Я. И. Перельман

Занимательная Геометрия

Государственное Издательство Физико-
Математической Литературы
Москва, 1958

Traducere de ***L. Cătuneanu, M. Stoka, V. Suciu***

I. I. Perelman

GEOMETRIA distractivă

Editura Ştiinţifică. Bucureşti, 1965

Supracoperta și coperta de Alphonse Sattinger

PREFAȚA REDACTORULUI LA EDIȚIA A IX-A

Geometria distractivă a fost scrisă atît pentru prietenii matematicii, cît și pentru acei cititori cărora dintr-o cauză oarecare le-au rămas ascunse multe laturi atractive ale matematicii.

Această carte este destinată într-o și mai mare măsură acelor cititori care au învățat (sau învață în prezent) geometria doar la tabla din clasă și din această cauză încă nu s-au obișnuit să observe relațiile geometrice cunoscute, în lumea de obiecte și fenomene ce ne înconjoară, nu s-au deprins să folosească cunoștințele de geometrie dobîndite în practică în împrejurările grele ale vieții, în marș sau în condiții de tabără.

Trezirea interesului cititorului pentru geometrie sau folosind cuvintele autorului „insuflarea plăcerii și educarea gustului pentru studiul ei este sarcina directă a acestei cărți".

În vederea atingerii acestui scop autorul scoate geometria „dintre pereții încăperii din școală și o duce în aer liber, în pădure, cîmpie, la rîu, pe drum, pentru ca sub cerul liber să ne consacrăm unor lecții de geometrie fără constrîngere, fără manuale sau tabele...", atrage atenția cititorilor asupra paginilor din operele lui L.N. Tolstoi și A.P. Cehov, Jules Verne și Mark Twain, găsește teme pentru probleme de geometrie în operele lui N.V. Gogol și A.S. Pușkin și, în sfîrșit, propune cititorilor „o culegere variată de probleme atrăgătoare ca subiect și neașteptate prin rezultatul lor".

Începînd cu ediția a VII-a *Geometria distractivă* apare fără participarea directă a autorului. I.I. Perelman a murit la Leningrad în anul 1942.

La redactarea cărții pentru ediția a VII-a au fost păstrate aproape toate articolele din ediția anterioară și au fost completate cu noi fapte și informații. Au mai fost adăugate, de asemenea, și mai multe articole noi (circa 30).

În tot acest timp am fost condus de dorința de a ridica „coeficientul de utilitate“ al cărții lui I.I. Perelman, de a o face încă și mai interesantă și eficientă, atrăgînd noi cititori în rîndurile prietenilor matematicii.

În vederea prezentei ediții a IX-a — cartea a fost supusă unei redactări suplimentare: au fost corectate erorile care n-au fost observate mai înainte, informațiile învechite au fost înlocuite prin altele noi, unele ilustrații au fost schimbate.

B. Kordemski

Partea întîi

GEOMETRIA ÎN AER LIBER

Natura vorbește în limba matematicii: literele acestei limbi sînt cercuri, triunghiuri și alte iiguri matematice.

GALILEI

Capitolul I

GEOMETRIA ÎN PĂDURE

CU AJUTORUL LUNGIMII UMBREI

Îmi aduc aminte şi acum cu cîtă uimire am privit pentru prima oară un pădurar cărunt care, stînd lîngă un pin uriaş, îi măsura înălţimea cu ajutorul unui instrument micuţ de buzunar. Cînd pădurarul şi-a îndreptat scîndurica pătrată spre vîrful copacului, mă aşteptam să-l văd urcîndu-se în el cu lanţul de măsurat. Dar, spre marea mea surprindere, în loc să facă aceasta, şi-a pus instrumentul înapoi în buzunar declarînd măsurătoarea terminată. Şi eu care mă gîndeam că nici nu începuse...

Eram pe atunci foarte tînăr şi acest mod de determinare a înălţimii unui copac fără a-l tăia şi fără a ne urca în vîrful lui îmi apărea ca un fel de mică minune. Abia mai tîrziu, cînd m-am familiarizat cu noţiunile elementare ale geometriei, am înţeles cît de simplu se realizează minunile de acest fel. Există o mulţime de procedee prin care se pot efectua asemenea măsurători cu ajutorul unor instrumente extrem de simple şi chiar fără nici un fel de dispozitive.

Procedeul cel mai uşor şi cel mai vechi este fără îndoială acela cu ajutorul căruia înţeleptul grec Tales, cu şase secole înaintea erei noastre, a determinat, în Egipt, înălţimea unei piramide. El a folosit umbra ei. Faraonul şi preoţii adunaţi la baza celei mai înalte piramide se uitau uimiţi la străinul venit din nord, care ghicea cu ajutorul umbrei înălţimea uriaşului edificiu. Legenda spune că Tales a ales ziua şi ora cînd lungimea propriei lui umbre era egală cu înălţimea sa; în acest moment înălţimea piramidei trebuia de asemenea să fie egală cu lungimea umbrei sale[1]. Iată, poate, unicul caz în care omul are un folos de pe urma propriei sale umbre.

[1] Desigur, lungimea umbrei trebuia socotită de la punctul de mijloc al bazei pătrate a piramidei; lăţimea acestei baze Tales o putea măsura în mod direct.

Problema înțeleptului grec ne apare în prezent copilăresc de simplă, dar nu trebuie să uităm că noi o privim de la înălțimea edificiului grandios al geometriei, ridicat după Tales. Cu 300 de ani î.e.n., matematicianul grec Euclid a scris o carte admirabilă, cu ajutorul căreia s-a studiat geometria în decursul a două milenii după moartea sa. Adevărurile cuprinse în această carte, familiare azi oricărui școlar, nu erau încă cunoscute în epoca lui Tales. Folosirea umbrei în vederea rezolvării problemei privind înălțimea piramidei necesita cunoașterea unor proprietăți geometrice ale triunghiului, și anume următoarele două (prima dintre acestea a fost descoperită chiar de Tales):

1) unghiurile adiacente de la baza unui triunghi isoscel sînt egale, și reciproc, laturile opuse unghiurilor egale ale triunghiului sînt egale între ele;

2) suma unghiurilor oricărui triunghi (sau cel puțin a triunghiului dreptunghic) este egală cu două unghiuri drepte.
Numai înarmat cu aceste cunoștințe, Tales putea să conchidă că atunci cînd propria lui umbră este egală cu înălțimea sa, razele solare întîlnesc un teren neted sub un unghi egal cu jumătatea unghiului drept și, prin urmare, vîrful piramidei, centrul bazei ei și capătul umbrei sale trebuie să formeze un triunghi isoscel.

S-ar părea că acest mijloc simplu este foarte comod pentru a fi folosit într-o zi senină și însorită în vederea determinării înălțimii unor copaci stingheri, a căror umbră nu se contopește cu umbra copacilor din vecinătate. Dar în limitele latitudinii noastre nu este atît de ușor, ca în Egipt, să prinzi momentul prielnic pentru măsurătoare; la noi Soarele se află mai jos, deasupra orizontului, și umbrele sînt egale cu înălțimea obiectelor care le lasă doar vara în timpul amiezii. Din această cauză, procedeul lui Tales nu se poate aplica totdeauna în forma arătată. Totuși, nu este prea greu să modificăm acest procedeu în așa fel, ca într-o zi însorită să putem folosi orice umbră indiferent de lungimea ei. Măsurînd în afară de aceasta și propria noastră umbră sau aceea a unei prăjini, putem deduce înălțimea din următoarea proporție (fig. 1):

$$AB : ab = BC : bc,$$

deoarece înălțimea copacului este tot de atîtea ori mai mare decît înălțimea noastră (sau înălțimea prăjinii), de cîte ori umbra lui este mai lungă decît umbra noastră (sau umbra prăjinii). Acest fapt decurge, desigur, din asemănarea geometrică a triunghiurilor ABC și abc (după două unghiuri).

S-ar putea ca unii cititori să ridice obiecția că un procedeu atît de elementar nu are nevoie de loc de motivare geometrică: oare nu este destul de clar și fără ajutorul geometriei, că umbra copacului este tot de atîtea ori mai lungă, de cîte ori și copacul este mai înalt? Lucrurile nu sînt totuși chiar atît de simple precum par. Încercați să aplicați această regulă umbrelor lăsate de lumina felinarului de pe stradă sau de lumina lămpii; ea nu se va adeveri. În figura 2 se vede că parul AB este mai înalt decît țărușul ab aproximativ de trei ori, iar umbra parului este mai mare decît umbra țărușului ($BC : bc$) cam de opt ori. Nu se poate explica fără ajutorul geometriei motivul pentru care nu putem aplica această metodă în cazul respectiv și de ce o putem folosi în alte împrejurări.

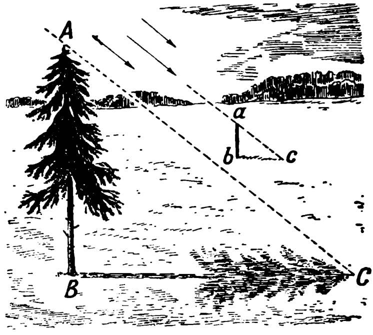


Fig. 1. Determinarea înălțimii unui copac cu ajutorul umbrei.

Problemă

Să privim mai atent în ce constă aici deosebirea. În esență, problema se reduce la faptul că razele solare sînt paralele între ele, pe cînd razele felinarului nu sînt. Acest din urmă fapt este evident; dar, de ce putem considera razele Soarelui ca fiind paralele cu toate că ele se întretaie în punctul din care pornesc?

Rezolvare

Razele Soarelui care cad pe Pămînt pot fi considerate ca paralele datorită faptului că unghiul dintre ele este extrem de mic, în mod practic imperceptibil. Un simplu calcul geometric ne va convinge de acest fapt. Să ne imaginăm două raze care pornesc dintr-un punct oarecare de pe suprafaţa Soarelui, căzînd apoi pe Pămînt la o distanţă, să presupunem, de 1 km una de alta. Prin urmare, dacă am pune un picior al compasului în acel punct de pe Soare, iar cu celălalt am descrie o circumferinţă de rază egală cu distanţa de la Soare la Pămînt (adică o rază de 150 000 000 km), atunci între cele două raze ale noastre s-ar găsi un arc de cerc cu lungimea egală cu 1 km. Lungimea totală a acestei circumferinţe uriaşe ar fi egală cu $2\pi \times 150\,000\,000$ km = = 940 000 000 km. Desigur că un grad al ei este de 360 de ori mai mic, adică aproximativ de 2 600 000 km; un minut de arc este de 60 de ori mai mic decît gradul, adică este egal cu 43 000 km, iar o secundă de arc este de 60 de ori mai mică, adică este egală cu 720 km. Arcul nostru are însă o lungime egală numai cu 1 km; prin urmare, el corespunde unui unghi de 1/720 dintr-o secundă. Un asemenea unghi este imperceptibil chiar pentru cele mai perfecţionate instrumente astronomice; aşadar, în mod practic, putem considera razele Soarelui care cad pe Pămînt ca fiind paralele[1].

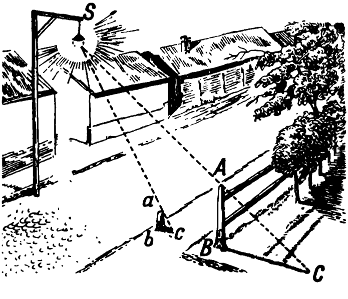


Fig. 2. Cînd nu poate fi efectuată această măsurătoare?

Dacă n-am cunoaşte aceste consideraţii geometrice, nu am putea fundamenta procedeul de determinare a înălţimii cu ajutorul umbrei, pe care l-am examinat mai sus.

Totuşi, dacă veţi încerca să folosiţi metoda umbrelor în practică, vă veţi convinge de lipsa ei de siguranţă. Umbrele nu sînt delimitate într-un mod atît de precis încît măsurarea lungimii lor să poată fi efectuată cu exactitate. Orice umbră determinată de lumina Soarelui are o margine cenuşie cu contur neprecis, care face ca limita umbrei să fie imprecisă. Aceasta se întîmplă datorită faptului că Soarele nu

[1] Altfel se prezintă situaţia cu razele îndreptate de la un punct oarecare de pe Soare spre extremităţile diametrului pămîntesc; unghiul dintre ele este destul de mare pentru a putea fi măsurat (aproximativ 17″); determinarea acestui unghi a pus în mîinile astronomilor unul din mijloacele de determinare a distanţei de la Pămînt la Soare.

este un punct ci un astru mare luminos. În figura 3 se vede de ce umbra *BC* a copacului are și un adaos sub formă de penumbră *CD*, care se pierde treptat. Unghiul *CAD* dintre limitele extreme ale penumbrei este egal cu unghiul sub care vedem întotdeauna discul solar, adică cu o jumătate de grad. Eroarea determinată de faptul că ambele um-

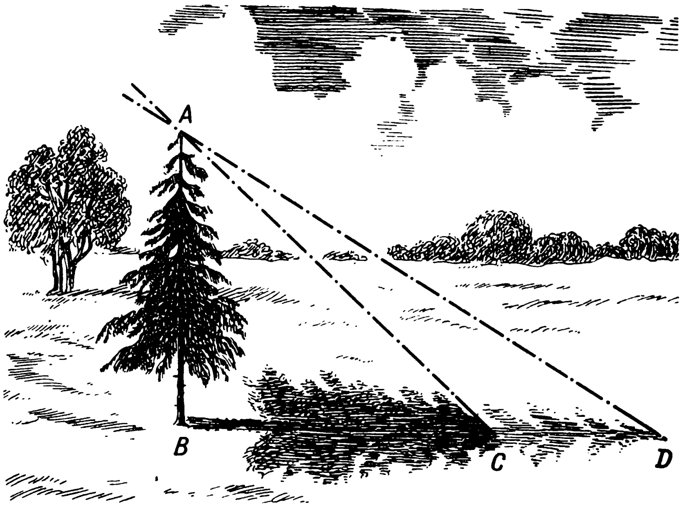


Fig. 3. Cum se formează penumbra.

bre nu se măsoară pe deplin exact poate atinge 5% și mai mult, chiar dacă Soarele nu se află prea jos. Această eroare se adaugă altor erori inevitabile, provocate de terenul inegal etc. și face ca rezultatul final să fie prea puțin sigur. De exemplu, într-o regiune muntoasă acest procedeu este cu totul inaplicabil.

ÎNCĂ DOUĂ METODE

La măsurarea înălțimii ne putem lipsi cu totul de ajutorul umbrelor. Astfel de metode sînt multe; vom începe cu două din cele mai simple.

În primul rînd putem folosi proprietatea pe care o are triunghiul dreptunghic isoscel, utilizînd un instrument extrem de simplu pe care-l putem confecţiona cu uşurinţă dintr-o scîndurică şi trei ace. Pe o scîndurică de orice formă, chiar şi pe o bucată de scoarţă de copac dacă are o parte plană, se înseamnă trei puncte, care sînt extremităţile triunghiului dreptunghic isoscel şi în ele se înfig acele (fig.4.) S-ar putea să nu avem la îndemînă un echer pentru construirea unghiului drept, şi nici compas pentru a putea desena laturi egale. Îndoim atunci orice petic de hîrtie o singură dată, apoi transversal pe prima îndoitură mai facem încă una, astfel încît ambele părţi ale primei îndoituri să coincidă şi în felul acesta vom obţine un unghi drept. Aceeaşi hîrtie o vom folosi şi în loc de compas ca să măsurăm distanţe egale.

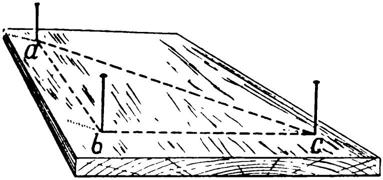


Fig. 4. Dispozitiv cu ace pentru măsurarea înălţimilor.

După cum vedem, acest dispozitiv poate fi confecţionat în întregime chiar în condiţii de tabără.

Folosirea lui nu este mai complicată decît modul de confecţionare. Depărtîndu-ne de arborele pe care-l măsurăm, ţinem dispozitivul în aşa fel încît una din catetele triunghiului să fie în poziţie verticală; pentru aceasta putem folosi un fir cu o greutate la capăt, care să fie legat de acul din partea de sus. Apropiindu-ne sau depărtîndu-ne de copac, vom găsi întotdeauna un astfel de loc A (fig.5), din care privind acele a şi c vom observa că ele acoperă vîrful C al copacului; aceasta înseamnă că prelungirea ipotenuzei ac trece prin punctul C. Atunci va fi evident că distanţa aB este egală cu CB, deoarece unghiul $a = 45°$.

Prin urmare, măsurînd distanţa aB (sau, pe un teren neted, o distanţă egală cu ea AD) şi adăugînd BD, adică distanţa aA la care se află ochiul deasupra Pămîntului, vom obţine înălţimea căutată a copacului.

Cu ajutorul altui procedeu ne putem lipsi chiar şi de dispozitivul cu ace.

Vom avea nevoie, în acest caz, de o prăjină pe care va trebui s-o înfigem vertical în pămînt, astfel încît partea ce rămîne afară să fie egală cu înălţimea noastră. Locul unde înfigem prăjina trebuie să-l alegem în aşa fel ca atunci cînd stăm culcaţi, după cum se arată în figura 6, să vedem vîrful

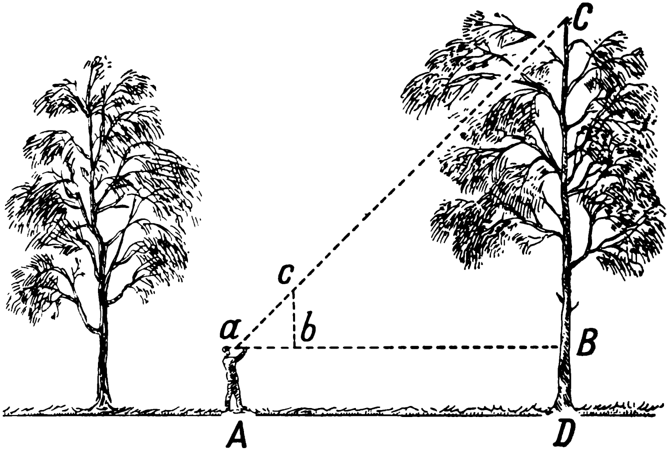


Fig. 5. Schema de utilizare a dispozitivului cu ace.

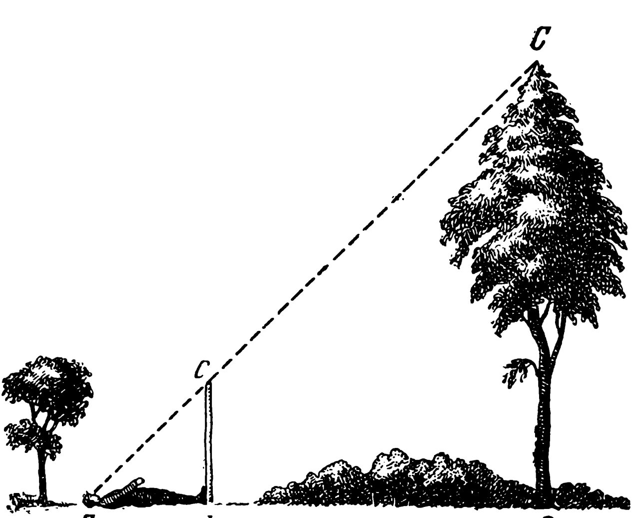


Fig. 6. Încă un mijloc de determinare a înălțimii.

copacului pe aceeaşi linie dreaptă cu punctul din vîrful prăjinii. Întrucît triunghiul Abc este dreptunghic isoscel, atunci unghiul $A = 45°$ şi, prin urmare, AB este egal cu BC, adică cu înălţimea căutată a copacului.

DUPĂ METODA LUI JULES VERNE

Metoda următoare, de asemenea extrem de simplă, de măsurare a obiectelor înalte este descrisă în mod sugestiv de Jules Verne în cunoscutul său roman *Insula misterioasă*.

„— Astăzi trebuie să măsurăm înălţimea platoului Grande-Vue — spuse inginerul.

— O să aveţi nevoie pentru aceasta de un instrument — întrebă Herbert.

— Nu, nu voi avea nevoie, vom proceda într-alt mod, tot atît de simplu şi de sigur.

Tînărul, mereu dornic să înveţe lucruri noi, îl urmă pe inginer, care se depărtă de poalele falezei coborînd pînă la marginea apei.

Inginerul luă o prăjină dreaptă şi lungă de 12 picioare croită după propria lui înălţime, pe care o cunoştea foarte bine. Herbert ducea după el o sfoară care i-a fost dată de către inginer şi de care legase o piatră, care urma să le servească drept fir cu plumb.

Ajungînd cam la 500 de picioare de faleza care se ridica perpendicular, inginerul a înfipt prăjina în nisip la o adîncime de două picioare. O propti cu grijă şi cu ajutorul firului cu plumb izbuti s-o aşeze vertical.

După aceea, inginerul se retrase pînă la distanţa de la care, cînd se culca pe nisip, raza lui vizuală atingea atît extremitatea prăjinii, cît şi creasta falezei (fig. 7). Punctul acesta îl însemnă cu multă grijă cu un ţăruş.

Apoi, se adresă lui Herbert ridicîndu-se de pe pămînt:

— Cunoşti principiile elementare ale geometriei?

— Da.

— Îţi aduci aminte care sînt proprietăţile a două triunghiuri asemenea?

— Laturile lor omoloage sînt proporţionale.

— Exact. În clipa de faţă eu voi construi două triunghiuri dreptunghice asemenea: cel dintîi, mai mic, are drept catete prăjina perpendiculară şi distanţa care desparte ţăruşul de piciorul prăjinii, iar ipotenuza o constituie raza mea vizuală; al doilea triunghi are drept laturi zidul vertical al falezei, a cărui înălţime vrem s-o cunoaştem şi distanţa care separă ţăruşul de baza zidului, iar ipotenuza este formată tot de raza mea vizuală, aflîndu-se, prin urmare, în prelungirea ipotenuzei primului triunghi.

— Am înţeles, strigă tînărul. Distanţa de la ţăruş la prăjină se raportă la distanţa de la ţăruş la faleză, la fel cum înălţimea prăjinii se raportă la înălţimea falezei.

— Da. Prin urmare, după ce vom măsura primele două distanţe, cunoscînd înălţimea prăjinii, vom putea afla cel de-al patrulea termen al proporţiei, pe care nu-l cunoaştem, adică înălţimea falezei. Astfel vom evita să măsurăm direct această înălţime.

Măsurară apoi cele două distanţe orizontale: cea mai mică dintre ele era egală cu 15 picioare. A doua distanţă dintre ţăruş şi peretele falezei era de 500 de picioare.

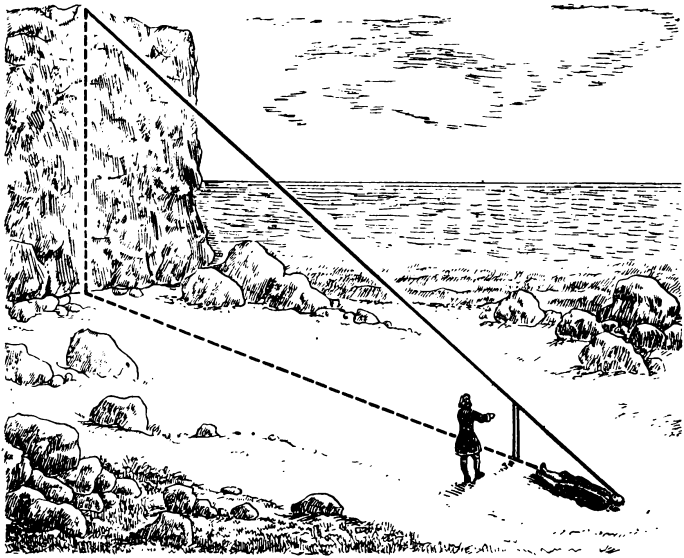


Fig. 7. Cum au măsurat înălţimea falezei eroii lui Jules Verne.

După ce isprăviră măsurătorile inginerul stabili următoarea proporție:

$$15 : 500 = 10 : x$$

$$500 \times 10 = 5\,000$$

$$\frac{5\,000}{15} = 333{,}33$$

Prin urmare, înălțimea peretelui falezei măsura 333,33 picioare".

CUM A PROCEDAT SERGENTUL

Unele din metodele de măsurare a înălțimilor descrise mai sus sînt incomode prin faptul că sîntem obligați să ne culcăm pe pămînt. O asemenea incomoditate poate fi, fără îndoială, înlăturată.

Iată ce s-a întîmplat o dată pe unul dintre fronturile Marelui Război pentru Apărarea Patriei. Detașamentului comandat de locotenentul Ivaniuk i s-a ordonat să construiască un pod peste un rîu de munte. Pe malul opus stăteau la pîndă fasciștii. În scopul cercetării locului unde trebuia construit podul, locotenentul a numit o grupă de cercetare în frunte cu sergentul major Popov...

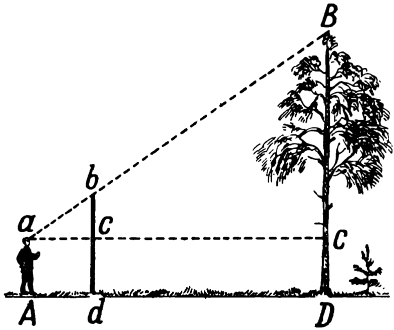


Fig. 8. Determinarea înălțimii unui copac cu ajutorul prăjinii.

În cel mai apropiat masiv păduros ostașii au măsurat diametrul și înălțimea copacilor celor mai potriviți și au socotit apoi numărul de copaci necesar pentru construirea podului.

Înălțimea copacilor a fost determinată cu ajutorul unei prăjini, așa cum se arată în figura 8.

Această metodă constă în următoarele: înfigem vertical în pămînt o prăjină mai mare decît înălțimea noastră la o distanță oarecare de copacul pe care-l măsurăm (fig. 8). Ne îndepărtăm apoi de prăjină, mergînd în prelungirea liniei *Dd* pînă la acel loc *A* din care, privind spre vîrful copacului, vom vedea pe o linie cu el punctul *b* din vîrful prăjinii. Apoi, fără a ne schimba poziția capului, privim în direcția dreptei orizontale *aC*, notînd punctele *c* și *C* în care raza vizuală întîlnește prăjina și trunchiul copacului. Facem însemnările corespunzătoare în aceste locuri și, cu acestea, observația este terminată. Rămîne numai ca din asemănarea triunghiurilor *abc* și *aBC* să calculăm *Bc* din proporția:

$$BC : bc = aC : ac,$$

de unde

$$BC = bc \cdot \frac{aC}{ac}.$$

Distanțele *bc*, *aC* și *ac* se pot măsura cu ușurință în mod direct. La valoarea obținută *BC* trebuie să adăugăm distanța *CD* (care de asemenea se măsoară în mod direct), pentru a afla înălțimea căutată a copacului.

Pentru stabilirea numărului necesar de copaci sergentul major a ordonat soldaților să măsoare suprafața masivului păduros. Apoi a determinat numărul de copaci de pe o mică parcelă cu dimensiunile de 50×50 m^2, și a făcut înmulțirea corespunzătoare.

Pe baza tuturor datelor culese de cercetași comandantul detașamentului a stabilit locul și felul podului ce urma să fie construit. Podul a fost construit în termen, misiunea de luptă a fost îndeplinită[1].

CU AJUTORUL AGENDEI

Pentru determinarea aproximativă a unei înălțimi inaccesibile, putem folosi în calitate de instrument chiar și agenda de buzunar, dacă aceasta este prevăzută cu un creion ce se

[1] Episoadele din Marele Război pentru Apărarea Patriei expuse în această carte au fost descrise de A. D e m i d o v, *Cercetarea rîului*, în revista „Voiennîe znaniia", nr. 8, 1949.

află în copertă sau este legat de ea. Agenda ne va ajuta să construim în spațiu acele două triunghiuri asemenea, din care va rezulta înălțimea căutată. Agenda trebuie ținută lîngă ochi așa cum se arată în figura simplificată 9. Ea trebuie să se afle în poziție verticală, iar creionul să fie împins deasupra cotorului agendei atît, încît privind din punctul a, vîrful B al copacului să fie acoperit de vîrful b al creionului. Atunci, în baza asemănării triunghiurilor abc și aBC, înălțimea BC rezultă din proporția:

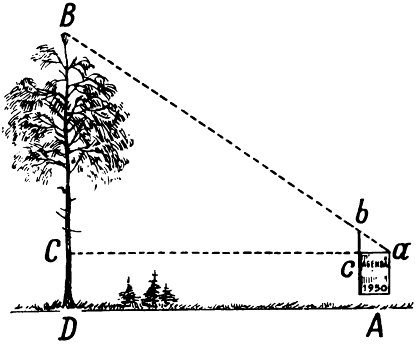


Fig. 9. Determinarea înălțimii unui copac cu ajutorul agendei de buzunar.

$$BC : bc = aC : ac.$$

Distanțele bc, ac și aC se măsoară în mod direct. La valoarea obținută pentru BC trebuie să mai adăugăm lungimea CD, adică — pe un teren egal — înălțimea la care se află ochiul față de suprafața Pămîntului.

Întrucît lățimea ac a agendei rămîne neschimbată, dacă ne vom situa întotdeauna la aceeași distanță de copacul pe care-l măsurăm (de exemplu, la 10 m), înălțimea copacului va depinde doar de porțiunea bc a creionului ieșită în afară. De aceea, putem să calculăm dinainte ce înălțime corespunde distanței ieșite în afară a creionului și să însemnăm aceste cifre pe creion. Agenda de buzunar se va transforma atunci într-un altimetru simplificat, deoarece vom putea determina cu ajutorul ei diferite înălțimi dintr-o dată și fără calcule.

FĂRĂ A NE APROPIA DE COPAC

Uneori, dintr-o cauză oarecare ne este incomod să ne apropiem prea mult de trunchiul copacului pe care-l măsurăm. Este oare posibil să determinăm înălțimea lui și în acest caz?

E pe deplin posibil. În vederea acestui scop a fost inventat un dispozitiv ingenios, care, ca și cele anterioare, poate fi confecționat cu ușurință. Două șipci *ab* și *cd* (fig.10, sus) se fixează în unghi drept, în așa fel încît *ab* să fie egală cu *bc*, iar *bd* să fie egală cu jumătate din *ab*. Iată tot dispozitivul. Pentru a măsura înălțimea ținem dispozitivul în mîini așezînd șipca *cd* în poziție verticală (în vederea cărui scop ea este prevăzută cu un fir cu greutate la capăt) și ne așezăm succesiv în două locuri: mai întîi (fig. 10) în punctul *A*, unde dispozitivul se pune cu extremitatea *c* în sus, apoi în punctul *A'*, ținut cu extremitatea *d* în sus. Punctul *A* este astfel ales, încît privind din *a* să vedem capătul *c* și vîrful copacului pe aceeași dreaptă. Punctul *A'* este ales în așa fel încît privind din *a'* să vedem punctul *d'* pe aceeași direcție cu *B*. Întreaga măsurătoare constă în aflarea acestor două puncte *A* și *A'*[1], deoarece partea necunoscută *BC* din înăl-

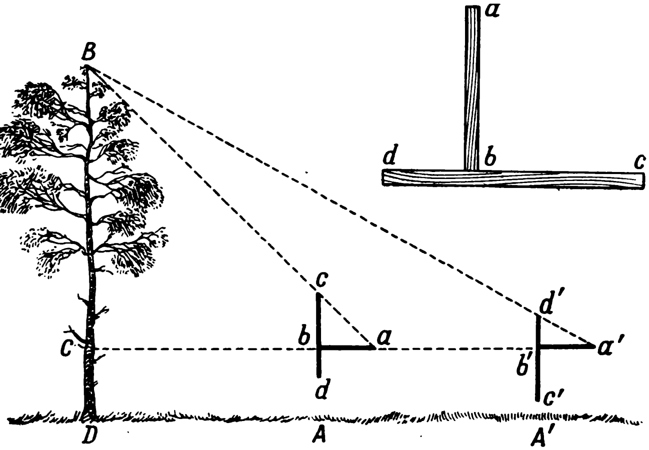


Fig. 10. Modul de folosire a celui mai simplu altimetru format din două șipci.

țimea copacului este egală cu distanța *AA'*. Această egalitate rezultă ușor din relațiile $aC = BC$, iar $a'C = 2BC$, deci,

$$a'C - aC = BC.$$

[1] Punctele acestea trebuie să fie situate în mod obligatoriu pe aceeași dreaptă cu trunchiul copacului.

Folosind acest dispozitiv extrem de simplu, putem măsura copacul, fără a ne apropia de trunchiul lui, la o distanță mai mică decît înălțimea sa. Se înțelege de la sine că dacă am reuși să ne apropiem de trunchiul copacului, ar fi suficient să găsim cel puțin un singur punct, A sau A', pentru a afla înălțimea.

În locul celor două șipci putem folosi patru ace, înfigîndu-le în scîndurică în modul corespunzător; sub această formă „dispozitivul" va fi și mai simplu.

ALTIMETRUL SILVICULTORULUI

Acum este timpul să explicăm cum este construit altimetrul „adevărat" pe care îl folosesc în practica lor lucrătorii forestieri, modificîndu-l întrucîtva, astfel încît dispozitivul să poată fi ușor confecționat.

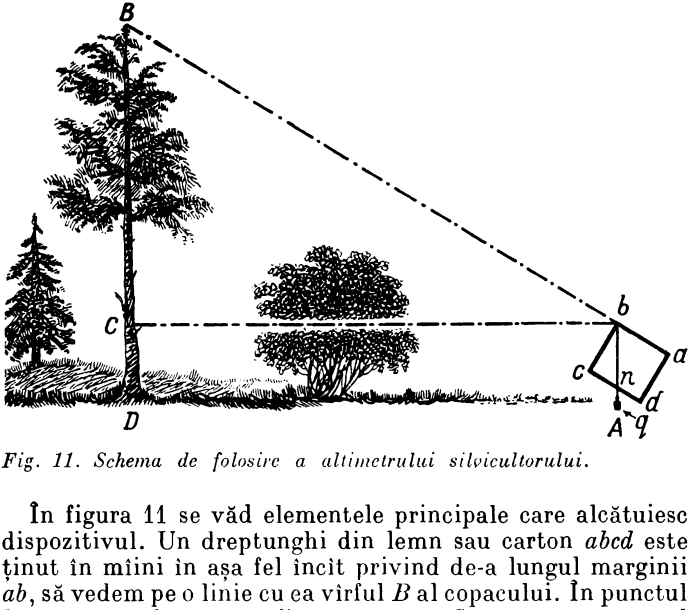


Fig. 11. Schema de folosire a altimetrului silvicultorului.

În figura 11 se văd elementele principale care alcătuiesc dispozitivul. Un dreptunghi din lemn sau carton *abcd* este ținut în mîini în așa fel încît privind de-a lungul marginii *ab*, să vedem pe o linie cu ea vîrful B al copacului. În punctul *b* este suspendată pe un fir greutatea *q*. Se însemnă punctul

n, în care firul intersectează dreapta dc. Triunghiurile bBC și bnc sînt asemenea; ele sînt triunghiuri dreptunghice și au unghiurile ascuțite bBC și bnc egale (cu laturile respectiv paralele). Prin urmare putem scrie următoarea proporție:

$$BC : nc = bC : bc$$

de unde

$$BC = bC \cdot \frac{nc}{bC}.$$

Deoarece bC, nc și bc pot fi măsurate în mod direct, obținem cu ușurință înălțimea copacului pe care o căutăm, adăugînd la BC lungimea părții de jos, CD a trunchiului (înălțimea la care se află altimetrul deasupra terenului).

Ne mai rămîne să adăugăm cîteva amănunte. Dacă marginea bc va fi, de exemplu, egală cu 10 cm, iar pe marginea dc vom marca diviziuni egale cu 1 cm, atunci raportul $\frac{nc}{bc}$ se va exprima întotdeauna printr-o fracție zecimală, care arată direct a cîta parte din distanța bC reprezintă înălți-

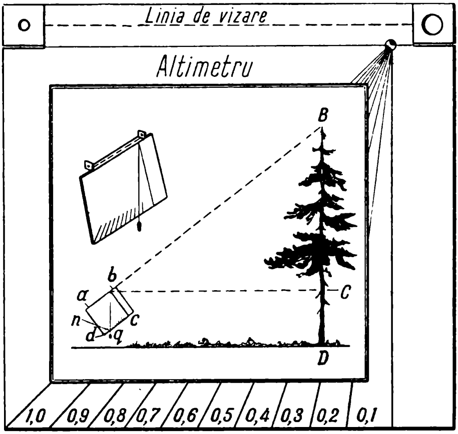


Fig. 12. Altimetrul silvicultorului.

mea BC a copacului. Să presupunem că firul se oprește în dreptul diviziunii a șaptea (nc = 7 cm); aceasta înseamnă că înălțimea copacului deasupra nivelului ochiului reprezintă 0,7 din distanța de la observator pînă la trunchiul copacului.

O altă perfecționare se referă la modul de observație: pentru a ne fi mai comod să privim de-a lungul dreptei *ab*, putem îndoi la colțurile superioare ale dreptunghiului de carton două pătrățele cu găurele perforate în ele: una mai mică în dreptul ochiului, alta mai mare pentru a o îndrepta spre vîrful copacului (fig. 12).

Îmbunătățirea următoare o reprezintă dispozitivul înfățișat aproape în mărime naturală în figura 12. Confecționarea lui se poate face ușor și în foarte scurt timp; pentru aceasta nu avem nevoie de o deosebită pricepere. El ne dă posibilitatea să determinăm în mod rapid în timpul excursiilor înălțimea obiectelor întîlnite: copaci, stîlpi, clădiri etc. fără a ocupa prea mult loc în buzunar. (Instrumentul intră în trusa elaborată de autorul acestei cărți și care este numită „Geometrie în aer liber".)

Problemă

Putem oare să măsurăm înălțimea copacilor cu ajutorul altimetrului descris mai sus, fără a ne apropia prea mult de ei? Dacă este posibil, atunci cum trebuie să procedăm în astfel de cazuri?

Rezolvare

Îndreptăm dispozitivul spre vîrful B al copacului (fig. 13) din două puncte A și A'. Să presupunem că în punctul A am determinat $BC = 0{,}9\ AC$, iar în punctul A', $BC = 0{,}4\ A'C$; atunci:

$$AC = \frac{BC}{0{,}9},\ A'C = \frac{BC}{0{,}4},$$

de unde

$$A'A = A'C - AC = \frac{BC}{0{,}4} - \frac{BC}{0{,}9} = \frac{25}{18} BC.$$

Astfel

$$A'A = \frac{25}{18} BC, \qquad \text{sau } BC = \frac{18}{25} A'A = 0{,}72\ A'A.$$

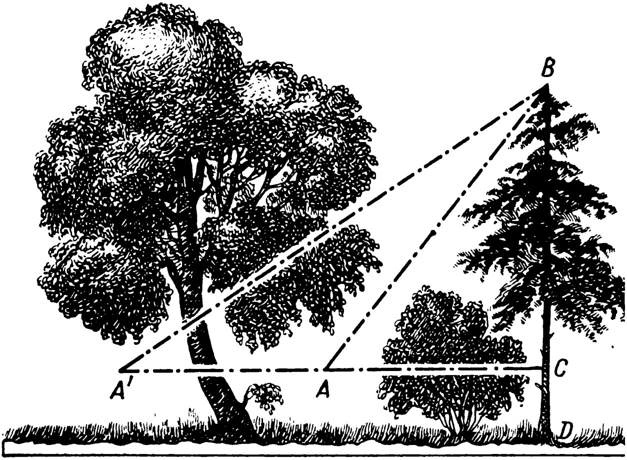


Fig. 13. Cum măsurăm înălțimea unui copac fără a ne apropia de el.

Prin urmare, măsurînd distanța $A'A$ dintre cele două puncte de observație și luînd o anumită fracțiune din această valoare, aflăm înălțimea necunoscută care ne era inaccesibilă.

CU AJUTORUL OGLINZII

Problemă

Iată încă un mijloc interesant de determinare a înălțimii unui copac și anume, cu ajutorul oglinzii. La o distanță oarecare (fig. 14) de copacul pe care dorim să-l măsurăm, pe un teren neted, în punctul C, așezăm o oglinjoară în poziție orizontală. Ne îndepărtăm apoi de ea pînă în punctul D din care observatorul vede, în oglindă, vîrful A al copacului. Atunci, copacul (AB) este tot de atîtea ori mai înalt decît înălțimea observatorului (ED), de cîte ori distanța BC de la oglindă la copac este mai mare decît distanța CD de la oglindă pînă la observator. De ce?

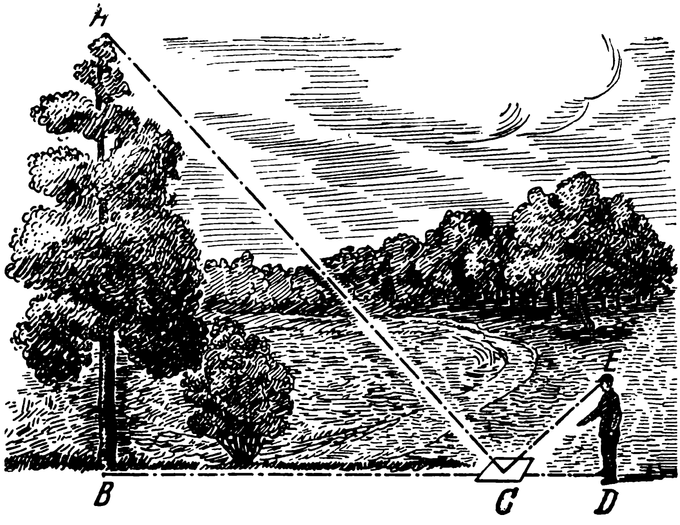


Fig. 14. Determinarea înălţimii cu ajutorul oglinzii.

