există un număr foarte mare de metode pentru efectuarea rapidă a operațiilor aritmetice, care sînt destinate calculelor cotidiene. În legătură cu aceasta s-ar putea scrie o carte întregă dacă ne-am propune chiar numai descrierea metodelor celor mai principale¹. Mă voi limita doar la cîteva exemple mai ușor de efectuat.

¹ Vezi, de ex.: G. N. Berman, „Metode de calcul“, ed. VI, Fizmatgiz, 1959.

În practica calculelor tehnice și comerciale sînt numeroase cazurile cînd trebuie să se adune coloane de numere apropiate între ele ca mărime. De exemplu:

43	}	Adunarea acestor numere este mult simplificată dacă folosim metoda indicată mai jos, a cărei esență este ușor accesibilă.
38		
39		
45		
41		
39		
42		

43 = 40 + 3	}	$40 \times 7 = 280$ $3 - 2 - 1 + 5 + 1 - 1 + 2 = 7$ $280 + 7 = 287$
38 = 40 - 2		
39 = 40 - 1		
45 = 40 + 5		
41 = 40 + 1		
39 = 40 - 1		
42 = 40 + 2		

Tot astfel găsim suma:

752 = 750 - 2	}	$750 \times 6 + 1 = 4\ 501$
753 = 750 + 3		
746 = 750 - 4		
754 = 750 + 4		
745 = 750 - 5		
751 = 750 + 1		

În mod asemănător se procedează în calculul mediei aritmetice a numerelor apropiate ca mărime. Să aflăm de exemplu media următoarelor prețuri:

<i>Ruble</i>	<i>Copeici</i>	
4	65	}
4	73	
4	75	
4	67	
4	78	
4	74	
4	68	
4	72	

Stabilim din ochi prețul rotund apropiat de cel mediu — în cazul de față acesta va fi desigur 4 r. 70 c. Notăm devierile tuturor prețurilor în jurul celui mediu: surplusurile cu semnul +, lipsurile cu semnul -. Obținem:
 $-5 + 3 + 5 - 3 + 8 + 4 - 2 + 2 = 12$

Împărțind suma devierilor cu numărul lor avem:
 $12 : 8 = 1,5$.

De aici, prețul mediu căutat este:

$$4 \text{ r.}70 \text{ c.} + 1,5 \text{ c.} = 4 \text{ r.}71 \frac{1}{2} \text{ c.}$$

Trecem la înmulțire. Aici vom arăta înainte de toate că înmulțirea cu numerele 5, cu 25 și 125 este mult simplificată dacă avem în vedere următoarele:

$$5 = \frac{10}{2}; \quad 25 = \frac{100}{4}; \quad 125 = \frac{1\ 000}{8}$$

De aceea, putem scrie:

$$36 \times 5 = \frac{360}{2} = 180;$$

$$36 \times 25 = \frac{3\ 600}{4} = 900;$$

$$36 \times 125 = \frac{3\ 600}{8} = 4\ 500;$$

$$87 \times 5 = \frac{870}{2} = 435;$$

$$87 \times 25 = \frac{8\ 700}{4} = 2\ 175;$$

$$87 \times 125 = \frac{87\ 000}{8} = 10\ 875$$

La înmulțirea cu 15 putem folosi faptul că:

$$15 = 10 \times 1 \frac{1}{2}$$

Pe această bază se pot efectua în minte calcule de genul următor:

$$36 \times 15 = 360 \times 1 \frac{1}{2} = 360 + 180 = 540$$

sau, mai simplu,

$$36 \times 1 \frac{1}{2} \times 10 = 540$$

$$87 \times 15 = 870 + 435 = 1\,305$$

La înmulțirea cu 11 nu este de loc necesar să se scrie cinci rânduri:

$$\begin{array}{r} \times 383 \\ \times 11 \\ \hline 383 \\ + 383 \\ \hline 4213 \end{array}$$

Este suficient ca sub deînmulțit să copiem încă o dată același număr deplasat cu o cifră spre stînga:

$$\begin{array}{r} + 383 \\ 383 \\ \hline 4213 \end{array} \quad \text{sau} \quad \begin{array}{r} 383 \\ + 383 \\ \hline 4213 \end{array}$$

și să se efectueze adunarea.

Foarte util este să ținem minte rezultatele obținute prin înmulțirea primelor nouă cifre cu 12, 13, 14 și 15. În felul acesta înmulțirea numerelor de mai multe cifre cu acești înmulțitori va fi simplificată. Să presupunem că trebuie să înmulțim:

$$\begin{array}{r} \times 4587 \\ \times 13 \\ \hline \end{array}$$

Procedăm în felul următor. Fiecare cifră a deînmulțitului o înmulțim în minte dintr-o dată cu 13:

$$7 \times 13 = 91; \text{ scriem } 1, \text{ ținem minte } 9$$

$$8 \times 13 = 104; 104 + 9 = 113; \text{ scriem } 3, \text{ ținem minte } 11$$

$$5 \times 13 = 65; 65 + 11 = 76; \text{ scriem } 6, \text{ ținem minte } 7;$$

$$4 \times 13 = 52; 52 + 7 = 59$$

$$\text{în total: } 59\,631$$

Metoda se însușește ușor, chiar după câteva exerciții;

Există un procedeu foarte comod pentru înmulțirea numerelor de două cifre cu 11: distanțăm cifrele de înmulțitului și scriem între ele suma lor:

$$43 \times 11 = 473$$

Dacă suma cifrelor este formată din două cifre, atunci numărul zecilor ei se adaugă la prima cifră a de înmulțitului:

$$48 \times 11 = 4(12)8, \text{ adică } 528$$

Să dăm, în sfârșit, câteva exemple de împărțire rapidă. La împărțirea cu 5 se înmulțește atât de împărțitul cât și împărțitorul cu 2:

$$3\ 471 : 5 = 6\ 942 : 10 = 694,2$$

La împărțirea cu 25 se înmulțesc ambele numere cu 4:

$$3\ 471 : 25 = 13\ 884 : 100 = 138,84$$

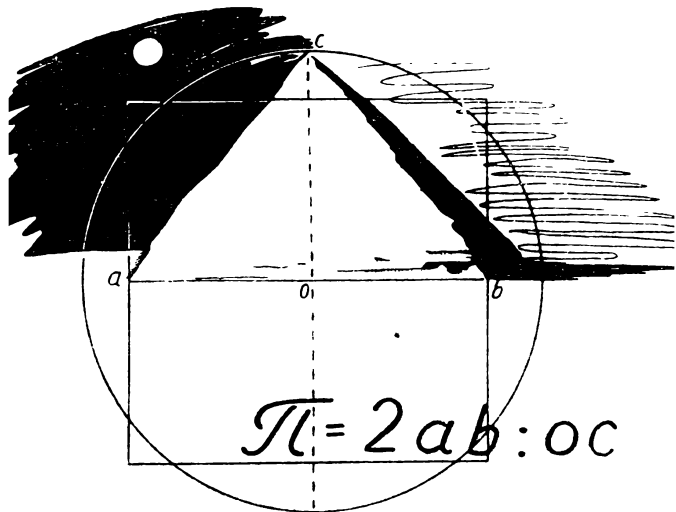
În mod asemănător se procedează la împărțirea cu $1\frac{1}{2}$ (egal cu 1,5) și cu $2\frac{1}{2}$ (adică 2,5):

$$3\ 471 : 1\frac{1}{2} = 6\ 942 : 3 = 2\ 314$$

$$3\ 471 : 2,5 = 13\ 884 : 10 = 1\ 388,4$$

CURIOZITĂȚI ARITMETICE:

$$100 = \left\{ \begin{array}{l} 74\frac{3}{6} + 25\frac{9}{18} \\ 95\frac{3}{7} + 4\frac{16}{28} \end{array} \right.$$



CAPITOLUL VIII

CALCULE APROXIMATIVE

GHICITORI MATEMATICE LEGATE DE PIRAMIDA LUI KEOPS

Cea mai înaltă piramidă din Egiptul antic — piramida lui Keops, bătută timp de 5 milenii de vânturile aride ale pustiului este fără îndoială cea mai minunată construcție rămasă din timpurile lumii antice (fig. 51). Avînd o înălțime de aproape 150 m, baza ei acoperă o suprafață de 40 000 m² și este formată din 200 de rînduri de pietre uriașe. 100 000 de sclavi în decurs de 30 de ani au muncit la ridicarea acestei piramide. Timp de 10 ani au construit numai drumul pentru transportul pietrelor de la cariera de piatră pînă la

locul construcției, iar alți 20 de ani le-au îngrămădit unele peste altele cu ajutorul mașinilor rudimentare din acele vremuri.

Este îndoielnic faptul că o astfel de construcție uriașă ar fi fost ridicată cu unicul scop de a servi drept

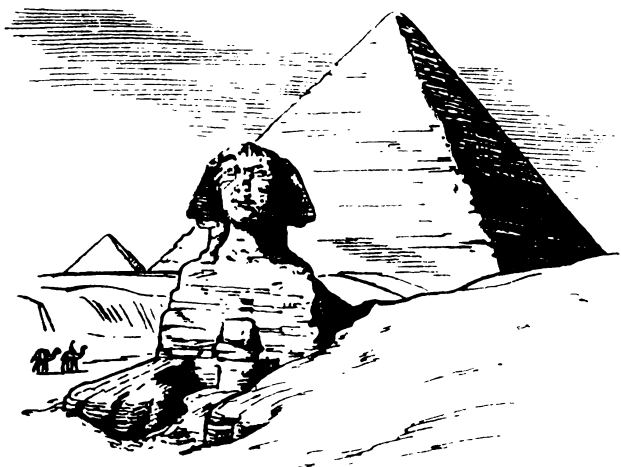


Fig. 51 — Ce enigme matematice ascund piramidele egiptene ?

mormînt pentru domnitorii țării. De aceea unii cercetători au încercat să caute misterul ei în relațiile dintre dimensiunile piramidei.

Reușind să găsească o serie de corelații între elementele geometrice ale piramidei, acești cercetători credeau că preoții, conducătorii lucrărilor de construcție, aveau cunoștințe largi de matematică și astronomie și că aceste cunoștințe și-au găsit expresia în formele de piatră ale piramidei.

« Herodot ¹ povestește — citim în cartea astronomului francez Mauret („Ghicitorile științei“, 1926, vol. 1) — că preoții egipteni au dezvăluit următoarea

¹ Cunoscutul istoric grec a vizitat Egiptul cu 300 de ani înainte erei noastre.

relație între o latură a bazei piramidei și înălțimea ei : aria patratului avînd ca latură înălțimea piramidei este egală cu aria fiecăruia din triunghiurile laterale. Lucrul acesta este pe deplin confirmat de cele mai noi măsurători, și constituie dovada faptului că în toate timpurile piramida lui Keops a fost privită ca un monument ale cărui dimensiuni s-au calculat pe cale matematică.

Voi da aici încă un argument apărut mai tîrziu : noi știm că raportul dintre lungimea circumferinței și diametrul cercului este o mărime constantă, bine cunoscută elevilor astăzi. Pentru a calcula lungimea cercului este suficient să se înmulțească diametrul lui cu 3,1416.

Matematicienii antichității cunoșteau acest raport numai cu aproximație.

Dacă adunăm însă cele patru laturi ale bazei piramidei, obținem un perimetru de 931,22 m. Împărțind numărul 931,22 cu înălțimea dublă ($2 \times 148,208$) avem ca rezultat 3,1416, adică raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său. (Alți autori calculează valoarea lui π din aceleași dimensiuni ale piramidei cu o exactitate și mai mare: 3,14159 — I.P.)

Acest monument unic în felul lui reprezintă deci expresia materială a numărului „ π ”, care a jucat un rol atît de important în istoria matematicii. După cum vedem preoții egipteni aveau noțiuni exacte cu privire la o serie de probleme considerate drept descoperiri ale savanților din secolele de mai tîrziu¹.

Mai curioasă este o altă corelație: dacă o latură a bazei piramidei se împarte la durata exactă a unui an — 365,2422 zile, atunci se obține exact a 10-a milioana parte din semi-axa globului pămîntesc, cu o precizie pe care ar putea-o invidia astronomii contemporani...

Mai departe: înălțimea piramidei este exact a miliarda parte din distanța Pămînt-Soare — mărime care a devenit cunoscută științei europene doar la sfîrșitul

¹ Valoarea lui „ π ”, calculată cu precizia cu care a fost obținută din raportul dintre dimensiunile piramidei, a devenit cunoscută matematicienilor europeni numai în sec. XVI.

sec. al XVIII-lea. Se constată, deci, că egiptenii cu 5 000 de ani în urmă știau cea ce nu cunoșteau încă contemporanii lui Galileu și Kepler și nici savanții din epoca lui Newton. Nu este de mirare faptul că cercetările de acest gen au dat naștere în apus unei literaturi vaste.

Și totuși, acestea nu sînt decît un joc al cifrelor. Lucrurile vor apare într-o cu totul altă lumină dacă le vom examina folosind rezultatele calculului a p r o x i m a t i v e .

Să reluăm deci în aceeași ordine exemplele de mai sus.

1) Despre numărul „ π ”. Aritmetica numerelor aproximative afirmă că dacă în rezultatul operației de împărțire dorim să obținem un număr de șase cifre exacte (3,14159), trebuie să avem la deîmpărțit și împărțitor cel puțin tot atîtea cifre exacte. Aceasta — aplicat la piramidă — înseamnă că pentru obținerea unui „ π ” format din șase cifre, atît latura bazei cît și înălțimea piramidei ar trebui măsurate cu o exactitate de pînă la o milionime, adică pînă la 1 mm. Astronomul Mauret dă pentru înălțimea piramidei rezultatul de 148,208 m, adică la prima vedere cu o exactitate de 1 mm.

Dar cine va garanta această precizie de măsurare a piramidei? Ne vom aminti că în laboratorul institutelor meteorologice, în care se efectuează măsurătorile cele mai exacte, nu se pot obține asemenea date precise asupra lungimii (la măsurarea lungimii se obțin numai șase cifre exacte). Se înțelege de la sine că rezultatul măsurării colosului de piatră din deșert va fi mult mai puțin exact. Este drept că la lucrările de măsurătoare ale terenurilor (la măsurarea așa-numitelor „baze”) se poate realiza aceeași precizie ca în laborator, adică o precizie de șase cifre exacte în rezultat. Dar lucrul acesta este imposibil în condițiile măsurării piramidei: nu se pot cunoaște dimensiunile inițiale reale ale piramidei, pentru că materialul care a acoperit piramida a fost ros de vînturi și nimeni nu știe grosimea stratului acesta extern. Se impune deci să iei dimensiunile piramidei în metri întregi; și atunci

se obține un „ π ” care nu este mai exact decât cel cunoscut din papyrusul matematic al lui Rhind.

Dacă piramida reprezintă într-adevăr expresia în piatră a numărului „ π ”, atunci această expresie este, după cum vedem, departe de a fi perfectă. Foarte posibil este însă ca piramida să nu fi fost construită pentru a exprima acest raport. În limitele numerelor de trei cifre aproximative, pentru dimensiunile piramidei se pot face și alte presupuneri. Se poate, de exemplu, ca pentru înălțimea piramidei să se fi luat $\frac{2}{3}$ din muchia piramidei sau $\frac{2}{3}$ din diagonala bazei ei. Este pe deplin posibilă și relația indicată de Herodot: înălțimea piramidei este rădăcina patrată din aria unei fețe laterale. Dar acestea sînt tot atît de probabile ca și „ipoteza lui π ”.

2) Următoarea afirmație privește durata anului și lungimea razei globului pămîntesc: dacă împărțim latura bazei piramidei cu durata exactă a anului (un număr format din șapte cifre) atunci obținem cu precizie a zecea milioanea parte din axa globului pămîntesc (un număr de cinci cifre). Însă o dată ce cunoaștem că în deîmpărțit nu avem mai mult de trei cifre exacte, este clar ce preț putem pune pe cele șapte și cinci cifre ale împărțitorului și cîtului. Aritmetica poate garanta în cazul de față numai pentru primele trei cifre din durata anului și ale razei globului pămîntesc. Anul de 365 de zile și raza globului de aproximativ 6 400 km, iată numerele despre care avem dreptul să vorbim aici.

3) Cît privește distanța de la Pămînt la Soare, aici există o nedumerire de altă natură. Este curios chiar că adepții acestei teorii nu observă greșeala logică pe care o comit. Dacă, așa cum afirmă ei, o latură a piramidei formează o anumită fracție din raza globului pămîntesc, iar înălțimea — o anumită fracție din bază, nu se mai poate spune că aceeași înălțime constituie o fracție anumită din distanța pînă la Soare. Ori una, ori alta. Iar dacă întîmplător se observă aici o corespondență interesantă între cele două lungimi, ea a existat totdeauna în sistemul nostru solar și nu poate fi vorba de nici un merit din partea preoților.

Adeptii acestei teorii merg și mai departe: ei afirmă că masa piramidei constituie exact a mia trilionimea parte din masa globului pământesc. După părerea lor această relație nu poate fi întâmplătoare și arată că preoții Egiptului antic cunoșteau nu numai dimensiunile geometrice ale planetei noastre, dar încă din acele vremuri au calculat masa ei, „au cîntărit“ globul pământesc.

Găsim aceeași lipsă de logică ca și în exemplul privind distanța Pământ-Soare. Este cu totul absurd să spunem că masa piramidei a fost „aleasă“ într-o anumită relație cu masa globului pământesc. Masa piramidei s-a definit din momentul cînd a fost ales materialul ei și dimensiunile bazei și înălțimii. Nu se poate pune de acord înălțimea piramidei cu baza care formează o anumită fracție din raza globului pământesc și, independent de aceasta, să se realizeze legătura dintre masa ei și masa Pământului. Una este determinată de cealaltă. Prin urmare, trebuie respinse orice presupuneri cu privire la cunoașterea de către egipteni a masei globului pământesc. Cele expuse mai sus nu sînt decît o echilibristică numerică. Operînd cu abilitate cu numere, sprijinindu-ne pe coincidențe întâmplătoare, se poate demonstra orice.

Am văzut ce fundament șubred stă la baza legendei despre cunoștințele savante ale preoților — arhitecți, constructori ai piramidei. Totodată avem aici o demonstrație clară a utilității aceluși capitol al aritmeticii care se ocupă de numerele *a p r o x i m a t i v e*.

NUMERELE APROXIMATIVE

Pentru cei ce nu cunosc regulile operațiilor cu numere aproximative, va fi interesant să facă măcar pe scurt cunoștință cu ele, cu atît mai mult cu cît cunoașterea acestora este utilă din punct de vedere practic, permițînd economie de muncă și timp la efectuarea calculelor.

Vom explica înainte de toate ce este un „număr aproximativ“ și cum se obțin asemenea numere.

Datele care intră în calculele tehnice se obțin pe calea măsurătorilor. Dar nici o măsurătoare nu poate fi efectuată cu precizie absolută. Înainte de toate, înseși unitățile de muncă folosite conțin o anumită eroare. Confecționarea unor rigle, greutatea de un kg, unități de măsură pentru litru este foarte grea, și în construcția lor se admit anumite erori. De exemplu, la confecționarea unei rigle cu lungimea de 1 m se admite o toleranță de pînă la 1 mm; pentru lanțul geodezic cu lungimea de 10 m, toleranța este de pînă la 1 cm; pentru greutatea de 1 kg — pînă la 1 gram¹; pentru greutatea de 1 g ajunge la 0,01 g; pentru unitatea de măsură de 1 litru toleranța merge pînă la 5 cm³.

Efectuarea măsurătorilor comportă și ea unele erori. Presupunem că măsurați o distanță oarecare, de exemplu, lățimea străzii. Unitatea de măsură, metrul, s-a cuprins în lățimea ei, să zicem, de 13 ori și a mai rămas o bucățică mai mică de 1 metru. Puteți spune că lățimea străzii este de 13 metri; de fapt ea este egală cu 13 metri întregi și încă un număr oarecare de zecimi, sutimi etc. de metru, de care nu ați ținut seama. Prin urmare, rezultatul măsurătorii noastre poate fi reprezentat astfel:

lățimea străzii = 13,???

unde semnele întrebării indică cifrele necunoscute ale zecimilor, sutimilor etc.

Dacă ați dori să măsurați lățimea străzii cu mai multă precizie, ați afla și câți decimetri (zecimi de metru) se cuprind în porțiunea rămasă nemăsurată. Presupunem că am găsit 8 dm, dar a mai rămas o bucățică mai mică decît un dm. Rezultatul noii măsurători este 13,8 m; desigur mai exact decît cel precedent și totuși nu ab-

¹ Afară de erorile admise pentru greutatea se acceptă anumite toleranțe și în construcția balanțelor. Pentru balanța folosită în gospodărie toleranțele sînt de pînă la 1 g la fiecare kg de marfă cîntărită.

solut exact, pentru că în afara celor 8 zecimi de metru lățimea străzii cuprinde și un număr oarecare de sutimi și miimi de metru. Prin urmare, rezultatul obținut acum poate fi exprimat așa:

13,8 ?? metri.

La o măsurătoare și mai exactă veți ține seama și de sutimile de metru (cm), dar veți neglija restul mai mic decât un cm; înseamnă că nici acest rezultat nu va fi absolut exact. În general, cu oricâtă atenție veți măsura, niciodată nu puteți fi ferm convinși de faptul că după cifra obținută nu s-ar mai afla și altele încă necunoscute.

Problema nu se rezolvă prin aceea că la măsurători resturile mai mari decât jumătatea de unitate de măsură sînt de obicei considerate ca întregi. Dacă la prima măsurătoare a străzii noi am fi considerat că lățimea ei nu este de 13, ci de 14 m, acest rezultat ar fi fost și el numai un rezultat aproximativ. El putea fi scris astfel:

14,??? metri,

unde semnele de întrebare înseamnă cifre zecimale (adică arată cu cîte zecimi, sutimi etc. numărul 14 este mai mare decât lățimea reală a străzii).

Nici chiar rezultatul celei mai minuțioase măsurători nu poate fi privit ca fiind absolut exact: el exprimă mărimea reală într-un mod mai mult sau mai puțin aproximativ. Astfel de numere se numesc a p r o x i m a t i v e.

Aritmetica numerelor aproximative nu se aseamănă întru totul cu aritmetica numerelor exacte. Vom arăta această deosebire cu ajutorul unui exemplu.

Presupunem că trebuie să calculăm suprafața unui teren dreptunghiular a cărui lungime este de 68 metri, iar lățimea de 42 metri. Dacă numerele 68 și 42 ar fi exacte, atunci aria terenului ar avea exact

$$68 \times 42 = 2\ 856\ \text{m}^2.$$

Dar numerele 68 și 42 nu sînt exacte, ci aproximative: lungimea nu este exact egală cu 68 metri, ci ceva mai

mare sau mai mică, pentru că este probabil ca metrul să nu se cuprindă în ea fix de 68 de ori. Pe urmă însăși lungimea riglei de 1 metru nu credem să fi fost absolut egală cu 1 metru. În conformitate cu cele spuse mai sus, lungimea terenului în metri poate fi exprimată prin :

$$68,?$$

Tot astfel vom scrie lățimea terenului :

$$42,?$$

Efectuăm acum înmulțirea numerelor aproximative :

$$68,? \times 42,?$$

Operațiile sînt reprezentate în schema următoare .

$$\begin{array}{r} \times 68,? \\ 42,? \\ \hline \quad ??? \\ 136? \\ 272? \\ \hline 285?,?? \end{array}$$

Observăm că cifra a patra a rezultatului ne este necunoscută; ea trebuie să se obțină din adunarea a trei cifre ($? + 6 + ?$) dintre care două sînt necunoscute. Nu este sigură nici cifra a treia a rezultatului: noi am scris 5, dar din adunarea coloanei $? + 6 + ?$ s-ar fi putut obține un număr mai mare decît 10, și chiar 20; aceasta înseamnă că în loc de 5 am fi putut avea 6 sau 7. Sînt pe deplin sigure numai primele două cifre ale rezultatului (28). De aceea, putem să afirmăm doar că suprafața căutată este de aproximativ 28 de sute de metri pătrați. Care sînt însă cifrele zecilor și unităților nu putem ști.

Astfel, răspunsul corect la problemă este $2\ 800\ m^2$; aici zerourile nu indică absența unităților din ordinul respectiv, ci numai lipsa unor cunoștințe sigure cu privire la aceste unități. Cu alte cuvinte zerourile au aici

aceeași semnificație ca și semnele întrebării din notațiile folosite mai sus.

Este greșit să credem că răspunsul 2 856 obținut după regulile aritmeticii numerelor exacte este mai precis decît 2 800. Am văzut doar că ultimele două cifre ale rezultatului (56) nu sînt demne de o încredere absolută — nu putem garanta pentru ele. Răspunsul 2 800 este preferabil lui 2 856, pentru că el afirmă direct că sînt sigure numai cifrele 2 și 8, care ocupă locul miilor și sutelor, iar cifrele următoare sînt necunoscute. Dimpotrivă, 2 856 ne face să ne gîndim, în mod nejust, că ultimele două cifre sînt tot atît de sigure ca și primele două.

„Este necinstit să se scrie mai multe cifre decît cele pentru care putem garanta... Îmi pare foarte rău, dar trebuie să recunosc că sînt multe numere de acest fel, care duc la reprezentări cu totul eronate și care se întîlnesc în cele mai bune lucrări despre mașinile cu abur... Cînd am învățat la școală, ni s-a spus că distanța medie de la Pămînt la Soare este de 95 142 357 mile englezești¹. Mă mir de ce nu s-a specificat cîți țoli și cîte picioare. Măsurătorile moderne cele mai exacte ne permit să afirmăm că această distanță nu depășește 93 de milioane și nu este mai mică de 92,5 milioane de mile“, — scria în legătură cu aceasta matematicianul englez Pearry.

Așadar, în calculele cu numere aproximative nu trebuie să se țină seama de toate cifrele rezultatului, ci numai de unele. Care sînt cifrele ce trebuie reținute în aceste cazuri, și care sînt cele ce se înlocuiesc cu zerouri, vom vedea într-un alt paragraf. Ne vom opri întîi asupra r o t u n j i r i i numerelor.

ROTUNJIREA NUMERELOR

În efectuarea calculelor rotunjirea unui număr constă în aceea că una sau cîteva cifre de la capătul lui se înlocuiesc cu zerouri. Deoarece zerourile care stau după

¹ Mila engleză este egală cu 1852 metri.

virgulă nu au nici o importanță, ele nici nu se scriu. De exemplu:

numerele	se rotunjesc la
3734....	3730 sau 3700
5,314.....	5,31 sau 5,3
0,00731.....	0,0073 sau 0,007

Dacă prima din cifrele neglijate la rotunjire este 6 sau o cifră mai mare, atunci cele precedente sînt sporite cu o unitate. De exemplu:

numerele	se rotunjesc la
4867	4870 sau 4900
5989	5990 sau 6000
3,666	3,67 sau 3,7

Tot astfel se procedează dacă se neglijează cifra 5, după care urmează și alte cifre cu valori reale. De exemplu:

numerele	se rotunjesc la
4552	4600
38,1506	38,2

Dacă se neglijează însă n u m a i cifra 5, s-a convenit ca cifra precedentă să fie mărită cu o unitate în cazul cînd ea este i m p a r ă ; cifra pară rămîne neschimbată. De exemplu:

numerele:	se rotunjesc la:
735	740
8645	8640
37,65	37,6
0,0275	0,028
70,5	70 ¹

La prelucrarea rezultatelor operațiilor cu numere aproximative se ține seama de aceleași reguli de rotunjire.

¹ Zeroul este privit ca o cifră p a r ă.

În teoria calculelor aproximative, prin cifre cu valori reale se înțeleg toate cifrele cu excepția zeroului, precum și zeroul în cazul cînd el se găsește între alte cifre cu valori reale. Astfel, în numerele 3 700 și 0,0062 nu toate zerourile sînt cifre cu valori reale. În numerele 105 și 2006 zerourile sînt niște cifre cu valori reale. În 0,0708 primele două zerouri nu au valoarea reală; cel de-al treilea însă este o cifră cu valoare reală.

În unele cazuri zeroul ca valoare reală se poate găsi și la sfîrșitul numărului; de exemplu, rotunjind numărul 2,540002 obținem 2,54000, în care toate zerourile de la capăt sînt cifre cu valori reale, pentru că arată lipsa unor unități în categoriile respective. De aceea, dacă în condițiile indicate într-o problemă sau într-o tabelă întîlnim numerele 4,0 sau 0,80, atunci trebuie să le privim ca pe niște numere formate din două cifre. Rotunjind numărul 289,9 la 290, obținem de asemenea la sfîrșitul numărului un zero care are valoare reală.

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA
NUMERELOR APROXIMATIVE

Rezultatul obținut prin adunarea sau scăderea unor numere aproximative nu trebuie să se termine cu cifre cu valoare reală, în unități de acele ordine care lipsesc cel puțin într-unul din numerele respective. Dacă s-au obținut astfel de cifre, atunci ele trebuie neglijate prin rotunjire:

$\begin{array}{r} + \quad 3400 \\ \quad 275 \\ \hline 3\ 700 \end{array}$ <p>(și nu 3 675)</p>	$\begin{array}{r} \quad 28,3 \\ + \quad 146,85 \\ \quad 108 \\ \hline 283 \end{array}$ <p>(și nu 283,15)</p>	$\begin{array}{r} \quad 176,3 \\ - \quad 0,46 \\ \hline 175,8 \end{array}$ <p>(și nu 175,84)</p>
--	--	--

Nu este greu de înțeles pe ce se bazează această regulă. Presupunem că se cere să se adauge la 3 400 m încă 275 m. Evident, la numărul 3 400 persoana care a executat măsurătorile a neglijat zecile de metri; este clar că adăugînd la acest număr 70 de metri și încă 5 metri, vom obține nu 3 675 m, ci mai curînd un rezultat cu alte cifre în locul zecilor și al unităților. De aceea, în locul zecilor și unităților vom scrie în sumă zerouri, care în cazul de față arată că nu se știe care anume cifre trebuie să stea aici.