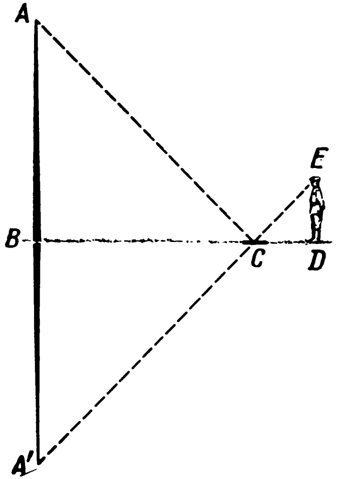


Fig. 15. Construcţie geometrică corespunzătoare metodei de măsurare a înălţimii cu ajutorul oglinzii.

Rezolvare

Acest procedeu se bazează pe legea reflexiei luminii. Vîrful A (fig. 15) se reflectă în punctul A' astfel că $AB = A'B$. Din asemănarea triunghiurilor BCA' şi CED rezultă că

$$A'B : ED = BC : CD.$$

În această proporţie ne rămîne doar să înlocuim $A'B$ cu AB care este egal cu el, pentru a justifica raportul arătat în problemă.

Această metodă comodă şi uşor de aplicat se poate folosi pe orice vreme, însă nu pentru arborii din păduri dese, ci pentru cei izolați.

Problemă

Să presupunem că trebuie să măsurăm înălțimea unui copac cu ajutorul oglinzii și este imposibil să ne apropiem prea mult de el. Cum vom proceda?

Rezolvare

Aceasta este o problemă veche, de peste 500 de ani. Ea a fost analizată în evul mediu de către matematicianul Antoniu de Cremona, în lucrarea sa *Despre geodezia practică* (anul 1400).

Problema se rezolvă prin aplicarea de două ori a metodei descrise mai sus, adică prin situarea oglinzii în două poziții diferite. Făcînd construcția corespunzătoare nu ne va fi greu să deducem din asemănarea triunghiurilor că înălțimea necunoscută a copacului este egală cu înălțimea la care se află ochiul observatorului, înmulțită cu raportul distanței dintre pozițiile oglinzilor la diferența distanțelor observatorului pînă la oglindă.

Înainte de a încheia discuția cu privire la măsurarea înălțimii copacilor, propunem cititorului încă o problemă „silvică".

DOI PINI

Problemă

Doi pini cresc la o distanță de 40 m unul de altul. Se presupune dată înălțimea lor: unul are 31 m, iar celălalt, mai tînăr, doar 6 m.

Puteți calcula distanța dintre vîrfurile lor?

Rezolvare

Distanța necunoscută dintre vîrfurile pinilor (fig. 16) este, conform teoremei lui Pitagora, egală cu:

$$\sqrt{40^2 + 25^2} = 47 \text{ m}.$$

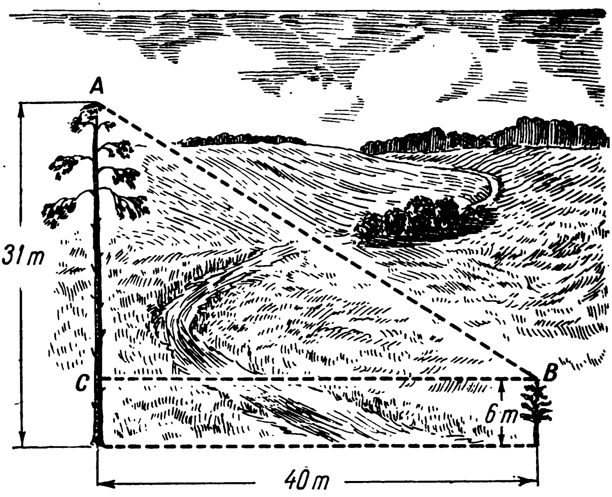


Fig. 16. Ce distanță este între vîrfurile pinilor?

FORMA TRUNCHIULUI DE ARBORE

Înarmați cu metodele de măsurare expuse pînă în prezent, în timpul unei plimbări prin pădure putem determina înălțimea oricărui arbore. S-ar putea, de asemenea, să ne intereseze ce volum au acești copaci, cîți metri cubi de lemn sînt cuprinși în ei, ce greutate au și cîte trunchiuri pot fi transportate de o singură căruță. Aceste probleme nu sînt chiar atît de simple ca determinarea înălțimii. Specialiștii nu au găsit încă metode exacte pentru rezolvarea lor și se mulțumesc numai cu o apreciere mai mult sau mai puțin aproximativă. Chiar pentru un trunchi tăiat care zace în fața noastră curățat de ramuri, problema nu se rezolvă atît de ușor.

Într-adevăr, trunchiul de arbore oricît ar fi el de neted, fără îngroșări, nu reprezintă nici un cilindru, nici un con, nu este, de asemenea, nici un trunchi de con sau orice alt corp geometric al cărui volum s-ar putea calcula cu ajutorul formulelor. Fără îndoială, trunchiul nu este cilindru, întrucît se subțiază către vîrf (are „conicitate", cum spun silvicultorii), nu este nici con, deoarece „generatoarea" sa nu este o linie dreaptă, ci o linie curbă și nu un arc de cerc, ci o altă linie curbă care are convexitatea întoarsă către axul arborelui[1].

Datorită acestui fapt, putem calcula volumul trunchiului de arbore mai mult sau mai puțin exact numai cu ajutorul calculului integral. Unii cititori se vor mira poate că pentru măsurarea unei simple bîrne sîntem nevoiți să recurgem la serviciile matematicii superioare. Mulți cred că matematicile superioare sînt legate numai de corpuri și figuri deosebite, iar în viața de toate zilele putem folosi doar teoremele și formulele matematicii elementare. Această considerație este cu totul eronată: putem calcula destul de exact volumul unui astru sau al unei planete folosind elemente de geometrie, pe cînd un calcul exact al volumului unei bîrne lungi sau al unui butoi cu bere este imposibil fără geometria analitică și calculul integral. Cartea de față nu presupune din partea cititorului o familiarizare cu matematica superioară și din această cauză autorul se va mulțumi cu prezentarea unei metode aproximative de calculare a volumului trunchiului.

În cele ce urmează ne vom baza pe faptul că volumul trunchiului se apropie, mai mult sau mai puțin, de volumul unui trunchi de con, de volumul unui con în cazul unui arbore cu vîrf sau, în sfîrșit, de volumul unui cilindru în cazul unei bîrne scurte. Volumul oricăruia dintre aceste corpuri este ușor de calculat. Nu s-ar putea oare, pentru uniformizarea calculului, să găsim o astfel de formulă pentru volum, care poate fi aplicată concomitent celor trei

[1] Această linie curbă se apropie cel mai mult de așa-numita „parabolă semicubică" ($y^2 = ax^3$); corpul obținut prin rotația acestei parabole se numește „neiloid" (după numele matematicianului antic Neil, care a găsit metoda pentru calcularea lungimii arcului unei astfel de curbe). Trunchiul arborelui crescut în pădure se apropie prin forma sa de un neiloid. Calculul volumului unui neiloid se face prin procedeele matematicii superioare.

corpuri menționate mai sus? În acest caz am putea calcula cu aproximație volumul trunchiului fără să ne interesăm cu ce corp ar putea fi asemănat — cilindru, con sau trunchi de con.

FORMULA UNIVERSALĂ

Există o asemenea formulă; mai mult decît atît, ea poate fi folosită nu numai pentru cilindru, con și trunchi de con, dar și pentru orice fel de prisme, piramide, trunchiuri de piramidă și chiar pentru sferă. Priviți această admirabilă formulă! Ea este cunoscută în matematică sub denumirea de formula lui Simpson:

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3)$$

unde
h — înălțimea corpului;
b_1 — suprafața bazei inferioare;
b_2 — „ secțiunii medii[1];
b_3 — „ bazei superioare.

Problemă

Să se arate că prin formula pe care am menționat-o mai sus se poate calcula volumul următoarelor șapte corpuri geometrice: prismă, piramidă, trunchi de piramidă, cilindru, con, trunchi de con, sferă.

Rezolvare

Ne putem convinge ușor de exactitatea acestei formule prin simpla ei aplicare la corpurile enumerate mai sus. Vom obține:

pentru prismă și cilindru (fig. 17,*a*)

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1 h;$$

pentru piramidă și con (fig. 17, *b*)

$$v = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1}{4} + 0\right) = \frac{b_1 h}{3};$$

[1] Adică suprafața secțiunii corpului la mijlocul înălțimii sale.

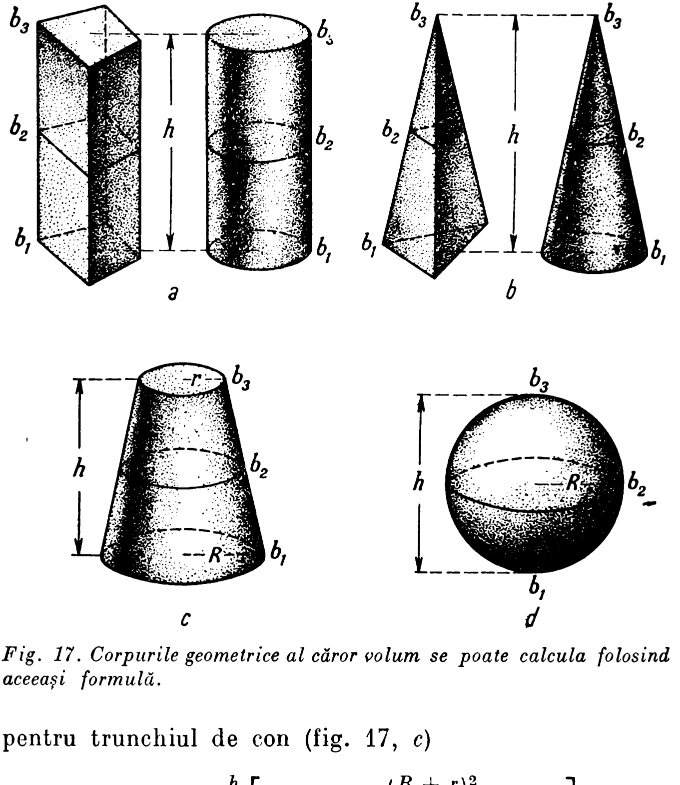


Fig. 17. Corpurile geometrice al căror volum se poate calcula folosind aceeași formulă.

pentru trunchiul de con (fig. 17, *c*)

$$v = \frac{h}{6}\left[\pi R^2 + 4\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \pi r^2\right] =$$

$$= \frac{h}{6}\left(\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi Rr + \pi r^2 + \pi r^2\right) =$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right);$$

pentru trunchiul de piramidă demonstrația se face într-un mod asemănător; în sfîrșit, pentru sferă (fig. 17, *d*)

$$v = \frac{2R}{6}\left(0 + 4\pi R^2 + 0\right) = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

P r o b l e m ă

Vom menționa încă o particularitate interesantă a formulei noastre universale: ea poate fi folosită, de asemenea, și pentru calcularea suprafeței figurilor plane: paralelogram, trapez și triunghi, dacă

h este ca și mai înainte înălțimea figurii;
b_1 — lungimea bazei inferioare;
b_2 — lungimea bazei medii;
b_3 — lungimea bazei superioare.
Cum ne putem convinge de aceasta?

R e z o l v a r e

Aplicînd formula, vom obține:
pentru paralelogram (pătrat, dreptunghi) (fig. 18, *a*)

$$S = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1h;$$

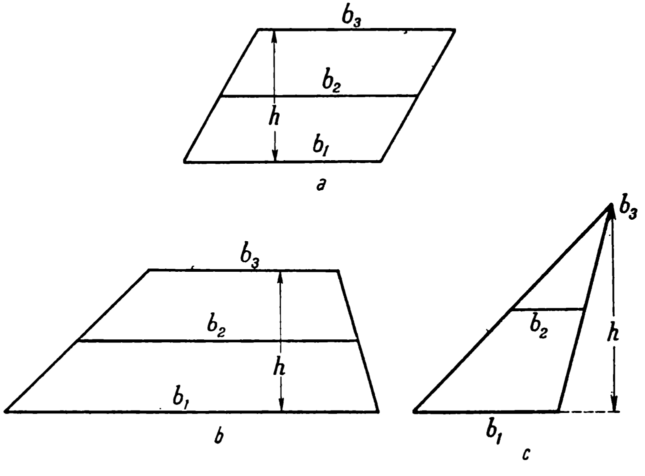


Fig. 18. Formula universală poate fi folosită, de asemenea, și pentru calcularea suprafețelor acestor figuri.

pentru trapez (fig. 18, *b*):

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1 + b_3}{2} + b_3\right) = \frac{h}{2}(b_1 + b_3);$$

pentru triunghi (fig. 18, *c*):

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1}{2} + 0\right) = \frac{b_1 h}{2}.$$

După cum se vede, formula noastră este într-adevăr universală.

VOLUMUL ȘI GREUTATEA ARBORELUI ÎN PICIOARE

Așadar, avem la dispoziție o formulă cu ajutorul căreia putem calcula, în mod aproximativ, volumul trunchiului unui arbore tăiat, fără a ne pune întrebarea cu ce corp geometric poate fi el asemănat: cu un cilindru, con sau trunchi de con. În vederea acestui calcul trebuie să cunoaștem patru mărimi și anume lungimea trunchiului și trei diametre: inferior, superior și diametrul corespunzător secțiunii medii. Măsurarea diametrelor inferior și superior este extrem de

Fig. 19. Determinarea diametrului unui arbore cu ajutorul compasului forestier.

simplă; determinarea directă a diametrului mediu este însă destul de anevoioasă dacă nu avem un instrument special („compas forestier" pentru silvicultori, figurile 19 și 20)[1]. Această dificultate poate fi însă evitată, dacă vom măsura cu o sfoară circumferința trunchiului și vom împărți lungimea ei la $3\frac{1}{7}$; am obținut astfel diametrul[2].

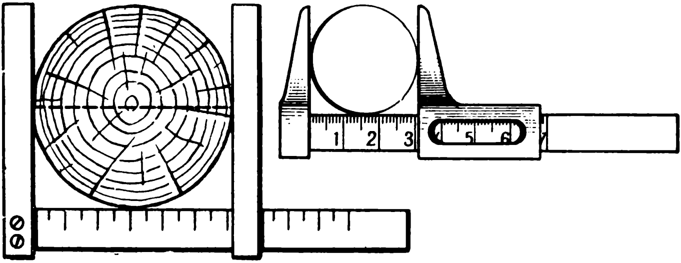


Fig. 20. Compasul forestier (stînga); șublerul (dreapta).

Volumul unui arbore tăiat poate fi obținut prin acest procedeu cu o exactitate satisfăcătoare în multe calcule practice. Mai pe scurt, însă mai puțin exact, această problemă se poate rezolva dacă vom considera trunchiul drept un cilindru al cărui diametru este egal cu diametrul secțiunii transversale medii a trunchiului; în acest caz, rezultatul obținut va fi însă uneori micșorat cu 12%. Să împărțim, în gînd, trunchiul în bucăți cu o lungime de 2 m și să determinăm volumul fiecăreia din aceste părți aproape cilindrice. Adunînd valorile obținute căpătăm volumul total al trunchiului. Rezultatul astfel obținut va fi mult mai bun: el este cu numai 2—3% mai mic decît volumul real al trunchiului.

Metodele expuse mai sus nu se folosesc, în nici un caz, pentru măsurarea unui arbore în picioare: dacă n-avem de gînd să ne urcăm în el, atunci ne rămîne accesibil pentru

---

[1] O construcție asemănătoare are și șublerul (fig. 20, dreapta), instrument binecunoscut, folosit pentru măsurarea diametrului obiectelor rotunde.

[2] Raportul dintre lungimea circumferinței și diametru este egal cu π, adică aproximativ $3\frac{1}{7}$.

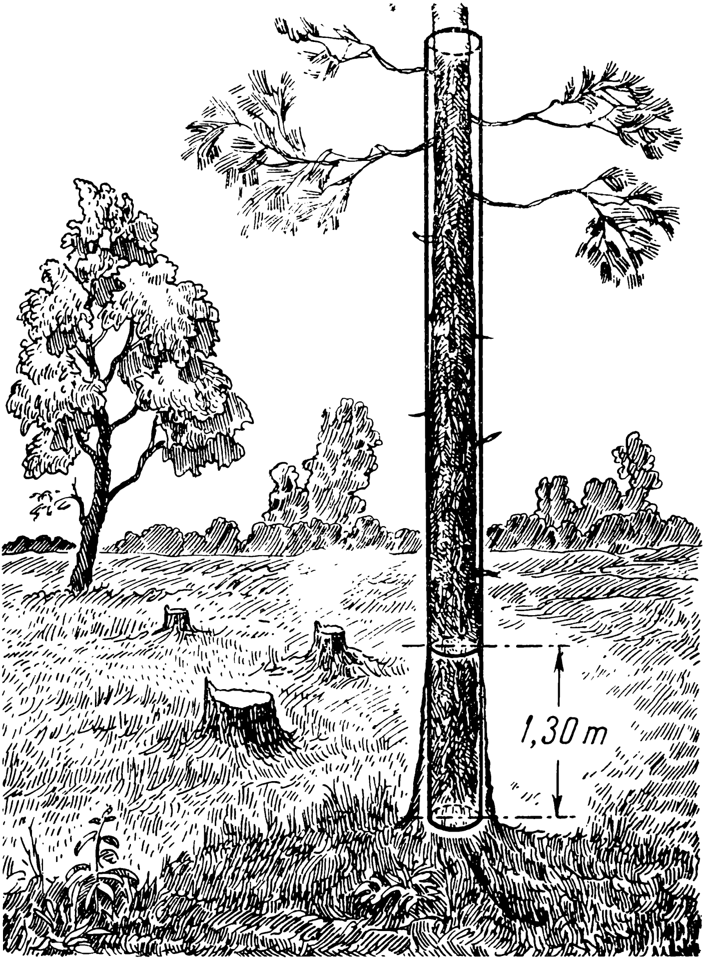


Fig. 21. Ce este „coeficientul de formă“.

măsurători numai diametrul părții sale inferioare. În acest caz, va trebui să ne mulțumim cu o determinare cu totul aproximativă a volumului și să ne consolăm cu faptul că și silvicultorii profesioniști procedează, de obicei, într-un mod asemănător. Ei folosesc pentru astfel de măsurări un tabel ce cuprinde așa-numiții „coeficienți de formă“, adică coeficienți care arată ce parte formează volumul arborelui pe care-l măsurăm din volumul unui cilindru de aceeași înălțime și diametru, obținut prin măsurarea diametrului trunchiului de arbore la înălțimea pieptului unui om adult, adică la nivelul a 130 cm (la această înălțime este cel mai comod să fie măsurat). Figura 21 explică în mod concret cele de mai sus. Desigur, „coeficienții de formă“ sînt diferiți pentru arbori de specii și înălțimi diferite, deoarece forma trunchiului se modifică. Diferențele nu sînt totuși prea mari: pentru trunchiurile de pin sau brad (care au crescut în plantație deasă) „coeficienții de formă“ sînt între 0,45 și 0,51 adică sînt aproximativ egali cu 0,5.

Prin urmare, fără o eroare prea mare putem considera ca volum al unui arbore în picioare jumătate din volumul unui cilindru de aceeași înălțime, cu un diametru egal cu diametrul arborelui la înălțimea pieptului.

Fără îndoială, este vorba doar de o apreciere aproximativă, care însă nu se depărtează prea mult de rezultatul real: cam între o valoare mărită cu 2% și una micșorată cu 10%[1].

Ne-a mai rămas doar un singur pas pentru a aprecia și greutatea arborelui în picioare. Pentru aceasta este suficient să știm că 1 m^3 de lemn de pin sau brad cîntărește circa 600—700 kg. Să presupunem, de pildă, că ne aflăm lîngă un brad a cărui înălțime este de aproximativ 28 m, iar circumferința trunchiului la înălțimea pieptului este de 120 cm. Atunci suprafața cercului corespunzător va fi egală cu 1 100 cm^2 sau 0,11 m^2, iar volumul trunchiului $\frac{1}{2} \times 0{,}11 \times 28 = 1{,}5$ m^3. Admițînd că 1 m^3 de lemn de brad proaspăt tăiat cîntărește în medie 650 kg, deducem că 1,5 m^3 trebuie să cîntărească aproximativ 1 t (1 000 kg).

---

[1] Trebuie să menționăm că „coeficienții de formă“ se referă numai la arborii ce-au crescut în pădure, adică arbori înalți și subțiri (netezi, fără noduri); pentru arborii care stau stingheri și au coroana bogată nu se recomandă asemenea reguli generale de calculare a volumului.

Problemă

În umbra de la rădăcinile unui plop argintiu a crescut un lăstăriş. Rupeţi o frunză şi observaţi cît este ea de mare în comparaţie cu frunzele de pe arborele care i-a dat naştere, mai ales cu acelea care au crescut la lumina Soarelui. Frunzele aflate în umbră îşi completează cantitatea de lumină necesară prin dimensiunile suprafeţelor lor care captează razele solare. Studierea acestui fenomen intră în sarcina botanistului. Dar cercetătorul în probleme de geometrie poate să-şi spună şi el cuvîntul: el poate preciza de cîte ori suprafaţa frunzei din lăstăriş este mai mare decît suprafaţa frunzei arborelui care i-a dat naştere.

Cum aţi rezolva această problemă?

Rezolvare

În primul rînd, putem să calculăm suprafaţa fiecărei frunze în mod separat şi să găsim raportul dintre ele. Putem măsura suprafaţa frunzei dacă o acoperim cu o hîrtie transparentă în pătrăţele, fiecare pătrăţel avînd, de exemplu, 4 mm^2 (foaia de hîrtie transparentă împărţită în pătrate, care este utilizată pentru astfel de scopuri, se numeşte calc milimetric). Acesta, cu toate că este un procedeu absolut exact, este prea migălos[1].

Procedeul mai scurt se bazează pe faptul că ambele frunze, deşi diferite ca mărime, au totuşi o formă asemănătoare sau chiar aceeaşi; cu alte cuvinte, acestea sînt figuri asemenea din punct de vedere geometric. Ariile unor astfel de figuri se raportează între ele, după cum ştim, ca dimensiunile lor liniare la puterea a doua. Prin urmare, stabilind de cîte ori o frunză este mai lungă sau mai lată decît cealaltă, vom afla raportul dintre suprafeţele lor prin simpla ridicare la pătrat a acestui număr. Să presupunem că o frunză de pe lăstar are o lungime de 15 cm, iar una de pe o ramură a arborelui doar de 4 cm; raportul dintre dimen-

[1] Acest procedeu are totuşi şi un avantaj: folosindu-l, putem compara suprafeţele unor frunze care nu au aceeaşi formă, ceea ce nu se poate face prin procedeul descris în cele ce urmează.

siunile lor liniare este de $\frac{15}{4}$. Prin urmare, suprafața uneia va fi mai mare decît suprafața celeilalte de $\frac{225}{16}$ ori, adică de 14 ori. Rotunjind valoarea obținută (întrucît nu putem obține o cifră absolut exactă), sîntem îndreptățiți să afirmăm că frunza de pe lăstar are suprafața de aproximativ 15 ori mai mare decît aceea de pe arbore.

Încă un exemplu

Problemă

Frunza unei păpădii care a crescut la umbră are o lungime de 31 cm. La un alt exemplar, care a crescut în arșița Soarelui, lungimea frunzei este numai de 3,3 cm. De cîte ori suprafața primei frunze va fi mai mare decît suprafața celei de-a doua?

Rezolvare

Vom proceda ca și în cazul anterior. Raportul dintre suprafețe este egal cu

$$\frac{31^2}{3{,}3^2} = \frac{960}{10{,}9} \approx 87;$$

prin urmare, o frunză este mai mare decît cealaltă, în ce privește aria, cam de 90 de ori.

În pădure este ușor să alegem o mulțime de perechi de frunze de dimensiuni diferite, dar cu formă asemănătoare. Ne colecționăm în acest fel un material interesant și atractiv pentru problemele de geometrie privind raportul dintre ariile unor figuri asemenea. Ochiului nedeprins i se pare totdeauna ciudat că o diferență relativ mică în lungimea și lățimea frunzelor dă naștere la o diferență apreciabilă între suprafețele lor. Dacă, de exemplu, dintre două frunze asemenea din punct de vedere geometric, una este mai lungă decît cealaltă cu 20% atunci raportul dintre suprafețele lor va fi egal cu:

$$1{,}2^2 \approx 1{,}4,$$

adică diferența se ridică la 40%. Dacă între cele două frunze există o diferență de lățime de 40%, atunci o frunză va avea suprafața mai mare decît cealaltă cu:

$$1{,}4^2 \approx 2,$$

adică de aproape două ori.

Fig. 22. Calculați raportul existent între suprafețele acestor frunze.

Fig. 23. Calculați raportul existent între suprafețele acestor frunze.

Problemă

Propunem cititorilor să calculeze raportul existent între suprafețele frunzelor reprezentate în figurile 22 și 23.

GIGANȚII CU ȘASE PICIOARE

Ce ființe curioase sînt furnicile! Urcîndu-se repede pe tulpină cu o greutate mare între maxilare (fig. 24), furnica oferă unui om cu spirit de observație o problemă dificilă: de unde are această insectă forța necesară pentru a urca o greutate de zece ori mai mare decît greutatea sa, fără un efort vizibil? Omul, de exemplu, n-ar putea să alerge pe o scară ținînd pe umeri un pian (fig. 24), deși raportul dintre greutatea poverii și greutatea corpului este același ca și în cazul furnicii. Din cele de mai sus s-ar putea trage concluzia că furnica este mai puternică decît omul!

Aşa să fie oare? Fără geometrie nu putem explica această problemă. Să vedem, în primul rînd, ce ne poate spune un specialist (prof. A.P. Brandt) despre forţa muşchilor, iar apoi despre raportul dintre forţele omului şi ale furnicii:

„Un muşchi viu se aseamănă cu un elastic, doar că contracţia lui nu se bazează pe elasticitate, ci pe alte proprietăţi şi se produce în mod normal sub influenţa excitaţiei nervoase, iar în cazul unei experienţe de fiziologie, prin aplicarea curentului electric pe nervul respectiv sau chiar direct pe muşchi.

Experienţele se pot efectua foarte uşor pe muşchii unei broaşte omorîte de curînd, deoarece muşchii animalelor cu sînge rece îşi păstrează proprietăţile vitale şi în afara organismului, chiar şi la o temperatură obişnuită. Experienţa este extrem de simplă. Se scoate muşchiul piciorului din spate — muşchiul pulpei — împreună cu o porţiune din femur şi din tendonul terminal. Acest muşchi se pretează foarte bine pentru asemenea experienţe. După izolarea lui, muşchiul se suspendă de un suport, iar prin tendon se trece un cîrlig de care se fixează o greutate. Dacă atingem muşchiul cu doi conductori legaţi la un element galvanic, el se contractă imediat, se scurtează şi ridică greutatea. Prin adăugarea unor greutăţi suplimentare, se poate determina cu uşurinţă capacitatea maximă de ridicare a muşchiului. Dacă legăm cap la cap 2—3 muşchi de acelaşi fel şi îi excităm cu curent electric vom obţine o forţă mai mare, iar greutatea se va ridica ceva mai sus în funcţie de valoarea corespunzătoare a sumei contracţiilor muşchilor luaţi separat. Dacă vom lega însă 2—3 muşchi într-un singur mănunchi, atunci întregul sistem supus excitării va ridica o greutate mai mare, în funcţie de numărul lor. Acelaşi rezultat s-ar obţine, evident, şi în cazul cînd muşchii ar fi concrescut între ei. Aşadar, forţa de ridicare a muşchilor nu depinde de lungime sau de masa totală, ci de grosime, adică de secţiunea transversală.

După această digresiune, să comparăm două animale cu aceeaşi constituţie, deci asemenea din punct de vedere geometric, dar diferite ca mărime. Să presupunem că avem în faţă un animal iniţial şi altul de două ori mai mare în toate dimensiunile decît primul. În cazul acesta, volumul şi greutatea celui de-al doilea animal cît şi ale fiecărui organ în parte vor fi de opt ori mai mari; în timp ce dimensiunile de suprafaţă respective, între care şi secţiunea transversală a mușchilor, vor fi doar de patru ori mai mari. Din cele de mai sus rezultă că forța musculară se mărește de patru ori, în timp ce animalul se dublează ca dimensiuni, fiind de opt ori mai greu decît primul, dar, în schimb, de două ori mai slab decît acesta. În baza acestui fapt, un animal care este de trei ori mai lung (cu secțiuni transversale de nouă ori mai mari și cu o greutate de 27 de ori mai mare) s-ar dovedi a fi de aproximativ trei ori mai slab, iar animalul care este de patru ori mai lung va fi de patru ori mai slab etc.

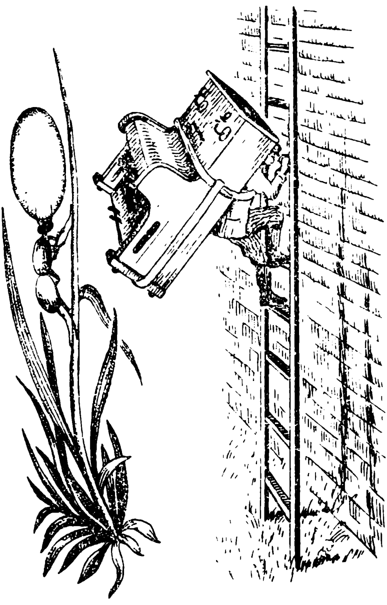


Fig. 24. Eroul cu șase picioare.

Legea creșterii neuniforme a volumului și greutății animalului cît și a forței lui musculare explică de ce o insectă, de exemplu furnicile, viespile etc. poate să care greutăți de 30 sau 40 de ori mai mari decît greutatea corpului lor, în timp ce omul nu poate să ducă — exceptînd sportivii și hamalii — decît aproximativ 9/10, iar calul — pe care îl considerăm ca o adevărată mașină vie — și mai puțin, și anume aproximativ 7/10 din greutatea sa“[1].

Ținînd seama de aceste considerente vom privi cu alți ochi faptele de vitejie ale acelei furnici-erou, despre care I.A. Krîlov scria cu ironie:

> O furnică avea o putere nemăsurată
> Nemaiauzită nici în timpurile străvechi;
> Ea putea, chiar (spune istoricul ei credincios),
> Să ridice două boabe mari de orz.
>
> KRÎLOV I. A.

[1] Mai amănunțit cu privire la aceasta, vezi lucrarea lui I. I. P e r e l m a n Занимательная механика *(Mecanica distractivă)* cap. X, Ф. M., Москва, 1959.

Capitolul II

GEOMETRIA LA RÎU

SĂ MĂSURĂM LĂŢIMEA RÎULUI

Putem măsura lăţimea unui rîu fără să-l trecem înot, într-un mod tot atît de simplu, pentru cel ce are cunoştinţe de geometrie, cum am stabilit înălţimea unui arbore fără să ne urcăm în vîrful lui. Distanţa inaccesibilă se măsoară prin acelaşi procedeu prin care am aflat înălţimea inaccesibilă. În ambele cazuri, determinarea distanţei necunoscute se înlocuieşte cu determinarea altei distanţe pe care o putem uşor măsura direct.

Din multiplele procedee de rezolvare a acestei probleme, să examinăm cîteva dintre cele mai simple.

1. Pentru primul procedeu vom avea nevoie de „dispozitivul“ deja cunoscut, prevăzut cu trei ace în vîrfurile unui triunghi dreptunghic isoscel (fig. 25). Să presupunem că trebuie să aflăm lăţimea AB a rîului (fig. 26) de pe malul unde se află punctul B, fără a trece pe malul opus. Situîndu-ne undeva în punctul C, ţinem dispozitivul cu ace în dreptul ochilor în aşa fel, încît privind cu un singur ochi în direcţia a două ace să vedem cum acestea acoperă punctele B şi A. Se înţelege că atunci cînd vom reuşi să obţinem situaţia descrisă, ne vom afla exact în prelungirea dreptei AB. În continuare, fără a mişca scîndurica dispozitivului, privim în direcţia altor două ace (perpendicular pe direcţia anterioară) şi observăm un punct oarecare D, acoperit de aceste ace, care se află pe o dreaptă perpendiculară la AC. După aceasta înfigem un jalon în punctul C; părăsim locul de mai înainte şi purtăm instrumentul de-a lungul dreptei CD, pînă vom găsi un punct E (fig. 27), de unde se poate acoperi pentru ochi cu acul b ţăruşul din punctul C, iar cu acul a punctul A. Aşadar am găsit pe malul vecin cel de-al treilea vîrf al triunghiului ACE drept în C. Unghiul E este egal cu unghiul ascuţit din dispozitivul cu ace; prin urmare este jumătate dintr-un unghi drept. Este evident că şi unghiul A este egal cu jumătate dintr-un unghi

Fig. 25. Determinarea lățimii unui rîu cu ajutorul dispozitivului cu ace.

drept. Rezultă deci că $AC = CE$. Dacă vom măsura distanța CE cu ajutorul pașilor, vom cunoaște și distanța AC. Scăzînd din AC pe BC, care este ușor de măsurat, obținem lățimea necunoscută a rîului.

Este destul de incomod și greu să ținem în mînă dispozitivul cu ace fără să-l mișcăm; din această cauză este mai

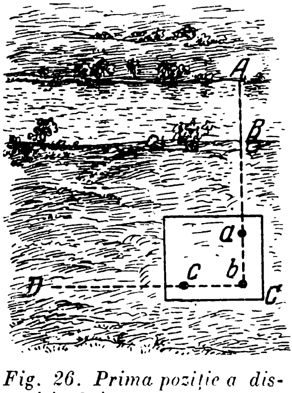


Fig. 26. Prima poziție a dispozitivului cu ace.

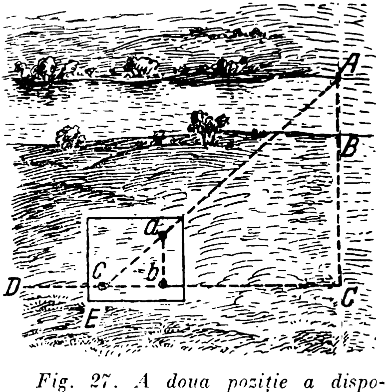


Fig. 27. A doua poziție a dispozitivului cu ace.

bine să fixăm această scîndurică în vîrful unei prăjini cu capătul ascuțit, pe care o înfigem perpendicular în pămînt.

2. Procedeul pe care-l vom descrie se aseamănă cu cel dintîi. Alegem punctul C în prelungirea distanței AB și trasăm cu ajutorul dispozitivului cu ace dreapta CD, perpendiculară pe CA. Mai departe procedăm în modul urmă-

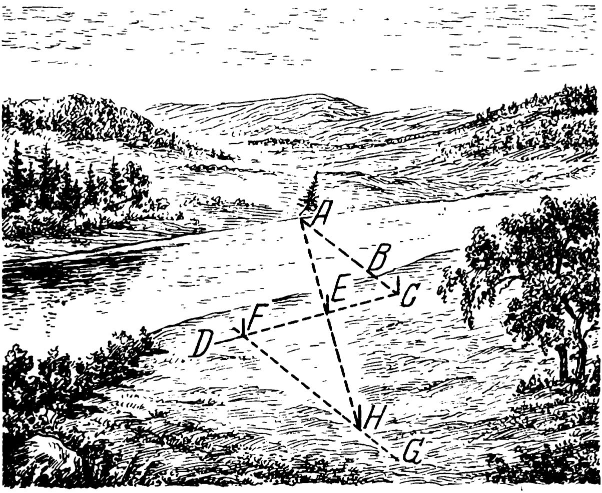


Fig. 28. Folosind criteriile de egalitate a triunghiurilor.

tor (fig. 28): pe dreapta CD măsurăm distanțele arbitrare egale CE și EF. Înfigem apoi niște jaloane în punctele E și F. În continuare, ne situăm în punctul F din care, cu cu ajutorul dispozitivului cu ace, trasăm direcția FG, perpendiculară pe FC. Deplasîndu-ne de-a lungul lui FG alegem un astfel de punct H, din care jalonul E să acopere punctul A. Rezultă prin urmare că punctele H, E și A se află pe aceeași dreaptă.

Problema este rezolvată: distanța FH este egală cu distanța AC, din care este suficient să scădem distanța BC pentru a afla lățimea necunoscută a rîului (desigur că cititorul va înțelege singur de ce FH este egal cu AC).

Acest procedeu necesită mai mult loc decît cel dintîi; dacă terenul ne permite să aplicăm ambele procedee, va fi util să verificăm un rezultat cu ajutorul celuilalt.

3. Procedeul descris mai sus poate fi întrucîtva modificat: Să măsurăm pe dreapta CD nu distanţe egale, ci una mai mică de cîteva ori decît cealaltă. Să presupunem, de exemplu (fig. 29), că FE este de patru ori mai mic decît EC. În rest se procedează ca şi mai înainte: pe direcţia FG, perpendiculară la FC, căutăm punctul H din care jalonul E

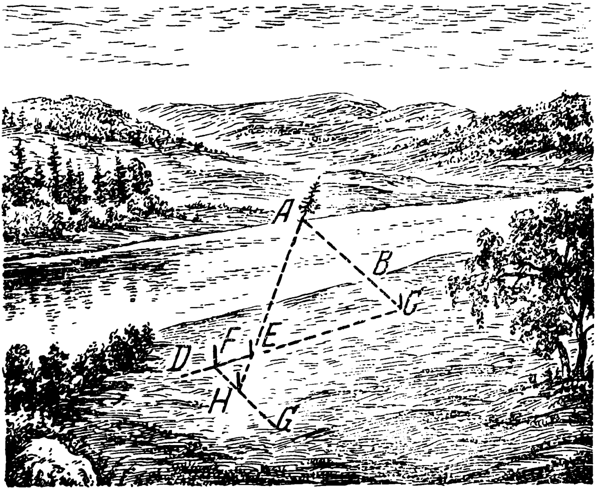


Fig. 29. Folosind criteriile de asemănare a triunghiurilor.

pare că acoperă punctul A. În aceste condiţii FH nu mai este egal cu AC, ci este mai mic decît acesta de patru ori: triunghiurile ACE şi EFH nu mai sînt egale, ci asemenea (triunghiuri cu unghiurile egale şi laturi inegale). Din asemănarea triunghiurilor rezultă:

$$AC : FH = CE : EF = 4 : 1.$$

Prin urmare, măsurînd FH şi înmulţind rezultatul cu 4, vom obţine distanţa AC, din care scăzînd BC vom afla lăţimea necunoscută a rîului.

Acest procedeu necesită, după cum se vede, mai puţin loc şi de aceea este mai comod de aplicat decît cel precedent.

4. Procedeul al patrulea se bazează pe aceeaşi proprietate a triunghiului dreptunghic, şi anume: dacă unul dintre

unghiurile lui ascuțite este egal cu 30°, atunci cateta opusă este egală cu jumătate din ipotenuză. Ne convingem foarte ușor de justețea acestei reguli. Fie unghiul B al triunghiului dreptunghic ABC (fig. 30, stînga) egal cu 30°; să demonstrăm că în acest caz $AC = 1/2\ AB$. Să rotim triunghiul ABC în jurul lui BC în așa fel încît să se situeze simetric față de poziția sa inițială (fig. 30, dreapta), formînd triunghiul ABD; linia ACD este o linie dreaptă, pentru că ambele unghiuri din punctul C sînt unghiuri drepte. În triunghiul ABD, unghiul $A = 60°$, iar unghiul ABD, ca unghi format din două unghiuri de 30°, este de asemenea egal cu 60°. Prin urmare, $AD = BD$ ca laturi opuse unor unghiuri egale. Însă $AC = 1/2\ AD$; așadar, $AC = 1/2\ AB$.

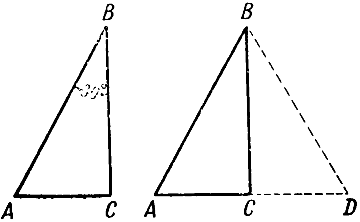


Fig. 30. Cînd cateta este egală cu jumătate din ipotenuză.

Dacă vrem să folosim această proprietate a triunghiului, trebuie să așezăm acele de pe scîndurică în așa fel încît să reprezinte vîrfurile unui triunghi dreptunghic, în care una din catete este de două ori mai mică decît ipotenuza. Cu acest dispozitiv ne plasăm în punctul C (fig. 31), în așa fel ca direcția AC să coincidă cu ipotenuza triunghiului format din ace. Privind în lungul catetei mai scurte a acestui triunghi, trasăm direcția CD și alegem pe ea un astfel de punct E, în care linia EA să fie perpendiculară la CD (aceasta se realizează cu ajutorul aceluiași dispozitiv cu ace). Este ușor de înțeles că CE este o catetă ce se opune unui unghi de 30° și este deci egală cu jumătate din AC. Prin urmare, dacă măsurăm CE, înmulțim această distanță cu 2 și scădem apoi BC, obținem lățimea necunoscută AB a rîului.

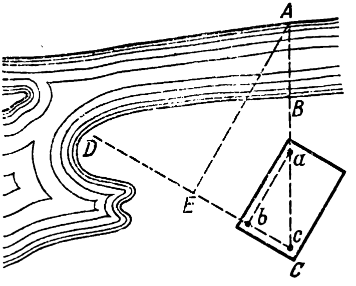


Fig. 31. Schema de folosire a triunghiului dreptunghic cu un unghi de 30°.

Am expus patru procedee ușor de aplicat, cu ajutorul cărora va fi oricînd posibil să măsurăm lățimea unui rîu cu o exactitate pe deplin satisfăcătoare, fără a trece pe celălalt mal. Nu vom examina aci procedee care necesită utilizarea unor dispozitive mai complicate (chiar dacă le putem confecționa singuri).

CU AJUTORUL COZOROCULUI

Iată cum, folosind acest procedeu, sergentul major Kupreanov a reușit să se descurce într-o împrejurare dificilă de pe front[1]. Grupei din care făcea parte i s-a ordonat să măsoare lățimea unui rîu peste care trebuia să se organizeze trecerea trupelor...