INMULȚIREA, ÎMPĂRȚIREA ȘI RIDICAREA LA PUTERE A NUMERELOR APROXIMATIVE

Rezultatul obținut prin înmulțirea și împărțirea numerelor aproximative nu trebuie să cuprindă mai multe cifre cu valori reale decît avem în factorul care cuprinde cele mai puține cifre cu valori reale. (Dintre două numere cel mai „scurt“ este acela care conține mai puține cifre cu valori reale.) Cifrele în plus se înlocuiesc cu zerouri.

E x e m p l e :

$$\begin{array}{r} \times \quad 37 \\ \quad 245 \\ \hline 9100 \end{array} \quad \begin{array}{l} 57,8 : 3,2 = 18 \text{ (și nu } 18,06); \\ 25 : 3,14 = 8,0 \text{ (și nu } 7,961) \end{array}$$

(și nu 9 065)

La numărarea cifrelor nu se ține seama de virgulă; astfel, 4,57 se consideră drept un număr de trei cifre etc.

Numărul cifrelor cu valoare reală cuprins în puterea numărului aproximativ nu trebuie să depășească numărul lor cuprins în baza puterii. Cifrele în plus se înlocuiesc cu zerouri.

E x e m p l e :

$$\begin{array}{l} 157^2 = 24\,600 \text{ (și nu } 24\,649); \\ 5,81^3 = 196 \text{ (și nu } 196,122941) \end{array}$$

Aceste reguli se referă numai la rezultatele finale. Dacă prin operația efectuată calculul nu se termină încă, atunci în rezultatul acestei operații intermediare se reține cu o cifră de valoare reală mai mult decât cere regula. Efectuînd, de exemplu, operația :

$$\frac{36 \times 1,4}{3,4}$$

se procedează în felul următor :

$$36 \times 1,4 = 50,4 \text{ (se rețin trei cifre și nu două);}$$

$$50,4 : 3,4 = 15$$

La calculele tehnice simple regulile de mai sus sînt utilizabile aproape în toate cazurile, folosindu-se următoarele simplificări. Înainte de a începe calculul se stabilește în funcție de numărul de cifre cu valori reale ale factorului cel mai „scurt”, cîte cifre cu valoare reală poate conține rezultatul final. După aceasta se trece la calcule, reținîndu-se în toate operațiile intermediare cu o cifră mai mult decât urmează a se reține pentru rezultatul final. Dacă, de exemplu, prin condițiile problemei s-au dat cîteva numere de trei cifre cu valori reale și un număr de două cifre cu valori reale, atunci rezultatul final va avea două cifre sigure, iar rezultatele intermediare trebuie să conțină trei cifre.

Astfel la efectuarea lucrărilor toate regulile calculelor aproximative pot fi reduse la următoarele două :

1) se stabilește cîte cifre cu valori reale se cuprind în factorul cel mai scurt al problemei respective; tot atîtea cifre cu valori reale trebuie menținute în rezultatul final;

2) în rezultatele tuturor operațiilor intermediare se reține cu o cifră mai mult decât s-a stabilit pentru rezultatul final¹.

¹ Vezi mai amănunțit în broșura mea „Tabele și reguli pentru calcule” (OGHIZ, 1931).

Celelalte cifre în toate cazurile se înlocuiesc cu zero-uri, și se neglijează după regulile rotunjirii.

Aceste reguli nu se aplică la problemele rar întâlnite pentru a căror rezolvare urmează să se efectueze numai operațiile de adunare și scădere. În aceste cazuri se respectă o altă regulă.

Rezultatul final nu trebuie să conțină cifre cu valori reale în acele ordine care lipsesc cel puțin într-una din datele aproximative. În rezultatele intermediare trebuie să se rețină cu o cifră, de valoare reală, mai mult decât s-a stabilit pentru rezultatul final. Celelalte cifre se neglijează prin rotunjire.

Dacă, de exemplu, datele problemei sînt următoarele :

$$37,5 \text{ m, } 185,64 \text{ m, } 0,6725 \text{ m}$$

și pentru rezolvare se cere să se scadă primul număr din suma celorlalte două, atunci, în sumă

$$\begin{array}{r} + 185,64 \\ 0,6725 \\ \hline 186,3125 \end{array}$$

se neglijează ca într-un rezultat intermediar ultima cifră (adică se ia 186,312), iar în diferența

$$\begin{array}{r} - 186,312 \\ 37,5 \\ \hline 148,812 \end{array}$$

ca rezultat final se reține numai 148,8.

ECONOMISIREA EFORTULUI LA CALCULE

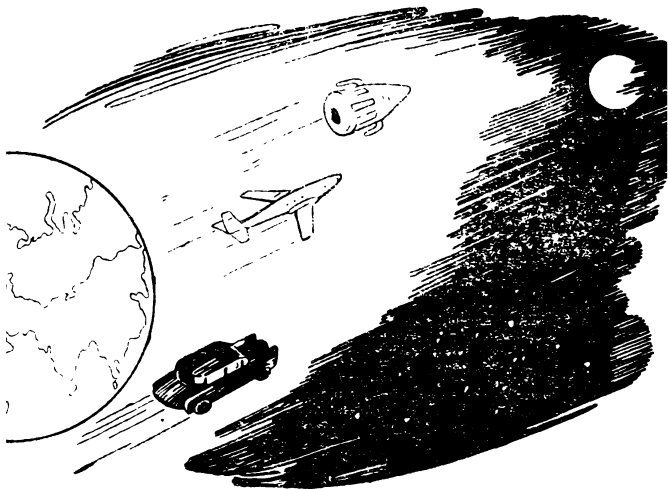
Cum putem calcula ce efort economisim noi la efectuarea calculelor prin metodele expuse mai sus? Pentru aceasta trebuie să facem un calcul oarecare complicat de două ori: o dată folosind regulile aritmetice obișnuite, iar a doua oară — aproximativ. Apoi se va cal-

cula cu răbdare de cîte ori am fost nevoiți să adunăm, să scădem și să înmulțim diferitele cifre prin cele două metode. Se va constata că prin calculul aproximativ se fac de două ori și jumătate mai puține operații decît la calculul „precis“. Rezultatul obținut prin acest calcul este aproape tot atît de corect.

Astfel, pentru calculele aproximative este necesar de aproximativ două ori și jumătate mai puțin timp decît la calculul efectuat conform regulilor obișnuite. Dar nu numai atît : fiecare operație efectuată în timpul calculului, fiecare caz de adunare, scădere sau înmulțire a cifrelor este un prilej în plus de a face greșeli. La calculele aproximative probabilitatea greșelii va fi și ea de $2 \frac{1}{2}$ ori mai mică decît la calculele „exacte“. Este de ajuns să greșim o singură dată și calculele trebuie efectuate din nou, dacă nu chiar complet, măcar în parte. Prin urmare, prin metoda calculului aproximativ se obține o economie de timp mai mare decît $2 \frac{1}{2}$ ori. Vedem, deci, că timpul consumat pentru cunoașterea regulilor acestui calcul este compensat repede și cu prisosință.

CURIOZITĂȚI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 98 \frac{3}{6} + 1 \frac{27}{54} \\ 94 \frac{1}{2} + 5 \frac{38}{76} \end{cases}$$



CAPITOLUL IX

URIAȘII NUMERICI

CIT DE MARE ESTE MILIONUL?

Vom începe cu milionul. Cuvîntul „milion” înseamnă o mie de mii. În secolul al XIII-lea, cunoscutul călător Marco Polo a vizitat China și pentru a exprima imensele bogății ale acestei țări a inventat cuvîntul „milion”.

Dacă vreți să vă dați seama de adevăratele dimensiuni ale milionului, încercați să faceți pe un caiet curat un milion de puncte. Eu nu vă sfătuiesc să duceți această muncă pînă la capăt. Nu știu dacă va avea cineva răbdare s-o facă, dar chiar de la începutul acestei lucrări, datorită mersului ei încetinit, vă veți da seama ce este un milion „adevărat”.

Naturalistul englez A.R. Wallace acorda o foarte mare importanță formării unei noțiuni juste despre milion. El propunea¹ „ca în fiecare școală mare să se rezerve o cameră sau o sală pe ai cărei pereți să se poată arăta, în mod demonstrativ, ce este un milion. În acest scop sînt necesare o sută de foi patrate mari de hîrtie de cîte $4\frac{1}{2}$ picioare fiecare, care se împart în pătrățele de cîte un sfert de țol, lăsîndu-se un număr egal de intervale albe între petele negre. După fiecare zece pete trebuie să existe un interval dublu pentru a separa fiecare sută de pete (10×10). Astfel, pe fiecare foaie vor apare cîte 10 mii de pete negre, care se disting bine în mijlocul camerei, iar toate cele o sută de foi vor conține un milion de pete. O astfel de sală ar fi fost foarte instructivă... Nimeni nu poate aprecia realizările științei moderne, care are de-a face cu valori neobișnuit de mari sau mici, dacă nu știe să-și imagineze clar cît de mare este un milion. În orice caz este de dorit ca în fiecare oraș mare să fie amenajată o astfel de sală, pe ai cărei pereți să se arate cît de mare este un milion”²

Nu știu dacă dorința lui Wallace a fost îndeplinită în patria lui, dar eu am reușit să realizez această propunere la Leningrad în Parcul central de cultură și odihnă. Aici, în pavilionul special amenajat de știință distractivă s-au trasat pe tavan un milion de cerculețe negre. Cîmpul vast de puncte negre producea asupra vizitatorilor o impresie puternică și-i făcea într-adevăr să simtă imensitatea milionului. Impresia era intensificată prin compararea acestei mulțimi cu o altă mulțime — cu numărul stelelor ce pot fi văzute pe cer cu ochiul liber, care din timpurile cele mai vechi fusese considerată ca imposibil de numărat. Contrar convingerii atît de răspîndite, ochiul liber vede pe o emisferă a cerului de noapte numai $3\frac{1}{2}$ mii de stele. Acest nu-

¹ În cartea „Poziția omului în univers”.

² De exemplu, în astronomie distanțele dintre planete se măsoară în sute de milioane de km; distanțele pînă la stele sînt de milioane de milioane de km; în fizică numărul de molecule dintr-un cm^3 de aer reprezintă milioane de milioane de milioane.

măr este de 300 ori mai mic decît un milion. Un cerc mic albastru, trasat pe tavanul pavilionului despre care am vorbit mai sus, conține 3 500 de puncte întunecate și reprezenta cerul înstelat, subliniind prin dimensiunile sale modeste imensitatea adevăratului uriaș numeric — milionul.

Cititorul va dori, probabil, să afle în ce fel s-au schițat pe tavan un milion de cerculețe negre. Cît timp le-a trebuit zugravilor să execute această lucrare migăloasă? Pavilionul nu ar fi fost gata prea repede dacă milionul de puncte de pe tavanul lui ar fi fost făcut manual. Lucrurile s-au petrecut mult mai simplu: s-au comandat tapete cu așezarea respectivă a cerculețelor și au fost lipite de tavan.

UN MILION DE PINIOANE

Cu totul altfel este reprezentată mărimea unui milion în Casa de știință distractivă din Leningrad. Aici, milionul este realizat cu ajutorul unui mic dispozitiv, pe care-l reprezentăm în figura 52. Un rînd de roți dințate este astfel ales și legat în acest dispozitiv, încît atunci cînd manivela se rotește de zece ori acul primului cadran face o singură rotație. Cînd manivela este învîrtită de 100 de ori, acul acestui cadran va parcurge de 10 ori cercul și totodată acul cadranelor vecin va face o rotație. Pentru ca să se rotească acul cadranelor al treilea manivela dispozitivului trebuie să fie învîrtită de o mie de ori. După zece mii de rotații ale manivelei se va roti o dată și acul celui de-al patrulea cadran; după o sută de mii — se va roti acul al cincilea și, în sfîrșit după un milion de rotații se va roti o dată ultimul ac, ca cel al cadranelor al șaselea.

În timp ce milionul de cerculețe de pe tavan frapează văzul, acest dispozitiv acționează asupra mușchilor. Rotind manivela și urmărind cît de încet se mișcă acele de pe ultimele cadrane, simțim parcă direct, cu mîinile noastre, greutatea celor 6 zerouri care însoțesc unitatea la reprezentarea milionului. Doar pentru

a ajunge la cel de-al șaselea zero trebuie să învîrtim manivela dispozitivului fără odihnă și fără opriri aproape 11 zile și nopți (considerînd cîte o rotație pe secundă).

UN MILION DE SECUNDE

Aici propun o metodă accesibilă fiecăruia pentru a-și forma o noțiune cît mai clară despre mărimea unui milion. Pentru aceasta trebuie să ne străduim doar să numărăm pînă la un milion unele unități mici, dar care ne sînt bine cunoscute — pași, minute, chibrituri, pahare etc. Rezultatele obținute sînt adesea neașteptate și uimitoare.

Dăm cîteva exemple.

Cît timp v-ar fi luat numărarea unui milion de obiecte oarecare, cîte unul în fiecare secundă?

Se constată că numărînd fără întrerupere cîte zece ore din cele 24, v-ar fi trebuit o lună de zile. Nu este de loc greu să constatăm acest lucru făcînd următorul

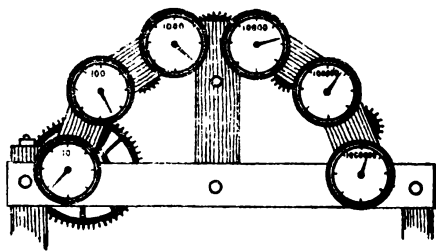


Fig. 52 — Pentru ca săgețile să indice 1 000 000 rotații, trebuie să rotim manivela aparatului 11 zile și nopți.

calcul: Într-o oră sînt 3 600 secunde, iar în 10 ore — 36 000; prin urmare, în 3 zile veți număra aproximativ 100 000 obiecte; deoarece milionul este de 10 ori mai mare vă vor trebui 30 de zile¹. De aici rezultă

¹ Arătăm cu titlu informativ că un an (astronomic) are 31 558 150 de secunde; 1 milion de secunde este egal cu 11 zile și nopți, 13 ore, 46 minute, 40 secunde.

că munca propusă mai sus — de a pune pe caiet un milion de puncte — ar fi cerut multe săptămîni de activitate asiduă și neobosită.

Măsura în care oamenii sînt înclinați să subaprecieze mărimea unui milion este arătată de însăși eroarea făcută de Wallace: prevenindu-i pe ceilalți de a nu subaprecia milionul, el termină fragmentul dat mai sus (pag. 172) cu următorul sfat:

„Pe scară redusă fiecare poate face acest lucru pentru el însuși: este suficient să faci rost de 100 de foi de hîrtie groasă, să le linieze în pătrățele și să pună puncte negre mari. Această reprezentare ar fi foarte instructivă, deși, desigur, nu în aceeași măsură cu cea realizată pe scară mare“. Respectivul autor presupunea, bănuiesc, că această lucrare poate fi ușor îndeplinită de un singur om.

O BANDĂ DINTR-UN MILION DE FIRE DE PĂR

Toți văd și știu bine cît de subțire este un fir de păr. Grosimea unui fir de păr la om este de cca. 0,07 mm. O vom rotunji pînă la 0,1 mm. Imaginați-vă că ați pus, unul lîngă altul, un milion de fire de păr. Ce lățime ar fi avut o astfel de bandă. Am fi putut-o, de exemplu, întinde de-a latul ușii?

Dacă nu v-ați pus niciodată această problemă, atunci puteți fi siguri că înainte de a efectua calculele veți da un răspuns cu totul greșit. Poate chiar nu veți fi de acord cu răspunsul corect, atît de neverosimil va părea el. Care este acest răspuns?

Se constată că lățimea unei benzi formate dintr-un milion de fire de păr ar fi atins aproximativ 100 de metri. Această bandă n-ar putea fi întinsă nici chiar de la o margine la cealaltă a unei străzi largi de capitală!

Pare neverosimil, însă faceți calculul și vă veți convinge că am dreptate:

$$0,1 \text{ mm} \times 1\,000\,000 = 0,1 \text{ m} \times 1\,000 = 0,1 \text{ km} = \\ = 100 \text{ m}^1$$

EXERCIȚII CU MILIONUL

Efectuați — oral — încă o serie de exerciții pentru a vă da seama și mai bine ce mărime reprezintă un milion.

1. Lungimea unei muște obișnuite este de cca. 7 mm. Care ar fi fost lungimea ei dacă ar fi crescut de un milion de ori?

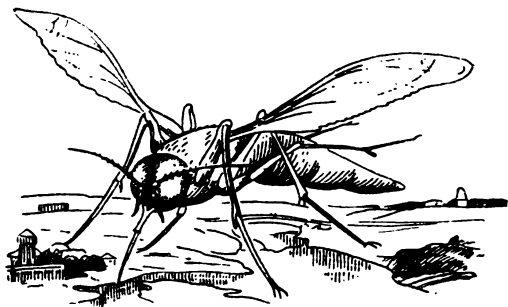


Fig. 53 — Un țînțar mărit de un milion de ori.

R e z o l v a r e . Înmulțim 7 mm cu 1 000 000 și obținem 7 km, adică aproximativ lățimea unui oraș mare. Prin urmare, o muscă ale cărei dimensiuni liniare au fost mărite de un milion de ori ar fi putut acoperi cu corpul său întregul oraș. Chiar un țînțar mărit de un milion de ori ar fi apărut foarte impunător (vezi fig. 53).

¹ Aici înmulțirea s-a făcut în felul următor: în loc să înmulțim numerele am înlocuit unitatea de măsură cu alta de o mie de ori mai mare. Această metodă este foarte comodă pentru calculele orale și trebuie folosită la calcule cu unități de măsură metrice.

2. Imaginați-vă că ceasul dumneavoastră de buzunar a crescut de un milion de ori (în lățime), și veți obține din nou un rezultat uimitor; nu cred că veți reuși să-l ghiciți fără calcule. Care este rezultatul?

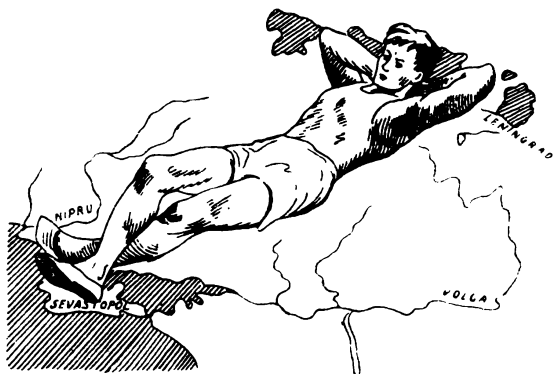


Fig. 54 — Omul mărit de un milion de ori ar ajunge de la golful finlandez pînă în Crimeea.

R e z o l v a r e . Ceasul ar fi avut o lățime de 50 km, iar fiecare cifră a lui ar fi atins mărimea unei mile geografice (7 km).

3. Ce statură ar fi avut omul dacă ar fi fost de un milion de ori mai înalt decît în mod obișnuit?

R e z o l v a r e . 1 700 km. El ar fi fost de numai 8 ori mai mic decît diametrul globului terestru. Făcînd un pas, el ar fi putut ajunge din Leningrad la Moscova; dacă s-ar fi culcat (fig. 54), capul ar fi fost lîngă golful finlandez, iar picioarele în Crimeea...

Voi da încă cîteva exemple de același gen, lăsînd la latitudinea cititorului verificarea lor.

Făcînd un milion de pași într-o direcție v-ați depărta cu 600 de km. De la Moscova pînă la Leningrad sînt un milion și ceva de pași.

Un milion de oameni așezați în rînd, umăr la umăr, ar fi ocupat 250 km.

Un milion de puncte tipografice — ca în această carte — așezate unul lângă altul, ar fi format o linie cu lungimea de 100 metri.

Turnînd apă de un milion de ori cu degetarul, veți turna aproape o tonă de apă.

O carte de un milion de pagini ar avea o grosime de circa 50 m.

Un milion de litere alcătuiesc o carte de 600-800 pagini de format mediu.

Un milion de zile formează peste 27 de secole. De la începutul erei noastre nu au trecut încă un milion de zile!

Făcînd aceste exerciții cu milionul, putem aprecia calea imensă pe care a parcurs-o cel de-al treilea satelit artificial al pămîntului, lansat de Uniunea Sovietică la 15 mai 1958. Numai într-un an el a ocolit Pămîntul de aproape 5 100 ori, parcurgînd un drum care depășește 230 de milioane de km. Aceasta este $1 \frac{1}{2}$

ori distanța pînă la Soare. Dacă cercetașul acesta cosmic ar fi făcut cursă între Pămînt și Lună, atunci într-un an el ar fi realizat 300 de drumuri!¹

Pentru comparație vom arăta că avionul TU-104, avînd o viteză medie de zbor de 800 km pe oră, ar fi putut parcurge această distanță numai în 32 de ani și 9 luni de zbor neîntreput. Dacă se consideră în medie viteza de mișcare a automobilului egală cu 80 km pe oră, rezultă că el ar străbate o asemenea cale numai în 330 de ani.

DENUMIREA URIAȘILOR NUMERICI

Am discutat pînă acum despre milioane. Înainte de a trece la uriași numerici mai mari, ne vom opri asupra denumirilor, adoptate în țara noastră și într-o serie de alte țări.

¹ În medie distanța de la Pămînt pînă la Soare este egală cu 150 milioane de km, iar de la Pămînt la Lună cu 384 400 km.

La începutul cărții am vorbit despre ordinele și clasele sistemului nostru de numerație zecimal pozițional. La cele spuse acolo vom adăuga că un milion este o mie de mii, adică o unitate de clasa a treia. După aceea urmează zecile și sutele de milioane. O mie de milioane formează o unitate din clasa a patra, numită miliard. Uneori miliardul este numit bilion, însă la noi nu se obișnuiește această denumire. Prin urmare, un miliard este egal cu o mie de milioane. El se scrie astfel:

1 000 000 000

adică 1 însoțit de 9 zerouri.

O mie de miliarde formează o unitate de clasa a cincea, care poartă denumirea de trilion. Astfel, un trilion este egal cu un milion de milioane și se scrie sub forma unei unități urmate de 12 zerouri:

1 000 000 000 000

Dacă vă interesează denumirile ultrauriașilor care urmează după trilion, puteți studia tabela de mai jos:

Denumirea uriașului numeric	De câte zerouri este urmată unitatea
cvadrilion	15
cvintilion	18
sextilion	21
septilion	24
octilion	27
nonilion	30
decilion	33
undecilion	36
dodecilion	39

Mai departe nu există denumiri. De fapt nici acestea nu se folosesc aproape de loc, și sînt puțini cei care le cunosc.

În unele țări se obișnuiește o altă ordine a denumirii claselor, astfel încît denumirile claselor care coincid cu cele adoptate la noi au acolo un alt sens. Așa de pildă, prin cuvîntul bilion nu se înțelege o mie, ci un milion

de milioane, adică o unitate urmată de 12 zerouri; prin trilion se înțelege o unitate urmată de 18 zerouri, adică un milion de milioane de milioane, iar cvadrilionul este o unitate cu 24 de zerouri, adică un milion de milioane de milioane de milioane. Mai scurt, în aceste țări fiecare denumire superioară se dă unui milion din cele inferioare (și nu o mie ca la noi). Pentru a evita neînțelegerile trebuie să însoțim întotdeauna denumirea cu cifre. S-ar putea ca acesta să fie unicul caz din practică când notarea sumei cu litere nu explică, ci, dimpotrivă, induce în eroare cu privire la cifrele scrise.

Trebuie să menționăm că în cărțile științifice și în practică s-a adoptat o metodă de notare a uriașilor numerici care exclude cu desăvârșire orice posibilitate de dublă interpretare. Această metodă se bazează pe ridicarea la putere. De exemplu, un trilion, adică o unitate urmată de 12 zerouri, reprezintă numărul 10 înmulțit de 12 ori. Pe scurt, aceasta se scrie:

$$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 1 \times 10^{12}$$

adică un trilion este o unitate înmulțită cu 10 ridicat la puterea a 12 -a.

Mai dăm un exemplu. Numărul 2 cvadrilioane 400 trilioane se va scrie prescurtat astfel: $2,4 \cdot 10^{15}$, pentru că un cvadrilion este o unitate cu 15 zerouri (vezi tabela de mai sus).

Folosind o astfel de metodă pentru notarea numerelor foarte mari, întâlnite adesea în fizică și astronomie, se face economie de loc și, afară de aceasta, se ușurează citirea precum și diferitele operații efectuate cu ele¹.

MILIARDUL

Miliardul este una din denumirile cele mai tinere ale numerelor. Ea a intrat în uz numai spre sfârșitul războiului franco-prusac (1871), când francezii au fost nevo-

¹ Vezi despre aceasta mai amănunțit în cartea: I. I. Perelman, „Algebra distractivă“, Ed. științifică, 1961.

îți să plătească Germaniei o contribuție de 5 000 000 000 franci. Ca și milionul, cuvîntul miliard provine de la rădăcina „mille“ (mie) și este un superlativ italian al acestui substantiv.

Pentru a ne face o idee despre imensitatea miliardului, să ne gîndim că în cartea pe care o citești acum sînt ceva mai mult de 300 000 de litere. În trei cărți de acest fel vom avea un milion de litere. Un miliard de litere se vor cuprinde în 3 000 de exemplare ale acestei cărți, care dacă ar fi așezate unul peste celălalt ar forma o coloană de înălțimea Muzeului de ateism din Lenin-grad (fost catedrala Isaakievski).

Un metru cub conține exact un miliard de mm cubi. ($1\ 000 \times 1\ 000 \times 1\ 000$). Să încercăm să calculăm înălțimea coloanei care s-ar obține, dacă toate aceste cuburi milimetrice minuscule ar fi așezate unul peste celălalt. Rezultatul este uimitor — 1 000 km!

Un miliard de minute formează peste 19 secole; numai cu aproximativ 50 de ani în urmă (29 aprilie 1902, ora 10 și 40 minute) am intrat în cel de-al doilea miliard de minute de la începutul erei noastre.

Uriașul numeric miliard îl putem găsi și în interiorul corpului nostru. Cea mai mică înțepătură în orice parte a corpului provoacă apariția sîngelui. V-ați pus vreodată întrebarea: cîte vase sanguine extrem de mici, așa-zise capilare, există în corpul nostru? S-a arătat că în corpul omului există peste 100 de miliarde de capilare. Lungimea lor totală atinge 60—80 de mii de km. Cu un fir format din capilarele omului s-ar putea înconjura Pămîntul aproape de două ori de-a lungul ecuatorului.

TRILIONUL

Este greu să ne dăm seama de imensitatea acestui uriaș numeric, chiar dacă sîntem obișnuiți cu mînuirea milioanelor. Milionul este un pitic față de imensul trilion, așa cum este unitatea în comparație cu milionul.

De obicei noi uităm de acest raport și în imaginația noastră nu facem o deosebire prea mare între milion și trilion. Tot așa, pentru popoarele primitive care nu știu să numere decît pînă la 2 sau 3, toate numerele mai mari decît acestea sînt notate cu m u l t .

Și, după cum botocuzilor¹ le apare neesențială diferența mică între numerele 2 și 3, multor oameni contemporani, deși culți, li se pare ca neesențială deosebirea dintre milion și trilion. Cel puțin ei nu se gîndesc la faptul că unul din aceste numere este de 1 milion de ori mai mare decît celălalt și, prin urmare, raportul dintre ele este aproximativ același ca și dintre distanța Moscova — San Francisco și lățimea unei străzi.

Un fir de păr a cărui grosime ar fi mărită de un trilion de ori, ar fi de vreo 8 ori mai gros decît globul terestru, iar o muscă mărită tot de atîtea ori, ar avea o grosime de 70 de ori mai mare decît cea a Soarelui.

În anul 1958, în U.R.S.S. au apărut 1,1 miliarde de cărți. Dacă se consideră că în medie fiecare carte conține 160 000 de litere (acesta este aproximativ numărul de litere care se cuprinde în 80 de pagini cu formatul cărții de față), aiunci numărul literelor din toate aceste exemplare va fi aproximativ egal cu 150 de trilioane. Așezate una lîngă cealaltă, literele ar alcătui un fir care s-ar putea întinde de la Pămînt pînă la Soare.

Circulația de transport va constitui în U.R.S.S. în anul 1965 2,5 trilioane de tone-km. Aceasta înseamnă că pe toate tipurile de transport s-ar putea transporta în anul 1965 mărfuri de 16,5 mii de tone la o distanță care să fie egală cu cea de la Pămînt pînă la Soare.

NUMERELE ULTRAURIAȘE

În „Aritmetica“ veche (sec. XVIII) a lui Magnițki-despre care am mai vorbit, este dat un tabel al denu,

¹ Botocuzii sînt un trib indian din Brazilia, în prezent aproape în întregime exterminat.

mirilor pentru clasele de numere pînă la cvadrilion, adică pînă la unitatea cu 24 de zerouri¹.

Acesta a fost un mare pas înainte în comparație cu inventarul numeric mai vechi al înaintașilor noștri. Scara slavă a numerelor mari era pînă în sec. al XV-lea mult mai modestă și ajungea abia la 100 de milioane. Iată această numerotare veche:

„tisiașcea“	1 000
„tima“	10 000
„leghion“	100 000
„leodr“	1 000 000
„vran“	10 000 000
„koloda“	100 000 000

Magnițki a lărgit mult în tabelul său limitele vechi ale numerelor mari. El a considerat însă că practic este inutil să continue prea mult sistemul de denumiri al uriașilor numerici. Imediat după tabel se plasează cîteva versuri, în care bătrînul matematician afirmă că deoarece mintea omenească nu poate cuprinde șirul infinit de numere, este inutil să formeze numere mai mari decît cele notate în tabelul lui. Numerele din acest tabel (de la unitate pînă la septilion, adică pînă la $1 \cdot 10^{24}$ inclusiv) sînt suficiente, după părerea lui, pentru numărarea tuturor obiectelor lumii vizibile — pentru fiecare „care dorește să numere ceva în profunzimile cerului“.