Ajungînd la tufișurile de pe malul rîului grupa lui Kupreanov s-a întins pe pămînt, iar Kupreanov, împreună cu soldatul Karpov, s-a apropiat mai mult de rîu, de unde se vedea bine malul ocupat de fasciști. În astfel de condiții lățimea rîului trebuia măsurată din ochi.

— Ei, Karpov, cîți sînt? — întrebă Kupreanov.

— După mine nu mai mult de 100—110 m — a răspuns Karpov. Kupreanov era de acord cu cercetașul său, dar pentru verificare a hotărît să măsoare lățimea rîului „cu ajutorul cozorocului".

Procedeul constă în următoarele: ne îndreptăm cu fața spre rîu și ne așezăm șapca în așa fel ca partea inferioară a cozorocului să coincidă exact cu linia malului opus (fig. 32). Putem înlocui cozorocul cu palma mîinii sau cu o agendă de buzunar, pe care o ținem cu cotorul pe frunte. Apoi, fără să schimbăm poziția capului ne întoarcem spre dreapta sau spre stînga, sau chiar înapoi (în partea în care există un teren mai neted, accesibil pentru măsurarea distanței) și ne fixăm punctul cel mai îndepărtat pe care-l vedem de sub cozoroc (palmă, agendă).

Distanța pînă la acel punct va fi aproximativ egală cu lățimea rîului.

---

[1] Vezi nota de la p. 19.

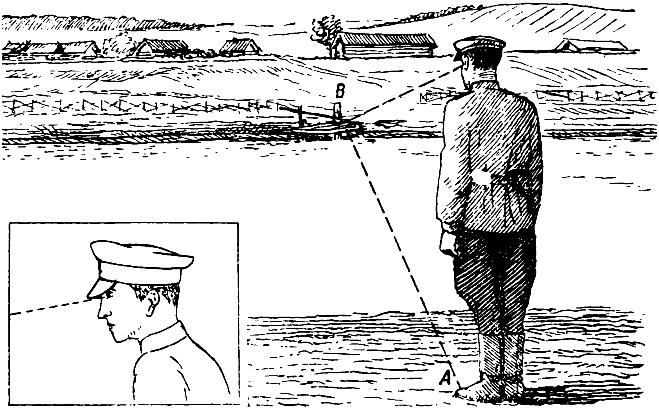


Fig. 32. Trebuie să observăm de sub cozoroc un punct de pe malul opus.

Acest procedeu l-a folosit și Kupreanov. El s-a ridicat repede între tufișuri, și-a aranjat cotorul agendei pe frunte, s-a întors și și-a întipărit în minte punctul cel mai îndepărtat. Apoi, împreună cu Karpov s-a tîrît pînă la acel punct, măsurînd distanța cu o sfoară. Rezultatul obținut a fost 105 m.

Kupreanov a raportat comandantului datele obținute.

Problemă

Să se dea o explicație geometrică „procedeului cu ajutorul cozorocului".

Rezolvare

Raza vizuală corespunzătoare părții inferioare a cozorocului (palmei, agendei) este îndreptată inițial spre linia malului opus (fig. 32). Cînd observatorul se întoarce, raza vizuală, asemenea piciorului unui compas, descrie o circumferință, și atunci $AC = AB$ ca raze ale aceluiași cerc (fig. 33).

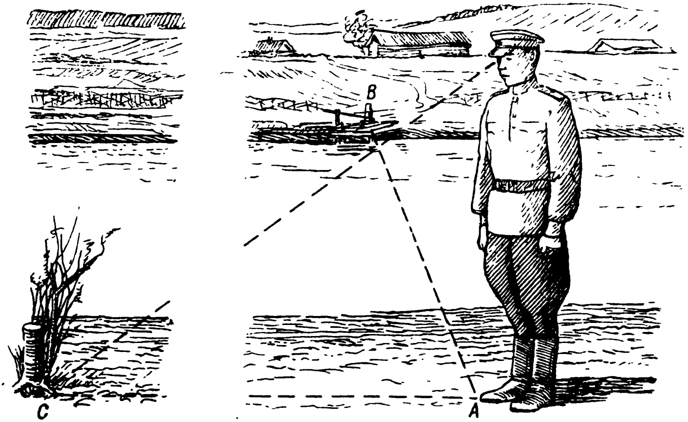


Fig. 33. În același mod fixăm un punct pe malul pe care ne aflăm.

LUNGIMEA INSULEI

Problemă

Şi acum o problemă mai complicată. Stînd pe malul unui rîu sau al unui lac, vedem o insulă (fig. 34), a cărei lungime dorim s-o măsurăm fără a părăsi malul. Este oare posibilă o astfel de măsurătoare?

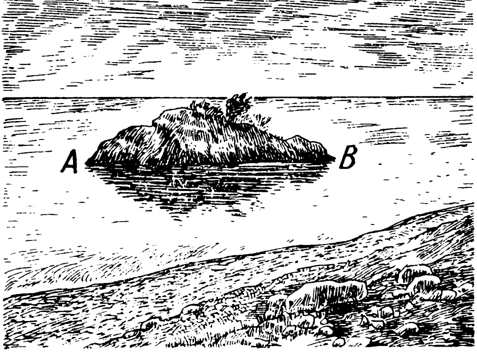


Fig. 34. Cum să stabilim lungimea unei insule.

Cu toate că în acest caz ne sînt inaccesibile ambele extremități ale liniei de măsurat, problema se poate totuși rezolva chiar și fără ajutorul unor instrumente complicate.

Rezolvare

Trebuie să aflăm lungimea AB (fig. 35) a unei insule, rămînînd în tot timpul măsurării pe mal. Alegem pe mal două puncte oarecare P și Q, în care înfigem două jaloane. Pe dreapta PQ căutăm punctele M și N, astfel încît AM și BN să formeze împreună cu direcția PQ două unghiuri drepte (pentru aceasta se folosește dispozitivul cu ace). La mijlocul O al distanței MN înfigem un jalon și căutăm în prelungirea lui AM un astfel de punct C, din care jalonul O pare să acopere punctul B. Tot astfel, în prelungirea lui BN se caută punctul D, de unde jalonul O pare că acoperă extremitatea A a insulei. Distanța CD va fi lungimea necunoscută a insulei.

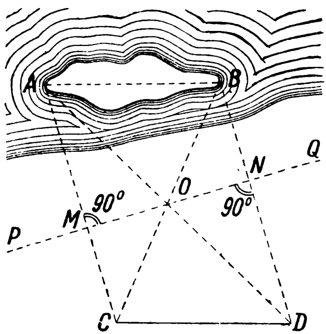


Fig. 35. Folosind criteriile de egalitate a triunghiurilor dreptunghice.

Se poate demonstra cu ușurință acest lucru. Să examinăm triunghiurile dreptunghice AMO și OND; catetele MO și NO sînt egale, iar în afară de aceasta, sînt egale și unghiurile AOM și NOD. Rezultă că triunghiurile sînt egale și deci $OA = OD$. Putem demonstra, într-un mod asemănător, că $BO = OC$. Comparînd apoi triunghiurile ABO și COD, ne vom convinge de egalitatea lor, din care deducem egalitatea distanțelor AB și CD.

UN PIETON PE MALUL OPUS

Problemă

De-a lungul unui rîu merge un om. De pe malul opus îi distingem clar pașii. Am putea oare să calculăm, fie chiar și aproximativ, fără a ne mișca din loc distanța dintre el și noi? Presupunem că nu avem la îndemînă nici un fel de instrument.

Rezolvare

Deși nu avem la îndemînă instrumente, avem ochi și mîini și acest lucru este suficient. Întindem mîna înainte în direcția pietonului și privim vîrful degetului numai cu ochiul drept, dacă pietonul merge în direcția mîinii drepte, și numai cu ochiul stîng, dacă pietonul merge în direcția mîinii stîngi. În momentul cînd pietonul care se îndepărtează va fi acoperit de deget (fig. 36), închidem ochiul cu care am privit și-l deschidem pe celălalt: ni se pare că pietonul este împins înapoi. Numărăm pașii pe care-i face pentru a ajunge din nou pe aceeași linie cu degetul. Obținem astfel toate datele necesare pentru determinarea aproximativă a distanței.

Să explicăm acum cum trebuie să le folosim. Fie în figura 36, *a* și *b* — ochii dv., punctul *M* — vîrful degetului mîinii întinse, punctul *A* — prima poziție a pietonului, iar punctul *B* — poziția a doua a pietonului. Triunghiurile *abM* și *ABM* sînt asemenea (trebuie să ne întoarcem spre

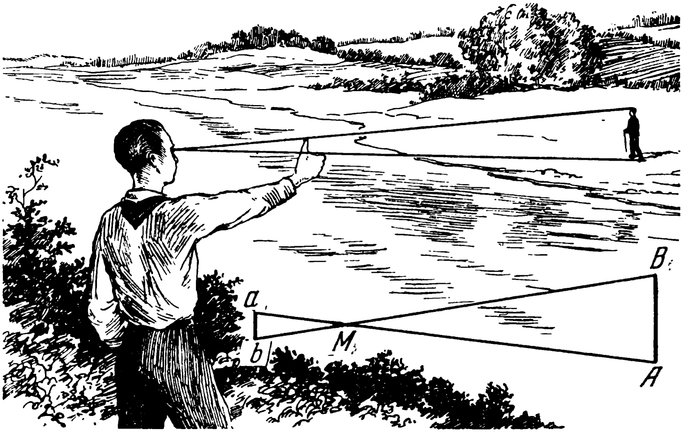


Fig. 36. Cum se calculează distanța pînă la un pieton care merge pe malul opus al unui rîu.

pieton în aşa fel ca ab să fie aproximativ paralelă cu direcţia mişcării sale). Prin urmare, $BM : bM = AB : ab$ şi vom avea o proporţie în care numai termenul BM nu se cunoaşte; pe toţi ceilalţi îi putem determina direct. Într-adevăr, bM este lungimea mîinii întinse, ab este distanţa dintre pupilele ochilor, AB este dată de paşii pietonului (pasul poate fi considerat ca fiind egal, în medie, cu 3/4 m). Rezultă că distanţa necunoscută dintre noi şi pietonul de pe malul opus poate fi dedusă din următoarea proporţie:

$$MB = AB \cdot \frac{bM}{ab}.$$

Dacă distanţa dintre pupilele ochilor (ab) este, de exemplu, de 6 cm, lungimea bM de la capătul mîinii întinse pînă la ochi de 60 cm, iar pietonul a făcut de la A pînă la B 14 paşi, atunci distanţa dintre el şi noi va fi $MB = 14 \cdot \frac{60}{6} = 140$ de paşi sau 105 m.

Este suficient să măsurăm dinainte distanţa dintre pupile şi bM, care reprezintă distanţa de la ochi pînă la capătul mîinii întinse, pentru ca memorînd raportul dintre ele $\frac{bM}{ab}$, să calculăm cu rapiditate depărtarea la care se află obiectele inaccesibile. Atunci ne va rămîne numai să înmulţim AB cu acest raport. În medie, la cea mai mare parte dintre oameni $\frac{bM}{ab} = 10$ cu abateri neînsemnate. Partea mai dificilă o reprezintă stabilirea distanţei AB. În cazul nostru, am folosit paşii omului care se îndepărta. Se pot folosi însă şi alte indicii. Dacă măsurăm, de exemplu, distanţa ce ne desparte de un tren de marfă îndepărtat, atunci lungimea AB poate fi apreciată în comparaţie cu lungimea unui vagon, care este, de obicei, cunoscută (7,6 m între tampoane). Dacă se determină distanţa pînă la o clădire, atunci AB se calculează în comparaţie cu lăţimea unei ferestre, lungimea unei cărămizi etc.

Acelaşi procedeu poate fi folosit şi pentru calcularea dimensiunii unui obiect îndepărtat, dacă se cunoaşte distanţa la care acesta se află faţă de observator. În vederea acestui scop putem folosi şi alte „telemetre", pe care le vom descrie în cele ce urmează.

În primul capitol am descris cel mai simplu instrument pentru calcularea înălţimilor inaccesibile — altimetrul. Vom descrie acum instrumentul cel mai simplu pentru măsurarea distanţelor inaccesibile, adică „telemetrul". Un astfel de telemetru îl putem confecţiona dintr-un chibrit obişnuit.

Fig. 37. Chibritul-telemetru.

Pentru aceasta este suficient să trasăm pe una din feţele lui diviziuni milimetrice, pe care, pentru a le distinge mai bine, le facem alternativ de culoare deschisă şi închisă (fig. 37).

Putem folosi acest „telemetru" primitiv pentru aprecierea distanţei pînă la un obiect îndepărtat numai în acele cazuri, în care dimensiunile obiectului respectiv ne sînt cunoscute (fig. 38); de altfel, orice alte telemetre de construcţie mai perfecţionată nu pot fi folosite decît respectînd aceleaşi condiţii. Să presupunem că vedem în depărtare un om şi ne punem problema să stabilim distanţa pînă la el. Aici, chi-

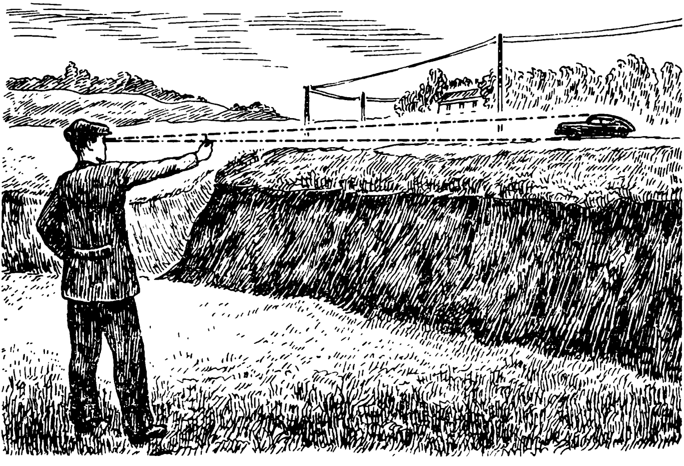


Fig. 38. Folosirea chibritului-telemetru pentru calcularea distanţelor inaccesibile.

britul-telemetru ne poate scoate din încurcătură. Ținem chibritul în mîna întinsă și privind cu un singur ochi, ducem extremitatea lui liberă în așa fel ca ea să coincidă cu partea superioară a figurii îndepărtate. Apoi, mișcînd încet unghia degetului mare de-a lungul chibritului, o oprim în acel punct de pe el care se proiectează la baza figurii omenești. Ne rămîne doar să aflăm, apropiind chibritul de ochi, la ce diviziune am oprit unghia. Avem în acest fel toate datele pentru rezolvarea problemei.

Ne putem convinge cu ușurință de exactitatea proporției:

$$\frac{\text{distanța necunoscută}}{\text{distanța dintre ochi și chibrit}} = \frac{\text{înălțimea medie a unui om}}{\text{partea măsurată a chibritului}}$$

Nu ne va fi greu să calculăm acum distanța necunoscută. Dacă, de exemplu, distanța pînă la chibrit este de 60 cm, înălțimea omului 1,7 m, iar partea măsurată a chibritului de 12 mm, atunci distanța pe care o căutăm va fi egală cu:

$$60 \cdot \frac{1\,700}{12} = 8\,500 \text{ cm} = 85 \text{ m}.$$

Pentru a dobîndi o oarecare deprindere în folosirea acestui telemetru, măsurăm înălțimea unuia dintre prietenii noștri și, rugîndu-l să se îndepărteze la o distanță oarecare, încercăm să stabilim cu cîți pași s-a îndepărtat de noi.

Cu ajutorul aceluiași procedeu putem calcula distanța pînă la un călăreț (înălțimea medie 2,2 m), biciclist (diametrul roții 75 cm), stîlp de telegraf de-a lungul căii ferate (înălțimea 8 m, iar distanța verticală dintre izolatorii învecinați 90 cm), pînă la un tren, o casă și alte obiecte asemănătoare, ale căror dimensiuni le putem aprecia ușor și destul de exact. Astfel de cazuri se întîlnesc destul de des în timpul excursiilor.

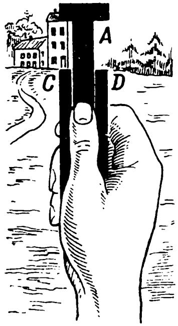


Fig. 39. Telemetrul mobil la lucru.

Pentru persoanele cu înclinații practice confecționarea unui instrument mai comod de același tip, destinat pentru aprecierea distanțelor după mărimea unei siluete omenești îndepărtate, nu prezintă o dificultate prea mare.

Construcția instrumentului este prezentată clar în figurile 39 și 40. Obiectul observat se situează exact la distanța

A, care se obține prin ridicarea părții mobile a instrumentului. Mărimea distanței este comod s-o calculăm după diviziunile de pe părțile *C* și *D* ale scîndurici. Pentru a ne scuti de necesitatea de a face unele calcule, putem însemna pe fîșia *C*, în dreptul diviziunilor, distanțele ce le corespund, dacă obiectul pe care-l observăm este o siluetă omenească (instrumentul se ține la o depărtare de ochi egală cu lungimea mîinii întinse). Pe fîșia din dreapta *D*, putem însemna distanțele calculate dinainte pentru acele cazuri cînd se observă silueta unui călăreț (2,2 m). Pentru un stîlp de telegraf (înălțimea 8 m), un aeroplan cu deschiderea aripilor de 15 m și alte obiecte mari, putem folosi părțile superioare libere ale fîșiilor *C* și *D*. Cu aceste modificări dispozitivul va dobîndi forma reprezentată în figura 40.

Desigur, precizia unei astfel de evaluări a distanței nu va fi prea mare. Este vorba doar de o evaluare și nicidecum de o măsurare. În exemplul examinat anterior, cînd distanța pînă la silueta omenească a fost apreciată ca fiind egală cu 85 m, o eroare de 1 mm comisă în timpul măsurării porțiunii de pe bățul chibritului ar fi condus în final la o eroare de 7 m (1/12 din 85). Dacă omul s-ar fi aflat la o distanță de patru ori mai mare, am fi măsurat pe chibrit nu 12 mm, ci numai 3 mm și atunci o eroare chiar de 1/2 mm

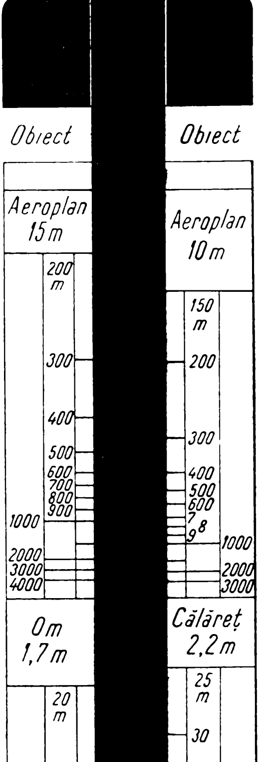


Fig. 40. Construcția telemetrului mobil.

ar fi provocat o modificare a rezultatului cu 57 m. Din această cauză exemplul nostru este sigur în cazul unei siluete omenești, și numai pentru distanțe relativ mici, de circa 100—200 m. La aprecierea unor distanțe mai mari trebuie să alegem și obiecte de dimensiuni mai mari.

ENERGIA RÎULUI

Tu cunoști un ținut unde toate sînt din abundență,
Unde rîurile curg mai strălucitoare ca argintul,
Unde vîntul ușor adie prin năgara din stepă
Și satele nu se mai văd între livezile de vișini.

A. K. TOLSTOI

Un rîu a cărui lungime nu depășește 100 km se obișnuiește să se considere ca fiind mic. Știți oare cîte rîuri de acest fel se găsesc numai în U.R.S.S.? Foarte multe, aproximativ 43 000!

Dacă toate aceste rîuri le-am pune cap la cap, am obține o bandă cu o lungime de 1 300 000 km. O asemenea bandă poate înconjura globul pămîntesc la ecuator de 30 de ori (lungimea ecuatorului este aproximativ de 40 000 km).

Cursul acestor rîuri, cu toate că este lin, ascunde în sine o rezervă inepuizabilă de energie. Specialiștii consideră că dacă s-ar aduna la un loc capacitățile ascunse ale tuturor rîurilor mici din Uniunea Sovietică, s-ar obține o cifră impresionantă, de 34 000 000 kW! Această energie gratuită trebuie folosită pe scară largă pentru electrificarea gospodăriilor din satele situate în apropiere de rîuri.

Poate rîul curge după plac.
Dar de-i scris în planuri, un baraj
Apa va opri-o pînă-n veac
Pieptene de piatră uriaș.

S. SCIPACIOV

Dv. știți că aceasta se realizează cu ajutorul hidrocentralelor și puteți să manifestați multă inițiativă și să dați un real ajutor în pregătirea construcției unei mici hidrocentrale.

Într-adevăr, pe constructorii unei hidrocentrale îi interesează absolut tot ce se referă la regimul rîului: lățimea acestuia, viteza de curgere a apei, suprafața secțiunii transversale a albiei („secţiune vie“) şi căderea, adică nivelul apei pe care îl permit malurile. Toate acestea pot fi măsurate cu mijloace accesibile şi ne aflăm, prin urmare, în faţa unei probleme de geometrie relativ simple.

Vom trece acum la rezolvarea acestei probleme.

Mai întîi, vom cita aici sfatul practic a doi specialişti, inginerii V. Iaroş şi I. Feodorov, care se referă la alegerea porţiunii de rîu unde se va înălţa viitorul baraj.

Ei recomandă ca hidrocentralele mici, cu o capacitate de 15—20 kW, să fie construite la o depărtare care să nu depăşească 5 km de sat.

„Barajul hidrocentralei trebuie construit nu mai aproape de 10—15 km şi nu mai departe de 20—40 km de izvorul rîului, pentru că depărtarea de izvor atrage după sine scumpirea barajului, datorită debitului mare al apei. Dacă barajul va fi amenajat la o distanţă mai mică de 10—15 km, el nu va putea asigura energia suficientă din cauza debitului scăzut al apei şi a insuficienţei presiunii. Porţiunea aleasă a rîului nu trebuie să abunde în adîncimi mari, care de asemenea scumpesc barajul, necesitînd o fundaţie solidă“.

VITEZA APEI

> Între sat şi păduricea de pe deal
> Şerpuieşte un rîu ca o panglică luminoasă.
>
> A. FET

Ce cantitate de apă curge într-un astfel de rîu în timp de 24 de ore?

Nu este greu să calculăm aceasta dacă mai înainte vom măsura viteza apei din rîu. Măsurătoarea este efectuată de doi oameni. Unul dintre ei are un ceas, iar celălalt un plutitor care trebuie să fie uşor de observat, de exemplu, o sticlă închisă pe jumătate goală şi prevăzută cu un steguleţ. Se alege o porţiune mai dreaptă a rîului şi se aşază de-a lungul malului două jaloane A şi B, la o distanţă, să zicem, de 10 m unul de celălalt (fig. 41).

Perpendicular pe AB se pun încă două jaloane C şi D. Unul dintre participanţii la măsurătoare, şi anume cel cu ceasul, se aşază în spatele jalonului D. Celălalt, care are plutitorul, merge puţin mai sus de jalonul A, aruncă pluti-

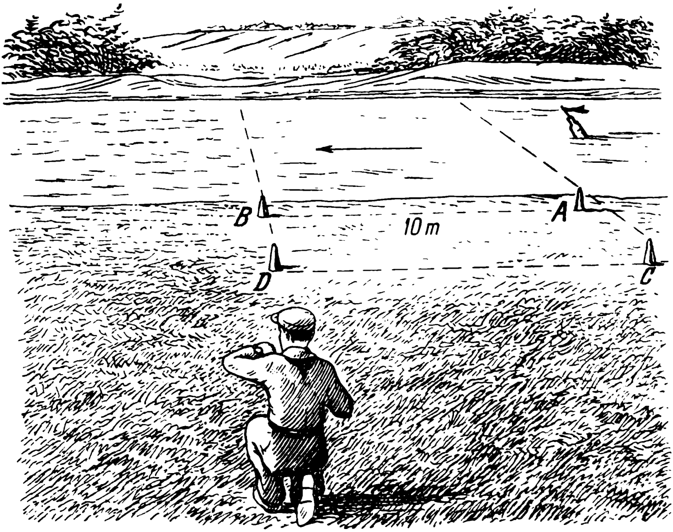


Fig. 41. Măsurarea vitezei de curgere a apei.

torul în apă și se așază apoi în spatele jalonului *C*. Ambii observatori privesc de-a lungul liniei *CA* și *DB* suprafața apei. În momentul în care plutitorul întretaie prelungirea liniei *CA*, primul observator face un semn cu mîna. La acest semnal observatorul al doilea își notează ora, pe care o mai notează încă o dată atunci cînd plutitorul depășește linia *DB*.

Să presupunem că diferența de timp va fi egală cu 20 s. Atunci viteza de curgere a apei din rîu va fi egală cu:

$$\frac{10}{20} = 0{,}5 \text{ m/s}.$$

De obicei, această măsurătoare se repetă de vreo zece ori aruncînd plutitorul în diferite puncte de pe suprafața rîului[1]. Apoi se adună cifrele obținute și se împarte rezultatul la numărul de măsurători. Rezultatul obținut va reprezenta viteza medie a apei din stratul superior al rîului.

[1] În loc să aruncăm de zece ori același plutitor, putem arunca dintr-o dată zece plutitoare, care să se afle la o oarecare distanță unul de celălalt.

Straturile aflate la o adîncime mai mare curg mai încet, iar viteza medie a întregului torent va fi de aproximativ 4/5 din viteza stratului de la suprafață. În cazul nostru va fi, prin urmare, de 0,4 m/s.

Putem determina viteza stratului de la suprafață și printr-un alt procedeu, este adevărat, mai puțin sigur.

Așezați-vă într-o barcă şi vîsliți 1 km (măsurat pe mal) împotriva cursului apei, apoi în sens invers, adică în sensul cursului apei, căutînd să vîsliți tot timpul cu aceeași forță.

Să presupunem că ați parcurs acești 1 000 m împotriva cursului apei în 18 min, iar în sensul lui doar în 6 min. Însemnînd viteza necunoscută a apei cu x, iar viteza cu care vă mişcați, în apa stătătoare, cu y, veți stabili proporțiile:

$$\frac{1\,000}{y-x}=18, \qquad \frac{1\,000}{y+x}=6,$$

de unde

$$y+x=\frac{1\,000}{6}$$

$$y-x=\frac{1\,000}{18}$$

$$2x=110$$

$$x=55$$

Viteza apei la suprafață este egală cu 55 m/min, prin urmare, viteza medie va fi de $\frac{5}{6}$ m/s.

CE CANTITATE DE APĂ CURGE PRIN RÎU

Într-un fel sau altul, se poate calcula întotdeauna viteza cu care curge apa unui rîu. Mai dificilă este partea a doua a lucrărilor pregătitoare necesare pentru calcularea cantității de apă care se scurge, și anume determinarea ariei secțiunii transversale a albiei rîului. Pentru a afla această arie, denumită „secțiunea vie" a rîului, trebuie să desenați această secțiune. Operația se efectuează în modul următor:

Primul procedeu. În locul în care ați determinat lățimea rîului, înfigeți de o parte și de alta a malului, chiar în apropierea apei, cîte un țăruș. Apoi, așezați-vă cu un prieten în barcă și vîsliți de la un țăruș la altul, avînd grijă să vă aflați tot timpul pe linia dreaptă ce unește țărușii. Un vîslaș neexperimentat nu va face față unei astfel de sarcini, mai ales într-un rîu ce curge repede. Prietenul dv. trebuie să fie un vîslaș iscusit; în afară de aceasta, el trebuie să fie ajutat de un al treilea participant la lucrări, care, stînd pe mal, urmărește ca barca să nu se abată de la direcția respectivă, și, cînd este cazul, semnalizează vîslașului în ce parte trebuie să întoarcă barca. La prima traversare a rîului trebuie să numărați doar cîte lovituri de vîslă au fost necesare și apoi să aflăm ce număr de lovituri de vîslă deplasează barca cu 5 sau 10 m. Efectuați apoi o a doua traversare, de data aceasta luînd o prăjină destul de lungă care să aibă diviziuni și după fiecare 5—10 m (măsurați după numărul de lovituri de vîslă) cufundați prăjina vertical pe fundul apei, însemnînd adîncimea rîului în acel loc.

În felul acesta, este posibilă determinarea secțiunii vii a unui rîu puțin adînc și nu prea lat; pentru un rîu lat și cu un debit mare de apă sînt necesare procedee mai complicate; lucrarea va trebui să fie efectuată de specialiști. Amatorul este nevoit să se limiteze la probleme care pot fi rezolvate cu mijloace modeste de măsurat.

Procedeul al doilea. În cazul unui rîu îngust și nu prea adînc vă puteți lipsi și de barcă.

Între țăruși duceți perpendicular pe cursul apei o sfoară prevăzută cu semne sau noduri la o distanță de 1 m, apoi, cufundînd rigla pînă la fund în dreptul fiecărui nod, măsurați adîncimea albiei.

După ce toate măsurătorile au fost executate, schițați înainte de toate, pe o coală de hîrtie milimetrică sau pe o foaie dintr-un caiet de aritmetică, desenul corespunzător profilului transversal al rîului. Veți obține un desen asemănător cu cel prezentat în figura 42. Aria acestei figuri este foarte ușor de calculat, deoarece ea se împarte într-o serie de trapeze (în care cunoașteți ambele baze și înălțimea) și în două triunghiuri aflate la extremități, la care cunoașteți, de asemenea, baza și înălțimea. Dacă scara desenului este 1 : 100, rezultatul îl obțineți direct în metri pătrați.

Dispuneți, așadar, de toate datele necesare pentru calcularea cantității de apă care curge. Este clar că prin secțiunea vie a rîului curge în fiecare secundă un volum de apă egal cu volumul unei prisme a cărei bază este tocmai această secțiune, iar înălțimea o reprezintă viteza medie a apei pe

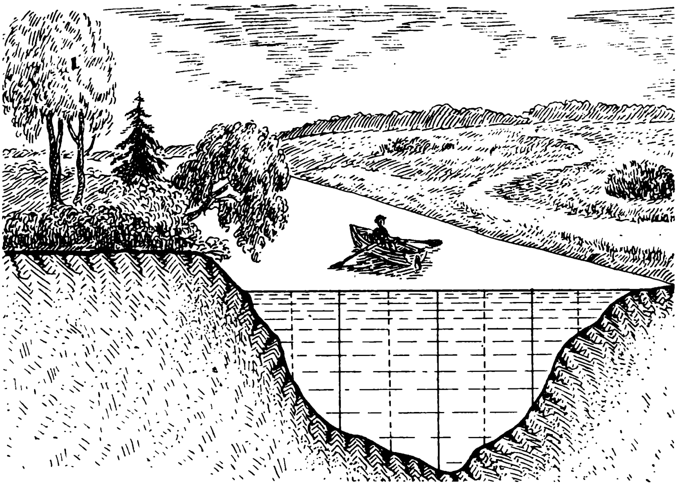


Fig. 42. „Secțiunea vie" a rîului.

secundă. Dacă, de exemplu, viteza medie a apei din rîu este egală cu 0,4 m/s, iar aria secțiunii vii să presupunem că este de 3,5 m², atunci prin această secțiune curg în fiecare secundă

$$3{,}5 \times 0{,}4 = 1{,}4 \text{ m}^3 \text{ de apă,}$$

s-au tot atîtea tone*.

Într-o oră vor trece

$$1{,}4 \times 3\,600 = 5\,040 \text{ m}^3,$$

iar în 24 de ore

$$5\,040 \times 24 = 120\,960 \text{ m}^3,$$

deci peste 100 000 m³. Și cînd ne gîndim, un rîu cu o secțiune vie de numai 3,5 m² este un rîuleț: poate avea, să zicem,

* 1 m³ de apă dulce cîntărește 1 t (1 000 kg).

3,5 m în lățime și 1 m în adîncime, şi deşi poate fi trecut prin vad, ascunde totuşi în sine o energie capabilă să se transforme în electricitate atotputernică. Ce cantitate de apă curge pe zi într-un rîu ca Neva, prin a cărui secțiune vie trec 3 300 m^3 de apă pe secundă! Acesta reprezintă „debitul mediu“ al apei din Neva în dreptul Leningradului. „Debitul mediu“ al apei din Nipru în dreptul Kievului este egal cu 700 m^3.

Tinerii cercetători și viitorii constructori de hidrocentrale trebuie să stabilească ce presiune a apei permite malurile, adică ce diferență de nivel a apei poate să creeze barajul. În vederea acestui scop se bat doi pari la o distanță de 5—10 m de malul rîului, perpendicular pe cursul apei. Apoi, mişcîndu-se pe această linie, ei pun țăruși în locurile unde sînt schimbări de pantă mai caracteristice ale malului (fig. 43). Cu ajutorul unor rigle gradate se măsoară înălțimea cu care un țăruș îi depăşeşte pe ceilalți și distanțele dintre ei. După rezultatele măsurătorilor se desenează profilul malurilor în acelaşi mod cum s-a desenat profilul albiei rîului.

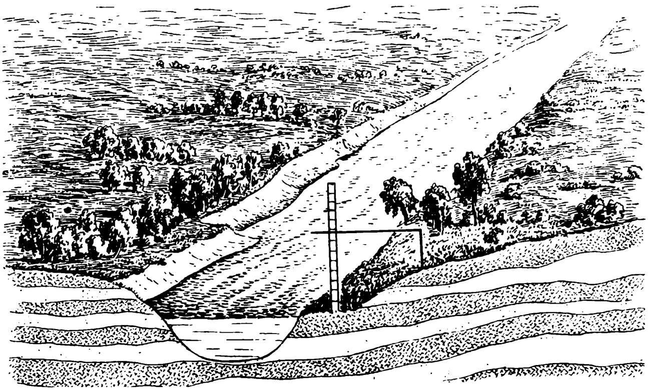


Fig. 43. Determinarea profilului malurilor.

După profilul malurilor se poate calcula ce nivel permit ele.

Să presupunem că nivelul apei poate fi ridicat cu ajutorul barajului la o înălțime de 2,5 m. În acest caz, putem aprecia puterea probabilă a viitoarei hidrocentrale.

În vederea acestui scop, energeticienii recomandă ca 1,4 („debitul“ pe secundă al rîului) să fie înmulțit cu 2,5 (înălțimea nivelului apei) și cu 6 (coeficient care depinde de pierderile de energie în mașini). Rezultatul se obține în kilowați. Astfel,

$$1{,}4 \times 2{,}5 \times 6 = 21 \text{ kW}.$$

Întrucît nivelul rîului, prin urmare și debitul lui, se modifică în cursul anului, pentru calcul trebuie să aflăm acel debit care este specific pentru rîu în cea mai mare parte a anului.

ROATA HIDRAULICĂ

Problemă

O roată cu palete se fixează aproape de fundul rîului, în așa fel încît să se poată învîrti ușor. În ce sens se va mișca roata, dacă cursul apei este îndreptat de la dreapta la stînga (fig. 44)?

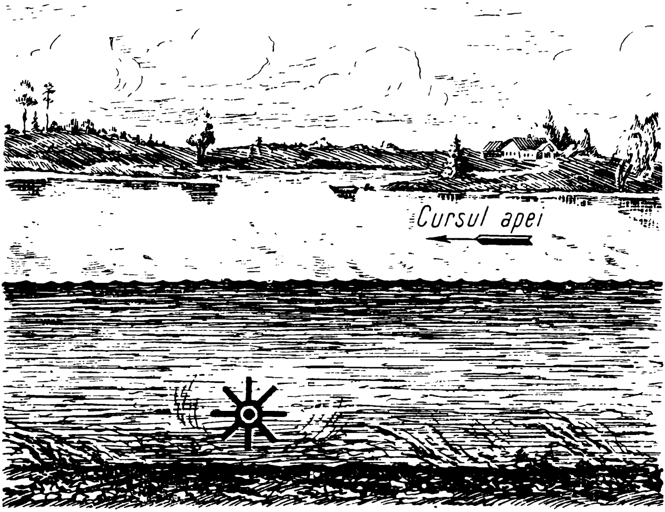


Fig. 44. În ce sens se va învîrti roata?

Rezolvare

Roata se va învîrti în sens invers sensului de mişcare a acelor de ceasornic. Viteza apei din straturile aflate la o adîncime mai mare este mai mică decît viteza apei din straturile situate mai la suprafaţă, prin urmare, presiunea pe paletele superioare va fi mai mare decît pe cele inferioare.

PELICULA ÎN CULORILE CURCUBEULUI

Privind suprafaţa unui rîu în care se scurge apa de la o uzină putem observa deseori, în apropierea acestei scurgeri, jocuri frumoase de culori. Uleiul (de exemplu, cel de maşină) împreună cu apa de la uzină care se scurge în rîu rămîn la suprafaţă, deoarece sînt mai uşoare şi se întind într-un strat extrem de subţire. Oare am putea măsura sau evalua, cel puţin aproximativ, grosimea unei astfel de pelicule?

Problema pare complicată, însă rezolvarea ei nu este prea dificilă. Bănuiţi că n-o să ne apucăm de o treabă atît de lipsită de succes ca măsurarea directă a grosimii acestei pelicule. Vom afla grosimea peliculei pe cale indirectă, mai pe scurt, o vom calcula.

Se ia o anumită cantitate de ulei de maşină, de exemplu 20 g, şi se toarnă în apă ceva mai departe de mal (din barcă). Cînd uleiul a luat o formă mai mult sau mai puţin circulară, se măsoară din ochi diametrul acestei pete. Cunoscînd diametrul, se poate afla suprafaţa. Deoarece se cunoaşte volumul uleiului luat (poate fi calculat cu uşurinţă după greutate), grosimea necunoscută a peliculei va rezulta de la sine. Să dăm un exemplu.

Problemă

Un gram de petrol întinzîndu-se pe suprafaţa apei formează o pată cu un diametru de 30 cm[1]. Ce grosime are pelicula de petrol de pe suprafaţa apei? Se ştie că 1 cm^3 de petrol cîntăreşte 0,8 g.

[1] Cantitatea obişnuită de petrol consumată pentru acoperirea bazinelor de apă în vederea distrugerii larvelor ţînţarului care produce malaria este de 400 kg/ha.

Rezolvare

Vom găsi volumul peliculei, care este, evident, egal cu volumul cantității de petrol luate. Dacă 1 cm^3, de petrol cîntărește 0,8 g, atunci pentru 1 g corespunde $\frac{1}{0,8} = 1,25$ cm^3, sau 1 250 mm^3. Suprafața unui cerc cu diametrul de 30 cm sau 300 mm este egală cu 70 000 mm^2. Grosimea necunoscută a peliculei va fi egală cu volumul împărțit la suprafața bazei:

$$\frac{1\,250}{70\,000} = 0,018 \text{ mm},$$

adică mai puțin de 1/50 mm. Măsurarea directă a unei astfel de grosimi este imposibilă cu mijloace obișnuite.

Peliculele de ulei și de săpun se întind în straturi și mai subțiri, care pot atinge 0,0001 mm și chiar mai puțin. „O dată — povestește fizicianul englez Ch. Boyce în cartea sa *Baloane de săpun* — am efectuat într-un iaz următoarea experiență. Pe suprafața apei s-a turnat o lingură de ulei de măsline. Dintr-o dată s-a format o pată mare, cu diametrul de 20—30 m. Deoarece pata era de 1 000 de ori mai mare în lungime și în lățime decît lingura grosimea stratului de ulei de pe suprafața apei trebuia să fie de circa 1 : 1 000 000 din grosimea stratului de ulei din lingură sau, aproximativ, 0,000002 mm".

CERCURI PE APĂ

Problemă

Ați urmărit, desigur, nu o dată cercurile care se formează într-o apă liniștită cînd aruncăm o piatră (fig. 45). Fără îndoială că nu v-a fost greu să vă explicați acest fenomen instructiv al naturii: perturbația se răspîndește din punctul inițial în toate direcțiile cu aceeași viteză; de aceea, în fiecare moment toate punctele perturbate trebuie să fie situate la distanțe egale de locul apariției perturbației, adică pe cerc.

Să vedem, în continuare, ce se întîmplă într-o apă curgătoare. Oare valurile produse de o piatră aruncată în apa unui rîu repede trebuie să aibă, de asemenea, forma unui cerc sau forma lor va fi alungită?

La prima vedere s-ar putea crede că într-o apă curgătoare valurile circulare trebuie să se alungească în partea în care le antrenează curentul: perturbaţia se transmite mai repede

Fig. 45. Cercuri pe apă.

pe cursul apei decît împotriva lui sau în direcţie laterală. Din această cauză, părţile perturbate ale suprafeţei apei ar trebui, după aparenţe, să se situeze pe o anumită linie curbă închisă, care în orice caz nu poate fi un cerc.

În realitate lucrurile nu stau aşa. Aruncînd pietre în rîul cel mai repede, vă puteţi convinge că valurile obţinute sînt perfect circulare, absolut la fel ca şi cele din apa stătătoare. Din ce cauză?

Rezolvare

Să raţionăm în modul următor. Dacă apa nu ar curge, valurile ar fi circulare. Ce schimbare aduce curgerea lor? Ea antrenează fiecare punct al undei circulare în direcţia indicată de săgeţi (fig. 46, stînga); totodată, aceste puncte se transportă cu o viteză egală pe linii drepte paralele, adică la distanţe egale. Dar „transportul paralel" nu modifică forma figurii. Într-adevăr, în urma unui astfel de transport punctul 1 (fig. 46, dreapta) va ajunge în punctul 1', iar punctul 2 în punctul 2' etc., patrulaterul 1, 2, 3, 4, va fi înlocuit de patrulaterul 1'2'3'4', egal cu el, după cum se observă uşor din paralelogramele care s-au format 1 2 2' 1',

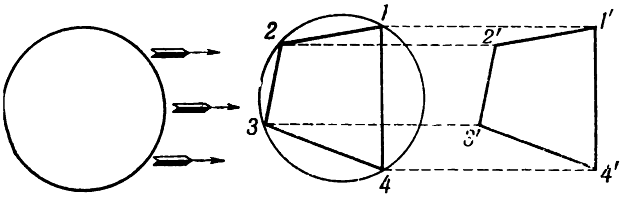


Fig. 46. Cursul apei nu modifică forma valurilor.