Este interesant că și astăzi tabelul lui Magnițki este aproape suficient pentru acei cercetători ai naturii care „au nevoie să numere ceva în profunzimea cerului“. La măsurarea distanțelor pînă la astrele îndepărtate, abia vizibile cu ajutorul celui mai puternic telescop sau radiotelescop, astronomii n-au nevoie de denumiri care să depășească miliarde. Corpurile cerești cele mai îndepărtate se află la o distanță de peste un miliard de

¹ Magnițki folosea acea clasificare a numerelor care dă cîte o denumire nouă pentru fiecare milion de unități inferioare (bilionul — un milion de milioane etc.).

În sistemul nostru de denumiri unitatea urmată de 24 de zerouri se numește septilion (vezi tabelul de la pag. 179). În cele ce urmează se folosește sistemul de numiri indicat în tabel.

„ani lumină“ de Pământ. Chiar dacă am vrea să exprimăm această distanță în cm, am obține aproximativ 10 000 de septilioane; prin urmare, nici așa nu ieșim din limitele tabelului lui Magnițki.

În lumea mărimilor foarte mici constatăm că de asemenea nu se face simțită nevoia de a folosi numere mai mari decît septilionul. Numărul de molecule dintr-un cm^3 de gaz — una din mulțimile cele mai mari calculate real — se exprimă în zeci de cvintilioane. Numărul oscilațiilor pe secundă pentru undele electromagnetice, cele mai scurte din cîte sînt cunoscute în prezent, nu depășește un sextilion, adică $1 \cdot 10^{21}$. Dacă ne-am pune în gînd să calculăm cîte picături se cuprind în ocean (considerînd că volumul unei picături este egal cu 1 mm^3 , ceea ce este destul de puțin) tot nu ar fi nevoie de numere mai mari ca septilionul, pentru că am obține cel mult mii de septilioane.

În cazul cînd am dori să exprimăm însă cîte grame de substanță cuprinde întregul nostru sistem solar, atunci ne trebuie o denumire superioară septilionului, pentru că acest număr cuprinde 34 de cifre (2 urmat de 33 de zerouri): $2 \cdot 10^{33}$.

CEL CARE INGHITE URIAȘII NUMERICI

Să ne oprim puțin asupra unui uriaș aritmetic (mai bine zis geometric) de un gen aparte — asupra milei cubice¹. Noi ne reprezentăm destul de greu mărimile cubice; de obicei subestimăm mărimea lor — mai ales cînd este vorba despre unități de măsură mari cu care avem de-a face în astronomie. Dacă însă ne închipuim greșit mărimea unei mile cubice — cea mai mare unitate de măsură folosită de noi pentru volum — atunci cît de greșite trebuie să fie noțiunile pe care le avem cu privire la volumul globului pămîntesc, al celorlalte planete, al Soarelui. De aceea trebuie să acordăm puțin

¹ Aici se are în vedere mila geografică, care reprezintă a 15-a parte dintr-un grad ecuatorial și măsoară 7 420 m.

timp și atenție încercărilor de a căpăta imaginea corespunzătoare cu privire la mila cubică.

În cele ce urmează ne vom folosi de expunerea pitorească dată într-o cărticică aproape uitată, „O călătorie fantastică prin Univers“ (apărută cu circa 100 de ani în urmă).

„Presupunem că pe o șosea dreaptă putem vedea pînă la o distanță de o milă întregă ($7\frac{1}{2}$ m). Să facem un catarg cu lungimea de o milă și să-l așezăm la un capăt al drumului, lîngă un stîlp de telegraf. Ca să ne dăm seama cît de înalt este catargul, presupunem că lîngă el se află statuia unui om de aceeași înălțime cu catargul, adică de peste 7 km. Genunchiul acestei statui se va afla la o înălțime de 1 800 de m; ar trebui puse una peste alta 25 de piramide egiptene pentru a ajunge pînă la mijlocul statuii.

Să ne imaginăm acum că am așeza două catarge cu înălțimea de o milă la distanța de o milă unul de altul și am unit aceste două catarge cu scînduri; s-ar fi obținut un perete cu lungimea de o milă și cu înălțimea tot de o milă. Aceasta este o milă patrată.

Am obținut astfel un perete de lemn așezat vertical. Să ne imaginăm că avem patru pereți egali uniți între ei în forma unei lăzi (fig. 55). Îi punem un capac de o milă lungime și o milă lățime. Această ladă va ocupa un volum egal cu o milă cubică. Să vedem cît este de mare o asemenea ladă, ce și în eă cantitate poate încăpea în ea.

Ridicăm capacul și începem prin a pune în ladă toate clădirile Leningradului. Ele vor ocupa foarte puțin loc. Plecăm la Moscova, adunînd din drum toate orașele mari și mici. Deoarece toate acestea au acoperit numai fundul lăzii, să căutăm material pentru umplerea ei și în alt loc. Luăm Parisul, cu Arcul lui de Triumf și Turnul Eifel și le aruncăm tot acolo. Toate acestea zboară ca într-o prăpastie; aproape că nici nu se observă că am mai pus ceva. Adăugăm Londra, Viena, Berlinul. Dar cum toate acestea sînt încă puțin pentru a putea umple măcar în parte golul din ladă, vom începe să aruncăm, fără alegere, toate orașele, cetățile, castelele, satele, diferitele clădiri întîlnite în cale. Tot e puțin.

Adăugăm tot ce a fost făcut de miinile omului în Europa; dar și acum lada este umplută numai pe sfert. Aruncăm toate corăbiile din lume, dar și asta fără folos. Vom pune toate piramidele egiptene, toate căile ferate din

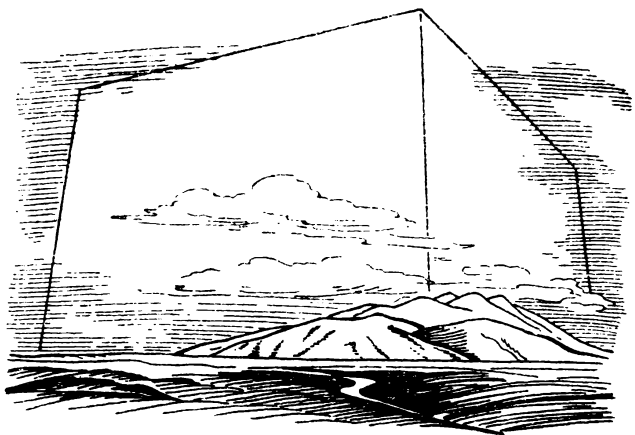


Fig. 55 — O ladă cu un volum de o milă geografică cubică ar cuprinde clădirile din lumea întreagă, flota tuturor țărilor, toate mașinile și construcțiile din cele cinci continente ale lumii, populația globului pămîntesc, toate animalele de pe planeta noastră și tot nu ar fi umplută.

lumea veche și nouă, toate mașinile și fabricile din lume — tot ce a fost făcut de mîna omului în Asia, Africa, America, Australia. Lada se umple numai pînă la jumătate. O scuturăm puțin ca să se așeze toate obiectele mai bine și încercăm să completăm golul cu oameni.

Adunăm toate paiele și tot bumbacul din lume și-l așezăm în ladă, obținînd astfel un strat care să-i ferească pe oameni de loviturile inerente unei asemenea experiențe. Întreaga populație a Germaniei va încăpea în primul strat. O acoperim cu un strat moale de grosimea unui picior și mai așezăm tot atîția oameni. Acoperim și acest strat și, așezînd strat după strat, vom închide în ladă întreaga populație a Europei, Asiei, Africii, Americii, Australiei... S-au format astfel 50 de straturi;

considerînd că un strat are grosimea de un metru, în total 50 de metri. Ar fi trebuit de cîteva zeci de ori mai mulți oameni decît există pe lume pentru a putea umple cea de-a doua jumătate a lăzii...

Ce-i de făcut? Dacă am fi dorit să așezăm în ladă toate vietățile din lume — toți caii, boii, măgarii, berbecii, cămilele, iar peste ele să punem toate păsările, peștii, șerpii, tot ce zboară și se tîrăște — nici atunci n-am fi umplut lada pînă sus fără ajutorul stîncilor sau al nisipului.

Iată ce înseamnă o milă cubică. Iar din globul terestru s-ar putea face 660 de milioane de asemenea lăzi.¹

La cele spuse mai sus adăugăm că o milă cubică de boabe de grîu ar fi cuprins cîteva cvintilioane de astfel de boabe. După cum vedeți, acest uriaș cubic înghite toți ceilalți uriași¹.

URIAȘII TIMPULUI

Uriașele intervale de timp ne apar și mai puțin clare decît distanțele și volumele uriașe. Geologia ne învață că din timpul depunerii celor mai vechi straturi ale scoarței pămîntului, s-au scurs sute de milioane de ani. Cum să ne dăm seama de imensitatea unor perioade de timp atît de îndelungate? Un savant propune următoarea metodă:

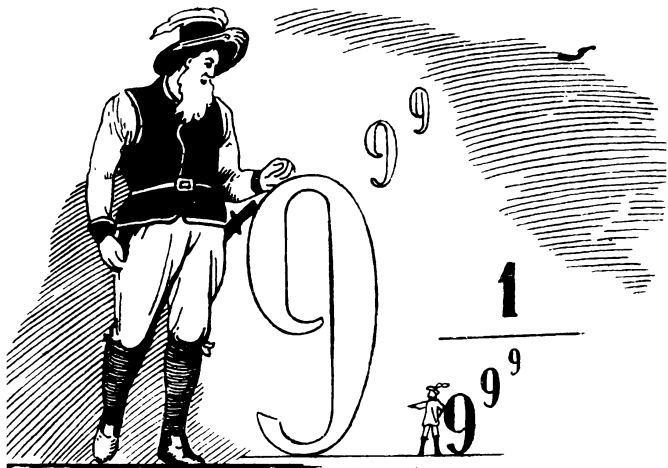
„Să ne imaginăm că întreaga istorie a Pămîntului poate fi reprezentată ca o linie dreaptă cu lungimea de 500 km. Presupunem că această distanță reprezintă cele 500 de milioane de ani care s-au scurs de la începutul epocii cambriene (una din epocile cele mai vechi din istoria scoarței Pămîntului). Deoarece 1 km reprezintă un milion de ani, ultimii 500 — 1 000 m vor corespunde duratei perioadei ghețarilor, iar cei 600 de ani ai istoriei mondiale vor fi de numai 6 m — lungimea unei

¹ Și totuși mila cubică pierde mult în ochii noștri, dacă se ține seama de faptul că întreaga cantitate de gaze ce urmează să se extragă în 1965 în U.R.S.S. ar ocupa peste o treime din volumul unei astfel de lăzi.

camere, în care cei 70 de ani de viață ai omului se pot reprezenta printr-o linie de 7 cm. Dacă vom sili un melc să parcurgă această distanță cu viteza normală, de 3,1 mm pe secundă, atunci pentru întreaga distanță i-ar trebui 5 ani. Iar întreaga perioadă de la începutul primului război mondial pînă în zilele noastre o va parcurge în 40 de secunde... Vedem deci cît de mici sînt, raportat la scara istoriei Pămîntului, acele perioade mici pe care omul le poate cuprinde cu mintea sa“.

CURIOZITĂȚI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 1\frac{6}{7} + 3 + 95\frac{4}{28} \\ 57\frac{3}{6} + 42\frac{9}{18} \end{cases}$$



CAPITOLUL X

PITICII NUMERICI

DE LA URIAȘI LA PITICI

În călătoriile sale Gulliver, părăsindu-i pe pitici, a nimerit printre uriași. Noi facem călătoria în sens invers: după ce am făcut cunoștință cu uriașii numerici, trecem în lumea piticilor — a numerelor care sînt de atîtea ori mai mici ca unitatea, de cîte ori unitatea este mai mică decît uriașul aritmetic.

Căutarea reprezentanților acestei lumi nu prezintă nici o greutate. Pentru aceasta este suficient să se scrie un șir de numere inverse milionului, miliardului, trilionului etc., adică să se împartă unitatea cu aceste numere. Frațiile care se obțin:

$$\frac{1}{1\ 000\ 000}, \frac{1}{1\ 000\ 000\ 000}, \frac{1}{1\ 000\ 000\ 000\ 000} \text{ etc.}$$

sînt piticii numerici tipici, care sînt tot atît de mici în comparație cu unitatea, pe cît este de mică unitatea în comparație cu milionul, miliardul, trilionul și cu ceilalți uriași numerici.

După cum vedeți fiecărui uriaș numeric îi corespunde un pitic numeric și, prin urmare, pe lume nu există mai puțini pitici numerici decît uriași. Și pentru reprezentarea lor s-a găsit o metodă de prescurtare. Am arătat mai înainte (pag. 180) că în lucrările științifice (de astronomie, fizică) numerele foarte mari se notează astfel :

$$\begin{aligned} 1\ 000\ 000 & \dots\dots 10^6 \\ 10\ 000\ 000 & \dots\dots 10^7 \\ 400\ 000\ 000 & \dots\dots 4 \cdot 10^8 \\ 6\ \text{cvadrilioane} & \dots\dots 6 \cdot 10^{15} \text{ etc.} \end{aligned}$$

În mod corespunzător piticii numerici se notează în felul următor :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1\ 000\ 000} & \dots\dots 10^{-6} \\ \frac{1}{100\ 000\ 000} & \dots\dots 10^{-8} \\ \frac{3}{1\ 000\ 000\ 000} & \dots\dots 3 \cdot 10^{-9} \text{ etc.} \end{aligned}$$

Există oare o necesitate reală de a folosi astfel de fracții? Avem într-adevăr de-a face vreodată cu fracții atît de mici ale unității? Este o problemă pe care credem că este interesant s-o discutăm mai amănunțit.

PITICII TIMPULUI

Este ușor de scris $\frac{1}{1000}$ secunde, și s-ar părea că nu se poate petrece nimic într-un interval de timp atît de scurt.

Așa își închipuie mulți dintre dumneavoastră, dar într-o miime de secundă pot avea loc foarte multe fenomene.

Trenul care parcurge 36 km pe oră face pe secundă 10 m și, prin urmare, într-o a mia parte din secundă reușește să se deplaseze cu 1 cm. Sunetul se propagă în aer în decurs de o miime de secundă cu 33 cm, iar un glonte care părăsește țeava armei cu o viteză de 700—800 m/s parcurge în același interval de timp 70 cm. Globul pământesc se deplasează în fiecare miime de secundă, în rotația sa în jurul Soarelui, cu 30 m. O coardă care emite un sunet înalt face într-o miime de secundă 2—4 și chiar mai multe oscilații complete; chiar și țînțarul reușește să-și ridice sau să-și coboare aripioarele. Un fulger durează mult mai puțin decît o miime de secundă; în acest interval de timp reușește să apară și să înceteze (fulgerul se extinde pe o lungime de cîtiva km).

Vom spune că o miime de secundă nu poate fi considerată un pitic, așa după cum nimeni nu va numi mia drept uriaș numeric. Dacă am lua însă o milionime de secundă, atunci am putea afirma că aceasta este o mărime ireală, un interval de timp în decursul căruia nu se poate întîmpla nimic? Nu! Chiar nici o milionime de secundă — de exemplu, pentru un fizician contemporan — nu este un interval de timp prea mic.

În domeniul fenomenelor luminoase (și electrice) savantul are mereu de-a face cu fracțiuni mult mai mici de secundă. Amintim înainte de toate că o rază de lumină parcurge în fiecare secundă (în vid) 300 de mii de km; prin urmare, într-o milionime de secundă lumina se propagă la o distanță de 300 m — aproximativ atît cît parcurge în aer sunetul în decurs de o secundă întreagă.

Dar lumina este un fenomen ondulatoriu și numărul de unde luminoase care trec în fiecare secundă prin orice punct al spațiului, ajunge la sute de trilioane. Acele unde luminoase care, acționînd asupra ochiului nostru, provoacă senzația de lumină roșie, au o frecvență a oscilațiilor de 400 trilioane pe secundă; aceasta înseamnă că într-o milionime de secundă în ochiul nos-

tru întră 400 de milioane de unde și că o undă pătrunde în ochi într-un interval de timp de 400 000 000 000 000 ori mai mic decît o secundă. Iată un adevărat pitic numeric!

Și acest pitic real este însă un adevărat uriaș în comparație cu fracțiuni și mai mici de secundă, cu care are de-a face fizicianul în studiul razelor Roentgen. Razele Roentgen, care au proprietatea de a pătrunde prin multe corpuri opace, reprezintă, ca și razele vizibile, un fenomen ondulatoriu, numai că la ele frecvența oscilațiilor este mult mai mare decît la razele vizibile — ea atinge 2 500 trilioane pe secundă. Undele se succed aici de 60 de ori mai des decît la radiațiile vizibile ale luminii roșii. Razele „gamma“ au o frecvență și mai mare decît razele Roentgen.

Deci, și în lumea piticilor există uriași și pitici proprii. Gulliver era mai înalt decît piticii numai de vreo 12 ori și totuși li se părea uriaș. Aici însă, un pitic este mai mare decît altul de vreo 60 de ori și, prin urmare, are tot dreptul să se numească uriaș.

PITICII SPAȚIULUI

Acum este interesant de văzut care sînt distanțele cele mai mici măsurate și evaluate astăzi de cercetătorii naturii.

În sistemul de unități metrice, unitatea de lungime cea mai mică folosită în mod curent este milimetrul, care este aproximativ de 2 ori mai mic decît grosimea unui băț de chibrit. Pentru a măsura obiectele vizibile cu ochiul liber, această unitate de lungime este suficient de mică. Dar pentru măsurarea bacteriilor și altor obiecte mici ce se pot distinge numai cu ajutorul microscopelor puternice, milimetrul este prea mare. Pentru astfel de măsurători savanții folosesc o unitate de măsură mai mică — micronul, care este de o mie de ori mai mic decît milimetrul. Globulele roșii, pe care le găsim cu zecile de milioane în fiecare picătură din sîngele nostru, au o lungime de 7 microni și grosimea

de 2 microni. O stivă formată din o mie de asemenea globule are chiar grosimea unui chibrit.

Oricît de mic ni s-ar părea micronul, el este totuși mare pentru distanțele pe care este nevoie să le măsoare un fizician al zilelor noastre. Particulele cele mai mici de molecule invizibile chiar cu microscopul, din care este formată substanța tuturor corpurilor din natură, și atomii încă și mai mici, au dimensiuni cuprinse între a suta și a mia parte dintr-un micron¹. Dacă ne oprim asupra primei mărimi, a celei mai mari, constatăm că un milion de astfel de particule (iar noi știm de acum cît de mare este milionul) așezate pe o aceeași dreaptă, una lîngă alta, ar ocupa doar un mm!

Pentru a ne da seama cît de mic este atomul, să ne imaginăm următorul tablou. Închipuiți-vă că toate obiectele de pe globul pămîntesc ar fi crescut de un milion de ori. În acest caz turnul Eiffel (300 m înălțime) s-ar fi înălțat la 300 000 de km în spațiul cosmic și vârful lui s-ar fi aflat în imediata vecinătate a orbitei Lunii. Oamenii ar fi avut o înălțime egală cu un sfert din raza globului pămîntesc — 1 700 km; un pas al unui astfel de om uriaș l-ar fi deplasat cu 600—700 km. Globulele roșii, care s-ar fi numărat cu miliardele în sîngele lui, ar fi avut un diametru de peste 7 m. Firul de păr ar fi ajuns la o grosime de 100 m. Lungimea unui șoarece ar fi atins 100 km, iar a unei muște — 7 km.

Cît de mare ar fi fost în această situație un atom de substanță?

Nici nu-ți vine să crezi: dimensiunile lui ne vor apare sub forma... unui punct tipografic de mărimea celui din cartea de față!

Am atins oare în felul acesta limitele micimilor din spațiu, care nu pot fi depășite nici măcar de fizicianul care folosește metodele măsurătorilor celor mai fine? Pînă nu de mult așa se credea. S-a demonstrat însă că atomul este o lume întregă formată din particule mult mai mici și servește drept arenă pentru acțiunea unor forțe mari. De exemplu, atomul de hidrogen este for-

¹ Cea mai mică unitate de lungime folosită în fizica modernă este „x”; el este egal cu a zecea milioana parte dintr-un micron.

mat dintr-un „nucleu“ central și din „electronul“ care se rotește repede în jurul lui. Fără a mai intra în alte amănunte vom spune că diametrul electronului se măsoară cu trilionimi de milimetru. Cu alte cuvinte, diametrul electronului este de aproape un milion de ori mai mic decât diametrul unui atom. Dacă doriți însă să comparați dimensiunile electronului cu mărimea unui fir de praf, atunci calculele vă pot arăta că electronul este mai mic decât firul de praf de aproximativ tot atâtea ori de câte ori firul de praf este mai mic decât globul pământesc!

Vedeți, prin urmare, că atomul — acest pitic între pitici — este în același timp un adevărat uriaș în comparație cu electronul, care intră în componența lui, un uriaș de mărimea sistemului solar față de globul pământesc.

În acest sens se poate întocmi o scară instructivă, în care fiecare treaptă este un uriaș față de treapta precedentă și un pitic în raport cu următoarea:

electronul
atomul
firul de praf
casa
globul pământesc
sistemul solar
distanța pînă la Steaua polară
Calea Lactee

Fiecare termen din acest șir este de aproape un sfert de milion de ori¹ mai mare decât cel precedent și tot de atâtea ori mai mic decât următorul. Nimic nu arată atît de clar caracterul relativ al noțiunilor de „mare“ și „mic“ ca acest tabel. În natură nu există un obiect absolut mare sau absolut mic. Fiecare obiect poate fi imens și infinit de mic, în funcție de modul de a-l privi, de obiectul cu care este comparat.

¹ Se au în vedere dimensiunile liniare (nu volumele), adică diametrul atomului, diametrul sistemului solar, înălțimea sau lungimea casei etc. Pentru amănunte de acest gen vezi cartea mea „Cunoașteți oare fizica“?.

Discuția noastră cu privire la uriași și pitici din lumea numerelor ar rămîne incompletă, dacă nu am prezenta cititorului unul din lucrurile cele mai ciudate de acest gen, care, ce-i drept, nu este nou, dar face cît o duzină de noutăți. Pentru început vom da următoarea problemă care la prima vedere pare foarte simplă:

Care este numărul cel mai mare ce poate fi scris cu ajutorul a trei cifre, fără a folosi nici unul din semnele operațiilor?

Vă gîndiți, desigur, la 999, dar nu este acesta răspunsul; ar fi fost mult prea simplu. Răspunsul corect se scrie astfel:

$$99^9$$

Această expresie înseamnă „nouă la puterea a noua la puterea noua”¹. Cu alte cuvinte, trebuie să calculăm un produs de atîția de nouă cîte unități se obțin prin înmulțirea:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

Este suficient să începem numai calculul pentru a ne da seama de imensitatea rezultatului care s-ar obține. Dacă veți avea răbdare să efectuați înmulțirea de mai sus obțineți numărul:

$$387\ 420\ 489$$

De fapt, munca abia începe: trebuie să găsim acum

$$9\ 387\ 420\ 489$$

adică produsul a 387 420 489 de nouă. Prin urmare, rotunjit, înseamnă să facem 400 de milioane de înmulțiri...

Bineînțeles că nu veți avea timp să duceți pînă la capăt un asemenea calcul, iar eu sînt lipsit de posibi-

¹ În limbajul matematicii această expresie se numește „supraputerea a treia a lui nouă”.

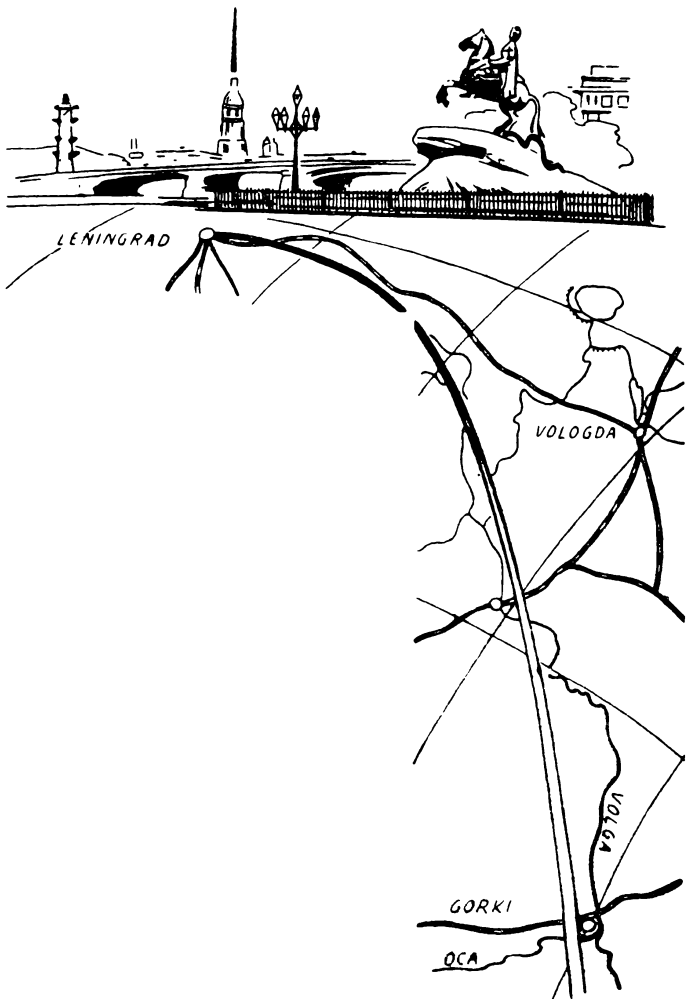


Fig. 56 — Numărul exprimat prin 9^9 este format din 370 de milioane cifre. Dacă am scrie toate aceste cifre una lângă alta pe o bandă de hîrtie, această bandă s-ar întinde pe 1 000 de km, de la Leningrad pînă la orașul Gorki.

litatea de a vă comunica rezultatul din trei cauze pe care sper că le veți considera temeinice. În primul rînd acest număr nu a fost calculat încă niciodată de nimeni (se cunoaște rezultatul aproximativ). În al doilea rînd, chiar dacă el ar fi fost calculat, atunci pentru a-l tipări ne-ar fi necesar cel puțin o mie de cărți ca cea de față, pentru că numărul este format din 369 693 061 cifre; culese cu litere de tipar obișnuite ele s-ar întinde pe o lungime de 1 000 km — de la Leningrad pînă la orașul Gorki. În sfîrșit, chiar dacă aș fi fost aprovizionat cu o cantitate suficientă de hîrtie și de cerneală, nici atunci nu v-aș fi putut satisface curiozitatea. Cred că vă dați seama de ce: să zicem că aș fi fost capabil să notez fără întrerupere cîte două cifre pe secundă, atunci într-o oră aș fi scris 7 200 de cifre; în 24 de ore, lucrînd neîntrerupt zi și noapte, aș înregistra cel mult 172 800 cifre. De aici rezultă că fără să părăsesc o clipă pana din mîină, muncind neobosit zi și noapte, mi-ar fi trebuit cel puțin șapte ani pentru a scrie acest număr.

Mă voi mulțumi să vă spun doar atît: numărul începe cu cifrele 428 124 773 175 747 048 036 987 118 și se termină cu 89. Ce se găsește între acest început și sfîrșit nu se știe.¹ În orice caz cuprinde 369 693 061 cifre!

Cît de mare trebuie să fie deci însuși numărul de obiecte exprimat prin acest șir lung de cifre? Este greu să dăm măcar o noțiune aproximativă cu privire la imensitatea lui, pentru că o astfel de mulțime de obiecte, considerînd chiar că fiecare electron este un obiect separat, nu există în întreg Universul!

Archimede a calculat cîndva cîte fire de nisip ar fi existat în lume dacă întregul Univers, pînă la stelele fixe, ar fi fost umplut de nisipul cel mai fin. El a obținut un rezultat care nu depășea unitatea urmată de 63 de zerouri. Numărul nostru însă este format din 370 de milioane de cifre — prin urmare, cu mult mai mare decît numărul găsit de Archimede.

¹ Începutul numărului este calculat cu ajutorul logaritmilor, iar sfîrșitul lui este determinat prin raționamente.

După ce am făcut cunoștință cu acest uriaș mascat să examinăm inversul lui.

$$9^{9^9}$$

Împărțind unitatea la acest număr vom obține piti-
cul numeric respectiv. Vom avea:

$$\frac{1}{9^{9^9}}$$

care este egal cu

$$\frac{1}{9\ 387\ 420\ 489}$$

La numitor se află numărul imens cu care am făcut cunoștință mai sus. Ultrauriașul a fost transformat în ultrapitic.

Este necesar să facem o observație esențială cu privire la uriașul format din trei de nouă. Eu am primit multe scrisori de la cititorii mei, în care se afirmă că această expresie nu este chiar atît de greu de calculat; unii au efectuat calculele într-un timp relativ scurt. Rezultatul a fost însă mult mai modest decît acela despre care am vorbit eu. Într-adevăr, ei scriu că

$$9^9 = 387\ 420\ 489;$$

ridicînd 387 420 489 la puterea a noua, obținem un număr format „numai“ din 72 de cifre. Nici aceasta nu este puțin, dar pînă la 370 de milioane de cifre mai este departe...

Cititorii poate sînt nedumeriți, dar greșeala constă în aceea că ei nu au înțeles just sensul expresiei în trei etaje formate din nouă. Ei consideră numărul:

$$(9^9)^9$$

în timp ce adevăratul înțeles este altul:

$$9(9^9)$$

De aici provine diferența uriașă din rezultatele calculelor. Ambele posibilități de înțelegere duc la același rezultat într-un singur caz, și anume, când avem expresia

$$2^{2^2}$$

Aici nu mai are importanță cum se efectuează calculul: se obține tot 16.