2 3 3' 2', 3 4 4' 3' etc. Luînd pe cerc mai mult de patru puncte vom obţine, de asemenea, poligoane egale; în sfîrşit, luînd o infinitate de puncte, adică cercul întreg, vom obţine prin transportul paralel un cerc egal.

Iată de ce mişcarea de translaţie a apei nu modifică forma valurilor, ele rămînînd circulare şi în apa curgătoare. Deosebirea constă doar în aceea că la suprafaţa lacului cercurile nu se deplasează (dacă facem abstracţie de faptul că ele se propagă de la centrul lor fix) iar pe suprafaţa rîului cercurile se deplasează împreună cu centrul lor cu o viteză egală cu viteza apei[1].

OBUZUL EXPLODAT

Problemă

Să ne ocupăm de o problemă care, aparent, nu are nici o legătură cu cea anterioară, dar în realitate, după cum vom vedea, are o strînsă contingenţă cu tema acesteia.

[1] Esenţial în aceste raţionamente este faptul că mişcarea de translaţie a apei se produce cu aceeaşi viteză pentru toate punctele undei circulare apărute. Dacă valurile provocate de o piatră aruncată în rîu ar apărea însă în acea parte de pe suprafaţa apei unde vitezele de translaţie ale particulelor nu sînt egale (de exemplu, în apropierea malului atunci forma circulară a undelor nu se mai păstrează. — *Nota red. ruse.*

Imaginați-vă un proiectil care zboară sus în aer. Iată, a început să coboare și deodată a explodat; schijele se răspîndesc în toate părțile. Să presupunem că schijele au fost azvîrlite cu aceeași forță și zboară fără a întîmpina vreo rezistență din partea aerului. Cum se vor distribui schijele după o secundă de la explozie, dacă în acest timp ele nu ajung încă la pămînt?

Rezolvare

Problema se aseamănă cu cea referitoare la cercurile de pe apă. Și aici se pare că schijele trebuie să se așeze după o anumită traiectorie, alungită în jos, în direcția căderii deoarece schijele azvîrlite în sus zboară mai încet decît cele azvîrlite în jos. Totuși, nu va fi greu să demonstrăm că schijele proiectilului nostru imaginar trebuie să se așeze pe suprafața unei sfere. Să presupunem că nu există gravitație; se înțelege că în acest caz toate schijele vor ajunge într-o secundă la o distanță absolut egală de locul exploziei, adică se vor situa pe suprafața unei sfere. Să introducem acum în acțiune forța gravitației. Sub influența acesteia schijele trebuie să coboare; dar noi știm că toate corpurile cad cu aceeași viteză[1] și, prin urmare, schijele trebuie să coboare într-o secundă cu o distanță egală, pe linii drepte paralele. O astfel de translație, după cum am văzut, nu modifică forma figurii, sfera rămînînd tot sferă.

Așadar, schijele fantasticului nostru proiectil trebuie să formeze o sferă care, parcă umflîndu-se, se lasă în jos cu viteza unui corp în cădere liberă.

VALURILE PRODUSE DE UN VAS

Să ne întoarcem la rîu. Stînd pe un pod, observați urma pe care o lasă un vas ce înaintează cu viteză. Veți vedea cum de la proră pleacă, sub un unghi oarecare, două creste de spumă.

De unde apar ele? Și de ce unghiul dintre ele este cu atît mai ascuțit cu cît vasul înaintează mai repede?

---

[1] Diferențele sînt condiționate de rezistența aerului, de care am făcut abstracție în problema noastră.

Pentru a ne explica cauza apariției acestor creste, să ne întoarcem încă o dată la cercurile divergente care apar pe suprafața apei datorită pietricelelor aruncate în ea.

Aruncînd în apă mai multe pietricele una după alta, la același interval de timp, vom putea observa pe suprafața apei cercuri de diferite mărimi; cu cît pietricica este aruncată mai tîrziu, cu atît mai mic este cercul rezultat. Dacă vom arunca pietricelele de-a lungul unei linii drepte, atunci cercurile provocate de ele vor da naștere unui val asemănător aceluia de la prora corăbiei. Cu cît pietricele vor fi mai mici și le vom arunca mai des, cu atît asemănarea va fi mai evidentă. Cufundînd în apă o prăjină și trăgînd-o apoi la suprafață, parcă ați înlocui, căderea discontinuă a pietricelelor cu o altă cădere, continuă, și atunci vom vedea un val exact cu cel care apare la prora corăbiei.

Acestui tablou sugestiv rămîne să-i mai adăugăm cîteva amănunte pentru a-l face pe deplin clar. Tăind apa, prora corăbiei dă naștere în fiecare moment unui val asemănător valului format datorită pietrei aruncate în apă. Cercul se lățește în toate părțile, însă în acest timp vasul înaintează și dă naștere celui de-al doilea val circular, după care urmează imediat cel de-al treilea etc. Formarea întreruptă a cercurilor provocate de pietricele este înlocuită de apariția neîntreruptă a cercurilor provocate de vas, de unde rezultă și tabloul reprezentat în figura 47. Întîlnindu-se între ele, crestele valurilor învecinate se sparg unele de celelalte;

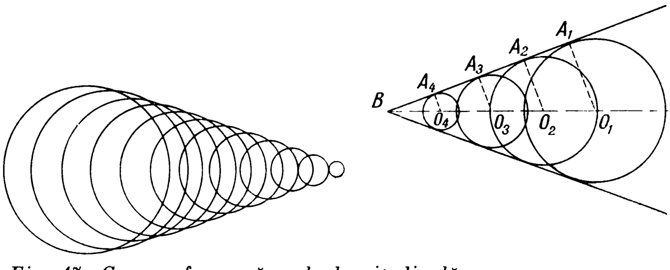


Fig. 47. Cum se formează unda longitudinală.

rămîn neatinse numai cele două sectoare nu prea întinse ale circumferinței totale, care formează părțile lor exterioare. Aceste sectoare exterioare contopindu-se, formează două creste compacte, tangente exterioare la toate valurile circulare (fig. 47, dreapta).

Astfel se explică formarea crestelor de pe apă care se văd în urma vasului şi, în genere, în urma oricărui corp care înaintează pe suprafaţa apei cu o viteză suficient de mare.

De aici, reiese clar că fenomenul descris este posibil numai atunci cînd corpul se mişcă mai repede decît valurile apei. Dacă vom trage prăjina încet prin apă n-o să vedem nici un fel de creste: valurile circulare se vor situa unul în interiorul celuilalt şi nu vom putea trasa o tangentă comună la ele.

Crestele divergente pot fi observate şi în cazul cînd corpul stă pe loc, iar apa curge pe lîngă el. Dacă cursul rîului este suficient de repede, atunci asemenea creste se formează în apa ce înconjură fundaţiile podurilor. Forma valurilor obţinută aici este mai precisă decît cea rezultată de exemplu, de la un vas, deoarece formarea lor nu este tulburată, de mişcarea elicei.

După ce am lămurit aspectul geometric al situaţiei, să încercăm rezolvarea următoarei probleme.

Problemă

De ce anume depinde unghiul de deschidere dintre cele două laturi ale undei produse de un vapor?

Rezolvare

Din centrul undelor circulare să ducem raze la sectoarele corespunzătoare de pe creasta liniară, adică în punctele de pe tangenta comună (fig. 47, dreapta). Este uşor de înţeles că O_1B este drumul parcurs într-un anumit timp de prora corăbiei, iar O_1A_1 este distanţa pe care se propagă în acelaşi timp perturbaţia apei. Raportul $\frac{O_1A_1}{O_1B}$ este sinusul unghiului O_1BA_1, dar în acelaşi timp şi raportul dintre viteza corăbiei şi a perturbaţiei. Prin urmare, unghiul B dintre crestele undei produse de vas este tocmai de două ori unghiul al cărui sinus este egal cu raportul dintre viteza mişcării valurilor circulare şi viteza navei.

Viteza de propagare a valurilor circulare în apă aproape că nu depinde de mişcarea vasului care le-a produs; din această cauză, unghiul de deschidere a laturilor conului format de undă depinde în esență, de viteza corăbiei: sinusul unghiului pe jumătate este invers proporțional cu această viteză. Și reciproc, după mărimea unghiului putem aprecia de cîte ori viteza vaporului este mai mare decît viteza valurilor. Dacă, de exemplu, unghiul dintre laturile undei frontale este de 30°, ca la majoritatea navelor maritime pentru transportul mărfurilor și pasagerilor, atunci sinusul unghiului pe jumătate (sin 15°) este egal cu 0,26; aceasta înseamnă că viteza vaporului este mai mare decît viteza valurilor de 1/0,26 ori, adică aproximativ de patru ori.

VITEZA OBUZELOR DE TUN

Problemă

Unde asemănătoare celor examinate mai sus iau naștere în aer, în urma unui glonte sau proiectil de artilerie.

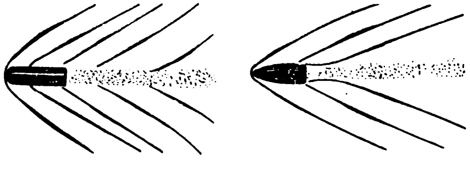


Fig. 48. Unda balistică pe care o formează un proiectil în zbor.

Există diferite procedee pentru fotografierea proiectilului în zbor; în figura 48 sînt reprezentate două asemenea imagini ale unor proiectile ce zboară cu o viteză diferită. În figură se vede clar „unda balistică frontală", cum este numită în acest caz. Proveniența ei este asemănătoare cu cea a valului produs de vapor. Și aici se pot folosi aceleași raporturi geometrice, și anume: sinusul jumătății unghiului de deschidere a undei balistice este egal cu raportul dintre viteza de propagare în aer a perturbației și viteza de zbor a proiectilului. Însă, perturbațiile în mediul aerian se transmit cu o viteză apropiată de viteza sunetului, adică 330 m/s. Din această cauză este ușor să stabilim cu aproximație viteza unui proiectil, dacă avem o fotografie care-l reprezintă zburînd. Cum vom proceda pentru a realiza aceasta, pentru cele două imagini anexate aici?

Rezolvare

Să măsurăm unghiul de deschidere a laturilor undei balistice din figura 48. În primul caz, este de circa 80°, iar în al doilea de aproximativ 55°. Jumătatea lor va fi 40° și 27½°. Sin 40° = 0,64, sin 27½° = 0,46. Prin urmare, viteza de propagare a undelor în aer, adică 330 m/s reprezintă în primul caz 0,64 din viteza de zbor a proiectilului, iar în cel de-al doilea 0,46. De aici deducem că viteza primului proiectil este egală cu $\frac{330}{0,64} = 520$ m/s, iar viteza celuilalt cu $\frac{330}{0,46} = 720$ m/s.

Vedem că raționamente geometrice destul de simple, cu un oarecare sprijin din partea fizicii, ne-au ajutat să rezolvăm o problemă ce părea la prima vedere extrem de complicată: să stabilim cu ajutorul clișeelor viteza unui proiectil în zbor în momentul fotografierii lui. (Acest calcul este aproximativ, deoarece nu se iau în considerație unele împrejurări secundare.)

Problemă

Pentru cei ce doresc să efectueze în mod independent un asemenea calcul cu privire la viteza ghiulelelor, se dau trei fotografii care reprezintă obuze ce zboară cu viteze diferite (fig. 49).

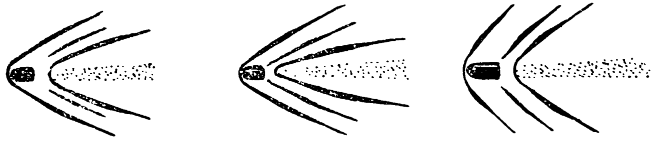


Fig. 49. Cum se calculează viteza proiectilelor aflate în zbor?

Cercurile de pe apă ne-au abătut pentru un timp în domeniul artileriei. Să ne întoarcem din nou la rîu și să analizăm o problemă hindusă privitoare la o floare de lotus.

Vechii hinduși obișnuiau să-și exprime în versuri problemele și regulile. Iată una din aceste probleme:

Problemă

Deasupra unui lac liniștit,
Se înalță o floare de lotus, mare de o jumătate de picior
Ea crește stingheră. Și o rafală de vînt
A dus-o în altă parte...
Un pescar a găsit-o într-o primăvară timpurie
La o distanță de două picioare de locul unde creștea.
Așadar, vă voi pune o întrebare:
Cît este de adîncă aici
Apa din lac?

Rezolvare

Să notăm cu x (fig. 50) adîncimea necunoscută CD a heleșteului. Atunci, după teorema lui Pitagora, vom avea:

$$BD^2 - x^2 = BC^2,$$

adică

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - x^2 = 2^2,$$

de unde

$$x^2 + x + \frac{1}{4} - x^2 = 4, \ x = 3\frac{3}{4}.$$

Adîncimea necunoscută este egală cu $3\frac{3}{4}$ picioare.

Pe malul unui rîu sau al unui heleșteu nu prea adînc, veți găsi întotdeauna o plantă acvatică care vă va furniza materialul concret pentru o asemenea problemă și veți putea calcula adîncimea bazinului în acest loc, fără a avea nevoie de vreun instrument și chiar fără a vă uda pe mîini.

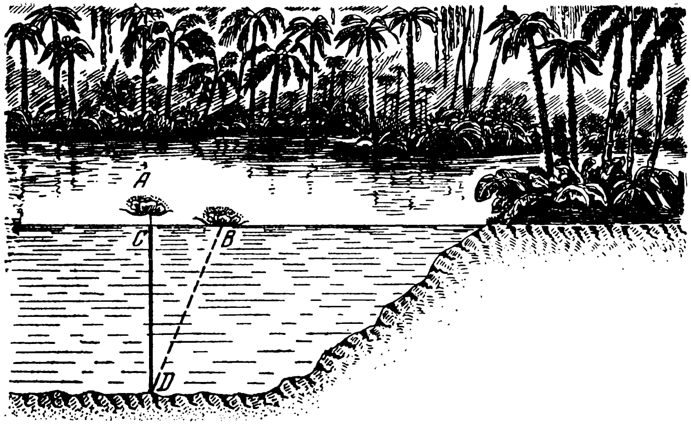


Fig. 50. Problema hindusă privitoare la floarea de lotus.

CERUL ÎNSTELAT OGLINDIT ÎN RÎU

Rîul şi în timpul nopţii îi oferă geometrului probleme. Vă amintiţi cuvintele lui Gogol referitoare la Nipru: „Stelele lucesc şi luminează lumea şi toate cîte sînt se oglindesc în Nipru. Pe toate le ţine Niprul la negru-i sîn şi nu se întîmplă să-i scape vreuna, afară numai dacă pe cer se stinge".

Într-adevăr, cînd te afli pe malul unui rîu mai lat, ţi se pare că în oglinda apei se reflectă întreaga boltă înstelată. Oare aşa stau lucrurile în realitate? Oare toate stelele se oglindesc în rîu?

Să facem următorul desen (fig. 51) Fie A ochiul observatorului ce se află pe malul abrupt al rîului, MN suprafaţa apei. Ce porţiune a cerului înstelat poate să vadă în oglinda rîului un observator care se află în punctul A?

Pentru a răspunde la această întrebare, să ducem din punctul A perpendiculara AD pe dreapta MN şi s-o prelungim pînă în punctul A' astfel încît să avem $AD = A'D$. Dacă ochiul observatorului s-ar afla în punctul A', el ar putea să vadă numai acea porţiune de cer înstelat care se află în interiorul unghiului $BA'C$. Observatorul care priveşte din punctul A are exact acelaşi cîmp vizual. Stelele ce se află în afara acestui unghi nu sînt vizibile pentru observator; razele lor reflectate îi trec pe lîngă ochi.

Cum ne convingem de acest fapt? Cum demonstrăm că steaua S, de exemplu, care se află în afara unghiului $BA'C$, nu este văzută de observatorul nostru în oglinda rîului?

Să urmărim raza care vine de la ea şi cade în apropiere de mal, în punctul M; ea se va reflecta, conform legilor fizicii după o direcție care face cu normala MP la suprafața apei un unghi egal cu unghiul de incidență SMP şi, prin urmare este mai mic decît unghiul PMA (aceasta se poate demonstra cu uşurință bazîndu-ne pe egalitatea triunghiurilor ADM şi $A'DM$); aşadar, raza reflectată trebuie să treacă alături de punctul A. Cu atît mai mult razele stelei S care se reflectă în puncte situate mai departe decît punctul M nu vor intra în cîmpul vizual al observatorului.

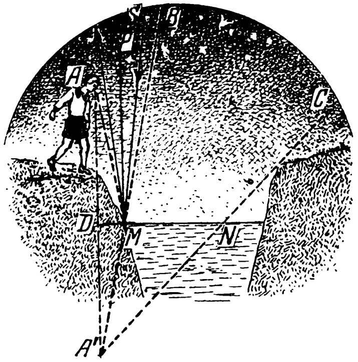


Fig. 51. Ce porțiune a cerului înstelat poate fi văzută în oglinda rîului.

Prin urmare, descrierea lui Gogol este exagerată: în Nipru nu se poate reflecta întreaga boltă cerească.

DRUMUL PESTE RÎU

Problemă

Între punctele A şi B se află un rîu (sau canal) cu maluri aproximativ paralele (fig. 52). Trebuie să construim peste rîu un pod care să formeze un unghi drept cu malurile sale. Care este locul unde trebuie plasat podul, în aşa fel încît distanța de la A la B să fie minimă?

Rezolvare

Ducînd prin punctul *A* (fig. 53) o dreaptă perpendiculară pe direcţia rîului şi măsurînd din *A* un segment *AC* egal cu lăţimea rîului, unim punctele *C* şi *B*. Trebuie să contruim podul în punctul *D*, pentru ca drumul de la *A* la *B* să fie cel mai scurt.

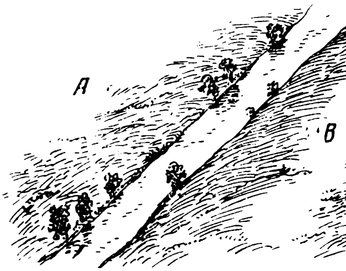


Fig. 52. Unde să construim podul care să formeze un unghi drept cu malurile rîului, în aşa fel ca drumul de la A la B să fie cel mai scurt.

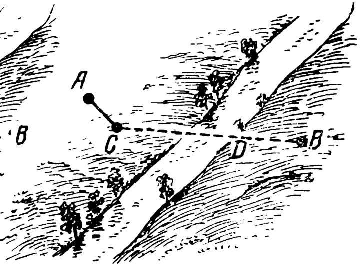


Fig. 53. Locul de construcţie a podului a fost ales

Într-adevăr, construind podul *DE* (fig. 54) şi unind *E* cu *A* vom obţine drumul *AEDB*, unde *AE* este paralelă la *CD* (*AEDC* este un paralelogram, deoarece laturile lui opuse *AC* şi *ED* sînt egale şi paralele). Din această cauză, drumul *AEDB* este egal ca lungime cu drumul *ACB*. Este uşor de demonstrat că orice alt drum va fi mai lung decît acesta. Să presupunem că un drum oarecare *AMNB* (fig. 55) ar fi mai scurt decît *AEDB*, deci, mai scurt decît *ACB*. Unind punctul *C* cu *N* vedem că $CN = AM$. Prin urmare, drumul $AMNB = ACNB$. Însă *CNB* este evident mai mare decît *CB*; aşadar, *ACNB* este mai mare decît *ACB*, de unde rezultă că este mai mare şi decît *AEDB*. În felul acesta, drumul *AMNB* s-a dovedit a fi nu mai scurt, ci mai lung decît drumul *AEDB*.

Acest raţionament poate fi aplicat la orice poziţie a podului ce nu coincide cu *ED*; cu alte cuvinte, drumul *AEDB* este într-adevăr drumul cel mai scurt.

SĂ CONSTRUIM DOUĂ PODURI

Problemă

S-ar putea să ne aflăm în fața unui caz mai complicat, și anume cînd trebuie să găsim drumul cel mai scurt dintre punctele *A* și *B* peste un rîu pe care trebuie să-l traversăm

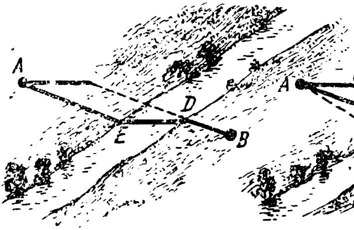


Fig. 54. Podul a fost construit.

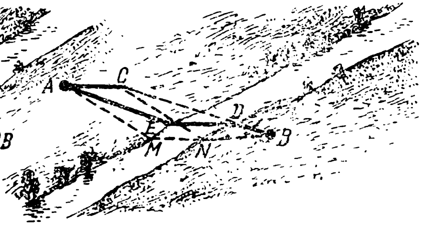


Fig. 55. Drumul AEDB *este într-adevăr cel mai scurt.*

de două ori sub unghiuri drepte la malurile sale (fig. 56). În ce locuri de pe rîu va trebui să construim podurile în acest caz?

Rezolvare

Ducem din punctul *A* (fig. 56, dreapta) un segment *AC* egal cu lățimea rîului în porțiunea *I* și perpendicular pe malurile lui. Din punctul *B* să ducem un segment *BD*, egal

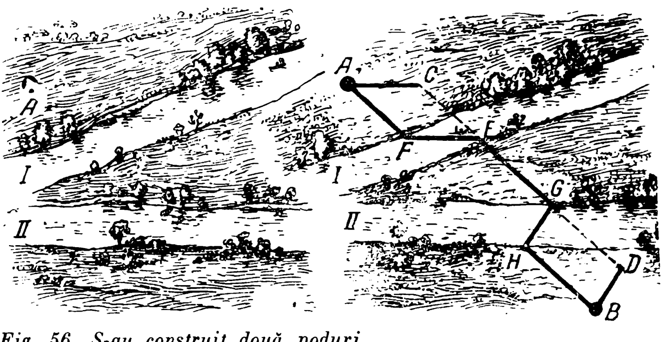


Fig. 56. S-au construit două poduri.

cu lățimea rîului în porțiunea *II* și care să fie perpendicular, de asemenea, pe malurile lui. Punctele *C* și *D* le unim cu o linie dreaptă. În punctul *E* se va construi podul *EF*, iar în punctul *G*, podul *GH*. Drumul *AFEGHB* este drumul căutat; el este cel mai scurt drum de la *A* la *B*.

Cititorul va înțelege singur cum trebuie să demonstreze aceasta, dacă va raționa în acest caz, așa după cum am raționat în problema anterioară.

Capitolul III

GEOMETRIA ÎN CÎMP LIBER

DIMENSIUNILE VIZIBILE ALE LUNII

Ce mărime vi se pare că are pe cer Luna plină? La această întrebare vom primi de la fiecare un alt răspuns.

Luna e mare „cît o farfurie", „cît un măr", „cît un cap de om" şi aşa mai departe — aprecieri extrem de neprecise, de vagi, care nu dovedesc decît că aceia care au răspuns nu pricep în ce constă, în fond, întrebarea ce li s-a pus.

Un răspuns exact la o întrebare, s-ar părea, atît de obişnuită poate să dea doar acela care îşi dă limpede seama ce anume trebuie să înţelegem prin mărimea „aparentă" a obiectului. Sînt puţini aceia care bănuiesc că aci este vorba de mărimea unui anumit unghi, şi anume, a acelui unghi pe care-l formează două linii drepte duse la ochiul nostru de la punctele situate la extremităţile obiectului examinat; acest unghi se numeşte „unghi vizual" sau „mărimea unghiulară a obiectului" (fig. 57). De aceea, cînd mărimea Lunii pe cer este apreciată în comparaţie cu dimensiunile unei farfurii, sau ale unui măr, asemenea răspunsuri ori nu au nici un sens, ori trebuie să însemne că Luna se vede pe cer sub acelaşi unghi vizual ca o farfurie sau un măr. Dar, o asemenea indicaţie, ea singură, nu este de ajuns: o farfurie sau un măr, le vedem sub diferite unghiuri, în funcţie de distanţa care le desparte de noi: în apropiere le vedem sub unghiuri mai mari, în depărtare sub unghiuri mai mici. Pentru ca răspunsul să nu fie imprecis, trebuie să arătăm de la ce distanţă privim farfuria sau mărul.

Compararea dintre dimensiunile unor obiecte îndepărtate şi dimensiunile altora, despre care nu se spune la ce distanţă se află, este un procedeu literar foarte obişnuit, pe care l-au folosit şi mari scriitori. El produce, e drept, o anumită impresie, datorită apropierii sale de psihologia obişnuită a majorităţii oamenilor, dar nu dă naştere la o imagine clară. Iată un exemplu din *Regele Lear* de Shakespeare. E vorba de un fragment în care Edgard descrie panorama ce se deschide înaintea ochilor de pe coasta înaltă a țărmului mării:

Te-apucă spaima cînd privești în jos;
Sub noi e-un stol de ciori, ce par de-aici,
Un norișor de gîze; colo-atîrnă,
La jumătatea hăului de stînci,
Cît capul lui, un om care culege
Mărar-de-mare — cruntă meserie!
Pescarii care umblă-acum pe plajă
Par niște șoricei, și mai departe,
Un bastiment la ancoră-i mai mic
Decît o barcă-n ceață, o părere...
Iar bărcile nici că se mai zăresc...

Aceste comparații ne-ar da o reprezentare precisă cu privire la distanță, dacă ar fi însoțite de unele indicații referitoare la gradul de depărtare al obiectelor comparate (muște, capul omului, șoareci, bărci...). La fel, și în comparația care se face între Lună și farfurie sau măr, sînt necesare indicații privitoare la distanța la care trebuie să se afle aceste obiecte obișnuite față de ochiul observatorului.

Şi distanța aceasta se dovedește mult mai mare decît se crede de obicei. Ținînd în mîna întinsă un măr, acoperi cu

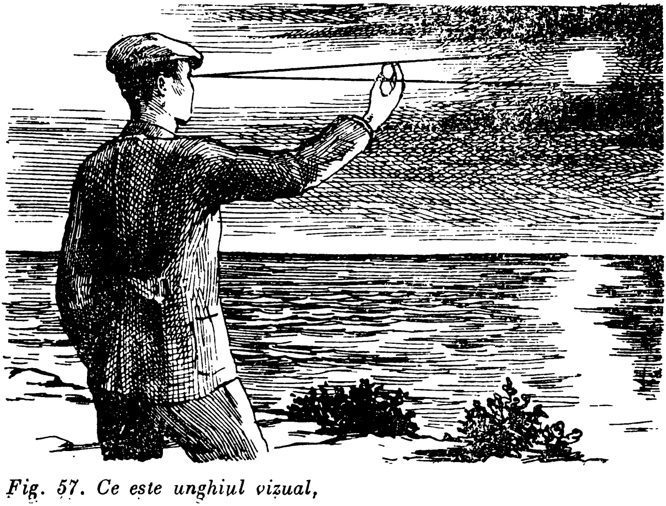


Fig. 57. Ce este unghiul vizual,

el nu numai Luna, dar și o mare porțiune din cer. Atîrnați mărul de capătul unui fir de ață și depărtați-vă treptat de el, pînă cînd va acoperi exact discul Lunii pline; în această poziție mărul și Luna vor avea pentru dv. aceeași mărime vizibilă. Măsurînd distanța de la ochiul dv. pînă la măr, vă veți convinge că ea este egală aproximativ cu 10 m. Iată cît de departe trebuie să atîrnăm mărul, pentru ca el să pară, într-adevăr, de aceeași mărime cu Luna de pe cer! Iar farfuria ar fi trebuit s-o depărtăm cam la o distanță de 30 m, adică la 50 de pași.

Aceste afirmații pot să pară neverosimile oricui aude așa ceva pentru prima dată, și totuși este vorba de realități incontestabile, care rezultă din faptul că noi vedem Luna sub un unghi vizual nu mai mare decît aproximativ jumătate de grad[1]. În viața de toate zilele aproape niciodată n-avem prilejul să apreciem unghiuri, de aceea majoritatea oamenilor au o idee extrem de vagă despre mărimea unui unghi de un mic număr de grade — de pildă, un unghi de 1°, 2° sau 5° (nu mă refer la geodeziști, desenatori tehnici și alți specialiști care în practica lor măsoară în mod obișnuit unghiuri). Noi apreciem mai mult sau mai puțin real numai unghiurile mai mari, mai ales dacă ne vine în gînd să le comparăm cu unghiurile cunoscute dintre acele ceasornicului; căci tuturor le sînt binecunoscute, desigur, unghiurile de 90°, 60°, 30°, 120°, 150°, pe care pînă într-atît ne-am obișnuit să le vedem pe cadranul ceasului (la ora 3, 2, la 1, la 4, la 5), încît chiar fără să deosebim cifrele, ghicim timpul după mărimea unghiulară dintre ace. Obiectele mărunte și izolate le vedem, de obicei, sub un unghi mult mai mic și din această cauză nu știm să apreciem, fie chiar aproximativ, unghiurile vizuale.

UNGHIUL VIZUAL

Ca să vedem dintr-un exemplu concret ce înseamnă un unghi de 1°, să calculăm la ce distanță trebuie să se depărteze de noi un om de statură mijlocie (1,7 m), pentru ca să

[1] În realitate, diametrul aparent al Lunii, sau unghiul vizual sub care o observăm nu sînt constante. Luna mișcîndu-se pe orbita sa, distanța dintre ea și Pămînt variază între 354 000 și 406 000 km. Prin urmare, unghiul vizual se schimbă și el, fiind cuprins între 33′40″ și 29′24″ — *Nota red. ruse*.

ne apară sub un astfel de unghi. Traducînd această problemă în limbaj geometric, trebuie să calculăm raza unui cerc, al cărui arc de 1° are o lungime de 1,7 m (la drept vorbind, aceasta nu este lungimea arcului ci a coardei, dar pentru unghiurile mici diferenţa dintre lungimile arcului şi coardei este neînsemnată). Vom judeca precum urmează: dacă arcul de 1° este egal cu 1,7, atunci cercul care are 360°, va avea o lungime de $1{,}7 \times 360 = 610$ m; raza este de 2π ori mai mică decît lungimea cercului şi dacă vom lua pentru numărul π aproximativ $\frac{22}{7}$, atunci raza va fi egală cu:

$$610 : \frac{44}{7} \approx 98 \text{ m}$$

Aşadar, vedem un om sub un unghi de 1° dacă el se află la o distanţă de noi egală cu aproximativ 100 m (fig. 58). Dacă el se va îndepărta la o distanţă de două ori mai mare, adică la 200 m, el se va vedea sub un unghi de jumătate de grad; dacă se va apropia la o distanţă de 50 m, unghiul vizual va creşte pînă la 2° etc.

De asemenea, nu este greu să calculăm că o prăjină lungă de 1 m trebuie să ne apară sub un unghi de 1° la o distanţă de $360 : \frac{44}{7} \approx 57$ m. Cam sub acelaşi unghi vedem 1 cm

Fig. 58. O siluetă omenească se vede la o distanţă de 100 m sub un unghi de 1°.

de la o distanță de 57 cm, 1 km de la distanța de 57 km etc. și, în general, orice obiect de la o distanță de 57 de ori mai mare decît diametrul său. Dacă vom memora acest număr 57, vom putea face într-un mod simplu şi rapid toate calculele necesare cu privire la mărimea unghiulară a obiectelor. De exemplu, dacă dorim să stabilim cît de departe trebuie să aşezăm un măr care are un diametru de 9 cm pentru a-l vedea sub un unghi de 1°, va fi suficient să înmulțim 9 cu 57 și obținem 513 cm sau aproximativ 5 m; de la o distanță de două ori mai mare, el se vede sub un unghi de două ori mai mic, adică de jumătate de grad, deci, pare cam de mărimea Lunii.

În acelaşi mod, vom putea calcula distanța la care trebuie să se afle orice obiect pentru a părea de aceeași mărime cu discul Lunii.

FARFURIA ȘI LUNA

Problemă

La ce distanță trebuie să depărtăm de noi o farfurie cu diametrul de 25 cm pentru ca ea să pară de aceeași mărime cu Luna, așa cum o vedem pe cer?

Rezolvare

$$25 \times 57 \times 2 \approx 28 \text{ m}$$

LUNA ȘI MONEDELE DE ARAMĂ

Problemă

Efectuați același calcul pentru o monedă de 1 leu (diametrul de 25 mm) și pentru alta de 25 bani (22 mm).

Rezolvare

$$0{,}025 \times 57 \times 2 \approx 2{,}8 \text{ m}.$$
$$0{,}022 \times 57 \times 2 \approx 2{,}5 \text{ m}.$$

Dacă vi se pare de necrezut faptul că ochiul vede Luna nu mai mare decît o monedă de 25 bani privită de la o distanță de patru pași, sau decît capătul unui creion obișnuit de la o distanță de 80 cm, țineți creionul în mîna întinsă în fața discului Lunii pline: o va acoperi în întregime. Și oricît de ciudat ne-ar părea, obiectul cel mai potrivit de comparație pentru Lună, în sensul dimensiunilor aparente, nu este nici farfuria, nici mărul și nici vișina, ci un bob de mazăre sau și mai bine, „gămălia" unui chibrit! Comparația cu o farfurie sau un măr presupune îndepărtarea lor la o distanță neobișnuit de mare; mărul pe care-l ținem în mînă sau farfuria de pe masă le vedem de 10—20 de ori mai mari decît discul Lunii. Și numai „gămălia unui chibrit", pe care o privim de la o distanță de 25 cm de ochi („distanța vederii clare"), o vedem într-adevăr sub un unghi de jumătate de grad, adică de aceeași mărime cu Luna.

Faptul că majoritatea oamenilor se înșală cu privire la mărimea aparentă a discului Lunii, pe care o cred de 10—20 de ori mai mare decît este în realitate, este una din cele mai interesante iluzii optice. Ea se datorește, probabil, mai mult *strălucirii* Lunii: pe fondul cerului întunecat Luna plină iese în evidență mult mai puternic decît, în mediul înconjurător, farfuriile, merele, monedele și alte obiecte de comparație[1].

Această iluzie este atît de greu de evitat și se impune simțurilor noastre cu atîta forță, încît chiar pictorii care se deosebesc printr-un ochi foarte sigur, se lasă furați de ea, ca și ceilalți oameni și înfățișează Luna plină în tablourile lor mult mai mare decît ar trebui. Pentru a ne convinge de aceasta, este deajuns să comparăm un peisaj pictat de un pictor cu altul fotografiat.

Cele spuse mai sus se referă și la Soare, pe care-l vedem de pe Pămînt aproximativ sub același unghi, de jumătate de grad: deși diametrul real al globului solar este de 400 de ori mai mare decît diametrul Lunii însă depărtarea la care se află de Pămînt este și ea mai mare de 400 de ori[2].

---

[1] Din aceeași cauză, filamentul incandescent al unui bec electric ne pare mult mai gros decît în stare rece, cînd nu luminează.

[2] La distanța medie de la Pămînt la Soare, diametrul unghiular al Soarelui este de aproximativ 32′ — *Nota red. ruse.*

Pentru a lămuri mai bine noțiunea atît de importantă de unghi vizual, să ne abatem puțin de la tema noastră directă — geometrie în cîmp liber — și să cităm cîteva exemple din domeniul fotografiei.

Desigur că ați văzut pe ecranul cinematografului scene reprezentînd catastrofe — de pildă, ciocnirea dintre două trenuri — sau asemenea imagini neverosimile ca automobilul care merge pe fundul mării.

Amintiți-vă filmul *Copiii căpitanului Grant*. Ce impresie puternică — nu este așa? — produce scena scufundării corăbiei în timpul furtunii sau priveliștea crocodililor ce l-au înconjurat pe băiatul rătăcit în mlaștină. Desigur că nimeni nu crede că astfel de fotografii au fost luate direct după natură. Dar cu ajutorul cărui procedeu au fost obținute?

Secretul ni se dezvăluie în desenele alăturate. În figura 59 vedeți „catastrofa“ unui tren-jucărie într-un decor tot de jucărie, iar în figura 60 se vede un automobil-jucărie, tras cu o ață în spatele unui acvariu. Aceasta este „natura“ după care a fost filmată pelicula cinematografică. De ce oare

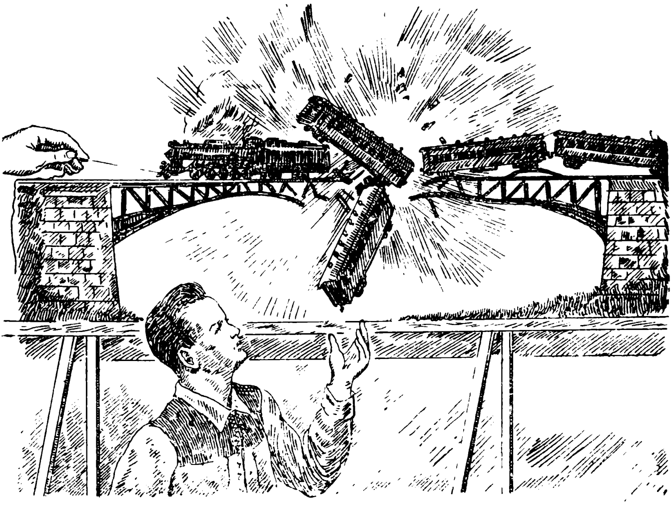


Fig. 59. Cum se filmează o catastrofă de cale ferată.

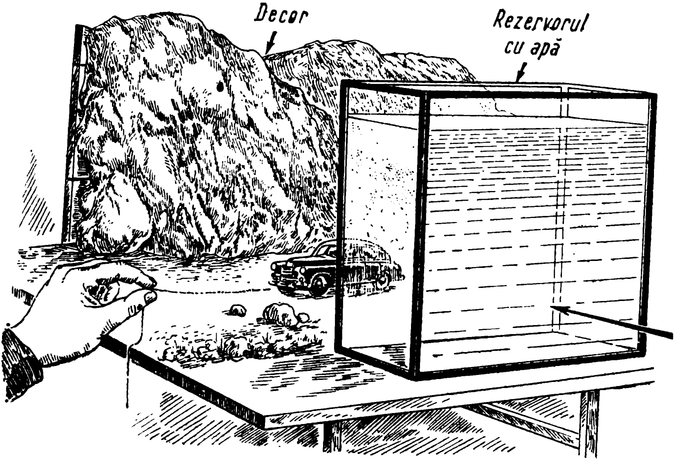


Fig. 60. Călătoria unui automobil pe fundul mării.

Fig. 61. Scenă din filmul Ruslan și Ludmila.

văzînd aceste scene pe ecran, avem iluzia că în faţa noastră se află un tren sau un automobil adevărat? Căci aici, în ilustraţii, am observa imediat dimensiunile lor miniaturale, chiar dacă nu le-am putea compara cu mărimea altor obiecte. Cauza este extrem de simplă: trenul şi automobilul-jucărie au fost filmate pentru ecran de la o distanţă extrem de mică; din această cauză ele apar spectatorului aproximativ sub acelaşi unghi vizual sub care vedem, de obicei, automobilele şi vagoanele adevărate. În aceasta constă tot secretul iluziei.

Iată şi o scenă din filmul *Ruslan şi Ludmila* (fig. 61). Un cap gigantic crescut parcă din pămînt, şi Ruslan, mult mai mic, pe cal. Capul se află aşezat pe un cîmp machetă în apropierea aparatului de filmat, iar Ruslan călare, la o distanţă apreciabilă. În aceasta constă tot secretul iluziei.

Figura 62 reprezintă un alt model de iluzie, bazat pe acelaşi principiu. Vedeţi aici un peisaj ciudat, ce aminteşte natura din cele mai vechi epoci geologice: arbori ciudaţi, asemănători cu ferigi gigantice, iar pe ei uriaşe picături de apă şi, în prim-plan un monstru uriaş, care are însă o oarecare asemănare cu o gînganie inofensivă — cîinele-babei. Cu tot aspectul său neobişnuit desenul a fost executat după natură: ceea ce se vede nu este nimic altceva decît un foarte mic crîmpei din solul unei păduri, desenat însă sub un unghi vizual neobişnuit. Niciodată nu vedem tulpiniţele ferigilor, picăturile de apă, insectele etc. sub un unghi vizual atît de mare, şi din această cauză, desenul

Fig. 62. Un peisaj enigmatic reprodus după natură.

ne pare atît de străin și necunoscut. În fața noastră se află un peisaj pe care l-am vedea așa numai dacă ne-am micșora pînă la dimensiunile unei furnici.

În același mod procedează și escrocii din redacțiile anumitor ziare burgheze pentru confecționarea unor „foto-reportaje" false. Într-un ziar din străinătate a apărut o dată

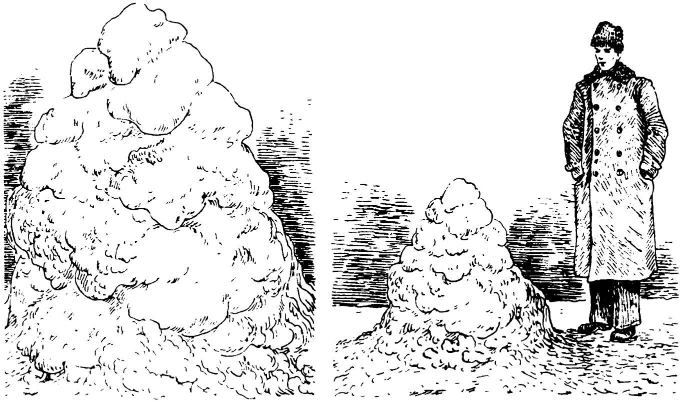


Fig. 63. „Muntele" de zăpadă în fotografie (stînga) și în natură (dreapta)

o notă conținînd reproșuri la adresa administrației orașului, care lasă ca pe străzi să se adune munți uriași de zăpadă. Pentru încredințare era publicată și fotografia unuia din acești munți, care făcea o impresie impunătoare (fig. 63, stînga). La o cercetare făcută mai îndeaproape s-a constatat că pentru această fotografie slujise drept model o moviliță de zăpadă, fotografiată de șugubățul reporter de la o distanță extrem de mică, adică sub un unghi vizual neobișnuit de mare (fig. 63, dreapta).