Este interesant că expresia de mai sus nu indică numărul cel mai mare care poate fi scris cu ajutorul a trei de doi. Se poate obține un număr mult mai mare dacă cei trei de doi îi așezăm astfel:

$$2^{2^2}$$

Această expresie este egală cu 4 194 304 și mult mai mare decât 16.

După cum vedeți, așezarea cifrelor în trei trepte nu exprimă totdeauna numărul cel mai mare care poate fi reprezentat cu ajutorul a trei cifre identice. (Despre aceasta se vorbește mai amănunțit în „Algebra distractivă“, cap. I: „Cea de-a cincea operație matematică“).

CURIOZITĂȚI ARITMETICE:

$$2 \times 2 = 2 + 2$$

$$11 \times 1,1 = 11 + 1,1$$

$$3 \times 1\frac{1}{2} = 3 + 1\frac{1}{2}$$

$$21 \times 1\frac{1}{20} = 21 + 1\frac{1}{20}$$



CAPITOLUL XI

CĂLĂTORII ARITMETICE

CĂLĂTORIE ÎN JURUL LUMII

În tinerețe am lucrat la redacția unei reviste foarte răspândite din Leningrad, al cărei secretar eram. Într-o zi mi s-a înmînat cartea de vizită a unui musafir. Am citit în ea o familie necunoscută și o profesie foarte neobișnuită: „primul călător rus care a făcut pe jos o călătorie în jurul lumii“. În cadrul serviciului mi s-a întîmplat de multe ori să stau de vorbă cu călători care au vizitat diferite continente și chiar cu oameni care au întreprins călătorii în jurul lumii. Dar despre cel care a făcut pe jos o călătorie în jurul lumii eu nu auzisem încă. M-am grăbit să ies în sala de primire pentru a face cunoștință cu acest om neobosit.

Vizitatorul era tînăr și avea o înfățișare foarte modestă. La întrebarea mea, cînd a reușit să întreprindă această călătorie neobișnuită, „primul călător rus... în jurul lumii“ mi-a explicat că tocmai acum este în toiul acestei călătorii. Ruta? Șuvalovo Leningrad¹; despre cele ce vor urma dorește să se sfătuiască cu mine... Din discuții s-a lămurit că planurile „primului călător rus etc.“ sînt destul de nebuloase, dar în orice caz, nu intră în intențiile lui să părăsească Rusia.

— În acest caz cum veți întreprinde călătoria în jurul lumii? — am întrebat eu cu uimire.

— Principalul este de a parcurge distanța din jurul globului pămîntesc, iar aceasta se poate face și în Rusia. Zece km am și parcurs, și mai rămîn...

— Numai 39 990. Drum bun!

— Nu știu cum a călătorit „primul etc.“ de-a lungul drumului ce i-a mai rămas. Nu mă îndoiesc însă de faptul că el a reușit să-și realizeze intențiile. Chiar dacă nu a mai călătorit de loc și s-a înapoiat la Șuvalovo, locuind acolo fără să iasă din cadrul locului de baștină, și în acest caz el a parcurs cel puțin 40 000 de km. Singura nenorocire constă numai în faptul că el nu este primul și nici singurul om care a săvîrșit acest lucru. Și dumneavoastră, și eu, și majoritatea celorlalți cetățeni au tot atîtea drepturi să se numească „călători în jurul lumii pe jos“, ca și călătorul din Șuvalovo. Aceasta pentru că oricare din noi, oricît de puțin s-ar mișca, a reușit în decursul vieții sale, fără să-și dea seama, să parcurgă pe jos un drum mai lung chiar decît circumferința globului pămîntesc. Un mic calcul aritmetic ne va convinge de acest lucru.

În cursul unei zile petreceți, desigur, cel puțin 5 ore în picioare: umblați prin camere, prin curte, pe stradă, adică într-un fel sau altul, mergeți. Dacă ați fi avut în buzunar un dispozitiv pentru măsurarea pașilor făcuți, el v-ar fi arătat că zilnic faceți cel puțin 30 000 pași. Dar și fără dispozitivul de măsurat pași, este clar că distanța parcursă de dumneavoastră zilnic este destul de mare. Chiar dacă merge foarte încet, un om

¹ Șuvalovo — o stație mică la 10 km de Leningrad.

face pe oră 4—5 km. Considerînd că pe zi este cinci ore în picioare, el parcurge 20—25 km. Rămîne să înmulțim această cifră cu 360 și vom afla cam cîți km parcurge fiecare din noi în decursul unui an:

$$20 \times 360 = 7\ 200 \text{ sau } 25 \times 360 = 9\ 000$$

Astfel, chiar un om care se deplasează puțin, și care nu și-a părăsit niciodată orașul natal, parcurge anual, pe jos, aproximativ 8 000 km. Cunoscînd că circumferința globului pămîntesc are 40 000 km nu este greu de calculat în cîți ani putem face pe jos o călătorie egală cu cea în jurul lumii:

$$40\ 000 : 8\ 000 = 5$$

Prin urmare, în cinci ani dumneavoastră parcurgeți un drum egal, ca lungime, cu circumferința globului pămîntesc. Fiecare băiat de 13 ani, dacă considerăm că el a început să meargă la vîrsta de 2 ani, a săvîrșit deja de două ori „călătoria în jurul lumii“. Fiecare om la vîrsta de 25 de ani a săvîrșit cel puțin patru călătorii de acest fel. Atingînd vîrsta de 60 de ani, noi ocolim de zece ori globul pămîntesc, adică parcurgem o cale mai lungă decît de la Pămînt la Lună (380 000 km).

Acesta este rezultatul neașteptat al calculului cu privire la un fenomen atît de cotidian, cum este plimbarea noastră prin cameră și în afară de casă.

ASCENSIUNE PE MONT BLANC

Dacă îl veți întreba pe poștașul care duce zilnic scrisorile adresanților sau pe medicul consultant, ocupat toată ziua cu vizitarea pacienților, dacă au făcut ascensiunea pe Mont Blanc, ei, desigur, vor fi mirați de această întrebare. Și, totuși, puteți demonstra cu ușurință fiecăruia din ei că, deși nu sînt alpiniști au săvîrșit deja ascensiunea pe o culme care depășește chiar și cele mai înalte culmi ale Alpilor. E suficient să se calculeze doar cîte trepte urcă zilnic un poștaș repartizînd scrisorile sale sau un medic vizitîndu-și bolnavii.

Se va constata că și poștașul cel mai modest, și medicul cel mai ocupat, care nici n-au visat măcar să participe la întrecerile sportive, doboară recorduri mondiale de alpinism. Vă propunem să urmăriți acest calcul.

Vom folosi pentru calcule cifre medii destul de modeste; presupunem că poștașul duce într-o zi numai zece scrisori, unor oameni care locuiesc fie la etajul al II-lea, fie la al III-lea, al IV-lea, al V-lea. În medie, luăm etajul III. Vom considera că înălțimea etajului al treilea este rotunjită la 10 m; prin urmare poștașul face zilnic ascensiuni la o înălțime de $10 \times 10 = 100$ m. Mont Blanc are o înălțime de 4 800 m. Împărțind-o cu 100 veți afla că poștașul nostru face o ascensiune pe Mont Blanc în 48 de zile...

Prin urmare, la fiecare 48 de zile, sau de aproximativ 8 ori pe an, poștașul, urcând scările, face o ascensiune la o înălțime egală cu a vârfului cel mai înalt din Europa. Spuneți-mi, vă rog, ce sportiv urcă de 8 ori pe an pe vârful Mont Blanc?

În privința medicului nu am nevoie de presupuneri, pentru că sînt posesorul unor cifre reale. Medicii, care fac vizite la domiciliu în Leningrad, au calculat că



Fig. 57 — În decurs de un an poștașul urcă de 8 ori la înălțimea celor mai înalte piscuri din Europa.

în medie, fiecare din ei, într-o zi de lucru, fac o ascensiune de 2 500 de trepte. Considerînd că înălțimea unei trepte este de 15 cm și că medicul lucrează 300 de zile pe an, obținem că într-un an medicul face ascensiuni de 112 km, adică de 20 de ori înălțimea Mont Blanc.

Dar nu este neapărată nevoie să fii poștaș sau medic pentru a parcurge asemenea distanțe, de care nici măcar nu-ți dai seama. Eu locuiesc la etajul al II-lea, într-un apartament spre care duce o scară cu 20 de trepte — un număr aparent modest. Sînt nevoit să urc această scară de 5 ori pe zi și să mai vizitez două locuințe așezate aproximativ la aceeași înălțime. În medie, se poate considera că urc zilnic de 7 ori o scară cu 20 de trepte, adică 140 de trepte pe zi. Prin urmare, cîte trepte urc în decursul unui an?

$$140 \times 360 = 50\,400$$

Zilnic urc peste 50 000 de trepte! În 60 de ani ar însemna să ajung în vîrfurile unei scări uriașe de 3 000 000 de trepte (450 km)! Cît de mult m-aș fi mirat dacă, pe cînd eram copil, aș fi fost dus la baza acestei scări care se ridică în infinit și dacă mi s-ar fi spus că, poate o dată voi ajunge în vîrfurile ei... Dar cît de mari sînt înălțimile pentru acei oameni care prin însăși profesia lor nu fac altceva decît să urce, cum sînt de exemplu liftierii?

O CĂLĂTORIE PE NESIMȚITE ÎN FUNDUL OCEANULUI

Călătorii foarte lungi efectuează locuitorii subsolurilor, funcționarii din depozitele așezate la subsol etc. Alergînd de multe ori pe zi, în sus și în jos, pe treptele

micii scări care duc la subsol, în decurs de câteva luni ei parcurg distanțe de km întregi. Nu este greu de calculat cât timp îi trebuie unui funcționar dintr-un depozit așezat la subsol, să coboare astfel o distanță egală cu adâncimea unui ocean. Dacă scara are, să zicem, numai 2 m și omul este silit să coboare pe zi de 10 ori, atunci într-o lună el va coborî $30 \times 20 = 600$ m, iar pe an $600 \times 12 = 7\ 200$ m (peste 7 km). Or cea mai adâncă mină coboară în adâncurile pământului numai cu 2 km și ceva.

Astfel, dacă de la suprafața oceanului spre fundul său ar fi pusă o scară, atunci orice funcționar dintr-un depozit așezat la subsol ar putea pune piciorul pe fundul oceanului în numai un an.

CU TRACTORUL ÎN JURUL LUMII

Fiecare tractor lucrează pe câmpiile colhozurilor și sovhozurilor circa 2 500 de ore pe an. În medie el parcurge pe oră 5 km, iar într-un an:

$$5 \times 2\ 500 = 12\ 500 \text{ km}$$

Este ușor de văzut în câți ani parcurge tractorul un drum egal cu circumferința globului pământesc:

$$40\ 000 : 12\ 500 = 3,2$$



Fig. 58 — Un muncitor care lucrează într-un depozit de la subsol coboară în fiecare an pînă la adâncimea oceanului.

În numai 5 ani un tractor, dintre cele care lucrează în prezent în U.R.S.S., va reuși să efectueze „o călătorie în jurul lumii“ o dată și jumătate.

Evident, ne întrece pe noi, deoarece în 5 ani nu putem face decît o singură „călătorie în jurul lumii“, în schimb rămîne mult în urma locomotivei (a trenului marfar, care reușește să parcurgă pe căile ferate ale țării un drum egal cu o „călătorie în jurul lumii“, în numai opt luni trenul personal chiar în 6 luni).

O ROTIȚĂ NEOBOSITĂ

Mulți dintre noi dețin cîte un călător în jurul lumii în interiorul ceasului de mîină sau de buzunar. Deschideți capacul din spate al ceasului și priviți mecanismul. Rotițele lui dințate se învîrtesc atît de încet, încît la prima vedere ne par imobile. Trebuie să le urmărim mult timp și cu atenție pentru a putea observa mișcarea lor. Excepție face o singură rotiță — balansorul, care balansează neîncetat. Mișcările lui sînt atît de rapide, încît este greu să numărăm oscilațiile sale într-o secundă. Se ro-

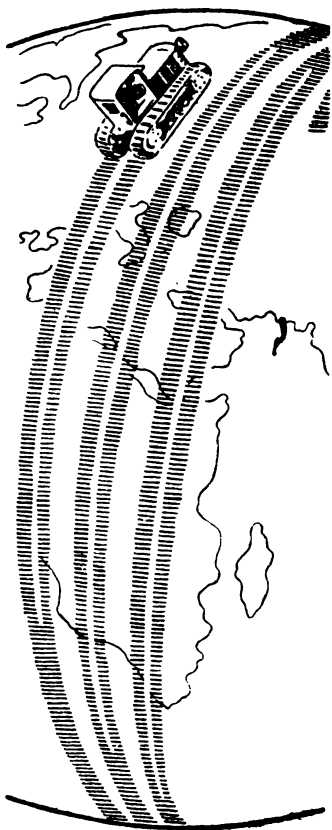


Fig. 59 — În zece ani de lucru tractorul ocolește de 3 ori globul pămîntesc.

tește de cinci ori în decursul fiecărei secunde, când într-o parte, când în cealaltă, succesiv. Și de fiecare dată roțița face o rotație completă și încă o cincime din ea.

Vom încerca să numărăm câte rotații execută în decursul unui an; dacă omul este grijuliu, și nu uită să-l întoarcă la timp, ceasul nu se oprește niciodată. În fiecare minut roțița face $5 \times 60 = 300$ oscilații, iar în fiecare oră $300 \times 60 = 18\ 000$; în 24 de ore: $18\ 000 \times 24 = 432\ 000$ oscilații. Considerăm în medie că anul are 360 de zile, atunci pentru fiecare balansor avem:

$$432\ 000 \times 360 = 155\ 520\ 000 \text{ oscilații.}$$

Dar balansorul face la fiecare oscilație $1\frac{1}{5}$ rotații complete. Prin urmare, în decursul unui an, roțița se învîrtește în jurul axei sale de

$$155\ 520\ 000 \times 1\frac{1}{5} = 186\ 624\ 000 \text{ ori,}$$

rotunjit de 187 000 000 ori!

Veți rămîne și mai uimiți dacă încercați să calculați ce drum ar fi parcurs un automobil dacă roțile lui s-ar fi învîrtit de 187 000 000 ori. Diametrul unei roți de automobil este de 80 cm; prin urmare, circumferința ei este de aproximativ 250 cm sau $2\frac{1}{2}$ metri. Înmulțind $2\frac{1}{2}$ cu 187 000 000 obținem lungimea drumului pe care dorim s-o aflăm: circa 470 000 km.

Așadar, dacă roțile unui automobil ar fi fost tot atît de neobosite ca și balansorul ceasului de buzunar, ar fi ocolit anual de peste zece ori globul pămîntesc, adică ar fi parcurs o cale mai lungă decît cea de la noi pînă la Lună! Nu este greu să ne imaginăm cît timp ar fi trebuit să consumăm pentru reparația întregii mașini și pentru înlocuirea roții de automobil. Iar micuța roțiță a ceasului de buzunar se mișcă neobosit ani întregi, fără reparație, fără unsoare, fără înlocuire, lucrînd cu o precizie uimitoare.