Altă dată, același ziar a reprodus fotografia unei mari crăpături — o adevărată văgăună — într-o stîncă din împrejurimile orașului; ea constituia, după cum afirma ziarul, intrarea într-o subterană întinsă, unde a dispărut fără urmă un grup de turiști imprudenți, care cutezaseră să pătrundă în grotă. Detașamentul de voluntari care a fost trimis, echipat ca pentru o expediție riscantă, în căutarea celor rătăciți, a descoperit însă... că „văgăuna" fusese fotografiată după o fisură abia vizibilă, lată doar de 1 cm, dintr-un perete înghețat!

Nu este prea greu să confecționăm singuri un instrument simplu pentru măsurarea unghiurilor, mai ales dacă vom folosi raportorul. Dar nici goniometrul confecționat de noi nu-l putem avea totdeauna la îndemînă, în timpul unei plimbări în afara orașului. În asemenea cazuri ne putem sluji de „goniometrul viu“, pe care-l avem întotdeauna la noi. Este vorba de propriile noastre degete. Pentru a le folosi în evaluarea aproximativă a unghiurilor vizuale, trebuie doar să efectuăm în prealabil cîteva calcule și măsurători.

În primul rînd, trebuie să stabilim sub ce unghi vizual vedem unghia degetului arătător al mîinii noastre întinse înainte. Lățimea obișnuită a unghiei este de 1 cm, iar distanța ei de la ochi este, în această poziție, de circa 60 cm. Din această cauză, o vedem sub un unghi de aproximativ 1° (ceva mai puțin, pentru că unghiul de 1° ar corespunde unei distanțe de 57 cm). La adolescenți unghia este mai mică, dar și mîna este mai scurtă, așa că unghiul vizual pentru ei este aproximativ același, adică tot de 1°. Cel mai bine va fi dacă cititorul nu se va baza pe datele din carte și va efectua pentru sine măsurătoarea și calculul corespunzător, pentru a se convinge dacă rezultatul nu se abate prea mult de 1°. Dacă diferența este prea mare, trebuie să încercăm alt deget.

Cunoscînd aceste date, dispuneți de un procedeu de apreciere a unghiurilor vizuale mici, pur și simplu cu mîinile goale. Orice obiect depărtat care este acoperit exact de unghia degetului arătător al mîinii întinse este văzut de dv. sub un unghi de 1° și, prin urmare, se află la o distanță de 57 ori mai mare decît diametrul său. Dacă unghia acoperă jumătate din acest obiect, înseamnă că mărimea lui unghiulară este de 2°, iar distanța este egală cu 28 de diametri.

Luna plină acoperă doar jumătate din unghie, adică este văzută sub un unghi de jumătate de grad și, prin urmare, se află la o depărtare de noi egală cu 114 diametri ai săi; iată o măsurătoare astronomică prețioasă, executată... cu mîinile goale!

Pentru unghiurile mai mari folosiți falanga ce cuprinde unghia degetului dv. mare, ținîndu-l *îndoit*, cînd mîna este întinsă. La un om adult lungimea (atenție: *lungimea*, nu lățimea) acestei falange este aproximativ de 3,5 cm, iar distanța de la ochi a mîinii întinse este cam de 55 cm.

Este ușor de calculat, că mărimea unghiulară a falangei în această poziție trebuie să fie egală cu 4°. Aceasta oferă posibilitatea de a calcula unghiurile vizuale de 4° (și deci și de 8°).

La acestea trebuie să mai adăugăm încă două unghiuri care pot fi măsurate cu ajutorul degetelor, și anume acela sub care vedem, cînd ținem mîna întinsă, distanțele: 1) dintre degetul arătător și cel mijlociu, răsfirate cît mai mult și 2) dintre degetul mare și arătător, și ele răsfirate într-o măsură cît mai mare. Este ușor de calculat că primul unghi este de aproximativ 7—8°, iar cel de-al doilea de 15—16°.

În timpul plimbărilor pe un teren deschis se pot ivi o mulțime de prilejuri de a folosi goniometrul dv. viu. Să presupunem că vedeți în depărtare un vagon de marfă, care este acoperit de aproximativ jumătate din falanga degetului mare al mîinii întinse, adică se vede sub un unghi de aproximativ 2°. Cunoscînd lungimea unui vagon de marfă (circa 6 m), veți găsi cu ușurință ce distanță vă desparte de el: $6 \times 28 \approx 170$ m cu aproximație. Desigur că această măsurătoare este foarte aproximativă, dar totuși, e mai sigură decît o apreciere lipsită de orice bază, făcută doar din ochi.

Să arătăm acum un mijloc de a trasa pe un teren unghiuri drepte, folosind doar propriul nostru corp.

Dacă trebuie să trasați printr-un punct oarecare o perpendiculară la o direcție dată, atunci, stînd în acest punct cu fața îndreptată în direcția acestei linii, întindeți mîna în mod liber spre partea în care doriți să trasați perpendiculara, fără să întoarceți deocamdată capul. După ce ați făcut aceasta, ridicați degetul mare al mîinii întinse, întoarceți capul spre el și observați ce obiect — piatră sau tufiș etc. — este acoperit de degetul mare, dacă-l priviți cu ochiul respectiv (adică cu ochiul drept pentru mîna dreaptă și cu ochiul stîng pentru cea stîngă).

Nu vă mai rămîne decît să trasați pe pămînt linia dreaptă din locul în care v-ați aflat spre obiectul pe care l-ați observat, și aceasta va fi perpendiculara căutată. Este un procedeu care s-ar părea că nu promite rezultate prea bune, dar după cîteva exerciții nu prea îndelungate veți începe să apreciați serviciile acestui „echer viu“, care nu este mai rău decît cel adevărat.

Folosind mai departe „goniometrul viu“ veți putea măsura, în lipsa oricăror alte instrumente, înălțimea unghiulară a aștrilor deasupra orizontului, distanța dintre stele evaluată în grade, dimensiunile vizibile a căii de foc lăsate de un meteor. În sfîrşit, ştiind să trasaţi fără ajutorul instrumentelor unghiuri drepte pe un teren, veţi putea să schiţaţi planul unei parcele nu prea întinse cu ajutorul procedeului, a cărui esenţă reiese clar din figura 64; de exemplu, la ridicarea planului unui lac se măsoară dreptunghiul *ABCD*, precum şi lungimile perpendicularelor coborîte din punctele mai proeminente ale malului şi distanţele dintre picioarele lor şi extremităţile dreptunghiului. Într-un cuvînt, aflîndu-ne

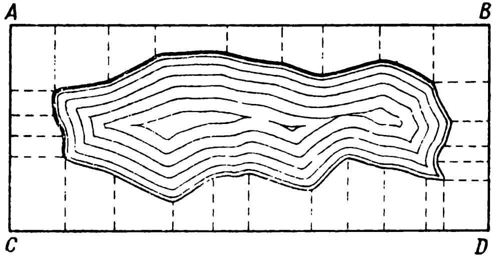


Fig. 64. Ridicarea planului unui lac.

în situaţia lui Robinson, ştiinţa de a folosi mîinile noastre proprii în vederea măsurării unghiurilor (şi picioarele noastre pentru măsurarea distanţelor) ne poate fi de folos în cele mai diverse împrejurări.

TOIAGUL LUI IACOB

Dacă doriţi să aveţi la dispoziţie instrumente de măsurat unghiurile mai exacte, decît „goniometrul viu“, descris mai sus, puteţi să vă confecţionaţi un instrument simplu şi comod, care a servit cîndva strămoşilor noştri. Acesta este „toiagul lui Iacob“, numit astfel după numele inventatorului său şi care reprezintă un instrument larg folosit de către navigatori pînă în secolul al XVIII-lea (fig. 65), cînd a fost înlăturat treptat de instrumente mai comode şi mai precise (sextanţi).

El constă dintr-o riglă lungă *AB*, de 70—100 cm, pe care poate să alunece o stinghie perpendiculară pe ea *CD* (un cursor); părțile CO și OD ale stinghiei glisante sînt egale între ele. Dacă doriți să stabiliți cu ajutorul acestei stinghii distanța unghiulară dintre stelele S și S' (fig. 65), duceți la ochi extremitatea A a riglei (unde s-a fixat, pentru comoditatea observației, o placă găurită) și îndreptați rigla în așa fel, ca steaua S' să fie vizibilă la extremitatea B a riglei; apoi, mișcați perpendiculara CD de-a lungul riglei

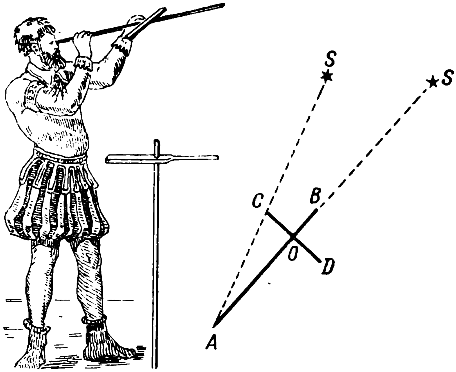


Fig. 65. Toiagul lui Iacob și schema lui de utilizare.

pînă cînd steaua S se va vedea exact la extremitatea C (fig. 65). Acum vă rămîne doar să măsurați distanța AO, pentru ca — lungimea CO fiind cunoscută — să calculați mărimea unghiului SAS'. Cei ce cunosc trigonometria își vor da seama că tangenta unghiului necunoscut este egală cu raportul $\frac{CO}{AO}$; „trigonometria noastră de cîmp", expusă în capitolul V, este de asemenea suficientă pentru efectuarea acestui calcul: calculați, după teorema lui Pitagora, lungimea AC, apoi găsiți unghiul, al cărui sinus este egal cu $\frac{CO}{AC}$.

În sfîrșit puteți afla unghiul necunoscut și pe cale grafică: construiți triunghiul ACO pe hîrtie la o scară oarecare, și măsurați unghiul A cu raportorul, iar dacă nu aveți raportor — prin procedeul descris în cadrul „trigonometriei de cîmp" (Capitolul V).

Dar de ce ne trebuie a doua jumătate a stinghiei transversale? Pentru cazul în care unghiul măsurat ar fi prea mare și n-am reuși să-l măsurăm în modul arătat mai sus. Atunci, spre astrul S' nu se mai îndreaptă rigla AB, ci dreapta AD, mișcînd stinghia în așa fel ca extremitatea ei C să acopere în același timp astrul S (fig. 66). Desigur că nu va fi greu să găsim mărimea unghiului SAS', fie prin calcul, fie pe cale grafică.

Pentru a nu fi nevoiți să facem calcule sau construcții de

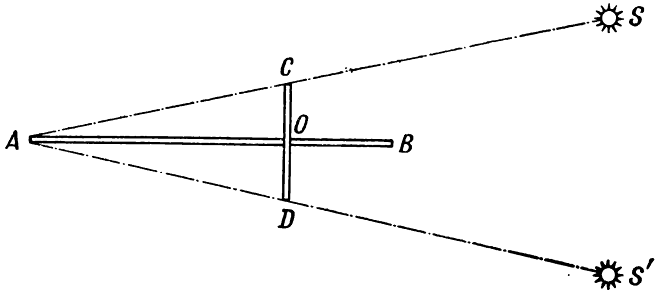


Fig. 66. Calcularea distanței unghiulare dintre stele cu ajutorul toiagului lui Iacob.

unghiuri la fiecare măsurătoare, putem să le efectuăm dinainte, încă în timpul confecționării instrumentului și să însemnăm rezultatele pe rigla AB; atunci, cînd îndreptăm instrumentul nostru spre stele, vom putea citi doar însemnarea făcută la punctul O și aceasta va fi mărimea unghiului măsurat.

GONIOMETRUL ÎN FORMĂ DE GREBLĂ

Este și mai ușor să confecționăm un alt instrument pentru măsurarea mărimii unghiulare a obiectelor, și anume așa-zisul „goniometru în formă de greblă“ și care amintește, într-adevăr, prin forma sa de o greblă (fig. 67). Partea sa principală este o scîndurică de orice formă, la extremitatea căreia s-a fixat o plăcuță găurită; deschizătura ei o pune la ochi observatorul. La extremitatea opusă a scîndurelei se înfige un rînd de ace cu gămălie, astfel ca distanțele dintre ace să reprezinte a 57-a parte din distanța la care se află ele de deschizătura plăcii găurite[1]. Ştim deja că fiecare interval dintre ele se vede sub un unghi de 1°. Putem aşeza acele şi în alt mod, care dă un rezultat şi mai exact; desenăm pe perete două linii paralele, la o distanţă de 1m una de alta şi, îndepărtîndu-ne de perete pe o direcţie perpendiculară pe el, pînă la o distanţă de 57 m, examinăm aceste linii prin deschizătura plăcii găurite; acele se înfig în aşa mod

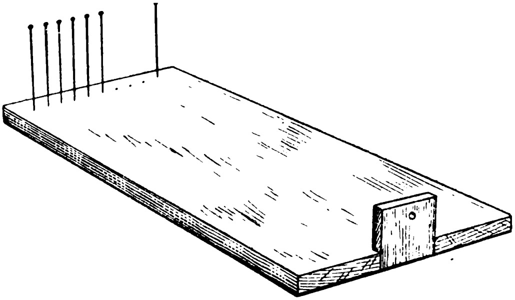


Fig. 67. Goniometrul în formă de greblă.

în scîndurică, încît fiecare pereche de ace învecinate să se suprapună pe liniile desenate pe perete.

Cînd acele vor fi înfipte, putem scoate unele dintre ele pentru a obţine un unghi de 2°, 3°, 5°. Modul de utilizare al acestui goniometru a fost fără îndoială înţeles de cititori şi fără explicaţiile noastre. Folosind acest dispozitiv putem măsura unghiurile vizuale cu o exactitate destul de mare, nu mai puţin de 1/4°.

TEODOLITUL ARTILERISTULUI

Un artilerist nu trage „orbeşte".

Cunoscînd înălţimea la care se află ţinta, el calculează înălţimea ei unghiulară deasupra orizontului şi stabileşte distanţa pînă la această ţintă; în alte cazuri stabileşte sub ce unghi trebuie să întoarcă tunul pentru a trece focul de la o ţintă la alta.

---

[1] În locul acelor putem folosi o ramă cu fire întinse pe ea.

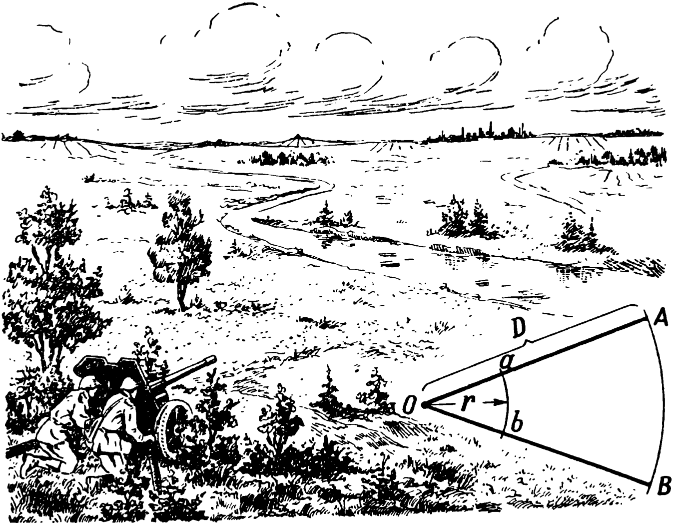


Fig. 68. Schema teodolitului artileristului.

Probleme de acest fel el le rezolvă cu repeziciune în minte. În ce fel anume?

Priviţi figura 68. AB reprezintă un arc dintr-o circumferinţă cu raza $OA = D$; ab este un arc dintr-o circumferinţă cu raza $Oa = r$.

Din asemănarea celor două sectoare AOB şi aOb rezultă:

$$\frac{AB}{D} = \frac{ab}{r}$$

sau

$$AB = \frac{ab}{r} D.$$

Raportul $\frac{ab}{r}$ caracterizează mărimea unghiului vizual AOB; cunoscînd acest raport, este uşor să calculăm AB după D pe care-l cunoaştem sau pe D, dacă cunoaştem AB.

Artileriştii îşi uşurează calculul prin faptul că nu împart circumferinţa în 360 de părţi, cum se obişnuieşte, ci în 6 000 de arcuri egale; atunci lungimea fiecărei diviziuni constituie aproximativ $\frac{1}{1\,000}$ din raza circumferinţei.

Într-adevăr, să presupunem, de exemplu, că arcul ab al unui cerc O al cărui unghi dorim să-l măsurăm (fig. 68) reprezintă o unitate de diviziune; atunci lungimea întregii circumferințe $2\pi r \approx 6r$, iar lungimea arcului $ab \approx \frac{6r}{6\,000} = \frac{1}{1\,000} r$.

În artilerie, diviziunea obținută prin procedeul de mai sus e numită „miime". Prin urmare:

$$AB \approx \frac{0{,}001\,r}{r} D = 0{,}001\ D.$$

Pentru a afla ce distanță AB corespunde pe teren unei diviziuni a teodolitului (unui unghi de o „miime") este suficient ca în numărul D să separăm prin virgulă trei cifre din dreapta.

La transmiterea unui ordin sau a rezultatelor observațiilor prin telefonul de cîmp sau prin radio, numărul „miimilor" se pronunță ca un număr de telefon, de exemplu, un unghi de 105 „miimi" se pronunță: „unu zero cinci", și se scrie:

$$1 - 05;$$

un unghi de opt „miimi" se pronunță: „zero zero opt" și se scrie:

$$0 - 08.$$

Acum veți putea rezolva ușor următoarea problemă de artilerie.

Problemă

Un tanc este observat de pe poziția tunului antitanc sub un unghi de 0—05. Să se calculeze distanța pînă la tanc, considerînd că înălțimea lui este egală cu 2 m.

Rezolvare

5 diviziuni de pe teodolit = 2 m,

1 diviziune a teodolitului $= \frac{2\text{ m}}{5} = 0{,}4$ m.

Întrucît o diviziune a teodolitului este a 1000-a parte din distanță, întreaga distanță va fi, prin urmare, de 1000 de ori mai mare, adică

$$D = 0{,}4 \cdot 1\,000 = 400 \text{ m}$$

Dacă comandantul sau cercetașul nu are la dispoziție instrumente de măsurat unghiurile, el folosește palma, degetele sau orice alte mijloace aflate la îndemînă, așa cum am arătat în această carte (vezi *Goniometrul viu*). Numai că artileristul trebuie să cunoască valorile obținute nu în grade, ci în „miimi".

Iată valoarea aproximativă în „miimi" a unor obiecte:

palma mîinii	1—20
degetul mijlociu, arătător, sau inelar	0—30
un creion rotund (grosimea)..................	0—12
o monedă de 25 bani (diametrul)	0—40
un chibrit (în lungime)	0—75
„ „ (în grosime)	0—03

AGERIMEA VEDERII

Obișnuindu-vă cu noțiunea de mărime unghiulară a obiectului, veți putea înțelege cum se măsoară agerimea vederii și chiar veți putea să efectuați singuri măsurători de acest fel.

Desenați pe o foaie de hîrtie 20 de linii negre egale, care să aibă lungimea unui chibrit (5 cm) și o grosime de 1 mm, în așa fel ca ele să acopere un pătrat (fig. 69). Fixînd acest desen pe un perete bine luminat, depărtați-vă de el pînă cînd veți observa că liniile nu se mai disting una de alta, ci se contopesc într-un fond cenușiu continuu. Măsurați această distanță și calculați — știți deja în ce mod — unghiul vizual sub care încetați să mai distingeți dungile cu o grosime de 1 mm. Dacă acest unghi este egal cu 1′, ageri-

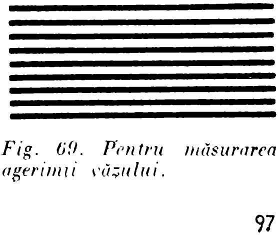


Fig. 69. Pentru măsurarea agerimii văzului.

mea vederii dv. este normală; dacă unghiul este egal cu 3′; agerimea vederii dv. reprezintă 1/3 din cea normală ş.a.m.d.

Problemă

Liniile din figura 69 se contopesc pentru ochiul dv. la o distanţă de 2 m. Este normală agerimea vederii dv.?

Rezolvare

Ştim că de la o distanţă de 57 mm o dungă de 1 mm lăţime se vede sub un unghi de 1°, adică 60′. Prin urmare, de la o distanţă de 2 000 mm ea se vede sub un unghi x, care se calculează din proporţia:

$$x : 60 = 57 : 2\,000,$$

$$x \approx 1{,}7'.$$

Agerimea vederii este mai redusă decît cea normală şi reprezintă:

$$1 : 1{,}7 = \text{aproximativ } 0{,}6.$$

MINUTUL-LIMITĂ

Am arătat mai sus că liniile privite sub un unghi vizual mai mic de 1′ nu mai sînt distinse izolat de un ochi normal. Aceasta se referă la orice obiect: oricare ar fi contururile obiectului observat, ele încetează să mai fie distinse de un ochi normal dacă sînt privite sub un unghi mai mic de 1′. Orice obiect se transformă atunci într-un punct ce abia se mai desluşeşte, „prea mic pentru vedere“ (Shakespeare), într-un fir de praf fără dimensiuni şi formă. Aceasta este o caracteristică a ochiului omenesc normal: unghiul de 1′ este limita medie a agerimii sale. Cauza acestei stări de lucruri este o problemă aparte, care ţine de domeniul fizicii şi fiziologiei văzului. Noi vorbim aici doar despre latura geometrică a fenomenului.

Cele spuse mai sus se referă în aceeași măsură și la obiectele mari, dar prea îndepărtate și la cele apropiate, dar prea mici. Noi nu distingem cu ochiul liber formele firelor de praf care plutesc prin aer: iluminate de razele Soarelui, ele ne apar ca puncte infime identice, cu toate că în realitate au forme extrem de diferite. Noi nu distingem detaliile mărunte ale corpului unei insecte, tot datorită faptului că le vedem sub unghi mai mic de 1′. Din aceeași cauză nu vedem fără telescop detaliile de pe suprafața Lunii, a planetelor și a altor corpuri cerești.

Dacă limita vederii firești ar fi mai îndepărtată, lumea ne-ar părea cu totul altfel. Un om la care limita agerimii vederii n-ar fi 1′, ci, de pildă, $\frac{1'}{2}$, ar vedea lumea înconjurătoare mai adînc și mai departe decît o vedem noi. Cu deosebită plasticitate este descrisă această însușire a ochiului ager în nuvela *Stepa* de Cehov.

„Privirea lui (a lui Vasea—N.R.) era surprinzător de ageră. Pentru el, stepa mohorîtă și pustie era totdeauna plină de mișcare și de viață. Era destul să-și ațintească privirea în depărtare ca să vadă o vulpe, un iepure, o dropie sau orice altă sălbăticiune din cele care se feresc de oameni. Nu e mare lucru să vezi un iepure rupînd-o la fugă sau o dropie zburînd. Oricine a umblat prin stepă a avut prilejul să surprindă asemenea priveliști. Dar nu e dat oricui să vadă sălbăticiunile în viața lor de toate zilele, cînd nu aleargă, nu se ascund și nu se uită cu spaimă în toate părțile. Iar Vasea vedea și cum se joacă vulpile, și cum își spală iepurii botul cu lăbuțele și cum își netezesc dropiile penele, și cum își aleg «ținta» spîrcacii. Datorită vederii lui atît de ascuțite, Vasea cunoștea și o altă lume decît aceea pe care o cunosc ceilalți oameni, o lume a lui, la care alții nu puteau ajunge și fără îndoială neînchipuit de frumoasă, deoarece de cîte ori o privea părea atît de fermecat, încît ar fi fost greu să nu-l pizmuiești".

Pare ciudat gîndul că pentru o schimbare atît de uimitoare este de ajuns ca limita vizibilității să fie redusă de la 1′ la $\frac{1'}{2}$ sau aproximativ atît...

Acțiunea miraculoasă a microscopului și telescopului este condiționată de același factor. Rostul acestor aparate este de a modifica direcția razelor ce pornesc de la obiectul examinat, în așa fel ca ele să intre în ochi într-un fascicul de raze mai divergente; datorită acestui fapt, obiectul ni se va prezenta sub un unghi vizual mai mare. Cînd se spune că microscopul sau telescopul măresc de 100 de ori, aceasta înseamnă că mulțumită lor vedem obiectele sub un unghi de 100 de ori mai mare decît cu ochiul liber. Și atunci, amănuntele care, în mod obișnuit, rămîn ascunse ochiului liber sub limita de agerime a vederii devin accesibile ochiului. Luna plină o vedem sub un unghi de 30′; și deoarece diametrul Lunii este egal cu aproximativ 3 500 km, fiecare porțiune a Lunii care are un diametru de $\frac{3\,500}{30}$, adică de aproximativ 120 km, se contopește pentru ochiul neînarmat într-un punct abia vizibil. Printr-o lunetă care mărește de 100 de ori vom putea distinge porțiuni mult mai mici, cu un diametru de $\frac{120}{100} = 1{,}2$ km, iar printr-un telescop care mărește de 1 000 de ori, vom distinge o porțiune cu o lățime de 120 m. De aici rezultă, printre altele, că dacă pe Lună ar exista astfel de construcții, ca de exemplu, marile noastre uzine sau vapoarele transoceanice, noi le-am putea vedea prin telescoapele moderne[1].

Regula minutului-limită are o mare importanță și pentru observațiile noastre obișnuite de fiecare zi. Datorită acestor particularități ale vederii noastre, orice obiect aflat la o distanță de 3 420 (adică 57×60) de diametri ai săi nu mai poate fi distins de noi în contururile sale și se contopește într-un punct. De aceea, dacă cineva va încerca să vă convingă că a recunoscut cu ochiul liber trăsăturile unui om de la o distanță de 1/4 km, nu-l credeți, decît dacă posedă o vedere fenomenală. Căci distanța dintre ochii unui om este doar de 3 cm; prin urmare, ambii ochi se contopesc într-un singur punct la o distanță de $3 \times 3\,400$ cm, adică 100 m. Artileriștii folosesc această particularitate pentru a aprecia din ochi distanțele. După regulile lor, dacă ochii unui om par din depărtare două puncte izolate, atunci distanța pînă la el nu este mai mare de 100 de pași (adică 60—

[1] Cu condiția unei transparențe și omogeneități absolute a atmosferei noastre. În realitate, aerul nu este omogen și nici pe deplin transparent; din această cauză, dacă obiectul este mărit prea mult, imaginea se denaturează și se încețoșează. Aceasta limitează folosirea aparatelor de mărit prea puternice și face ca astronomii să-și construiască observatoarele în aerul limpede de pe vîrfurile înalte ale munților.

70 m). Noi am obținut o distanță mai mare, adică 100 m: aceasta dovedește că criteriul militarilor are în vedere cea mai redusă (cu 30%) agerime a văzului.

Problemă

Poate oare un om cu vederea normală să deosebească un călăreț aflat la o distanță de 10 km, folosind un binoclu care mărește de trei ori?

Rezolvare

Înălțimea unui călăreț este de 2,2 m. Silueta lui se transformă într-un punct la o distanță de $2{,}2 \times 3\,400 \approx 7$ km, aceasta avîndu-se în vedere ochiul liber; iar printr-un binoclu care mărește de trei ori, la o distanță de 21 km. Prin urmare, printr-un astfel de binoclu (dacă aerul este suficient de transparent) putem distinge un călăreț aflat la o distanță de 10 km.

LUNA ȘI STELELE LA ORIZONT

Chiar și cel mai neatent observator știe că Luna plină, cînd se află jos, la orizont, are dimensiuni considerabil mai mari, decît atunci cînd se află sus în înaltul cerului. Diferența este atît de mare încît este greu să nu o observăm. Același lucru se poate spune și despre Soare; se știe cît de mare este Soarele la asfințit sau la răsărit în comparație cu dimensiunile lui atunci cînd se află sus pe bolta cerească, de exemplu, atunci cînd Soarele strălucește printre nori.

Pentru stele această particularitate se manifestă prin faptul că distanțele dintre ele se măresc, atunci cînd ele se apropie de orizont. Cel ce a văzut iarna frumoasa constelație Orion (sau vara pe cea a Lebedei) sus pe cer și jos în apropierea orizontului nu a putut să nu se mire de uriașa diferență dintre dimensiunile constelației în ambele poziții.

Toate acestea sînt cu atît mai ciudate, cu cît atunci cînd privim aștrii în momentul răsăritului sau în acela al apusului, ei nu sînt mai apropiați, ci, dimpotrivă, se află mai depărtați de noi (cu o distanță egală cu raza terestră). Aceasta reiese clar din figura 70: la zenit observăm astrul din punctul A, iar la orizont din punctele B sau C. Atunci de ce se măresc la orizont Luna, Soarele și constelațiile?

— „Din cauză că totul e o iluzie", — așa s-ar putea răspunde. Este, într-adevăr, o iluzie optică. Cu ajutorul goniometrului în formă de greblă sau a unui teodolit va fi ușor

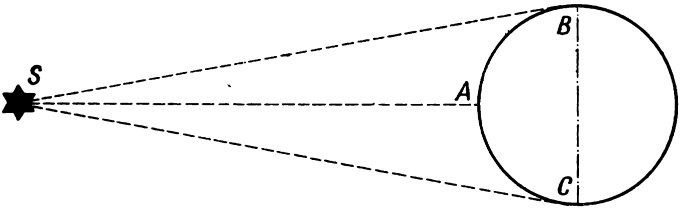


Fig. 70. Soarele, aflîndu-se la orizont este la o distanță mai mare de observator decît atunci cînd se află la zenit.

să ne convingem că discul Lunii se vede în ambele cazuri sub același unghi vizual[1] de jumătate de grad. Folosind goniometrul în formă de greblă sau „toiagul lui Iacob", ne putem convinge că nici distanțele unghiulare dintre stele nu se modifică, oriunde s-ar afla constelația: la zenit sau la orizont. Prin urmare, mărirea dimensiunilor este o iluzie optică pe care o au toți oamenii, fără excepție.

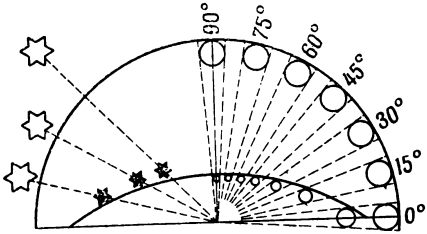
Cum se explică o iluzie optică atît de puternică și de generală? După datele cunoscute de noi, știința încă nu a dat la această întrebare un răspuns de valoare incontestabilă, cu toate că încearcă să o rezolve încă de acum 2 000 de ani, de pe timpul lui Ptolemeu. Această iluzie trebuie pusă în legătură cu faptul că întreaga boltă cerească ne apare sub forma unui segment de sferă și nu ca o emisferă în sensul geometric al cuvîntului, iar înălțimea acestui segment de sferă este de 2—3 ori mai mică decît raza bazei. Aceasta se întîmplă din cauză că la o poziție obișnuită a capului și a ochilor, distanțele aflate pe o linie orizontală sau apropiată de ea sînt apreciate de noi ca mai mari în comparație cu cele verticale: în linie orizontală noi examinăm obiectul cu „o

[1] Măsurătorile efectuate cu instrumente mai precise arată că diametrul vizibil al Lunii este chiar mai mic, atunci cînd Luna se află în apropiere de orizont, datorită faptului că refracția turtește întrucîtva discul Lunii.

privire directă", iar în orice altă direcție privim obiectul cu ochii ridicați, în sus sau coborîți, în jos. Dacă observăm Luna stînd în poziție orizontală, fiind culcați pe spate, atunci ea din contră, ne va părea mai mare cînd va fi la zenit, decît atunci cînd se va afla jos deasupra orizontului[1].

Explicarea faptului de ce dimensiunea vizibilă a obiectului depinde de orientarea ochilor noștri rămîne o sarcină a fiziologilor și a psihologilor.

Fig. 71. Influența turtirii bolții cerești asupra dimensiunilor aparente ale aștrilor



În ceea ce privește influența turtirii aparente a bolții cerești asupra mărimii aștrilor aflați în diferite părți ale bolții, ea devine pe deplin înțeleasă din schema reprezentată în figura 71. Pe bolta cerească discul Lunii se vede întotdeauna sub un unghi de jumătate de grad, indiferent dacă Luna este la orizont (la o înălțime de 0°) sau la zenit (la o înălțime de 90°). Însă ochiul nostru raportează acest disc la aceeași distanță: Luna la zenit este raportată de noi la o distanță mai mică decît la orizont și din această cauză, mărimea ei ne apare ca fiind diferită, adică în interiorul aceluiași unghi, cercul înscris mai aproape de vîrf este mai mic decît cel înscris mai departe de vîrf. În partea stîngă a aceleiași figuri se arată modul în care, datorită acestei

[1] Explicația acestui fenomen propusă aici a fost introdusă în *Geometria distractivă* de către redactorul acestei cărți, începînd cu ediția a VII-a. În edițiile anterioare ale acestei cărți, I.I. Perelman explica mărirea aparentă a Lunii la orizont prin faptul că la orizont noi o vedem alături de alte obiecte îndepărtate, iar pe bolta cerească o vedem singură. Însă, aceeași iluzie se observă și la orizontul mării, pe care nu se află și alte obiecte, așa că explicația propusă mai înainte a efectului descris trebuie considerată ca nefiind satisfăcătoare. — *Nota red. ruse.*

cauze, distanțele existente între stele parcă se măresc cu cît se apropie de orizont: aceleași distanțe unghiulare existente între ele ne par atunci ca fiind diferite.

Merită să scoatem în evidență și un alt aspect instructiv. Admirînd discul enorm al Lunii în apropiere de orizont, ați observat oare pe el măcar o singură trăsătură nouă, fie cît de neînsemnată, pe care n-ați putut s-o distingeți cînd Luna se afla sus pe bolta cerească? Nu. Dar dacă în fața dv. se află discul ei mărit, de ce nu se văd detalii noi? Din cauză că aici nu există acea mărire care se obține, de exemplu, cu ajutorul unui binoclu: aici *nu se mărește unghiul vizual* sub care ne apare obiectul. Numai mărirea acestui unghi ne ajută să deosebim detalii noi; orice altă „mărire" este pur și simplu, o iluzie optică, cu totul nefolositoare pentru noi[1].

CE LUNGIME AU UMBRA LUNII ȘI UMBRA UNUI STRATOSTAT

Am găsit o aplicație destul de neașteptată a unghiului vizual la problemele privitoare la calculul lungimii umbrei pe care o lasă unele corpuri aflate în spațiu. Luna, de exemplu, lasă în spațiul cosmic un con de umbră care o însoțește pretutindeni.

Cît de departe se întinde această umbră?

Pentru a calcula cu aproximație lungimea umbrei, nu este nevoie ca, bazîndu-ne pe asemănarea triunghiurilor, să formăm o proporție în care să intre diametrii Soarelui și Lunii, precum și distanța dintre Lună și Soare. Calculul poate fi efectuat într-un mod mult mai simplu. Imaginați-vă că ochiul dv. se află în acel punct unde se termină conul de umbră al Lunii, în vîrful acestui con și de acolo priviți spre Lună. Ce veți vedea? Cercul negru al Lunii care acoperă Soarele. Să presupunem că unghiul vizual sub care vedem discul Lunii (sau Soarelui) este egal, în acest caz, cu o jumătate de grad. Știm însă că un obiect pe care-l vedem sub un unghi de jumătate de grad se află față de observator la o distanță de $2 \times 57 = 114$ diametri ai săi. Prin urmare, vîrful conului de umbră al Lunii se află față de Lună la

[1] Mai amănunțit vezi în cartea aceluiași autor Занимательная физика (*Fizica distractivă*), partea a II-a, cap. IX, Ф. М., Москва, 1959.

o distanță egală cu 114 diametri ai Lunii. De aici, lungimea umbrei Lunii este egală cu:

$$3\,500 \times 114 \approx 400\,000 \text{ km}$$

Rezultă, deci că lungimea umbrei Lunii este mai mare decît distanța medie de la Pămînt la Lună; tocmai din această cauză se pot produce eclipse totale de Soare (pentru locurile de pe suprafața terestră care se află cufundate în această umbră).

De aici mai reiese că rezultatul calculelor pe care le-am efectuat nu vine în contradicție cu realitatea.

În acele cazuri, cînd și de pe Pămînt vedem Luna și Soarele exact sub un unghi de jumătate de grad (vezi notele de la subsolul pp. 59, 60), vîrful conului umbrei Lunii se află pe suprafața Pămîntului; atunci, lungimea calculată a umbrei Lunii indică aproximativ distanța de la Pămînt la Lună în acel moment.

Nu ne va fi greu să calculăm și lungimea umbrei Pămîntului în spațiu, presupunînd că unghiul de la vîrful conului de umbră este același, adică de jumătate de grad: ea va fi de tot de atîtea ori mai mare decît umbra Lunii, de cîte ori diametrul Pămîntului este mai mare decît diametrul Lunii, adică de aproximativ patru ori.

Același procedeu poate fi folosit și pentru un calcul aproximativ al lungimilor umbrelor lăsate în spațiu de obiecte mai mici. Să aflăm, de exemplu, cît de departe se întindea în aer conul de umbră lăsat de stratostatul „SOAH-1" în acel moment cînd învelișul lui se umfla devenind o sferă. Întrucît diametrul sferei stratostatului era egal cu 36 m, lungimea umbrei lui (presupunînd și în acest caz, că unghiul de la vîrful conului de umbră este de jumătate de grad) este egală cu

$$36 \times 114 \approx 4\,100 \text{ m},$$

sau aproximativ 4 km.

Desigur, în toate cazurile examinate era vorba de lungimea umbrei totale și nu a penumbrei[1].

---

[1] Pentru unghiurile α mici de la vîrfurile conurilor de umbră lăsat de unele corpuri se poate folosi o formulă aproximativă:

Amintiţi-vă cît de mult v-a uimit această cărăruie lungă şi albă cînd aţi văzut-o pentru prima dată sus, pe cerul senin şi albastru. Acum ştiţi, desigur, că această panglică de nori reprezintă un original „autograf“ al unui avion reactiv, care l-a lăsat „ca amintire“ spaţiului aerian, ca semn că s-a aflat pe acolo.

Într-un aer rece, umed şi bogat în firicele de praf, se formează cu uşurinţă ceaţă.

Un avion care zboară azvîrle neîncetat în aer particule mărunte — produsele activităţii motorului — şi aceste particule reprezintă acele puncte în jurul cărora se adună vaporii de apă; în felul acesta ia naştere nouraşul.

Dacă am stabili înălţimea la care se află acest nouraş înainte ca el să dispară, am putea calcula cu aproximaţie şi înălţimea la care s-a ridicat îndrăzneţul pilot cu avionul său.

Problemă

Cum să calculăm la ce înălţime pluteşte un nor, dacă el nu se află nici măcar deasupra capului nostru?

... unghiul α în radiani este egal cu $\frac{D-d}{L}$, unde D este diametrul Soarelui, d — diametrul corpului, L — reprezintă distanţa dintre Soare şi acel corp (vezi figura I).

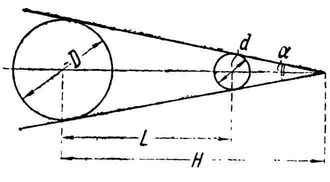


Fig. I

Cînd d este foarte mic în comparaţie cu D, corpul se află în apropiere de vîrful conului de umbră şi L se deosebeşte foarte puţin de înălţimea H a conului total de umbră. Neglijînd numărul d şi înlocuind L cu H, vom obţine:

$$\alpha \approx \frac{D}{H}.$$

Dacă vom considera că vîrful conului de umbră se află pe suprafaţa Pămîntului, atunci $H \approx 150 \cdot 10^6$, $D \approx 4 \cdot 10^6$ şi $\alpha \approx 0{,}009$ (rad) $\approx$ $\approx 30'$. — *Nota red. ruse.*

Rezolvare

Pentru calcularea înălţimilor mari trebuie să recurgem la un obişnuit aparat fotografic, aparat destul de complicat, dar care în timpurile noastre este foarte răspîndit şi iubit de tineret.

În cazul de faţă sînt necesare două aparate fotografice cu distanţe focale egale (distanţa focală este, de obicei, înscrisă pe marginea obiectivului aparatului fotografic).

Ambele aparate fotografice sînt aşezate pe două înălţimi, mai mult sau mai puţin egale.

În cîmp deschis acestea pot fi trepiedele aparatelor, iar în oraş acoperişurile a două case. Distanţa dintre înălţimi nu trebuie să fie prea mare: un observator să-l poată vedea pe celălalt direct sau cu ajutorul unui binoclu.

Această distanţă (baza) este măsurată sau stabilită cu ajutorul hărţii sau planului terenului. Aparatele fotografice sînt aranjate în aşa fel, încît axele lor optice să fie paralele. De exemplu, ele pot să fie orientate spre zenit.

Cînd norul pe care-l fotografiem se va afla în cîmpul vizual al obiectivului fotografic, un observator dă un semnal celuilalt — de exemplu, flutură o batistă — şi, cu ajutorul acestui semnal, ambii observatori fotografiază în acelaşi timp.

Pe copiile fotografice, care trebuie să fie de dimensiuni riguros egale cu clişeele, se trasează dreptele YY şi XX, care unesc mijloacele laturilor opuse ale fotografiilor (fig. 72).