CĂLĂTORI STÎND PE LOC

Ultimele rînduri ale cărții aș vrea să le dedic pri-milor ei cititori, fără a căror colaborare ea nu ar fi putut apare. Vorbesc, bineînțeles, despre tipografi. Și ei

fac călătorii aritmetice îndepărtate fără a ieși din tipografie, ba chiar stînd în picioare lîngă mașinile de tipărit. Mîna îndemînică a muncitorilor „armatei de plumb“, lunecînd în fiecare secundă pînă la caseta cu litere și înapoi, parcurge într-un an o distanță uriașă. Faceți calculul. Iată datele: tipograful culege în decursul unei zile de lucru 12 000 de litere și pentru fiecare literă trebuie să-și deplaseze mîna încolo și înapoi la o distanță de circa jumătate de metru. Considerăm că anul are 300 de zile de lucru. Prin urmare, avem:

$$2 \times 0,5 \times 12\,000 \times 300 = 3\,600\,000 \text{ m,}$$

adică 3 600 de km.

Deci, în 11 ani de lucru, chiar tipograful care nu face nici un pas de lîngă caseta lui cu litere, săvîrșește o călătorie în jurul lumii. „Un călător nemișcat în jurul lumii!“ Aceasta sună mult mai original decît „un călător în jurul lumii pe jos“.

Nu se găsește nici un om care într-un fel sau altul să nu fi săvîrșit în acest sens o călătorie în jurul lumii. Se poate spune că un om neobișnuit nu este cel ce a săvîrșit călătoria în jurul lumii, ci acela care nu a săvîrșit-o. Și, dacă cineva încearcă vreodată să vă convingă de contrariu, acum îi veți putea demonstra „matematic“ că el nu face excepție de la regula generală.

CURIOZITĂȚI ARITMETICE

$$1 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$6 \times \frac{6}{7} = 6 - \frac{6}{7} \qquad \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

Răspunsuri :

La pag. 35

La rebusul nr. 1 — imprudența

La rebusul nr. 2 — considerat

La pag. 68

1. „1 146“. 2. NN, unde cu N s-a notat „cifra“ 13.

La pag. 77

3. „1 304“ 4. „1 144“. 5. „2 402“. 6. „2 010“
7. „10 210“. 8. „110“. 9. „10“, rest „11“.

La pag. 86

10. Cu baza 8. 11. Cu baza 6. 12. Numărul „una sută treizeci“ în diferitele sisteme de numerație se exprimă în felul următor :

în binar „10 000 010“, cu baza 6 „334“,

cu baza 3 „11 211“, cu baza 7 „244“,

cu baza patru „2 002“, cu baza 8 „202“,

cu baza cinci „1 010“, cu baza 9 „154“.

13. În sistemul cu baza 4 „27“; cu baza 5 „38“; cu baza 6 „51“; cu baza 7 „66“; cu baza 8 „83“; cu baza 9 „102“. Acest număr nu poate fi scris nici în sistemul binar și nici în cel cu baza 3, deoarece conține cifra 3, care nu există în aceste sisteme. În sistemul cu baza 5, acest număr se împarte cu 2, pentru că suma cifrelor lui se divide cu 2; în sistemul cu baza 7 el se împarte cu 6, iar în sistemul cu baza 9 nu se împarte cu 4.

MATEMATICIENI CITAȚI DE AUTOR ¹

Bobînin, Viktor Viktorovici (1849—1919)

Primul istoric al matematicii în Rusia, profesor de matematici la Universitatea din Moscova.

A închinat studiului și popularizării istoriei matematicii peste 40 de ani de viață. A scris două studii de istoria matematicii în Rusia: „Starea cunoștințelor matematice în Rusia pînă în secolul al XVI-lea“ (1884) și „Studii asupra dezvoltării cunoștințelor fizico-matematice în Rusia“ (1885—1888).

A înființat și editat timp de 10 ani (1885—1894) revista „Științele fizico-matematice în prezent și în trecut“ (Fiziko-matematicheskie nauki v ih nastoiaceșem i proședșem“). Ca supliment la această revistă — în care Bobînin a publicat multe din articolele sale — el a editat „Bibliografia fizico-matematică rusă“ („Russkaia fiziko-matematicheskaia bibliografiia“) (1886—1900) care și-a păstrat valoarea și azi.

Activitatea lui științifică rodnică a fost apreciată în deplină măsură numai în timpul Puterii Sovietice, cînd i s-a acordat titlul de profesor.

Campanella Tommaso (1568—1631)

Filozof italian, unul din reprezentanții comunismului utopic timpuriu.

¹ Anexă introdusă de Editura tineretului.

A scris mai multe opere. Cea mai de seamă este „Cetatea Soarelui“ (scrisă în 1602, editată în 1623). Aici și-au găsit reflectarea năzuințele de eliberare a maselor populare din Italia de sub jugul exploatării.

Campanella nu a putut să-și învingă concepțiile idealiste religioase, tradiționale pentru acele timpuri, și a îmbinat tendințele materialiste progresiste cu idei reacționare, învechite. Totuși el a fost un om politic de seamă, patriot și luptător curajos pentru interesele maselor asuprite.

Chuquet, Nicolas

Matematician francez, a trăit în jurul anului 1484 în Lyon. A scris o carte de algebră intitulată „Triparty“, al cărei manuscris se păstrează în Biblioteca Națională din Paris. Cartea a fost tipărită în anul 1880. În această carte se găsește modul de notare a puterilor întrebuințat și astăzi.

Fibonacci, Leonardo (Pisano) (1180—1250)

Matematician italian. Cu opera „Liber Abaci“ a introdus cifrele indiene (numite arabe) în Europa. A scris lucrări din teoria numerelor și a rezolvat ecuații de gradul III.

Galilei Galileo (1564—1642)

Născut în Pisa și mort în Toscana. Om de știință italian multilateral. A studiat mișcările pendulului, greutatea specifică a corpurilor, fenomenele hidrostactice, căderea liberă a corpurilor etc. A fost profesor de matematică la Universitatea din Padua. Pentru invențiile amintite și pentru descoperirile în legătură cu sistemul solar, la adânci bătrînețe a suferit mult din partea inchiziției bisericești, care l-a persecutat pînă la moarte.

Kepler, Johannes (1571—1630)

Astronom german, născut în Weil der Stadt și mort în Regensburg. A descoperit legile mișcării universale:

1) orbita unei planete este o elipsă, avînd în focar Soarele;

2) dreapta trasă de la centrul planetei la centrul Soarelui (radius vector) descrie suprafețe egale în timpuri egale;

3) pătratul timpului de rotație al planetelor este proporțional cu cuburile distanțelor medii de la Soare.

Opera lui este „Mysterium cosmographium“ (1596).

Laplace, Pierre Simon (1749—1827)

Matematician și astronom francez, născut în Beaumont en Auge, mort la Paris. A publicat lucrări de probabilitate, stabilitate, probleme de chimie, dar renumele și l-a câștigat prin lucrarea de astronomie „Mécanique céleste“, fiind savantul cel mai productiv și mai fecund al astronomiei după moartea lui Newton.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646—1716)

Filozof și naturalist german, născut în Leipzig și mort în Hanovra. A inventat o mașină de calculat. A descoperit și a arătat aplicațiile multiple și variate ale calculului diferențial. A scris lucrări istorice, juridice și multe lucrări filozofice idealiste.

Leonardo da Vinci (1452—1519)

Arhitect, sculptor, pictor și naturalist, născut în Villa Anchiana și mort în Franța. Artist multilateral, poet, muzician, inginer. A scris un studiu pentru elevi despre pictură. Are descoperiri în fizică, a construit pîrghii, a descoperit legile staticii, a studiat zborul păsărilor, frecarea corpurilor etc. A fost un mare matematician. A cunoscut anatomia și studiul perspectivei.

Newton, Isaac (1643—1727)

Învățat englez. Fondatorul fizicii matematice și astronomiei moderne. Născut în Woolsthorpe și mort în Kensington. Activitate științifică multilaterală. Șirul binomial, calculul diferențial, gravitația generală, legile fundamentale ale mecanicii, aparate optice, teoria luminii și alte multe probleme care l-au preocupat, l-au făcut nemuritor.

Pitagora (Pythagoras)

Filozof grec, născut în Samos, în jurul anului 575 î.e.n., mort la 500 î.e.n. Filozof idealist de la care n-a rămas nici o operă posterității. A înființat o școală care a existat pînă în secolul al IV-lea î.e.n. Școala aceasta s-a ocupat cu arta și știința. A interesat-o

în special matematica. Potrivit învățaturii filozofilor din această școală, numiți „pitagoricieni“, în natură există numai numere care formează esența lucrurilor și toate fenomenele se bazează pe raporturile numerice. Școala aceasta plină de idei mistice, către sfârșitul veacului al IV-lea a devenit o organizație reacționară, pledînd pentru epoca sclavagistă pe atunci în destrămare.

Struve, Vasilii Iakovlevici (1793—1864)

Cunoscut astronom și geodez rus, academician din 1832 (din 1822 membru corespondent). Îi revine un rol conducător în construirea Observatorului astronomic de la Pulkovo. A lucrat neobosit în domeniul cercetărilor astronomice și geodezice. Lucrările lui Struve și ale elevilor lui au depășit în ce privește exactitatea lor cercetările analoge efectuate la alte observatoare astronomice. Struve a fost ales membru de onoare al tuturor universităților din Rusia și al multor academii și societăți științifice din străinătate.

Tartaglia, Nicolo

Matematician italian, născut în Brescia la începutul secolului al XVI-lea, mort în anul 1557. Opera sa principală intitulată „Generale trattato di numeri et misuri“ a fost cel mai apreciat manual de matematică din vremea sa.

Utred (Oughtred), William (1574—1660)

Matematician și teolog englez. În lucrarea sa „Clavis mathematicae“ (Cheia matematicii), apărută în anul 1631, a introdus mai multe simboluri matematice dintre care unele se întrebuințează și astăzi.

CUPRINS

Cuvînt înainte	5
Cap. I. VECHI ȘI NOU ÎN NUMERAȚIE ȘI NUMERE	
Cea mai răspîndită numerație scrisă.....	11
Numerația egipteană veche	14
Veche numerație populară în Rusia	15
Numerația romană	17
Numerația greacă antică.	20
Numerația slavă	23
Numerația babiloniană	23
„Simbolurile“ comerciale secrete	26
Pioni în loc de cifre	27
Aritmetica la micul dejun.....	30
Rebusuri aritmetice	34
Să se găsească un număr din trei cifre.....	35
Sistemul zecimal în rafturile cu cărți.....	37
Semnele și denumirile aritmetice la diferite popoare	39
Curiozități aritmetice	40
Cap. II. VECHIUL ABAC ȘI URMAȘII SĂI	
Problema cehoviană.....	41
Cum se socotea în antichitate	45
Abacul rus (scioti)	51
Înmulțirea la abac	52
Împărțirea la abac	53
Ecouri ale vremurilor vechi	55
Curiozități aritmetice	56
Cap. III. PUȚINĂ ISTORIE	
„Împărțirea-i treabă grea“	57
Oare noi înmulțim bine?	60
Metoda de înmulțire „rusă“	61

Din țara piramidelor	68
Curiozități aritmetice	72

Cap. IV. SISTEMELE DE NUMERAȚIE NEZECIMALE

O autobiografie misterioasă	73
Cel mai simplu sistem de numerație	77
O aritmetică neobișnuită	79
Par sau impar?.....	83
Probleme instructive	84
Fracții fără numitor	85
Curiozitate aritmetică	86

Cap. V. GALERIA CURIOSITĂȚILOR NUMERICE

Muzeul de curiozități aritmetice	87
Numărul 12	89
Numărul 365	92
Trei de nouă	94
Numărul Șeherezadei	95
Numărul 10 101	97
Numărul 10 001	99
Șase unități	100
Piramidele numerice	102
Nouă cifre egale	105
Scara numerică	106
Inele magice	107
O familie fenomenală	112
Curiozități aritmetice	116

Cap. VI. SCAMATORII FĂRĂ ÎNȘELĂTORIE

Arta calculatorului indian	117
Fără a deschide pungile.....	118
Se ghicește numărul chibriturilor.	121
„Citirea gândurilor“ după chibrituri.....	124
Garnitura de greutate ideală pentru cântar	126
Aflăm suma unor numere nescrise	130
O surpriză aparentă.....	134
Împărțirea instantanee	135
Cifra preferată,	136
Ghicirea datei nașterii	137
Una din „operațiile distractive“ ale lui Magnițki....	139

	Ghicirea numerelor	140
	Curiozități aritmetice	141
Cap. VII.	CALCULE RAPIDE	
	Fenomene reale și imaginare.....	143
	Memorizarea numerelor	144
	„Câte zile am?“.....	147
	„Câte secunde am?“	147
	Metode de înmulțire rapidă.....	148
	Pentru calculele cotidiene.....	150
	Curiozități aritmetice	154
Cap VIII.	CALCULE APROXIMATIVE	
	Ghicitori matematice legate de piramida lui Keops	155
	Numerele aproximative	160
	Rotunjirea numerelor	164
	Cifre cu valori reale și fără valoare.....	166
	Adunarea și scăderea numerelor aproximative.....	166
	Înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere a nume- relor aproximative	167
	Utilizarea în practică.....	168
	Economisirea efortului la calcule	169
	Curiozități aritmetice	170
Cap. IX.	URIAȘII NUMERICI	
	Cît de mare este milionul?.....	171
	Un milion de pinioane.....	173
	Un milion de secunde.....	174
	O bandă dintr-un milion de fire de păr.....	175
	Exerciții cu milionul.....	176
	Denumirea uriașilor numerici	178
	Miliardul.....	180
	Trilionul	181
	Numerele ultrauriașe	182
	Cel care înghite uriașii numerici.....	184
	Uriașii timpului	187
	Curiozități aritmetice	188
Cap. X.	PITICII NUMERICI	
	De la uriași la pitici.....	189
	Piticii timpului	190
	Piticii spațiului.....	192

Ultrauriaşul și ultrapiticul.....	195
Curiozități aritmetice	199
Cap. XI. CĂLĂTORII ARITMETICE	
Călătorie în jurul lumii.....	201
Ascensiune pe Mont Blanc	203
O călătorie pe nesimțite în fundul oceanului.....	205
Cu tractorul în jurul lumii.....	206
O roțiță neobosită.....	207
Călători stînd pe loc	208
Curiozități aritmetice	209
Răspunsuri	211
Matematicieni citați de autor	213

Redactor responsabil: A. BALTAREȚU
Tehnoredactor: C. VULCANESCU

*Dat la cules 26.11. 1963. Bun de tipar 11.05.1963. Apărut 1963.
Comanda nr. 5807. Tiraj 30.140. Hîrtie tipar de 50 g/m² 540×840/16.
Coli editoriale 10,08. Coli de tipar 13,75 A. T. 1205. C. Z. pentru
bibliotecile mici 8 (A-R)*

Tiparul executat sub comanda nr. 2816 la întreprinderea poligrafică „13 Decembrie 1918“, str. Grigore Alexandrescu nr. 93-95, București — R.P.R.