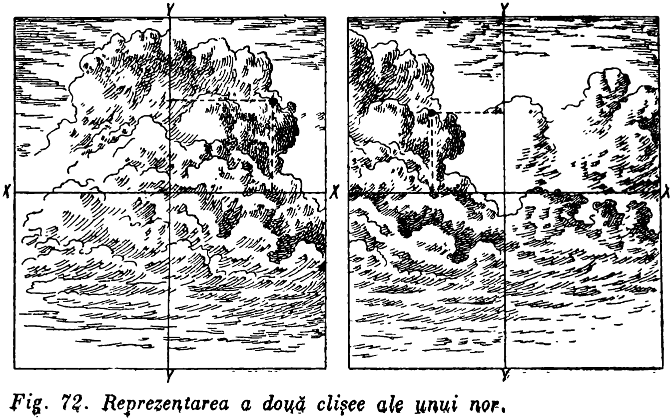


Fig. 72. Reprezentarea a două clişee ale unui nor.

Apoi se notează pe fiecare fotografie acelaşi punct de pe nor şi se calculează distanţa lui (în milimetri) la dreptele YY şi XX. Aceste distanţe se notează respectiv cu literele x_1, y_1 pentru o fotografie şi x_2, y_2 pentru cealaltă.

Dacă punctele însemnate pe fotografii se vor afla în părţi diferite în raport cu dreapta YY (ca în fig. 72), înălţimea H la care se află norul se calculează după următoarea formulă:

$$H = b \cdot \frac{F}{x_1 + x_2},$$

unde b este lungimea bazei (în metri), iar F — distanţa focală, în milimetri.

Dacă însă punctele însemnate pe fotografii se vor afla de aceeaşi parte a dreptei YY, atunci înălţimea norului se va calcula după altă formulă şi anume:

$$H = b \cdot \frac{F}{x_1 - x_2}.$$

În ce priveşte distanţele y_1 şi y_2, nu avem nevoie de ele pentru a calcula înălţimea H, dar, comparîndu-le, putem stabili exactitatea fotografiei.

Dacă plăcile fotografice s-ar afla în casete aşezate strîns şi simetric, atunci y_1 va fi egal cu y_2. Desigur însă că, practic ele vor fi întrucîtva diferite.

Să presupunem, de exemplu, că distanţele de la dreptele YY şi XX pînă la punctul însemnat de pe nor pe *originalul* clişeelor vor fi următoarele:

$$x_1 = 32 \text{ mm}, \qquad y_1 = 29 \text{ mm},$$

$$x_2 = 23 \text{ mm}, \qquad y_2 = 25 \text{ mm}.$$

Să presupunem că distanţa focală a obiectivelor $F = 135$ mm şi distanţa dintre aparatele fotografice[1] (baza) $b = 937$ m.

---

[1] După experienţa descrisă în cartea Приложение математического анализа к решению практических задач (*Aplicarea analizei matematice pentru rezolvarea problemelor practice*), de N. F. Platonov. În articolul *Înălţimea norilor*, autorul arată cum se deduce formula pentru calcularea înălţimii H, descrie alte poziţii posibile ale aparatelor fotografice în scopul fotografierii norului şi dă o serie de sfaturi practice.

Fotografiile ne arată că pentru a stabili înălțimea la care se află norul trebuie să folosim formula:

$$H = b \cdot \frac{F}{x_1 + x_2};$$

$H = 937 \text{ m} \cdot \frac{135}{32 + 23} \approx 2\,300 \text{ mm}$, adică norul fotografiat se afla la o înălțime aproximativă de 2,3 km de pămînt.

Cei ce doresc să înțeleagă mai bine cum a fost dedusă formula pentru calculul înălțimii norului pot să folosească schema reprezentată în figura 73.

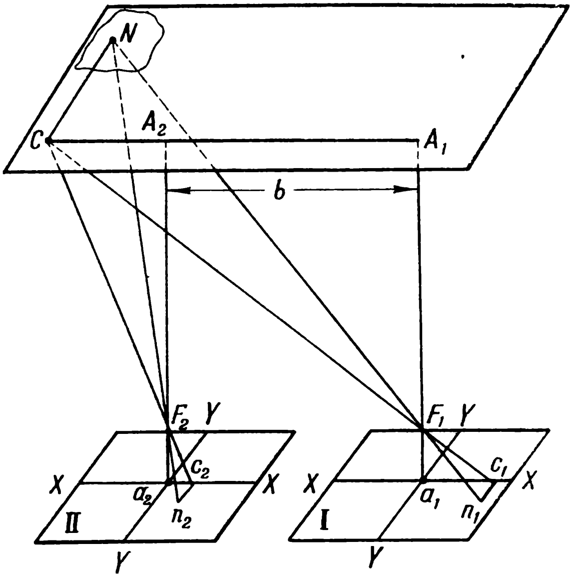


Fig. 73. Schema de reprezentare a punctului de pe nor pe clișeele a două aparate fotografice orientate spre zenit.

Desenul reprezentat în figura 73 trebuie să ni-l imaginăm în spațiu (imaginația spațială se elaborează în cursul studierii acelei părți a geometriei care se numește stereometrie).

Figurile I și II reprezintă clișeele fotografice; F_1 și F_2 sînt centrele optice ale obiectivelor aparatelor fotografice;

N — punctul observat de pe nori; n_1 și n_2 — reprezentări ale punctului N pe clișeele fotografice; a_1A_1 și a_2A_2 — perpendicularele duse din mijlocul fiecărui clișeu fotografic pînă la nivelul norului; $A_1A_2 = a_1a_2 = b$ (dimensiunea bazei).

Dacă din centrul optic F_1 ne deplasăm în sus pînă la punctul A_1, apoi din punctul A_1, de-a lungul bazei, pînă la un astfel de punct C, care să fie vîrful unghiului drept A_1CN, și în sfîrșit, din punctul C în punctul N, atunci segmentelor F_1A_1, A_1C și CN vor corespunde în aparatul fotografic segmentele $F_1a_1 = F$ (distanța focală), $a_1c_1 = x_1$ și $c_1n_1 = y_1$.

Construcțiile efectuate pentru cel de-al doilea aparat fotografic sînt analoge.

Din asemănarea triunghiurilor rezultă următoarele proporții:

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_1F_1}{F} = \frac{C_1F_1}{F_1c_1} = \frac{CN}{y_1}$$

$$\frac{A_2C}{x_2} = \frac{A_2F_2}{F_2} = \frac{CF_2}{F_2c_2} = \frac{CN}{y_2}.$$

Comparînd aceste proporții și avînd în vedere egalitatea evidentă $A_2F_2 = A_1F_1$, aflăm întîi că $y_1 = y_2$ (semn al unei fotografieri exacte) și în al doilea rînd că:

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_2C}{x_2};$$

însă, din figură rezultă $A_2C = A_1C - b$, prin urmare

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_1C - b}{x_2},$$

de unde

$$A_1C = b \cdot \frac{x_1}{x_1 - x_2},$$

și, în sfîrșit,

$$A_1F_1 = b \cdot \frac{F}{x_1 - x_2} \approx H.$$

Dacă n_1 și n_2 — reprezentările pe clișee ale punctului N — s-ar afla de o parte și de alta a dreptei YY, aceasta ar arăta că punctul C se află între punctele A_1 şi A_2, şi atunci $A_2C = b - A_1C_1$, iar înălţimea necunoscută ar fi:

$$H = b \cdot \frac{F}{x_1 + x_2}.$$

Aceste formule se referă numai la acele cazuri, cînd axele optice ale aparatelor fotografice sînt îndreptate spre zenit. Dacă norul se află departe de zenit şi nu ajunge în cîmpul vizual al aparatelor, atunci putem să aranjăm aparatele fotografice şi într-o altă poziţie (păstrînd paralelismul axelor optice), de exemplu, să le îndreptăm orizontal — perpendicular pe bază sau în lungul bazei.

Pentru fiecare poziţie a aparatelor fotografice este necesar să facem, în prealabil, desenul respectiv şi să deducem formulele pentru calcularea înălţimii norului.

Iată, „ziua-n amiaza mare“ s-au ivit pe cer nori cirus şi altostratus, albicioşi, distincţi. Determinaţi înălţimea lor de 2—3 ori la anumite intervale de timp. Dacă veţi vedea că norii au coborît, acesta va fi un indiciu de înrăutăţire a timpului: peste cîteva ore puteţi aştepta ploaie.

Fotografiaţi un aerostat sau stratostat aflat în aer şi calculaţi înălţimea la care se află.

ÎNĂLŢIMEA TURNULUI CALCULATĂ DUPĂ O FOTOGRAFIE

Problemă

Cu ajutorul unui aparat fotografic se poate stabili nu numai înălţimea unui nor sau a unui avion aflat în zbor, dar şi înălţimea unei construcţii de pe pămînt: turn, catarg, turlă etc.

Figura 74 reprezintă un motor de vînt instalat în Crimeea lîngă Balaklava. La baza turnului se află un pătrat; presupunem că lungimea laturii lui vă este cunoscută; 6 m.

Efectuaţi pe fotografie măsurătorile necesare şi calculaţi înălţimea h a întregii instalaţii a motorului de vînt.

Fotografia turnului și contururile lui reale sînt asemenea din punct de vedere geometric. Prin urmare, de cîte ori imaginea înălțimii este mai mare decît imaginea laturii

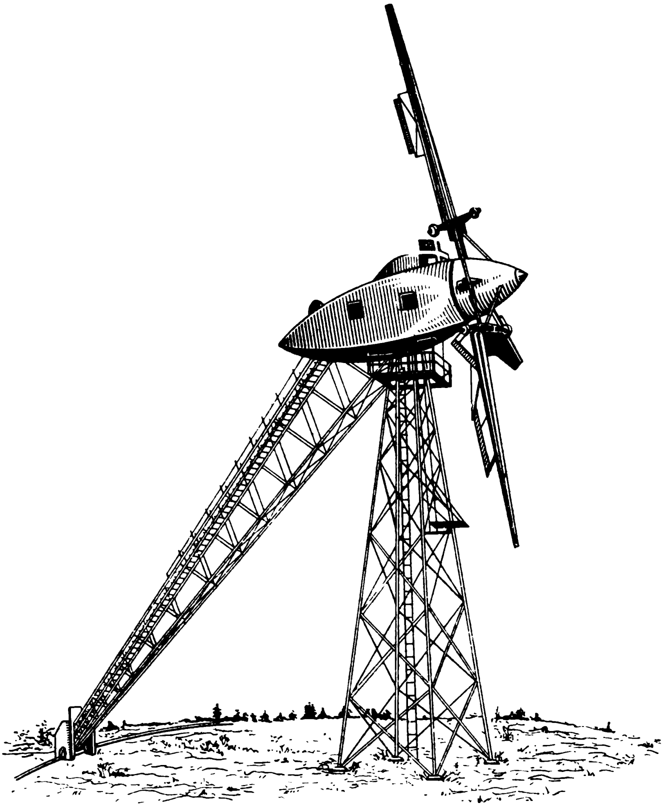


Fig. 74. Motorul de vînt de la Balaklava (Crimeea).

sau diagonalei bazei, de atîtea ori și înălțimea turnului în natură este mai mare decît latura sau diagonala bazei lui.

Dimensiunile imaginii: lungimea diagonalei, cel mai puțin deformată, a bazei este egală cu 23 mm, iar înălțimea întregii instalații este egală cu 71 mm.

Deoarece lungimea laturii pătratului de la baza turnului este de 6 m, rezultă că diagonala bazei este

$$\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} = 8{,}48\ldots \text{ m}.$$

Prin urmare,

$$\frac{71}{23} = \frac{h}{8{,}48},$$

de unde

$$h = \frac{71 \cdot 8{,}48}{23} \approx 26 \text{ m}.$$

Se înțelege că nu ne poate fi de folos orice fotografie, ci numai una în care proporțiile nu sînt denaturate, așa cum se întîmplă la fotografii cu prea puțină experiență.

PENTRU EXERCIȚII INDEPENDENTE

Și acum cititorul să aplice singur cunoștințele extrase din acest capitol pentru rezolvarea următoarelor probleme.

Un om de înălțime mijlocie (1,7 m) se vede din depărtare sub un unghi de 12′. Să se afle distanța pînă la el.

Un cavalerist călare (2,2 m) se vede de departe sub un unghi de 9′. Să se afle distanța care ne desparte de el.

Un stîlp de telegraf (8 m) se vede sub un unghi de 22′. Să se afle distanța pînă la stîlp.

Un far cu o înălțime de 42 m se vede de pe vapor sub un unghi de 1°10′. La ce distanță de far se află vaporul?

Globul terestru se vede de pe Lună sub un unghi de 1°54′. Să se calculeze distanța la care se află Luna față de Pămînt.

De la o distanță de 2 km o construcție se vede sub un unghi de 12′. Să se afle înălțimea construcției.

Luna se vede de pe Pămînt sub un unghi de 30′. Știind că în acest moment distanța pînă la Lună este egală cu 396 000 km, să se calculeze diametrul ei.

Cît de mari trebuie să fie literele de pe tabla din clasă, pentru ca elevii, șezînd în bănci, să le vadă tot atît de clar ca literele din cărțile lor (la o distanță de 25 cm de ochi)? Distanța de la bănci pînă la tablă este de 5 m.

Un microscop mărește de 50 de ori. Putem oare vedea prin el globulele sîngelui omenesc, al căror diametru este de 0,007 mm?

Dacă pe Lună s-ar afla oameni de înălțimea noastră, de cîte ori ar trebui să mărească un telescop pentru a-i putea distinge de pe Pămînt?

Cîte „miimi“ sînt într-un grad?

Cîte grade sînt într-o „miime“?

Zburînd perpendicular pe linia noastră de observație, un avion parcurge în 10″ o distanță pe care o vedem sub un unghi de 360 „miimi“. Să se calculeze viteza de zbor a avionului, dacă distanța pînă la el este de 2 000 m.

Capitolul IV

GEOMETRIA ÎN MARȘ

ARTA DE A MĂSURA CU PAȘII NOȘTRI

Dacă ne aflăm in timpul unei plimbări în afara orașului, pe terasamentu căii ferate sau pe o șosea, putem să efectuăm o serie de exerciții geometrice interesante.

Înainte de toate, să folosim șoseaua pentru a măsura lungimea pasului și viteza mersului nostru. Aceasta ne va da posibilitatea de a măsura distanțele cu pașii noștri — deprindere care se capătă destul de ușor după cîteva exerciții nu prea îndelungate. Principalul este să ne obișnuim să facem totdeauna pași de lungime egală, adică să ne deprindem cu un mers „măsurat".

Pe șosea, la distanțe de cîte 100 m se află cîte o piatră albă; după ce am parcurs această distanță cu obișnuitul nostru pas „măsurat", socotind numărul de pași, putem să ne găsim cu ușurință lungimea medie a pasului. Această măsurătoare trebuie să fie repetată în fiecare an, de exemplu în fiecare primăvară, deoarece, mai ales la oamenii tineri, lungimea pasului nu rămîne neschimbată.

Să menționăm aici o relație curioasă, descoperită în cursul unor repetate măsurători: lungimea medie a pasului unui om adult este aproximativ egală cu jumătatea înălțimii sale, socotind pînă la nivelul ochilor. Dacă, de exemplu, înălțimea omului pînă la ochii lui este egală cu 140 cm, lungimea pasului său va fi de aproximativ 70 cm. Este interesant să verificăm la prima ocazie această regulă.

În afară de lungimea pasului, este util să cunoaștem, de asemenea, și *viteza* mersului nostru, adică numărul de kilometri parcurși într-o oră. Uneori ne folosim pentru aceasta de următoarea regulă: parcurgem într-o oră atîția kilometri cîți pași facem în 3 s. De exemplu, dacă în 3 s facem patru pași, atunci într-o oră parcurgem 4 km. Dar această regulă se poate aplica numai la o anumită lungime a pasului. Nu este prea greu să stabilim la ce lungime anume:

însemnînd lungimea pasului în metri, cu x, iar numărul de pași făcuți în 3 s, cu n, obținem următoarea proporție:

$$\frac{3\,600}{3}\cdot nx = n\cdot 1000,$$

de unde $1\,200\ x = 1\,000$ și $x = \frac{5}{6}\,m$, adică aproximativ 80—85 cm. Este un pas relativ mare; astfel de pași fac oamenii de statură înaltă. Dacă pasul nostru nu are 80—85 cm, trebuie să efectuăm măsurătoarea vitezei mersului nostru cu ajutorul altui procedeu, calculînd, pe ceas, în cît timp parcurgem 4 m — distanța dintre doi stîlpi de pe marginea șoselei.

APRECIEREA DIN OCHI A DISTANȚELOR

Este plăcut și util totodată să știm nu numai să măsurăm distanțele fără a folosi lanțul de măsurat, cu ajutorul pașilor, dar să și le apreciem din ochi, fără măsurătoare. Această deprindere se poate cîștiga numai prin exercițiu. În anii de școală, cînd făceam vara excursii cu un grup de prieteni în afara orașului, asemenea exerciții erau un lucru obișnuit. Ele luau forma unui sport original, inventat de noi — aceea a unui concurs: cine apreciază mai precis din ochi. Ieșind pe drum, alegeam un copac oarecare de lîngă drum sau alt obiect depărtat și concursul începea.

— Cîți pași sînt pînă la copac? — întreba unul dintre participanții la joc.

Ceilalți spuneau numărul de pași parcurs și apoi cu toții împreună număram pașii, pentru a vedea care din ei apreciase mai bine distanța: acesta era cîștigătorul. Atunci venea rîndul lui să aleagă obiectul a cărui depărtare trebuia s-o apreciem din ochi.

Cine aprecia distanța mai precis decît ceilalți obținea un punct. După 10 aprecieri se socoteau punctele: cel care obținea cel mai mare număr de puncte se considera cîștigătorul competiției.

Mi-aduc aminte că la început cu toții apreciam distanțele cu greșeli destul de grave. Dar foarte curînd — mult mai curînd decît ne-am fi putut închipui — ne-am perfecționat atît de mult în arta de a evalua distanțele din ochi, încît greşeam foarte puţin. Numai la o schimbare bruscă de decor, de exemplu, la trecerea de pe un cîmp pustiu într-o rarişte sau într-o poiană plină de mărăciniş, sau la reîntoarcerea în străzile înguste şi pline de praf ale oraşului, precum şi noaptea, la lumina înşelătoare a Lunii, ne mai prindeam unii pe alţii făcînd erori grave. Pe urmă însă, ne-am obişnuit să ne adaptăm repede la orice situaţie, ţinînd seama de ea în gîndul nostru în timp ce evaluam distanţa din ochi. În cele din urmă, grupul nostru a ajuns la o asemenea perfecţiune în ceea ce privea aprecierea din ochi a distanţelor, că a trebuit să renunţăm cu totul la acest sport: toţi ajunseseră la fel de iscusiţi în această privinţă şi competiţiile îşi pierduseră interesul. În schimb, cîştigasem deprinderea de a aprecia exact din ochi distanţele, deprindere ce ne-a fost de folos în timpul peregrinărilor noastre în afara oraşului.

Este interesant că aprecierea din ochi a distanţelor pare să nu depindă de agerimea văzului. În grupul nostru era un băiat miop, care nu numai că nu rămînea în urma celorlalţi în ce priveşte exactitatea aprecierii din ochi a distanţei, dar uneori chiar ieşea şi învingător în competiţii. Din contră, alt băiat, cu o vedere complet normală, nu putea să deprindă de loc arta aprecierii din ochi a distanţelor. Ulterior, am observat acelaşi lucru şi cînd era vorba de aprecierea din ochi a înălţimii arborilor: efectuînd cu studenţii exerciţii de acest fel — de astă dată nu ca o joacă, ci pentru nevoile impuse de viitoarea profesiune — am observat că miopii reuşeau să-şi însuşească această artă nu mai rău decît ceilalţi. Aceasta poate fi o consolare pentru miopi: fără a avea o prea mare agerime a văzului, sînt totuşi capabili să-şi dezvolte deprinderea de a aprecia distanţele într-un mod pe deplin satisfăcător.

Exerciţiile de apreciere din ochi a distanţelor pot fi efectuate în orice anotimp al anului şi în orice situaţie. Mergînd pe străzile oraşului, putem să ne punem problema de apreciere din ochi a distanţelor, căutînd să ghicim cîţi paşi sînt pînă la cel mai apropiat felinar sau pînă la un alt obiect oarecare din drumul nostru. În felul acesta, pe vreme rea, timpul în care străbatem străzile pustii va trece pe nesimţite.

Militarii dau multă atenţie aprecierii din ochi a distanţelor: deprinderea de a aprecia exact distanţele este necesară atît cercetaşului, cît şi puşcaşului şi artileristului. Este interesant să cunoaştem acele criterii pe care le folosesc ei în practica aprecierii din ochi a distanței. Iată cîteva observații dintr-un manual de artilerie:

„Distanțele pot fi apreciate din ochi în două feluri: fie după gradul de claritate cu care se văd obiectele situate la depărtări diferite de locul unde se găsește observatorul, fie luînd drept termen de comparație o distanță de 100—200 de pași cu care ochiul este deprins și care pare cu atît mai mică, cu cît se află mai departe de observator.

La aprecierea distanțelor după gradul de claritate al obiectelor vizibile, trebuie să avem în vedere că obiectele luminate sau care ies mai tare în evidență datorită culorii lor, față de terenul sau apa ce le înconjură, creează impresia că se află la o distanță mai mică; de asemenea, par mai apropiate și obiectele ce se află la o înălțime mai mare decît celelalte, precum și grupuri de obiecte, în comparație cu obiectele izolate, și, în genere, obiectele cu dimensiuni mai mari.

Ne putem călăuzi după următoarele criterii: pînă la 50 de pași putem deosebi în mod clar ochii și gura oamenilor; pînă la 100 de pași ochii par două puncte distincte; pînă la 200 de pași se mai pot distinge nasturii și amănuntele uniformei; la 300 de pași se mai vede fața omului; la 400 de pași se mai observă mișcarea picioarelor; la 500 de pași se mai vede culoarea uniformei".

În asemenea aprecieri un ochi mai experimentat face o eroare de cel mult 10% din distanța apreciată.

Se pot ivi, totuși, cazuri cînd eroarea făcută în aprecierea din ochi a distanțelor este mult mai însemnată. În primul rînd, aceasta se poate întîmpla la aprecierea distanțelor de pe o suprafață netedă și de aceeași culoare. Pe suprafața unui rîu sau a unui lac, pe un teren neted și nisipos sau pe un cîmp cu iarbă deasă, distanța ne pare întotdeauna mai mică decît cea reală — de două ori mai mică sau chiar mai mult. În al doilea rînd, sînt pe deplin posibile erori atunci cînd se apreciază distanța pînă la un obiect a cărui bază este ascunsă de terasamentul căii ferate, de un deal, de o construcție sau, în general, de o înălțime. În astfel de cazuri considerăm fără să vrem că obiectul nu se află în spatele acestei înălțimi, ci deasupra ei și, prin urmare, facem din nou o eroare în sensul micșorării distanței apreciate (fig. 75 și 76).

Fig. 75. Un arbore aflat după un dîmb ne apare foarte apropiat.

Fig. 76. Urcîndu-te pe deal, vezi că pînă la arbore mai este o distanță egală cu cea parcursă.

În astfel de cazuri este riscant să ne bazăm pe aprecierea din ochi şi trebuie să recurgem la alte metode de apreciere a distanţelor, despre care am mai vorbit şi vom mai vorbi şi mai departe.

PANTELE

De-a lungul terasamentului căii ferate putem observa, în afară de stîlpii ce indică kilometrii, şi alţi stîlpi nu prea înalţi, purtînd inscripţii care rămîn neînţelese pentru mulţi şi care se pot citi pe nişte scîndurele bătute oblic, de felul celor ce se văd în figura 77.

Aceştia sînt „indicatori de pantă". La cel dintîi, de exemplu, numărul aflat în partea superioară a inscripţiei, adică 0,002 arată că panta căii ferate (poziţia scîndurelei ne indică direcţia pantei) este acolo egală cu 0,002: calea ferată urcă sau coboară cu 2 mm la fiecare 1000 mm. Numărul 140, care se află în partea de jos a inscripţiei, arată că această pantă se întinde pe o distanţă de 140 m, după care urmează un alt indicator cu însemnarea noii pante. Cea de-a doua scîndurică, cu inscripţia $\frac{0{,}006}{55}$, arată că pe o distanţă de 55 m calea ferată urcă sau coboară cu 6 mm la fiecare metru.

Cunoscînd semnificaţia indicatorilor de pantă, putem calcula cu uşurinţă diferenţa de înălţime ce există între două puncte ale căii ferate, unde se află aceste semne. În primul caz, de exemplu, diferenţa de înălţime este egală cu $0{,}002 \times 140 = 0{,}28$ m, iar în cel de-al doilea va fi egală cu $0{,}006 \times 55 = 0{,}33$ m.

Fig. 77. Indicatori de pantă.

După cum se vede, în practica feroviarilor panta căii ferate nu se socoteşte în grade. Este însă uşor să transformăm indicaţiile caracteristice căii ferate, în grade. Dacă *AB* (fig. 77) va *fi* linia de cale ferată, iar *BC* — diferenţa de înălţime dintre punctele *A* şi *B*, înclinarea liniei de cale ferată AB față de linia orizontală AC va fi reprezentată pe stîlp prin proporția $\frac{BC}{AB}$. Întrucît unghiul A este foarte mic, putem considera AB și AC ca raze ale unui cerc al cărei arc este BC[1]. Atunci calcularea unghiului A, dacă se cunoaște raportul $BC:AB$ nu va prezenta nici o dificultate. Cînd avem o înclinare, de exemplu, reprezentată prin 0,002, vom raționa în felul următor: cînd avem lungimea unui arc egală cu 1/57 din rază, unghiul va fi de 1° (vezi p. 83); ce unghi va corespunde arcului de 0,002 din rază? Aflăm mărimea lui x din următoarea proporție:

$$x : 1^\circ = 0{,}002 : \frac{1}{57},$$

de unde $x = 0{,}002 \times 57 = 0{,}11^\circ$,

adică aproximativ 7′.

La căile ferate se admit numai pante extrem de mici. În U.R.S.S. se admite o pantă maximă egală cu 0,008, adică în grade aceasta ar fi $0{,}008 \times 57$ și reprezintă mai puțin de jumătate de grad; aceasta este panta maximă. Numai pentru calea ferată din Transcaucazia se admit, sub formă de excepție, pante ce merg pînă la 0,025, care corespund, în grade, aproape cu $1\,{}^1/_2{}^\circ$. Pante atît de neînsemnate nici nu le observăm. Un pieton începe să simtă înclinarea terenului de sub picioarele sale doar atunci cînd panta trece de $^1/_{24}$, ceea ce, în grade înseamnă $\left(\frac{57}{24}\right)^\circ$, adică aproximativ $2^1/_2{}^\circ$.

După ce am parcurs cîțiva kilometri pe calea ferată și am notat indicațiile de pantă observate, vom putea calcula cu cît am coborît sau am urcat în acest răstimp, cu alte cuvinte, care este diferența între înălțimea punctului inițial și a celui terminal.

---

[1] Unor cititori le va părea, poate, inadmisibil să considere linia înclinată AB egală cu orizontala AC. Este instructiv să ne convingem cît de mică este diferența dintre lungimea AC și AB, cînd BC reprezintă, de exemplu, 0,01 din AB. După teorema lui Pitagora, avem:

$$AC = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB}{100}\right)^2} = \sqrt{0{,}9999\ AB^2} = 0{,}99995\ AB$$

Diferența de lungime reprezintă doar 0,00005 din AB. Desigur că pentru calcule aproximative o asemenea eroare este admisibilă.

Problemă

Ne-am început plimbarea de-a lungul terasamentului căii ferate de la un stîlp cu un indicator de pantă (urcare) de $\frac{0{,}004}{153}$ şi am întîlnit mai departe următoarele semne:

orizontal[1]	*urcare*	*urcare*	*orizontal*	*coborîre*
$\frac{0{,}000}{60}$,	$\frac{0{,}0017}{84}$,	$\frac{0{,}0032}{121}$,	$\frac{0{,}000}{45}$,	$\frac{0{,}004}{210}$.

Ne-am terminat plimbarea la indicatorul de pantă următor. Ce distanţă am parcurs şi ce diferenţă este între înălţimea primului şi a ultimului indicator?

Rezolvare

În total s-au parcurs:

$$153 + 60 + 84 + 121 + 45 + 210 = 673 \text{ m}$$

Ne-am urcat cu

$$0{,}004 \times 153 + 0{,}0017 \times 84 + 0{,}0032 \times 121 \approx 1{,}15 \text{ m},$$

şi am coborît cu

$$0{,}004 \times 210 = 0{,}84 \text{ m}$$

Prin urmare, ne aflăm, faţă de punctul iniţial, la o înălţime mai mare cu

$$1{,}55 - 0{,}84 = 0{,}31 \text{ m} = 31 \text{ cm}.$$

GRĂMEZI DE PIETRIŞ

Grămezile de pietriş aflate la marginea şoselelor reprezintă, de asemenea, un obiect demn de atenţia celui care se ocupă cu „geometria în aer liber". Puneţi-vă întrebarea ce volum are grămada aflată în faţa dv., şi astfel aveţi o problemă geometrică destul de complicată pentru un om obişnuit să biruie dificultăţile matematicii numai pe hîrtie sau pe tabla din clasă. Va trebui să calculaţi volumul unui con, ale cărui înălţime şi rază sînt inaccesibile pentru o măsură-

[1] Semnul 0,000 reprezintă un sector orizontal de cale ferată.

toare directă. Dar nimic nu vă împiedică să stabiliţi mărimea lor într-un mod indirect. Veţi afla raza măsurînd cu ruleta sau cu un şnur circumferinţa bazei şi împărţind[1] lungimea ei la 6,28.

Problema este mai dificilă în ce priveşte înălţimea: va trebui (fig. 78) să măsuraţi lungimea generatoarei AB, aşa

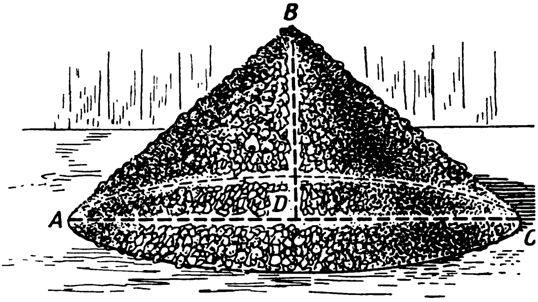


Fig. 78. La problema referitoare la grămada de pietriş.

cum procedează brigadierii de cale ferată, să măsuraţi deodată lungimea ambelor generatoare ABC (aruncînd panglica de măsurat peste vîrful grămezii), apoi, cunoscînd raza bazei să calculaţi BD după teorema lui Pitagora. Să analizăm un exemplu.

Problemă

Circumferinţa bazei unei grămezi conice de pietriş este de 12,1 m; lungimea celor două generatoare care formează conul este 4,6 m. Ce volum are grămada?

Rezolvare

Raza bazei grămezii este egală cu

$$12{,}1 \times 0{,}159 \text{ (în loc de } 12{,}1 : 6{,}28) \approx 1{,}9 \text{ m.}$$

[1] În practică, această operaţie este înlocuită prin înmulţirea cu numărul invers 0,318, dacă vrem să aflăm diametrul şi cu 0,159, dacă vrem să calculăm raza.

Înălțimea este egală cu

$$\sqrt{2{,}3^2 - 1{,}9^2} \approx 1{,}3 \text{ m},$$

de unde volumul grămezii este de

$$\frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 1{,}9^2 \times 1{,}3 \approx 4{,}9 \text{ m}^3.$$

UN „MÎNDRU DEAL"

Cînd privesc grămezile conice de pietriș sau de nisip îmi amintesc vechea legendă orientală pe care ne-o povestește Pușkin în *Cavalerul avar*:

Am citit cîndva,
Că-n vremuri de demult un împărat ceru
Oștenilor să-aducă fiecare
O mînă de pămînt într-o grămadă
Și-un mîndru deal s-a înălțat — iar împăratul
Putea privi din vîrf cu bucurie.
Și văile cu corturile albe
Și marea străbătută de corăbii.

Aceasta este una dintre acele puține legende care, cu toată aparenta lor veridicitate, nu conțin nici un grăunte de adevăr. Se poate dovedi, cu ajutorul calculelor geometrice, că dacă un oarecare despot din vechime ar fi dorit să realizeze un astfel de proiect, el s-ar fi descurajat în fața rezultatului mizer: în fața lui s-ar fi înălțat o grămăjoară atît de neînsemnată de pămînt, încît nici o imaginație n-ar fi putut s-o umfle pînă la acel legendar „mîndru deal" despre care vorbește poetul.

Să facem un calcul aproximativ. Cîți oșteni putea să aibă un împărat din vechime? Armatele din vechime nu erau atît de numeroase ca în timpurile noastre. O armată de 100 000 de oameni era extrem de însemnată ca număr. Să ne oprim la această cifră. Să presupunem astfel că dealul s-a format din 100 000 de pumni de pămînt. Luați un pumn de pămînt cît puteți cuprinde și turnați-l într-un pahar:

nu-l veți umple. Noi vom presupune că pumnul oșteanului din vechime era egal ca volum, cu 1/5 l (dm^3). De aici se calculează volumul dealului:

$$\frac{1}{5} \times 100\,000 = 20\,000 \text{ dm}^3 = 20 \text{ m}^3$$

Prin urmare, dealul reprezenta un con cu un volum ce nu depășea 20m^3 . Acest volum modest e de ajuns ca să ne dezamăgească. Să continuăm însă calculele, pentru a stabili înălțimea dealului. Pentru aceasta trebuie să știm ce unghi formează generatoarele conului cu baza lui. În cazul nostru îl putem presupune egal cu unghiul format de panta naturală, adică de 45°: nu putem admite înclinări mai abrupte, deoarece pămîntul ar fi început să se risipească (și mai verosimil ar fi chiar să luăm o înclinare și mai lină, de exemplu, de 1 : 1,5). Oprindu-ne la unghiul de 45°, deducem că înălțimea unui astfel de con este egală cu raza bazei sale; prin urmare:

$$20 = \frac{\pi x^3}{3},$$

de unde

$$x = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} \approx 2{,}7 \text{ mm}.$$

Trebuie să ai o imaginație foarte bogată pentru ca să poți numi o grămadă de pămînt de 2,7 m ($1\frac{1}{2}$ din înălțimea unui om) „un mîndru deal". Făcînd calculul pentru cazul unei pante și mai line, am găsi un rezultat și mai modest.

Atila avea oastea cea mai numeroasă pe care a cunoscut-o lumea antică. Istoricii o apreciază ca fiind de 700 000 de oameni. Dacă toți acești oșteni ar fi participat la înălțarea dealului, s-ar fi format o grămadă mai înaltă decît cea calculată de noi, dar nu cu prea mult, deoarece volumul ei ar fi fost de șapte ori mai mare decît al dealului nostru, așa că înălțimea lui ar fi fost mai mare decît înălțimea grămezii doar de $\sqrt[3]{7}$, adică de 1,9 ori. Ea ar fi fost egală cu $2{,}7 \times \times 1{,}9 \approx 5{,}1$ m. Este îndoielnic faptul că o movilă de aceste dimensiuni ar fi satisfăcut ambițiile lui Atila.

Desigur că de la această înălțime neînsemnată era ușor să vezi „cîmpul acoperit de corturi albe", dar să privești marea ar fi fost posibil numai dacă lucrurile s-ar fi petrecut nu prea departe de țărm.

Cît de departe se poate vedea de la o înălțime sau alta vom arăta în capitolul VI.

LA CURBURA DRUMULUI

Nici șoseaua, nici calea ferată nu cotesc prea brusc, ci au treceri line de la o direcție la alta — treceri fără linii frînte, ci în formă de curbă. Această curbă este, de obicei, o parte dintr-o circumferință situată în așa fel, încît segmentele drepte ale drumului sînt drepte tangente la ea. De exemplu în figura 79, segmentele drepte AB și CD ale drumului sînt unite prin curba BC în așa fel, încît AB și CD sînt tangente

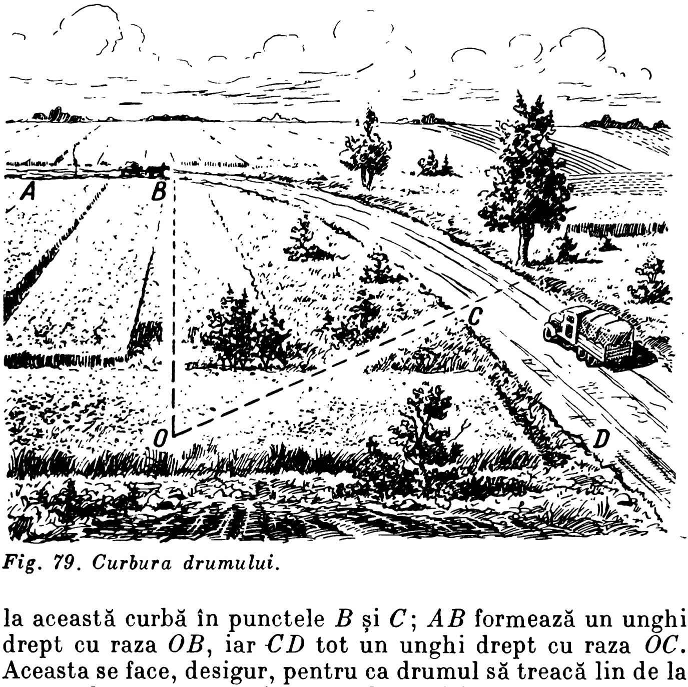


Fig. 79. Curbura drumului.

la această curbă în punctele B și C; AB formează un unghi drept cu raza OB, iar CD tot un unghi drept cu raza OC. Aceasta se face, desigur, pentru ca drumul să treacă lin de la partea dreaptă în porțiunea curbată și invers.

De obicei, se ia o rază de curbură a drumului foarte mare — la căile ferate nu mai mică de 600 m; dar raza cea mai obişnuită pentru curbele de pe principalele artere de cale ferată este de 1 000 şi chiar 2 000 m.

RAZA DE CURBURĂ

Stînd în apropierea uneia din aceste curbe putem oare să stabilim mărimea razei sale? Lucrul nu este atît de simplu, ca aflarea razei unui arc de cerc desenat pe hîrtie. Într-un desen, lucrul este simplu: ducem două coarde oarecare şi din mijlocul lor ridicăm perpendiculare; în punctul lor de intersecţie se află, după cum se ştie, centrul arcului; distanţa lui pînă la un punct oarecare de la linia curbă este lungimea necunoscută a razei.

Ar fi însă, desigur, foarte incomod să facem o asemenea construcţie pe teren, căci centrul curbei se află la o distanţă de 1—2 km de drum, adesea într-un loc inaccesibil. S-ar putea efectua această construcţie pe un plan, însă ridicarea planului curbei nu este nici ea o treabă prea uşoară.

Toate aceste dificultăţi pot fi înlăturate dacă recurgem nu la construirea, ci la calcularea razei. Pentru aceasta putem folosi următorul procedeu. Să completăm în gînd arcul AB al curbei pînă se formează cercul întreg (fig. 80). Unind două puncte oarecare C şi D de pe arcul curbei, măsurăm coarda CD, precum şi „săgeata" EF (adică înălţimea segmentului CED). După aceste date nu va fi greu să calculăm lungimea necunoscută a razei. Considerînd dreptele CD şi diametrul cercului drept coarde secante, notăm lungimea coardei cu a, lungimea săgeţii cu h şi raza cu R; vom avea:

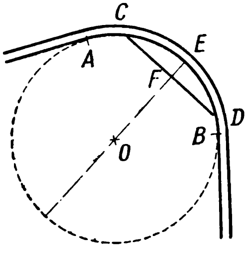


Fig. 80. La calculul razei de curbură.

$$\frac{a^2}{4} = h(2R - h),$$

de unde

$$\frac{a^2}{4} = 2Rh - h^2$$

şi raza necunoscută va fi[1]

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$

De exemplu, cînd avem o săgeată de 0,5 m şi coarda de 48 m, raza necunoscută va fi

$$R = \frac{48^2 + 4 \times 0{,}5^2}{8 \times 0{,}5} \approx 580 \text{ m}.$$

Acest calcul poate fi simplificat, dacă considerăm $2R - h = 2R$ — aproximaţie pe care ne-o putem permite, deoarece h este extrem de mic în comparaţie cu R (căci R reprezintă sute de metri, iar h doar unităţi). Atunci obţinem o formulă aproximativă extrem de comodă pentru calcule:

$$R = \frac{a^2}{8h}.$$

Dacă o aplicăm în cazul examinat mai sus, obţinem aceeaşi dimensiune:

$$R \approx 580.$$

Calculînd lungimea razei de curbură şi cunoscînd, în afară de aceasta, că centrul curbei se află pe o perpendiculară la mijlocul coardei, putem însemna, în mod aproximativ, şi locul unde trebuie să fie situat centrul părţii curbe a drumului.

Dacă pe terasamentul de cale ferată sînt şine, atunci aflarea razei de curbură se simplifică. Într-adevăr, întinzînd o

[1] Acelaşi rezultat ar putea fi obţinut şi pe o altă cale, şi anume din triunghiul dreptunghic COF, unde $OC = R$, $CF = \frac{a}{2}$, $OF = R - h$. După teorema lui Pitagora

$$R^2 = (R - h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

de unde

$$R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$

sfoară care să fie tangentă la şina interioară, obţinem o coardă a arcului format de şina exterioară a cărei săgeată h (fig. 81) este egală cu lăţimea căii ferate, adică cu 1,52 m.

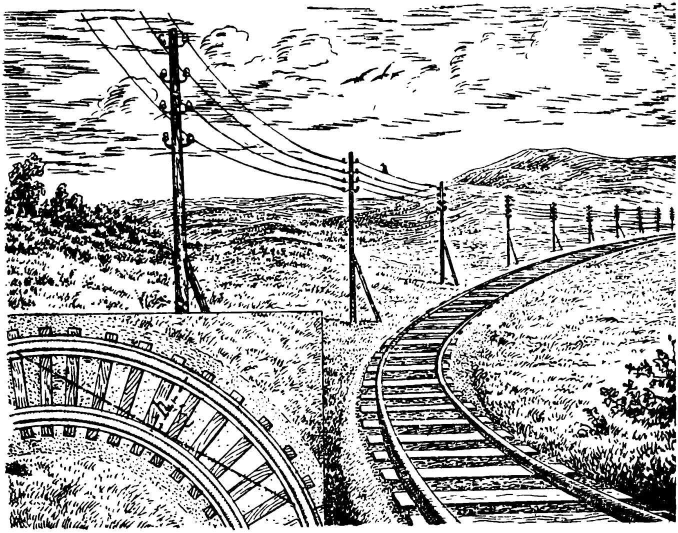


Fig. 81. La calculul razei de curbură a căii ferate.

Raza de curbură în acest caz (dacă a este lungimea coardei) va fi aproximativ egală cu

$$R = \frac{a^2}{8 \times 1{,}52} = \frac{a^2}{12{,}2}.$$

Dacă $a = 120$ m, raza de curbură va fi egală cu 1 200 m[1].

FUNDUL OCEANULUI

De la curbura drumului la fundul oceanului este un salt care poate să pară prea neaşteptat sau, în orice caz, este mai greu de înţeles din capul locului. Geometria leagă însă ambele teme într-un mod extrem de firesc.

[1] În practică, acest procedeu are neajunsul că din cauza razei prea mari de curbură, sfoara pentru coardă trebuie să fie foarte lungă.

Aici este vorba despre curbura fundului oceanului, și anume de forma pe care o are această curbură: concavă, plană sau convexă. Fără îndoială că multora le va părea neverosimil faptul că oceanele, cu toată adîncimea lor imensă, nu reprezintă de fel depresiuni pe suprafața globului terestru; după cum vom vedea acum, fundul lor nu numai că nu este concav, dar e chiar convex. Considerînd oceanul ca fiind „fără fund și fără țărmuri“, noi uităm că „nemărginirea“ lui este de multe sute de ori mai mare decît imensa lui adîncime, că stratul de apă al oceanului se întinde pe mari depărtări și, desigur, repetă curbura planetei noastre.

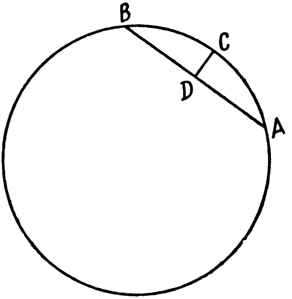


Fig. 82. Este oare fundul oceanului plan?

Să luăm, de pildă, Oceanul Atlantic. Lățimea lui în apropiere de ecuator constituie aproximativ a șasea parte din circumferința totală. Dacă cercul din figura 82 este ecuatorul, atunci arcul ABC reprezintă suprafața Oceanului Atlantic. Dacă fundul lui ar fi plan, atunci adîncimea ar fi egală cu CD, săgeata arcului ACB. Știind că arcul $AB = 1/6$ din circumferință și, prin urmare, coarda AB este latura unui hexagon regulat înscris (care, după cum se știe, este egală cu raza R a cercului), putem calcula CD din formula rezultată anterior pentru curbura drumului:

$$R = \frac{a^2}{8h},$$

de unde

$$h = \frac{a^2}{8R}.$$

Știind că $a = R$, obținem în cazul de față:

$$h = \frac{R}{8}.$$

Cum $R = 6\,400$ km, vom avea:

$$h = 800 \text{ km}.$$

Așadar, pentru ca fundul Oceanului Atlantic să fie plan, adîncimea lui maximă ar trebui să atingă 800 km. În realitate însă, ea nu atinge nici 10 km. De aici rezultă o concluzie directă: fundul acestui ocean reprezintă, în ce privește forma sa generală, o convexitate doar ceva mai puțin curbată decît convexitatea suprafeței sale.

Aceasta se referă și la alte oceane: fundul lor reprezintă pe suprafața terestră un loc de curbură redusă, aproape fără a contraveni formei ei sferice generale.

Formula noastră pentru calcularea razei de curbură a drumului arată că cu cît un bazin de apă va fi mai mare, cu atît fundul lui va fi mai convex. Examinînd formula $h = \frac{a^2}{8R}$, vedem imediat că pe măsură ce crește lățimea a a oceanului sau a mării, adîncimea lui h trebuie — pentru ca fundul să fie plan — să crească extrem de repede, proporțional cu pătratul lățimii a. Cu toate acestea, la trecerea de la bazine de apă mai puțin întinse la altele mai mari, adîncimea nu crește de fel într-o progresie atît de vertiginoasă. Oceanul este mai lat decît o mare oarecare, să presupunem, de 100 de ori, dar nu este mai adînc decît ea de 100×100, adică de 10 000 de ori. Din această cauză, bazinele relativ mici au fundul mai concav decît oceanele. Fundul Mării Negre, între Crimeea și Asia Mică, nu este convex, ca la oceane, nu este nici măcar plan, ci puțin concav. Suprafața apelor acestei mări reprezintă un arc de aproximativ 2° (mai exact, de $\frac{1}{170}$ din circumferința Pămîntului). Adîncimea Mării Negre este destul de uniformă și egală cu 2,2 km. Egalînd în cazul de față arcul cu coarda, vom afla că marea cu fund plan ar trebui să aibă adîncimea cea mai mare de:

$$h = \frac{40\ 000^2}{170^2 \times 8R} = 1{,}1 \text{ km}.$$

Prin urmare, într-adevăr, fundul Mării Negre se află cu mai bine de 1 km (2,2—1,1) mai jos decît suprafața plană imaginată dusă prin punctele extreme ale țărmurilor ei opuse, adică reprezintă o concavitate și nu o convexitate.

Formula rezultată anterior pentru calculul razei de curbură a unui drum ne va ajuta să răspundem la această întrebare.

Problema anterioară ne-a pregătit deja pentru acest răspuns. Munți de apă există, dar nu în sensul fizic, ci în cel geometric al acestor cuvinte. Nu numai că fiecare mare, dar chiar fiecare lac reprezintă, în oarecare măsură, un munte de apă. Cînd ne aflăm pe malul unui lac, convexitatea apei ne separă de punctul opus al malului, înălțimea convexității fiind cu atît mai mare cu cît lacul este mai lat. Această înălțime poate fi calculată: din formula $R = \frac{a^2}{8h}$ avem valoarea săgeții $h = \frac{a^2}{8R}$; aici a este distanța dintre maluri în linie dreaptă, care poate fi egalată cu lățimea lacului (coarda egalată prin aproximație cu arcul). Dacă această lățime este, să presupunem, de 100 km, atunci înălțimea „muntelui" de apă va fi:

$$h = \frac{10\,000}{8 \times 6\,400} = \text{circa } 200 \text{ m.}$$

Un munte de apă de o înălțime respectabilă!

Chiar un lac nu prea întins cu o lățime de 10 km, înalță vîrful convexității sale, la o înălțime de 2 m, deasupra liniei drepte ce-i unește malurile, adică la o înălțime mai mare decît aceea a omului.

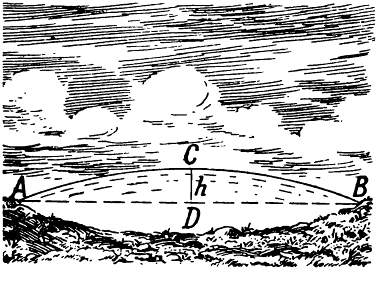


Fig. 83. „Muntele de apă".

Avem însă dreptul să numim aceste suprafețe convexe de apă „munți"? Desigur, în sens fizic, nu: ele nu se înalță deasupra orizontului, prin urmare sînt suprafețe plane. Ar fi greșit să considerăm că dreapta AB (fig. 83) este o linie orizontală (în reprezentarea unui om ce se află în punctul A), deasupra căreia se înalță arcul ACB. Linia orizontală nu va fi AB, ci ACB, ce coincide cu suprafața liberă a apei liniștite. Dreapta ADB va fi oblică la linia orizontului: AD merge oblic „în jos“, sub suprafaţa terestră, pînă la punctul D, care este punctul ei cel mai adînc şi apoi „se ridică în sus“ din nou, ieşind deasupra mării (sau de sub apă) în punctul B. Dacă de-a lungul dreptei AB ar fi instalate nişte ţevi atunci o bilă situată în punctul A, nu s-ar menţine aici, ci s-ar rostogoli (dacă pereţii ţevii sînt netezi) pînă la punctul D şi de aici, în virtutea inerţiei, „ar urca“ pînă la punctul B; dar ea n-ar reuşi să se menţină aici şi s-ar rostogoli înapoi la D, apoi ar fugi pînă la A, după care din nou s-ar rostogoli în jos ş.a.m.d. O bilă ideal de netedă pe o ţeavă perfect netedă (şi în absenţa aerului ce împiedică mişcarea) s-ar rostogoli astfel încolo şi încoace la infinit...

Aşadar, cu toate că ochiului îi pare (fig. 83), că ACB este un munte, în semnificaţia fizică a cuvîntului, aici este un loc neted. Muntele — dacă doriţi — există numai în sensul geometric.

Capitolul V

TRIGONOMETRIE DE MARŞ FĂRĂ FORMULE ŞI TABELE

CALCULAREA SINUSULUI

În acest capitol se va arăta cum se pot calcula laturile unui triunghi cu o exactitate de pînă la 2%şi unghiurile cu o precizie de pînă la 1°, folosind numai noţiunea de sinus şi fără a recurge la tabele sau formule. O astfel de trigonometrie simplificată care ne poate fi de folos în timpul unei plimbări în afara oraşului, cînd n-avem la îndemînă tabele, iar formulele trigonometrice aproape că le-am uitat. Robinson ar fi putut să folosească cu succes această trigonometrie pe insula sa.

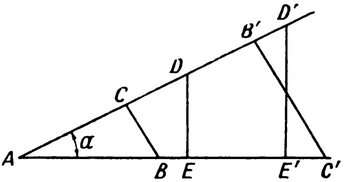
Aşadar, imaginaţi-vă că încă nu aţi studiat trigonometria sau că aţi uitat-o în întregime, — situaţie pe care unii dintre cititori şi-o pot închipui, probabil, cu uşurinţă. Să facem din nou cunoştinţă cu ea. Ce înseamnă sinusul unui unghi ascuţit? Acesta este raportul dintre cateta opusă unghiului respectiv şi ipotenuza triunghiului format prin intersecţia unghiului cu o perpendiculară la una din laturile sale. De exemplu, sinusul unghiului α (fig. 84) va fi $\frac{BC}{AB}$ sau $\frac{ED}{AD}$ sau $\frac{D'E'}{AD'}$ sau $\frac{B'C'}{AC'}$. Este uşor de observat că, în urma asemănării triunghiurilor care s-au format aici, toate aceste rapoarte sînt egale între ele. Cu ce vor fi egale sinusurile diverselor unghiuri de la 1 pînă la 90°? Cum să aflăm aceasta, dacă nu avem tabele la îndemînă? Extrem de simplu: ne vom alcătui singuri tabelul de sinusuri. De aceasta ne vom ocupa acum în cele ce urmează.

Vom începe cu acele unghiuri ale căror sinusuri ne sînt cunoscute din geometrie. Vom considera înainte de toate unghiul de 90°, al cărui sinus este evident egal cu 1. Apoi unghiul de 45°, al cărui sinus este uşor de calculat după teorema lui Pitagora; el va fi egal cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$, adică cu 0,707. Mai cunoaştem şi valoarea sinusului de 30°; deoarece cateta ce se opune unui astfel de unghi este egală cu jumătatea ipotenuzei, rezultă sin 30° = 1/2.

Așadar, cunoaștem sinusurile (care se notează cu sin) a trei unghiuri:

$$\sin 30^\circ = 0{,}5,$$
$$\sin 45^\circ = 0{,}707,$$
$$\sin 90^\circ = 1.$$

Desigur că aceasta nu este suficient pentru rezolvarea problemelor de geometrie; este necesar să cunoaștem sinu-



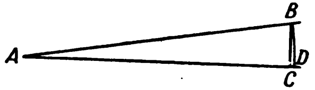


Fig. 84. Ce este sinusul unui unghi ascuțit?

surile tuturor unghiurilor intermediare, cel puțin din grad în grad. Pentru unghiurile foarte mici la calcularea sinusurilor putem lua, în locul raportului dintre catetă și ipotenuză, raportul dintre arc și rază fără a face o eroare prea mare: din figura 84 (dreapta) se vede că raportul $\frac{BC}{AD}$ diferă foarte puțin de raportul $\frac{BD}{AB}$. Iar ultimul raport este ușor de calculat. De exemplu, pentru un unghi de 1°, arcul $BD = \frac{2\pi R}{360}$, unde $\pi = 3{,}14159...$ și, prin urmare, sin 1° îl putem considera egal cu:

$$\frac{2\pi R}{360R} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0175.$$

În același mod aflăm:

$$\sin 2^\circ = 0{,}0349,$$
$$\sin 3^\circ = 0{,}0524,$$
$$\sin 4^\circ = 0{,}0698,$$
$$\sin 5^\circ = 0{,}0873.$$

Trebuie să vedem însă cît de departe putem continua acest tabel fără a face o eroare prea mare. Dacă am calcula după acest procedeu pe sin 30° am obține 0,524 în loc de 0,500: diferența ar fi deja în zecimala a doua, și eroarea ar fi de $\frac{24}{500}$, adică aproximativ 5%. Aceasta este o eroare prea grosolană chiar pentru nepretențioasa trigonometrie de marș. Pentru a găsi limita pînă la care este admisibil să ducem calculul sinusurilor după procedeul aproximativ arătat, să ne străduim să aflăm, în mod exact, sin 15°. Pentru aceasta să folosim următoarea construcție nu prea complicată (fig. 85). Să presupunem că sin 15° $= \frac{BC}{AB}$.

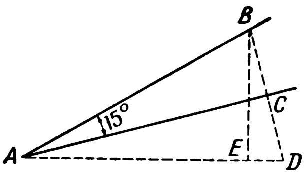


Fig. 85. Cum se calculează sin 15°?

Să prelungim BC pe o distanță egală cu ea pînă în punctul D. Unind A cu D obținem două triunghiuri egale ADC și ABC, în care unghiul $BAD = 30°$. Să ducem pe AD perpendiculara BE; se va forma triunghiul dreptunghic BAE, cu unghiul BAE egal cu 30°, deci $BE = \frac{AB}{2}$. Calculăm AE din triunghiul ABE după teorema lui Pitagora:

$$AE^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} AB^2,$$

$$AE = \frac{AB}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\ AB.$$

Prin urmare, $ED = AD - AE = AB - 0{,}866\,AB = 0{,}134\ AB$. Acum, din triunghiul BED calculăm BD:

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (0{,}134\ AB)^2 = 0{,}268\ AB^2,$$

$$BD = \sqrt{0{,}268\ AB^2} = 0{,}518\ AB.$$

Jumătate din BD, adică BC, este egală cu 0,259 AB, prin urmare, sinusul necunoscut va fi:

$$\sin\ 15° = \frac{BC}{AB} = \frac{0{,}259\ AB}{AB} = 0{,}259.$$

Aceasta este valoarea din tabele a lui sin 15°, dacă ne limităm la trei cifre. Iar valoarea lui aproximativă, pe care am găsit-o cu ajutorul procedeului anterior, era egală cu 0,262. Comparînd valorile:

$$0{,}259 \text{ și } 0{,}262,$$

vedem că, limitîndu-ne la două cifre, vom obține:

$$0{,}26 \text{ și } 0{,}26,$$

adică rezultate identice.

Eroarea care s-a produs la înlocuirea unui rezultat mai exact (0,259) prin unul aproximativ (0,26) este de 1/1 000, adică aproximativ de 0,4%. Aceasta este o eroare admisibilă pentru calculele efectuate în marș și, prin urmare, sinusurile unghiurilor de la 1 pînă la 15° pot fi calculate după metoda noastră aproximativă.

Pentru intervalul dintre 15 și 30° putem calcula sinusurile cu ajutorul proporțiilor. Să raționăm în modul următor. Diferența dintre sin 30° și sin 15° este $0{,}50-0{,}26 = 0{,}24$. Prin urmare, putem admite că la fiecare creștere a unghiului cu 1° sinusul lui crește aproximativ 1/15 din această diferență, adică cu $\frac{0{,}24}{15} = 0{,}016$. Riguros vorbind, lucrurile nu stau chiar așa, însă abaterea de la regula arătată se manifestă abia în zecimala a treia pe care o neglijăm. Așadar, adăugînd succesiv mărimea 0,016 la sin 15°, obținem sinusurile unghiurilor de 16°, 17°, 18°:

$$\sin 16° = 0{,}26 + 0{,}016 = 0{,}28,$$
$$\sin 17° = 0{,}26 + 0{,}032 = 0{,}29,$$
$$\sin 18° = 0{,}26 + 0{,}048 = 0{,}31,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sin 25° = 0{,}26 + 0{,}16 = 0{,}42 \text{ etc.}$$

Toate aceste sinusuri sînt exacte pînă la primele două zecimale, adică au o exactitate suficientă pentru scopurile noastre: ele diferind de sinusurile reale cu mai puțin de jumătate din valoarea ultimei cifre.

Aceeași metodă se întrebuințează la calcularea sinusurilor unghiurilor din intervalul dintre 30° și 45°. Avem $\sin 45° - \sin 30° = 0{,}707 - 0{,}5 = 0{,}207$. Împărțind această diferență la 15, vom căpăta 0,014. Această valoare o vom adăuga succesiv la sin 30°; atunci vom obține:

$$\sin 31° = 0{,}5 + 0{,}014 = 0{,}51,$$
$$\sin 32° = 0{,}5 + 0{,}028 = 0{,}53,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sin 40° = 0{,}5 + 0{,}14 = 0{,}64 \text{ etc.}$$

Rămîne doar să aflăm sinusurile unghiurilor ascuţite mai mari de 45°. Pentru aceasta ne vom sprijini pe teorema lui Pitagora. Să presupunem că vrem să aflăm sin 53°, adică (fig. 86) raportul $\frac{BC}{AB}$. Deoarece unghiul $B = 37°$, sinusul lui îl putem calcula după metoda de mai sus: el va fi egal cu $0{,}5 + 7 \times 0{,}014 = 0{,}6$. Pe de altă parte, ştim că $\sin B = \frac{AC}{AB}$. Aşadar, $\frac{AC}{AB} = 0{,}6$, de unde $AC = 0{,}6 \times AB$. Cunoscînd AC, este uşor să calculăm BC. Acest segment va fi egal cu $\sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{AB^2 - (0{,}6\,AB)^2} = AB\sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8\,AB$.

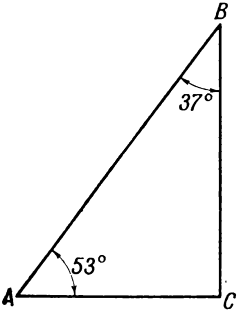


Fig. 86. Calculul unui unghi ascuţit după sinusul lui.

În general, calculul nu este greu, însă este necesar să ştim să extragem rădăcinile pătrate.

EXTRAGEREA RĂDĂCINII PĂTRATE

Modul de extragere al rădăcinilor pătrate expus în cursurile de algebră se uită repede. Ne putem însă lipsi de el. În manualele mele de geometrie am expus un procedeu simplificat, din antichitate, pentru extragerea rădăcinilor pătrate cu ajutorul împărţirii. Aici voi arăta alt procedeu vechi, de asemenea, mai simplu decît cel analizat în cursurile de algebră.

Presupunem că trebuie să calculăm $\sqrt{13}$. El este cuprins între 3 şi 4 şi, prin urmare, este egal cu 3 plus o fracţie, pe care s-o notăm cu x.

Aşadar,

$$\sqrt{13} = 3 + x,$$

de unde

$$13 = 9 + 6x + x^2.$$

Pătratul fracţiei x este o fracţie mică, pe care o putem neglija în primă aproximaţie. Atunci vom avea:

$$13 = 9 + 6x,$$

de unde

$$6x = 4 \text{ și } x = \frac{2}{3} = 0{,}67.$$

Prin urmare, aproximativ, $\sqrt{13} = 3{,}67$. Dacă dorim să determinăm valoarea rădăcinii într-un mod și mai exact, vom scrie ecuația $\sqrt{13} = 3\frac{2}{3} + y$, unde y este o fracție mică, pozitivă sau negativă. De aici, $13 = \frac{121}{9} + \frac{22}{3}y + y^2$. Neglijînd y^2, găsim că y este aproximativ egal cu $-\frac{2}{33} = -0{,}06$. Prin urmare, în a doua aproximație $\sqrt{13} = 3{,}67 - 0{,}06 = 3{,}61$. A treia aproximație se face cu ajutorul aceluiași procedeu.

Cu ajutorul procedeului obișnuit arătat în cursurile de algebră am fi obținut $\sqrt{13}$, cu o precizie pînă la 0,01 — de asemenea 3,61.

SĂ AFLĂM UNGHIUL CU AJUTORUL SINUSULUI

Așadar, avem posibilitatea de a calcula sinusul oricărui unghi de la 0 pînă la 90° cu două zecimale. Prin urmare, necesitatea unui tabel gata întocmit cade de la sine. Pentru calculele aproximative, putem totdeauna să ne alcătuim, dacă dorim, un astfel de tabel.

Pentru rezolvarea problemelor de trigonometrie trebuie să știm însă să efectuăm și operația inversă, adică să calculăm unghiurile fiind dat sinusul. Operația nu este prea complicată. Să presupunem că trebuie să găsim un unghi al cărui sinus este egal cu 0,38. Deoarece sinusul dat este mai mic decît 0,5, unghiul necunoscut este mai mic de 30°. Însă el este mai mare de 15°, pentru că sin 15°, după cum știm, este egal cu 0,26. Pentru a afla acest unghi, care se află în intervalul dintre 15 și 30°, procedăm după indicațiile date la p. 137:

$$0{,}38 - 0{,}26 = 0{,}12,$$

$$\frac{0{,}12}{0{,}016} = 7{,}5^\circ,$$

$$15^\circ + 7{,}5^\circ = 22{,}5^\circ.$$

Prin urmare, unghiul necunoscut este aproximativ egal cu 22,5°.

Alt exemplu: să aflăm unghiul al cărui sinus este egal cu 0,62:

$$0{,}62 - 0{,}50 = 0{,}12,$$

$$\frac{0{,}12}{0{,}014} = 8{,}6°,$$

$$30° + 8{,}6° = 38{,}6°.$$

Unghiul necunoscut este aproximativ egal cu 38,6°.

În sfîrșit, al treilea exemplu: să aflăm unghiul al cărui sinus este egal cu 0,91.

Deoarece sinusul dat se află între 0,71 și 1, unghiul necunoscut se va afla în intervalul dintre 45 și 90°. În figura 87, BC este sinusul unghiului A, dacă $BA = 1$. Cunoscînd BC, este ușor să aflăm sinusul unghiului B:

$$AC^2 = 1 - BC^2 = 1 - 0{,}91^2 = 1 - 0{,}83 = 0{,}17,$$

$$AC = \sqrt{0{,}17} = 0{,}42.$$

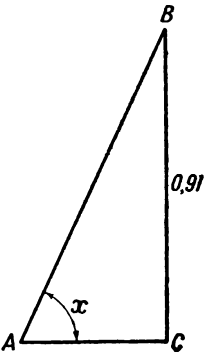


Fig. 87. Calculul sinusului unui unghi mai mare de 45°.

Acum vom afla valoarea unghiului B, al cărui sinus este egal cu 0,42; după aceasta ne va fi ușor să aflăm unghiul A, egal cu $90° - B$. Întrucît 0,42 este cuprins între 0,26 și 0,5, unghiul B se va afla în intervalul dintre 15 și 30°. El se determină în modul următor:

$$0{,}42 - 0{,}26 = 0{,}16,$$

$$\frac{0{,}16}{0{,}016} = 10°,$$

$$\sphericalangle B = 15° + 10° = 25°.$$

Prin urmare, unghiul $A = 90° - B = 90° - 25° = 65°$.

Sîntem deci pe deplin înarmați în vederea rezolvării în mod aproximativ a problemelor de trigonometrie, deoarece știm să aflăm sinusurile în funcție de unghiuri și unghiurile cu ajutorul sinusurilor, cu o exactitate suficientă pentru nevoile excursiei.

Este oare sinusul suficient pentru rezolvarea acestor probleme? Oare nu vom avea nevoie și de celelalte funcții trigonometrice, ca cosinus, tangentă etc.? În cele ce urmează, vom arăta, printr-o serie de exemple, că pentru trigonometria noastră simplificată ne putem limita pe deplin numai la sinus.

ÎNĂLȚIMEA SOARELUI

Problemă

Umbra *BC* (fig. 88) lăsată de o prăjină verticală *AB* de 4,2 m înălțime, are o lungime de 6,5 m. La ce înălțime se află Soarele deasupra orizontului în acest moment, adică cît de mare este unghiul *C*?

Rezolvare

Din figura 88 se vede ușor că sinusul *C* este egal cu $\frac{AB}{AC}$. Însă

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4,2^2 + 6,5^2} = 7,74.$$

Din această cauză, sinusul necunoscut va fi egal cu $\frac{4,2}{7,74} = 0,55$. După procedeul arătat mai sus, aflăm că unghiul respectiv este de 33°. Înălțimea Soarelui deasupra orizontului este deci în condițiile problemei noastre, de 33°, cu o exactitate de pînă la jumătate de grad.

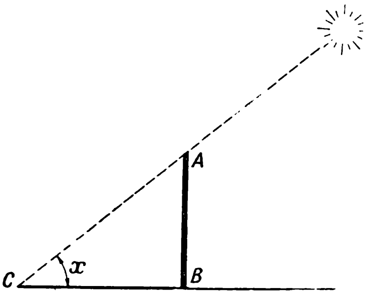


Fig. 88. Determinarea înălțimii Soarelui deasupra orizontului.

Problemă

Rătăcind cu o busolă în apropierea unui rîu, ați observat pe el (fig. 89) insulița A și doriți să calculați distanța de la ea pînă la punctul B situat pe mal. Pentru aceasta, stabi-

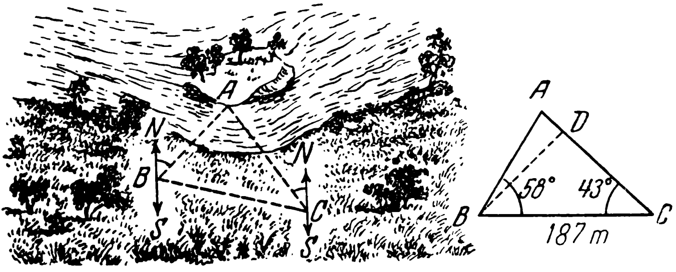


Fig. 89. Cum să calculăm distanța pînă la insulă?

liți cu ajutorul busolei mărimea unghiului ABN, format de dreapta BA cu direcția sud-nord (SN). Apoi măsurați lungimea segmentului BC și determinați valoarea unghiului NBC dintre el și SN. În sfîrșit, faceți același lucru în punctul C pentru dreapta CA. Să admitem că ați obținut următoarele date:

direcția	BA	deviază	de la	SN	spre	est	cu	52°
"	BC	"	"	SN	"	"	"	110°
"	CA	"	"	SN	"	vest	"	27°

Lungimea $BC = 187$ m.

Cum să calculăm după aceste date distanța BA?

Rezolvare

În triunghiul ABC cunoaștem latura BC. Unghiul $ABC = 110° - 52° = 58°$; unghiul $ACB = 180° - 110° - 27° = 43°$. Să ducem în acest triunghi (fig. 89, dreapta) înălțimea BD. Avem $\sin C = \sin 43° = \frac{BD}{187}$. Calculînd sin 43° prin procedeul arătat mai sus, obţinem pentru el 0,68. Prin urmare:

$$BD = 187 \times 0{,}68 = 127.$$

Acum, în triunghiul ABD cunoaştem cateta BD; Unghiul $A = 180° - (58° + 43°) = 79°$ şi unghiul $ABD = 90° - 79° = 11°$. Sinusul unghiului de 11° îl putem calcula: el este egal cu 0,19. Prin urmare, $\frac{AD}{AB} = 0{,}19$. Pe de altă parte, după teorema lui Pitagora:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2.$$

Înlocuind AD cu $0{,}19AB$, iar BD cu 127, vom obţine:

$$AB^2 = 127^2 + (0{,}19\ AB)^2,$$

de unde $AB \approx 129$.

Aşadar, distanţa necunoscută pînă la insulă este de aproximativ 129 m.

Cred că cititorului nu i-ar fi greu să calculeze, dacă ar fi nevoie, şi latura AC.

LĂŢIMEA LACULUI

Problemă

Pentru a calcula lăţimea AB a lacului (fig. 90), aţi găsit cu ajutorul busolei că dreapta CA deviază spre vest cu 21°, iar CB — spre est cu 22°. Lungimea CB=68 m, CA=35 m. Să se calculeze după aceste date lăţimea lacului.

Rezolvare

În triunghiul ABC cunoaştem unghiul de 43° şi lungimile laturilor care-l formează, adică 68 m şi 35 m. Să ducem (fig. 90, dreapta) înălţimea AD; avem $\sin 45° = \frac{AD}{AC}$. Calculăm, independent de aceasta, sin 43° şi obţinem 0,68.

Prin urmare: $\frac{AD}{AC} = 0{,}68$, $AD = 0{,}68 \times 35 = 24$. Apoi, calculăm CD:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 35^2 - 24^2 = 649,\ CD = 25{,}5;$$

$$BD = BC - CD = 68 - 25{,}5 = 42{,}5.$$

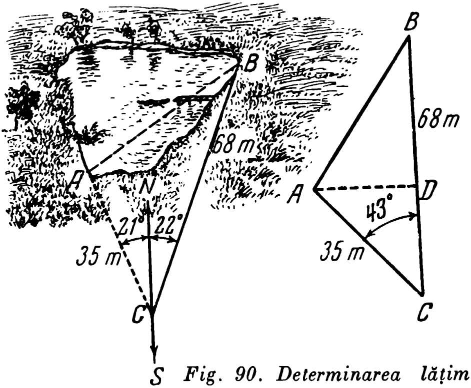


Fig. 90. Determinarea lățimii lacului.

În triunghiul ABD avem:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 24^2 + 42{,}5^2 = 2\,380;$$

$$AB \approx 49.$$

Deci, lățimea necunoscută a lacului este de aproximativ 49 m.

Dacă în triunghiul ABC trebuie să calculăm și celelalte două unghiuri, știind că $AB = 49$, procedăm astfel:

$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{24}{49} = 0{,}49, \text{ de unde } \sphericalangle B = 29°.$$

Cel de-al treilea unghi A îl aflăm scăzînd din 180° suma unghiurilor de 29° și 43°; el va fi egal cu 108°.

S-ar putea întîmpla, ca în cazul examinat de rezolvare a triunghiului (după două laturi și unghiul cuprins între ele) unghiul dat să nu fie ascuţit, ci obtuz. Dacă, de exemplu, în triunghiul ABC (fig. 91) se cunosc unghiul obtuz A şi două laturi, AB şi AC, atunci ordinea calculelor pentru aflarea celorlalte elemente ale triunghiului va fi: se duce înălţimea BD, se calculează BD şi AD din triunghiul BDA; apoi, cunoscînd $DA + AC$, se află BC şi sin C, calculînd raportul $\frac{BD}{BC}$.

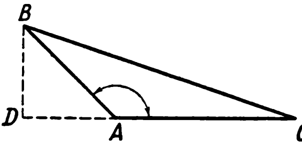


Fig. 91. La rezolvarea triunghiului obtuzunghi.

PARCELA TRIUNGHIULARĂ

Problemă

În timpul unei excursii am măsurat cu paşii laturile unei parcele triunghiulare şi am aflat că ele sînt egale cu 43, 60 şi 54 de paşi. Ce unghiuri are acest triunghi?

Rezolvare

Acesta este cel mai complicat caz de rezolvare a triunghiului: cînd se cunosc cele trei laturi. El poate fi totuşi rezolvat fără ajutorul altor funcţii, în afară de sinus.

Ducînd (fig. 92) înălţimea BD la latura cea mai lungă AC, vom avea:

$$BD^2 = 43^2 - AD^2,$$
$$BD^2 = 54^2 - DC^2,$$

de unde

$$43^2 - AD^2 = 54^2 - DC^2,$$
$$DC^2 - AD^2 = 54^2 - 43^2 = 1\,070;$$

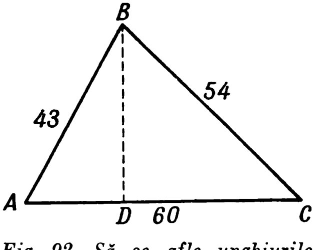


Fig. 92. Să se afle unghiurile acestui triunghi: 1) prin calcul si 2) cu ajutorul raportorului.

însă

$$DC^2 - AB^2 = (DC + AD)(DC - AD) = 60(DC - AD),$$

prin urmare

$$60 \ (DC - AD) = 1\,070 \text{ și } DC - AB = 17{,}8.$$

Din două ecuații:

$$DC - AD = 17{,}8 \text{ și } DC + AD = 60$$

obținem:

$$2DC = 77{,}8, \text{ adică } DC = 38{,}9.$$

Acum este ușor să calculăm înălțimea:

$$BD = \sqrt{54^2 - 38{,}9^2} = 37{,}4,$$

de unde aflăm

$$\sin A = \frac{BD}{AB} = \frac{37{,}4}{43} = 0{,}87; \ \sphericalangle A = \text{aproximativ } 60°;$$

$$\sin C = \frac{BD}{BC} = \frac{37{,}4}{54} = 0{,}69; \ \sphericalangle C = \text{aproximativ } 44°.$$

Cel de-al treilea unghi $B = 180 - (A + C) = 76°$.

Dacă în cazul de față am fi făcut calculele cu ajutorul tabelelor, după toate regulile trigonometriei „adevărate", am fi obținut unghiuri exprimate în grade și minute. Dar acestea ar fi fost de la bun început greșite, deoarece laturile măsurate cu pașii conțin o eroare de cel puțin 2—3%. Prin urmare, pentru a nu ne înșela, ar fi trebuit ca mărimile „exacte" ale unghiurilor, obținute astfel să le fi rotunjit cel puțin pînă la grade întregi. Și atunci am fi obținut același rezultat la care am ajuns recurgînd la procedee simplificate. Utilitatea trigonometriei noastre „de marș" apare aici în mod extrem de limpede.

DETERMINAREA MĂRIMII UNUI UNGHI DAT FĂRĂ NICI UN FEL DE MĂSURĂTORI

Pentru măsurarea unghiurilor pe teren ne trebuie cel puțin o busolă, dar cîteodată ne ajung degetele mîinii sau o cutie de chibrituri. S-ar putea, însă, să fim nevoiți să măsurăm un unghi desenat pe hîrtie, pe un plan sau pe o hartă.

Fireşte, dacă avem la îndemînă un raportor, problema se rezolvă uşor. Dar dacă nu avem raportor, ca în condiţiile de marş? Un geometru nu trebuie să-şi piardă capul nici în această împrejurare. Cum aţi rezolva dv. următoarea problemă?

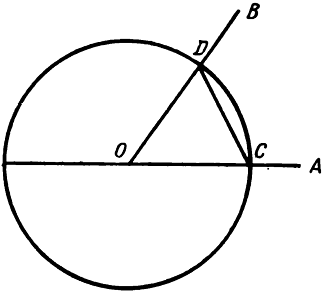


Fig. 93. Cum se determină valoarea unghiului AOB *reprezentat aici numai cu ajutorul compasului?*

Problemă

Fie reprezentat unghiul *AOB* (fig. 93), mai mic de 180°. Să se determine valoarea lui fără măsurători.

Rezolvare

Dintr-un punct oarecare de pe latura *BO* putem să ducem o perpendiculară pe latura *AO* şi în triunghiul dreptunghic obţinut, să măsurăm catetele şi ipotenuza, să găsim sinusul unghiului şi, după aceea, şi valoarea lui (vezi p. 139). Dar o astfel de rezolvare nu ar satisface condiţia strictă, şi anume să nu măsurăm nimic!

Recurgem la soluţia propusă în anul 1946 de către Z. Rupeika din Kaunas.

Din vîrful *O*, ca centru, cu o deschidere oarecare a compasului descriem un cerc. Punctele de intersecţie *C* şi *D* ale acestuia cu laturile unghiului le unim printr-un segment de dreaptă.

În continuare, din punctul *C* ducem cu ajutorul compasului, mereu în aceeaşi direcţie, coarda *CD*, pînă cînd piciorul compasului va coincide din nou cu punctul *C*.

Ducînd aceste coarde, trebuie să numărăm de cîte ori va fi înconjurat în acest timp cercul şi de cîte ori ducem coarda, Să presupunem că am înconjurat de n ori cercul și că în acest timp am purtat coarda CD de S ori. În acest caz, unghiul căutat va fi:

$$\sphericalangle AOB = \frac{360^\circ \cdot n}{S}.$$

Într-adevăr, să presupunem că unghiul dat are x grade; ducînd coarda CD de S ori, este ca și cum am mări unghiul x° de S ori, dar întrucît în acest fel cercul a fost înconjurat de n ori, înseamnă că unghiul va fi de $360^\circ \cdot n$, adică $x^\circ \cdot S = 360^\circ \cdot n$, de unde

$$x^\circ = \frac{360^\circ \cdot n}{S}.$$

Pentru unghiul din desen, $n = 3$, $S = 20$ (verificați!), prin urmare $\sphericalangle AOB = 54^\circ$. În lipsa unui compas, cercul poate fi descris cu ajutorul unui ac și al unei bucăți de hîrtie; coarda poate fi dusă și ea cu ajutorul aceleiași hîrtii.

Problemă

Determinați cu ajutorul procedeului arătat mai sus unghiurile triunghiului din figura 92.

Capitolul VI

UNDE CERUL SE UNEȘTE CU PĂMÎNTUL

ORIZONTUL

Pe mare sau pe cîmp neted ne vedem pe noi înșine în centrul unui cerc care mărginește suprafața terestră accesibilă ochilor noștri. Acesta este orizontul. Linia orizontului este inaccesibilă: cînd mergem spre ea, se îndepărtează de noi. Deși, inaccesibilă, ea există totuși în realitate, nu este o iluzie optică sau un miraj. Pentru fiecare punct de observație există o anumită limită a suprafeței terestre vizibile din acel punct, și distanța pînă la această limită nu este greu de calculat. Pentru ca să ne fie clare relațiile geometrice în legătură cu orizontul, să privim figura 94, care reprezintă o parte a globului terestru. În punctul C se află ochiul observatorului, situat la înălțimea CD deasupra suprafeței terestre. Cît de departe poate să vadă în jurul său acest observator aflat pe un loc neted? Evident, numai pînă la punctele M, N, unde raza vizuală atinge suprafața terestră; mai departe, Pămîntul se află mai jos de raza vizuală. Aceste puncte M și N (și altele, ce se află pe cercul MEN) reprezintă limita părții vizibile a suprafeței terestre, adică formează linia orizontului. Observatorului trebuie să i se pară că aici cerul se sprijină pe Pămînt, pentru că în aceste puncte el vede în același timp și cerul și obiectele terestre.

Poate ni se va părea că figura nu ne dă un tablou exact al realității, căci în realitate orizontul se află întotdeauna la nivelul ochilor, pe cînd în figură cercul se află evident mai jos de observator. Într-adevăr, avem întotdeauna impresia că linia orizontului este situată la același nivel cu ochii și chiar urcă împreună cu noi, atunci cînd ne suim pe o înălțime. Dar aceasta este o iluzie optică. În realitate, linia orizontului este întotdeauna mai jos de ochi, așa cum se arată în figura 94, dar unghiul format de liniile drepte CN și CM cu dreapta CK, perpendiculară la rază în punctul

C (acest unghi se numeşte „depresiunea orizontului"), este extrem de mic şi nu poate fi observat fără instrumente.

Să relevăm totodată şi un alt fapt curios. Am spus că atunci cînd observatorul se ridică deasupra suprafeţei terestre, de exemplu într-un aeroplan, linia orizontului îi

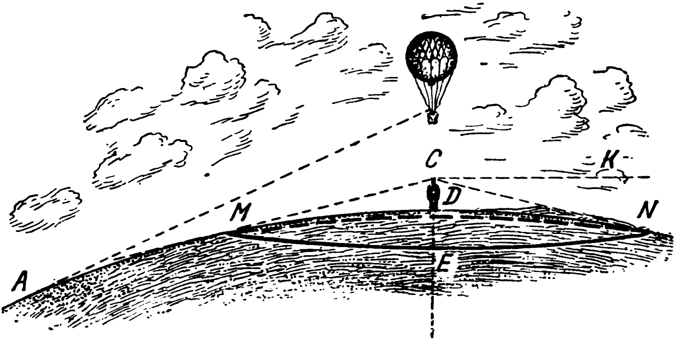


Fig. 94. Orizontul.

pare că rămîne la nivelul ochilor, adică parcă s-ar ridica împreună cu observatorul. Dacă însă el se ridică suficient de sus, i se va părea că terenul de sub aeroplan se află mai jos de linia orizontului. Cu alte cuvinte, pămîntul îi va apărea parcă concav, în forma unei ceşti, ale cărei margini vor fi linia orizontului. Acest fenomen este foarte bine descris de Edgard Poë în fantastica *Aventură a unui anume Hans Pfaall*:

„Ceea ce m-a uimit cu deosebire în aspectul lucrurilor de sub mine — povesteşte eroul-aeronaut al lui Poë — a fost aparenta *concavitate* a globului.

Cu destulă nesocotinţă mă aşteptam ca, de îndată ce m-aş fi înălţat, reala lui convexitate să devină vădită ochilor mei. Dar a fost de ajuns să mă gîndesc numai niţel, ca să mă dumiresc asupra acestei nepotriviri.

O perpendiculară dusă din locul unde mă aflam pînă la pămînt ar fi alcătuit înălţimea unui triunghi dreptunghic, a cărui bază s-ar fi întins de la unghiul drept pînă la orizont, iar ipotenuza, de la orizont şi pînă la locul unde mă aflam.

Dar această înălțime era o nimica toată față de întinderile pe care le cuprindeam cu privirea. Cu alte cuvinte, în ceea ce mă privea, baza și ipotenuza presupusului triunghi erau așa de lungi, în comparație cu înălțimea lui, încît primele două ar fi putut fi considerate ca paralele. În chipul acesta, pentru aeronaut, orizontul apare întotdeauna la același nivel cu nacela. Dar de vreme ce punctul aflat chiar dedesubtul lui pare a fi și chiar este la o mare depărtare, acest punct ni se înfățișează, desigur, ca și cum s-ar găsi la o mare adîncime sub orizont. De aici și impresia de concavitate. Iar această impresie va dăinui pînă în clipa în care înălțimea, în raport cu perspectiva, se va afla într-o astfel de proporție, încît paralelismul aparent dintre bază și ipotenuză să dispară".

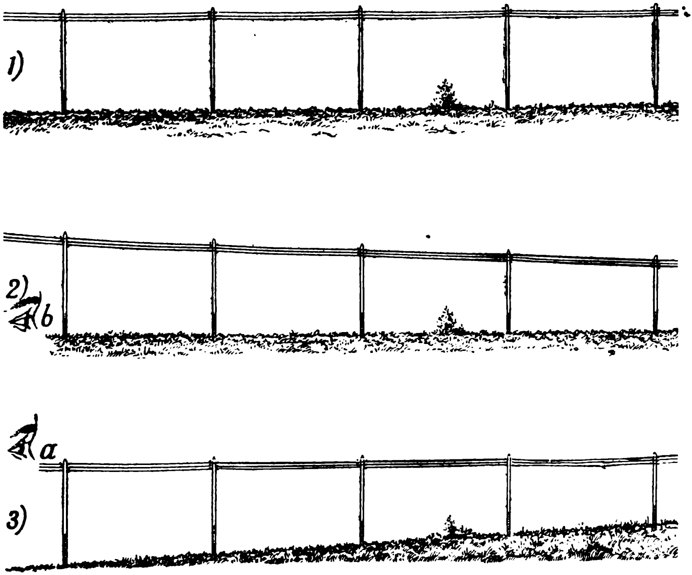


Fig. 95. Ce vede un ochi care observă un șir de stîlpi de telegraf.

În completare la această explicație, să adăugăm următorul exemplu. Imaginați-vă un șir drept de stîlpi de telegraf (fig. 95). Pentru un ochi care se află în punctul *b*, la nivelul bazei stîlpilor, şirul ia aspectul, notat cu cifra 2. Pentru un ochi aflat în punctul *a*, la nivelul vîrfului stîlpilor, şirul ia însă aspectul 3, adică terenul pare că se ridică la orizont.

O NAVĂ LA ORIZONT

Cînd observăm de pe malul mării sau al unui lac mare o navă ce apare de după orizont, ni se pare că vedem vasul nu în acel punct (fig. 96) unde se află în realitate, ci mult mai aproape, în punctul *B*, unde linia vederii noastre alunecă pe suprafața convexă a mării. Cînd observăm cu ochiul liber este greu să evităm impresia că vasul se află în punctul *B*, şi nu mai departe dincolo de orizont (comparaţi cele expuse mai sus cu cele povestite în capitolul IV cu privire la influenţa unei ridicături asupra aprecierii din ochi a distanţei). Dacă însă privim printr-o lunetă, această distanţă diferită a vasului este percepută mult mai bine. Luneta nu ne arată la fel de limpede obiectele apropiate şi cele îndepărtate: într-o lunetă focalizată pentru distanţă mare, obiectele aflate în apropiere se văd neprecis, şi invers, cînd este focalizată pentru obiectele apropiate, luneta ne arată depărtările ca prin ceaţă. Din această cauză, dacă îndreptăm o lunetă (cu un suficient grad de mărime) asupra orizontului apei şi o reglăm în aşa fel ca supra-

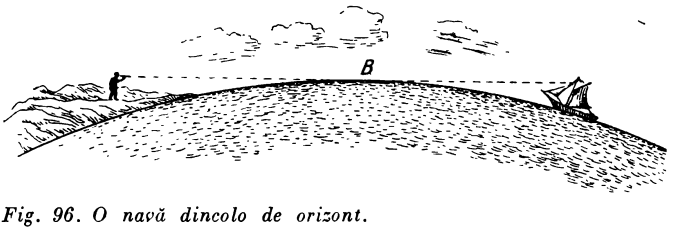


Fig. 96. O navă dincolo de orizont.

faţa apei să se vadă în mod clar, atunci nava ne va apărea cu contururi neprecise, dovadă că se află la o distanţă mai mare de observator (fig. 97, sus). Şi invers, reglînd luneta în aşa fel ca să se vadă în mod limpede contururile navei, ascunse pe jumătate la orizont, vom observa că suprafaţa apei la orizont şi-a pierdut claritatea de mai înainte şi ne apare de astă dată ca prin ceaţă (fig. 97, jos).

CÎT DE DEPARTE E ORIZONTUL?

Cît de departe se află însă linia orizontului faţă de observator? Cu alte cuvinte, cît de mare este raza acelui cerc în centrul căruia ne vedem atunci cînd ne aflăm pe o suprafaţă netedă? Cum să calculăm distanţa la care se află orizontul dacă cunoaştem înălţimea la care se află observatorul deasupra suprafeţei terestre?

Această problemă se reduce la calcularea lungimii segmentului CN (fig. 98), adică a unei tangente duse de la ochiul observatorului la suprafaţa terestră. După cum ştim din geometrie, pătratul tangentei este egal cu produsul dintre segmentul exterior h al secantei şi toată lungimea acestei secante, adică cu $h + 2R$, unde R este raza globului terestru. Înălţimea la care se găseşte ochiul observatorului deasupra Pămîntului este însă, de obicei, extrem de mică în comparaţie cu diametrul globului terestru ($2R$), reprezentînd, de exemplu, pentru înălţimea cea mai mare la care se află un avion, aproximativ 0,001 din diametru;

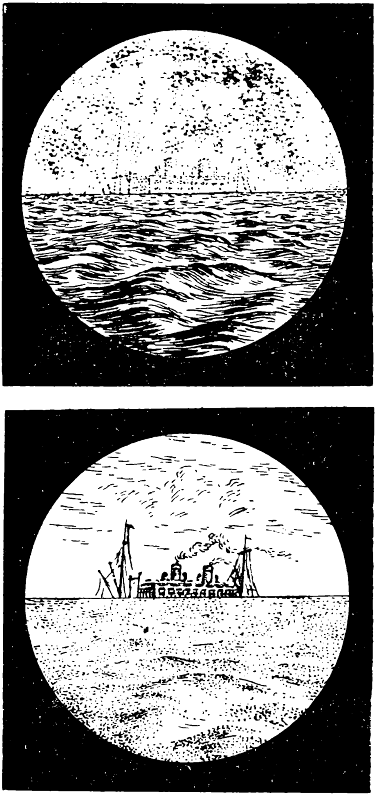


Fig. 97. O navă situată dincolo de linia orizontului, observată printr-o lunetă.

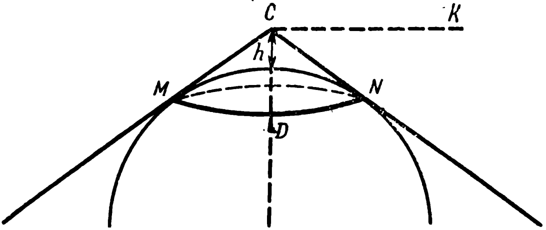


Fig. 98. Problema privitoare la distanța la care se află orizontul.

atunci, $2R + h$ îl putem presupune ca fiind egal cu $2R$ şi atunci formula se simplifică:

$$CN^2 = h \cdot 2R.$$

Prin urmare, depărtarea la care se află orizontul o putem calcula după o formulă extrem de simplă:

$$\text{depărtarea orizontului} = \sqrt{2Rh},$$

unde R reprezintă raza globului terestru (aproximativ 6 400 km)[1], iar h este înălțimea la care se află ochiul observatorului față de suprafața terestră.

Întrucît $\sqrt{6\,400} = 80$, formula poate fi pusă sub următoarea formă:

$$\text{depărtarea orizontului} = 80\sqrt{2h} = 113\sqrt{h},$$

unde h trebuie numaidecît să fie exprimat în părți dintr-un kilometru.

Acesta este un calcul pur geometric, simplificat. Dacă vrem să-l precizăm luînd în considerație factorii fizici ce influențează asupra depărtării orizontului, va trebui să avem în vedere aşa-numita „refracție atmosferică". Refracția (fringerea) razelor de lumină în atmosferă măreşte distanța la care se află orizontul aproximativ cu 1/15 din distanța calculată (cu 6%). Numărul acesta (6%) este un număr mediu. Distanța la care se află orizontul se măreşte sau scade întrucîtva în dependență de multe condiții şi anume

se măreşte	*scade*
la presiune atmosferică mare,	la presiune atmosferică joasă,
în apropierea suprafeței terestre,	la înălțime,
pe vreme rece,	pe vreme călduroasă,
dimineața şi seara,	ziua,
pe timp umed,	pe timp uscat,
deasupra mării.	deasupra uscatului.

[1] Mai precis 6 371 km.

Problemă

Cît de departe poate să observe pămîntul un om ce se află pe o cîmpie?

Rezolvare

Considerînd că ochiul unui om adult se află la 1,6 m sau 0,0016 km deasupra terenului, vom avea:

$$\text{depărtarea orizontului} = 113\sqrt{0{,}0016} = 4{,}52 \text{ km}.$$

După cum s-a arătat mai sus, învelișul de aer al Pămîntului curbează drumul razelor, în urma cărui fapt orizontul se îndepărtează în medie cu 6% față de distanța ce rezultă din formulă. Pentru a ține seama de această corecție, trebuie să înmulțim 4,52 km cu 1,06; vom obține:

$$4{,}52 \times 1{,}06 \approx 4{,}8 \text{ km}.$$

Așadar, un om de înălțime medie vede de pe un loc neted la o distanță ce nu trece de 4,8 km. Diametrul cercului accesibil este doar de 9,6 km, iar suprafața de 72 km^2. Este mai puțin decît cred, de obicei, oamenii care descriu priveliștea depărtărilor nemărginite ale cîmpiilor.

Problemă

Pînă la ce depărtare vede marea un om ce se află într-o barcă?

Rezolvare

Dacă vom presupune că ochiul omului din barcă este la 1 m sau 0,001 km deasupra nivelului apei, distanța la care se află orizontul va fi

$$113\sqrt{0{,}001} = 3{,}58 \text{ km}$$

sau dacă luăm în considerație refracția atmosferică medie, aproximativ 3,8 km. Din obiectele care se află la o distanță mai mare se văd numai părțile lor de sus, pe cînd bazele lor sînt ascunse dincolo de orizont.

Atunci cînd ochiul se află mai jos, orizontul se îngustează; de exemplu, pentru o înălțime de 0,5 m, orizontul se îngustează pînă la 2,5 km. Dimpotrivă, cînd îl observăm de pe puncte aflate la înălțime (de pe un catarg), distanța la care se află orizontul crește; de exemplu, pentru o înălțime de 4 m, el crește pînă la 7 km.

Problemă

Cît de departe se întindea în toate părțile pămîntul pentru aeronauții care-l observau din nacela stratostatului „SOAH-1", cînd el se afla în punctul cel mai înalt al ascensiunii sale (adică la o înălțime de 22 km)?

Rezolvare

Întrucît balonul s-a ridicat la o înălțime de 22 km, distanța la care se afla orizontul pentru observatorii din balon era

$$113 \sqrt{22} = 530 \text{ km},$$

iar luînd în considerație refracția — 560 km.

Problemă

Cît de sus trebuie să se ridice un aviator pentru a vedea în jurul său pînă la o distanță de 50 km?

Rezolvare

Din formula distanței la care se află orizontul avem în acest caz următoarea egalitate:

$$50 = \sqrt{2Rh},$$

de unde

$$h = \frac{50^2}{2R} = \frac{2\,500}{12\,800} = 0{,}2 \text{ km}.$$

Prin urmare, este suficient să se ridice numai la 200 m.

Pentru a lua în considerație și corecția, scădem 6% din 50 km: vom obține 47 km; mai departe $h = \frac{47^2}{2R} = \frac{2\ 200}{12\ 800} = 0{,}17$ km, adică 170 m (în loc de 200 m).

În punctul cel mai înalt de pe Colinele lui Lenin din Moscova a fost construită clădirea cu 32 de etaje a Universității, mare centru științific și de învățămînt, care se înalță la 242 m deasupra nivelului rîului Moscova (înălțimea ei este de 32 etaje).

Prin urmare de la ferestrele etajelor celor mai de sus ale Universității se deschide o panoramă cu o rază de peste 55 km.

TURNUL LUI GOGOL

Problemă

Este interesant de știut, ce crește mai repede: înălțimea ascensiunii sau depărtarea la care se află orizontul? Mulți își închipuie că atunci cînd observatorul se ridică mai sus, orizontul crește extraordinar de repede. Așa credea, printre alții, și Gogol, care în articolul *Despre arhitectura epocii noastre* scria următoarele: „Un oraș are nevoie de turnuri imense, colosale... Noi ne mulțumim, de obicei, cu o înălțime care permite să se vadă numai pînă la marginea orașului, în timp ce pentru o capitală este necesar să se poată vedea la cel puțin o sută cincizeci de verste[1] în toate direcțiile, și pentru aceasta poate, cu un etaj sau două în plus, totul s-ar schimba. Pe măsură ce crește înălțimea, distanța la care se poate vedea sporește într-o progresie neobișnuită".

Oare așa stau lucrurile în realitate?

Rezolvare

Este suficient să privim formula următoare

$$\text{depărtarea orizontului} = \sqrt{2Rh},$$

pentru a ne apărea dintr-o dată, în mod limpede, inexactitatea afirmației că „lărgimea orizontului" crește extrem

[1] Adică 160 km.

de repede atunci cînd observatorul urcă mai sus. Dimpotrivă, distanța la care se află orizontul crește mai încet decît înălțimea ridicării: ea este proporțională cu rădăcina pătrată a înălțimii. Cînd înălțimea la care se află observatorul se mărește de 100 de ori, orizontul se lărgește numai de 10 ori; cînd înălțimea devine de 1 000 de ori mai mare, orizontul se lărgește numai de 31 de ori. Din această cauză este greșit să afirmăm că „cu un etaj sau două în plus, totul s-ar schimba". Dacă la o casă cu opt etaje vom construi încă două etaje, depărtarea orizontului va crește cu $\sqrt{10/8}$, adică de 1,1 ori, deci doar cu 10%. O asemenea adăugire este prea puțin perceptibilă.

În ce privește ideea de a construi un turn din care s-ar putea vedea „cel puțin la 150 de verste", adică la 160 km, ea este absolut irealizabilă. Gogol, desigur, nu bănuia că un astfel de turn trebuie să aibă o înălțime uriașă.

Într-adevăr, din ecuația:

$$160 = \sqrt{2Rh}$$

obținem

$$h = \frac{160^2}{2R} = \frac{25\,600}{12\,800} = 2 \text{ km}.$$

Aceasta este înălțimea unui munte destul de mare.

COLINA LUI PUȘKIN

O greșeală asemănătoare face și Pușkin, spunînd în *Cavalerul avar* despre orizontul îndepărtat ce se deschidea din vîrful acelui „mîndru deal":

> .... iar împăratul
> Putea privi din vîrf cu bucurie
> Și văile cu corturile albe
> Și marea străbătută de corăbii...

Noi am văzut cît de modestă era înălțimea acestui „mîndru deal": chiar oștirile lui Atila n-ar fi putut să înalțe în modul amintit o movilă mai înaltă de 5 m. Acum putem să completăm calculele, stabilind cu cît lărgea această movilă orizontul unui observator aflat în vîrful ei.

Ochiul unui observator s-ar fi înălțat deasupra terenului cu $5 + 1^1/_2$ m, adică cu 6,5 m și prin urmare distanța la care s-ar fi aflat orizontul ar fi fost $\sqrt{2 \times 6\,400 \times 0{,}0065} \approx$ ≈ 9 km. Aceasta înseamnă doar cu 4 km mai mult decît putem vedea stînd pe un teren neted.

UNDE SE ÎNTÎLNESC ȘINELE

Problemă

Desigur că de multe ori ați observat cum se îngustează în depărtare o cale ferată. Dar vi s-a întîmplat vreodată să vedeți acel punct unde ambele șine se întîlnesc, în sfîrșit, una cu alta? Este oare posibil să vedem un astfel de punct? Avem acum destule cunoștințe pentru a rezolva această problemă.

Rezolvare

Să ne amintim că orice obiect se transformă pentru o vedere normală într-un punct, atunci cînd este privit sub un unghi de 1′, adică atunci cînd se află la o distanță egală cu 3 400 de diametri ai săi. Lățimea căii ferate este în U.R.S.S. de 1,52 m. Prin urmare, distanța dintre șine trebuie să se confunde cu un punct la o depărtare de $1{,}52 \times$ $\times\, 3\,400 = 5{,}2$ km. Așadar, dacă am putea urmări cu privirea șinele pe o distanță de 5,2 km, atunci am vedea cum se întîlnesc într-un punct. Pe un teren neted, orizontul se află însă la o distanță mai mică de 5,2 km și anume doar la 4,8 km. Prin urmare, un om cu o vedere normală, stînd pe un loc neted, nu poate să vadă punctul de întîlnire al șinelor. Acesta ar putea fi observat doar dacă ar exista una din următoarele condiții:

1) agerimea vederii sale să fie scăzută, așa încît obiectele să se contopească pentru observator într-un punct la un unghi vizual mai mare de 1′;

2) calea ferată să nu fie orizontală;

3) ochiul observatorului să se înalțe deasupra pămîntului mai mult decît cu

$$\frac{5{,}2^2}{2R} = \frac{27}{12\,800} = 0{,}0021 \text{ km},$$

adică 210 cm.

Problemă

Pe mal se află un far al cărui vîrf se înalță la 40 m deasupra suprafeței apei.

De la ce distanță va fi vizibil acest far pentru o navă, dacă marinarul-observator („matrozul-gabier“) se află pe „gabia“ navei la o înălțime de 10 m deasupra suprafeței apei?

Rezolvare

Din figura 99 se vede că problema se reduce la calcularea lungimii segmentului de dreaptă AC, care este formată din alte două segmente, AB și BC.

Segmentul AB reprezintă distanța la care se află orizontul farului, înalt de 40 m, iar BC este distanța la care se află orizontul „matrozului-gabier“, aflat la o înălțime de 10 m. Prin urmare, distanța necunoscută va fi egală cu

$$113\sqrt{0{,}04}+113\sqrt{0{,}01}=113\,(0{,}2+0{,}1)=34\text{ km}.$$

Problemă

A cîta parte din acest far o va vedea același „matroz-gabier“ de la o distanță de 30 km?

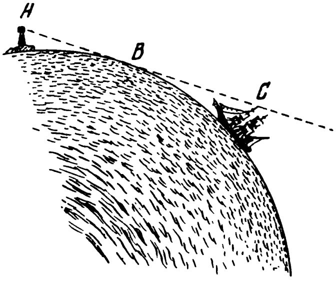


Fig. 99. La problemele privitoare la far.

Rezolvare

Din figura 99 reiese cu claritate modul de rezolvare al problemei: trebuie, înainte de toate, să calculăm lungimea BC, apoi să scădem rezultatul obținut din lungimea totală AC, adică din 30 km, pentru a afla distanța AB. Cunoscînd AB, vom calcula înălţimea de la care distanţa pînă la orizont este egală cu AB. Dar să efectuăm toate aceste calcule:

$$BC = 113\sqrt{0{,}01} = 11{,}3 \text{ km},$$

$$30 - 11{,}3 = 18{,}7 \text{ km}$$

$$\text{Înălţimea} = \frac{18{,}7^2}{2R} = \frac{350}{12\,800} = 0{,}027 \text{ km}.$$

Aşadar, de la o distanţă de 30 km nu se vede o porţiune de 27 m din înălţimea farului; rămîne vizibilă doar o porţiune de 13 m.

•

FULGERUL

Problemă

Deasupra capului nostru, la o înălţime de 1,5 km a fulgerat. Pînă la ce distanţă de locul unde ne aflăm se poate vedea acest fulger?

Rezolvare

Trebuie să calculăm (fig. 100) depărtarea orizontului pentru înălţimea de 1,5 km. Ea va fi egală cu

$$113\sqrt{1{,}5} = 138 \text{ km}.$$

Prin urmare, dacă terenul este neted, fulgerul poate fi văzut de un om al cărui ochi se află la nivelul terenului la o distanţă de 138 km (iar cu 6% adaos — la o distanţă de 146 km). În punctele aflate la o distanţă de 146 km, omul ar vedea fulgerul chiar pe linia orizontului. Iar întrucît sunetul nu ajunge de la o asemenea distanţă, el l-ar observa ca un fulger îndepărtat, fără tunet.

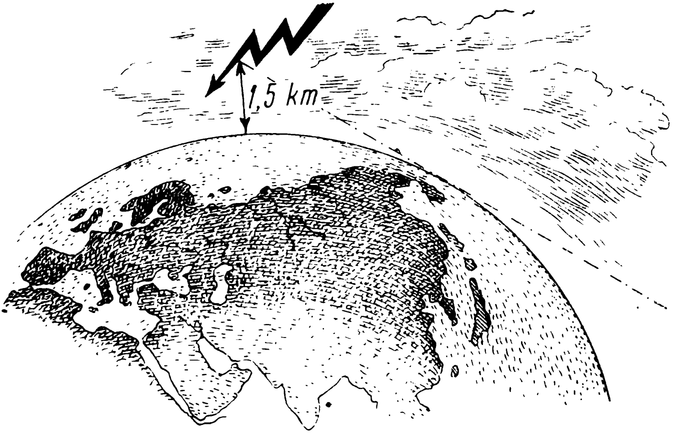


Fig. 100. La problema privitoare la fulger.

NAVA CU PÎNZE

Problemă

Stăm pe malul unui lac sau al unei mări, chiar la marginea apei și observăm o navă cu pînze ce se îndepărtează de noi. Știm că vîrful catargului se află la 6 m deasupra nivelului mării. La ce distanță de noi va începe nava să se cufunde în apă (adică dincolo de orizont) și la ce distanță va dispărea definitiv?

Rezolvare

Nava cu pînze va începe să coboare „sub orizont" (vezi fig. 96) în punctul B, la depărtarea obișnuită a orizontului pentru un om de statură mijlocie, adică la 4,8 km. Ea se va ascunde cu totul „sub orizont" în punctul a cărui distanță față de B va fi

$$113\sqrt{0{,}006} = 8{,}7 \text{ km}.$$

Prin urmare, nava cu pînze va dispărea „sub orizont" la o distanță de noi egală cu

$$4{,}8 + 8{,}7 = 13{,}5 \text{ km}.$$

ORIZONTUL PE LUNĂ

Problemă

Pînă acum toate calculele noastre se refereau la globul terestru. Cum s-ar modifica însă depărtarea la care se află orizontul, dacă observatorul ar ajunge pe o altă planetă, de exemplu, pe una dintre „cîmpiile" de pe suprafața Lunii?

Rezolvare

Această problemă se rezolvă după aceeași formulă: depărtarea la care se află orizontul este egală cu $\sqrt{2Rh}$, însă în cazul de față pentru $2R$ trebuie să punem nu lungimea diametrului globului terestru, ci pe aceea a diametrului Lunii. Întrucît diametrul Lunii este egal cu 3 500 km, atunci, dacă ochiul se înalță deasupra terenului la o distanță de 1,5 m, vom avea:

$$\text{depărtarea orizontului} = \sqrt{3\,500 \times 0{,}0015} = 2{,}3 \text{ km}.$$

Pe cîmpia de pe Lună am putea să vedem doar pînă la o distanță de $2\frac{1}{3}$ km.

ÎNTR-UN CRATER LUNAR

Cercetînd Luna printr-o lunetă chiar de dimensiuni modeste, vedem pe suprafața ei un număr mare de așa-numite cratere circulare, formații de un gen cum nu se găsește pe Pămînt. Unul dintre cei mai mari munți circulari este „Craterul Copernic", care are un diametru exterior de 124 km și un diametru interior de 90 km. Punctele cele mai înalte ale peretelui circular se înalță pînă la 1 500 m deasupra terenului depresiunii interioare. Dacă însă ne-am afla în partea de mijloc a depresiunii interioare, am vedea noi oare de acolo peretele circular?

Rezolvare

Pentru a răspunde la această întrebare, trebuie să calculăm distanța orizontului pentru partea cea mai înaltă a craterului, adică pentru înălțimea de 1,5 km. Ea va fi egală pe Lună cu $\sqrt{3\,500 \times 1{,}5} = 73$ km. Adăugînd la aceasta depărtarea orizontului pentru un om de statură mijlocie, vom obține distanța la care partea cea mai înaltă a craterului circular ar dispărea sub orizontul observatorului:

$$73 + 2{,}3 = 75 \text{ km}.$$

Întrucît centrul craterului se află la 45 km depărtare de marginea lui, este pe deplin posibil să vedem partea cea mai înaltă din centrul depresiunii[1].

PE JUPITER

Problemă

Care va fi depărtarea orizontului pe Jupiter, al cărui diametru este de 11 ori mai mare decît diametrul Pămîntului?

Rezolvare

Dacă Jupiter este acoperit de o scoarță solidă și are o suprafață netedă, un om aflat pe o cîmpie de pe această planetă ar putea vedea la o distanță de:

$$\sqrt{11 \times 12\,800 \times 0{,}0016} = 14{,}4 \text{ km}.$$

[1] Vezi cartea aceluiași autor *Astronomia distractivă*, cap. II, articolul *Peisaje lunare*, apărută în Editura Tineretului, București, 1959.

Să se calculeze depărtarea orizontului pentru periscopul unui submarin care se înalță pînă la 30 cm deasupra suprafeței liniștite a mării.

La ce înălțime trebuie să se înalțe un pilot deasupra lacului Ladoga, pentru a vedea deodată ambele maluri ale acestui lac, între care se află o distanță de 210 km?

La ce înălțime trebuie să se înalțe un pilot între Leningrad și Moscova, pentru a vedea dintr-o dată ambele orașe? Distanța Leningrad-Moscova este de 640 km.

Capitolul VII

GEOMETRIA ROBINSONILOR
(Cîteva pagini din Jules Verne)

GEOMETRIA CERULUI ÎNSTELAT

De stele-o beznă s-a deschis
Şi-i fără fund al ei abis.

Lomonosov

A fost o vreme cînd autorul acestei cărţi se pregătea pentru o profesiune nu prea obişnuită: pentru cariera unui om care a suferit un naufragiu. Vorbind pe scurt, mă gîndeam să devin un Robinson. Dacă aceasta s-ar fi realizat, cartea de faţă ar fi fost, poate, alcătuită într-un mod mai interesant decît acum, dar s-ar putea, să fi şi rămas nescrisă. Nu mi-a fost dat să devin un Robinson, fapt pe care acum nu-l mai regret. În adolescenţă însă, credeam fierbinte în chemarea mea de Robinson şi mă pregăteam pentru aceasta cu toată seriozitatea. Căci chiar Robinsonul cel mai mediocru trebuie să posede multe deprinderi şi cunoştinţe care nu sînt obligatorii pentru oamenii de altă „profesiune".

Ce va trebui să facă, înainte de toate, un om aruncat de naufragiu pe o insulă nelocuită? Desigur, să stabilească poziţia geografică a locului unde se află domiciliul său nedorit, adică latitudinea şi longitudinea. Despre aceasta, spre regretul meu, se vorbeşte prea pe scurt în cele mai multe istorii despre Robinsonii vechi şi noi. În ediţia completă a veritabilului Robinson Crusoe, veţi găsi referitor la aceasta doar un singur rînd, dar şi acela în paranteze: „La acea latitudine unde se află insula mea (adică, după calculele mele, la 9° şi 22′ la nord de ecuator)...".

Acest laconism supărător mă aducea la desperare pe vremea cînd căutam să acumulez cunoştinţele necesare pentru viitoarea mea carieră imaginară. Eram gata deja să renunţ la rolul de unic locuitor al unei insule pustii, cînd secretul s-a deschis în faţa mea în *Insula misterioasă* a lui Jules Verne.

Nu-mi pregătesc cititorii să devină Robinsoni, însă cred totuşi că nu va fi de prisos să ne oprim aici asupra celor mai simple procedee de determinare a latitudinii geografice. Această deprindere poate fi de folos nu numai locuitorilor unor insule necunoscute. La noi mai există încă atîtea puncte locuite care nu sînt însemnate pe hărți (și oare întotdeauna avem la îndemînă o hartă amănunțită?), încît problema stabilirii latitudinii geografice se poate ivi înaintea multora dintre cititorii mei. Este adevărat că acum noi nu mai putem afirma, ca odinioară Lermontov, că

> Nu totdeauna pe harta generală
> Găsești Tambovul însemnat cu-n cerculeț;

dar și azi, dacă nu Tambovul, în orice caz un număr însemnat de orășele și sate nu sînt însemnate pe hărțile generale. Nu trebuie neapărat să ne lansăm în aventuri marine ca să ne aflăm în rolul lui Robinson, care determina pentru prima dată poziția geografică a locului unde-și găsise adăpost.

În fond acesta este un lucru relativ simplu. Observînd într-o noapte senină, înstelată, cerul, veți vedea că stelele descriu încet pe bolta cerească cercuri înclinate, de parcă toată bolta cerească s-ar roti lin în jurul unei axe invizibile fixată oblic. Desigur că în realitate noi înșine rotindu-ne împreună cu Pămîntul, descriem cercuri în jurul axei lui în sensul invers. În emisfera noastră boreală, unicul punct care rămîne nemișcat este acela pe care se sprijină prelungirea imaginată a axei terestre. Acesta este „Polul Nord al universului“, care se află nu prea departe de strălucitoarea Stea polară. Găsind-o pe cerul nostru boreal veți găsi totodată și poziția Polului Nord al universului. Nu este greu s-o

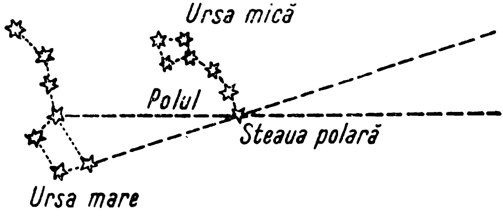


Fig. 101. Găsirea Stelei polare.

găsiți, dacă veți determina mai întîi poziția constelației binecunoscute de toți a Ursei mari: duceți o linie dreaptă prin cele două stele aflate la extremitatea ei, așa cum se arată în figura 101; prelungind această dreaptă pe o distanță aproximativ egală cu lungimea întregii constelaţii, veţi da de Steaua polară.

Acesta reprezintă unul din acele puncte de pe sfera cerească, de care vom avea nevoie pentru determinarea latitudinii geografice. Cel de-al doilea punct — aşa-numitul „zenit“ — este punctul care se află pe cer drept deasupra capului dv. Cu alte cuvinte zenitul este punctul de pe cer prin care trece prelungirea imaginată a acelei raze a Pămîntului care a fost dusă în locul ocupat de dv. Distanţa în grade pe arcul de pe cer dintre zenitul dv. şi Steaua polară este în acelaşi timp distanţa în grade a locului pe care vă aflaţi faţă de polul terestru. Dacă zenitul dv. se află faţă de Steaua polară la o distanţă de 30°, atunci vă aflaţi la o distanţă de 30° de polul terestru, prin urmare la o distanţă de 60° faţă de ecuator; cu alte cuvinte, vă aflaţi pe paralela 60.

Prin urmare, pentru a găsi latitudinea unui loc oarecare trebuie doar să măsurăm în grade (şi fracţiunile lui) „distanţa zenitală“ a Stelei polare; apoi, nu ne mai rămîne decît să scădem această valoare din 90° şi am determinat latitudinea. În practică putem proceda altfel. Întrucît arcul cuprins între zenit şi orizont are 90°, dacă scădem din 90° distanţa zenitală a Stelei polare, obţinem lungimea arcului de pe cer cuprins între Steaua polară şi orizont; cu alte cuvinte, „înălţimea“ Stelei polare deasupra orizontului. De aceea latitudinea geografică a unui punct oarecare este egală cu înălţimea Stelei polare deasupra orizontului acelui punct.

Acum veţi înţelege ce trebuie să faceţi pentru determinarea latitudinii. Aşteptînd o noapte senină, găsiţi pe cer Steaua polară şi măsuraţi înălţimea ei unghiulară deasupra orizontului; rezultatul obţinut va reprezenta latitudinea necunoscută a punctului unde vă aflaţi. Dacă doriţi ca rezultatul să fie mai exact, trebuie să aveţi în vedere că Steaua polară nu coincide în mod exact cu polul universului, ci se află la o distanţă de 1°25′ de acest pol. Steaua polară nu rămîne cu totul nemişcată. Ea descrie în jurul polului ceresc imobil un mic cerculeţ, situîndu-se ba mai sus, ba mai jos, ba în stînga, ba în dreapta cu 1°25′. Determinînd înălţimea Stelei polare în poziţia ei cea mai înaltă şi cea mai joasă (un astronom ar spune: în momentele de „culminaţie“ superioară şi inferioară), luaţi media rezultată din ambele măsurători. Aceasta va fi înălţimea reală a polului şi, prin urmare, latitudinea necunoscută a locului.

Dar dacă lucrurile stau astfel, nu e nevoie să alegem numaidecît Steaua polară. Putem să ne oprim asupra oricărei stele care nu apune şi măsurînd înălţimea ei în cele două poziţii extreme deasupra orizontului, să luăm media acestor măsurători. Ca urmare, vom obţine înălţimea polului deasupra orizontului, adică latitudinea locului respectiv. În cursul acestor măsurători este însă necesar să ştim să prindem momentul poziţiei celei mai înalte şi celei mai joase a stelei alese, ceea ce complică lucrurile; şi nu totdeauna este posibil să observăm aceste poziţii în cursul unei singure nopţi. Iată de ce pentru primele măsurători aproximative este mai bine să ne folosim de Steaua polară, lăsînd la o parte depărtarea ei neînsemnată faţă de pol.

Pînă acum ne-am închipuit că ne găsim în emisfera boreală. Se pune întrebarea: cum aţi proceda oare dacă v-aţi afla în emisfera australă? Exact la fel, cu unica deosebire că va trebui să determinaţi înălţimea nu a Polului Nord, ci a Polului Sud al universului. În apropierea acestui pol, din păcate, nu există o stea strălucitoare cum este Steaua polară din emisfera noastră. Renumita Cruce a Sudului străluceşte destul de departe de Polul Sud şi dacă mai doriţi să folosiţi stelele acestei constelaţii pentru a stabili latitudinea, atunci va trebui să luaţi media a două măsurători: în poziţia cea mai înaltă şi cea mai joasă a stelei.

Aşa au procedat şi eroii lui Jules Verne pentru a stabili latitudinea *Insulei misterioase*: au folosit tocmai această frumoasă constelaţie a cerului austral.

Este instructiv să recitiţi acel pasaj din roman unde se descrie întreaga procedură. Totodată, să luăm cunoştinţă şi de modul în care noii Robinsoni au rezolvat problema în faţa căreia se aflau, fără a avea un instrument de măsurare a unghiurilor.

LATITUDINEA INSULEI MISTERIOASE

„Era ora 8 seara. Luna nu apăruse încă, dar orizontul luminos începuse să strălucească în culorile palide-argintii, care vesteau răsăritul ei. La zenit scînteiau stelele circumpolare ale emisferei australe. Crucea Sudului, pe care cu cîteva zile mai înainte inginerul o admirase de pe vîrful muntelui Franklin, le întrecea pe toate în strălucire. Cyrus Smith privi cîtva timp minunata constelaţie.

— Herbert spuse el după oarecare gîndire — dacă nu mă înşel sîntem în 15 aprilie?

— Da răspunse Herbert.

— Ei bine, în cazul acesta mîine este una din cele patru zile ale anului, cînd Soarele va trece în dreptul meridianului chiar la orele douăsprezece după ora noastră[1]. Cu alte cuvinte va fi una din zilele în care timpul mijlociu indicat de ceasornice va corespunde cu timpul adevărat, indicat de calculele astronomice. Dacă vremea va fi frumoasă, sper să obţin longitudinea insulei, cu aproximaţie de cîteva grade.

— Fără instrumente şi fără sextant?

— Chiar aşa! Şi fiindcă noaptea este senină — urmă inginerul — voi încerca să aflu chiar în astă seară latitudinea la care ne aflăm, măsurînd înălţimea Crucii Sudului, adică a Polului Sud deasupra orizontului, iar mîine la amiază voi încerca să aflu longitudinea insulei.

Dacă inginerul ar fi avut un sextant, instrument cu ajutorul căruia se măsoară cu precizie distanţa unghiulară a obiectelor reflectate, operaţia ar fi fost uşoară. Măsurînd în seara aceea înălţimea polului, a doua zi de dimineaţă, cînd Soarele trecea la meridian, el ar fi obţinut coordonatele insulei, latitudinea şi longitudinea. Pentru că îi lipsea însă aparatul acesta, inginerul era silit să procedeze în alt fel.

Cyrus se întoarse deci la cămin. La lumina focului ciopli două rigle plate, pe care le uni la un cap, în aşa fel încît formau un fel de compas, care se putea închide şi deschide. În loc de şurub, inginerul folosi un ghimpe mare de salcîm, cules de pe lemnele de foc.

Cu acest instrument, Cyrus Smith se înapoie pe plajă. El trebuia să măsoare înălţimea polului deasupra orizontului conturat în mod precis, adică deasupra nivelului mării. Inginerul hotărî, deci, să-şi facă observaţiile pe platoul Grande Vue, urmînd să ţină seama în calculele sale de înălţimea acestuia deasupra nivelului mării. A doua zi, printr-un procedeu geometric simplu, inginerul avea să calculeze şi înălţimea platoului.

---

[1] Timpul indicat de ceasornicele noastre nu coincide exact cu timpul solar: între „timpul solar adevărat" şi acel „timp mijlociu", pe care ni-l arată ceasurile exacte, există o diferenţă egală cu zero numai în patru zile din an: cam la 16 aprilie, 14 iunie, 1 septembrie şi 24 decembrie (vezi lucrarea lui I. Perelman *Astronomia distractivă*, apărută în Editura Tineretului; Bucureşti, 1959).

Acest orizont, luminat de răsăritul Lunii ce nu se arătase încă, se desprindea cu limpezime pe cerul întunecat, așa că putea să fie vizat cu oarecare precizie.

În clipa aceea, Crucea Sudului se prezenta observatorului într-o poziție răsturnată, astfel că steaua α reprezenta baza ei, sau partea cea mai apropiată a Polului Sud.

Această constelație este așezată mai departe de Polul Sud decît este Steaua polară față de Polul Nord. Steaua α este cu 27° mai depărtată de pol, așa că Cyrus Smith trebuia să țină seama de această diferență în calculele sale. Pentru a simplifica operațiile, se îngriji de asemenea să observe clipa în care ea trecea la meridian, dincolo de Polul Sud.

Inginerul îndreptă unul din picioarele compasului spre orizontul mării în poziția orizontală, iar celălalt spre steaua α din constelația Crucii Sudului, astfel că deschizătura dintre cele două laturi ale compasului îi dădu distanța unghiulară egală cu înălțimea stelei deasupra orizontului. Ca să fixeze acest unghi în mod definitiv, el înțepeni, cu ajutorul unor spini de salcîm, cele două bețișoare ale aparatului său pe un al treilea bețișor, așezat de-a curmezișul, obținînd astfel un unghi fix.

Nu-i mai rămînea acum decît să socotească unghiul obținut, reducînd totul la nivelul mării, lucru pentru care era absolut necesar să cunoască înălțimea platoului[1]. Unghiul astfel obținut avea să reprezinte înălțimea stelei α, prin urmare înălțimea polului deasupra orizontului, adică latitudinea insulei, deoarece se știe că latitudinea unui punct oarecare al globului este întotdeauna egală cu înălțimea polului deasupra orizontului acelui punct.

Efectuarea acestor calcule fu lăsată pentru a doua zi".

Cum s-a efectuat măsurarea înălțimii platoului, cititorii știu deja din pasajul pe care l-am citat în primul capitol al acestei cărți. Lăsînd la o parte acest pasaj din roman, să urmărim în continuare activitatea inginerului:

---

[1] Întrucît măsurătoarea a fost efectuată de către inginer nu la nivelul mării, ci de pe un platou înalt — linia dreaptă, dusă de la ochiul observatorului la linia orizontală, nu coincidea în mod exact cu perpendiculara la raza terestră, ci forma cu ea un anumit unghi. Dar acest unghi era atît de mic, încît în cazul de față putea fi neglijat cu totul (la o înălțime de 100 m el constituie de-abia a treia parte dintr-un grad); din această cauză Smith, mai exact Jules Verne, nu avea nevoie să complice calculul prin introducerea acestei corecții.— *I. P.*

„Cyrus Smith reluă apoi instrumentul pe care-l fabricase în ajun. Se știe că depărtarea la care fixase cele două rigle, reprezenta distanța unghiulară a stelei α din constelația Crucii Sudului pînă la orizont. Inginerul măsură, cît se poate de exact, acest unghi, folosindu-se de o circumferință pe care o împărțise în 360 de părți egale. Unghiul astfel măsurat avea 10°. Adăugînd la cifra obținută cele 27° care despărțeau steaua α de Polul Sud și ținînd seama de înălțimea platoului pe care își făcuse observațiile, inginerul obținu cifra 37. Deci, Cyrus Smith trase concluzia că insula Lincoln se afla la 37° latitudine sudică sau, ținînd seama de instrumentele rudimentare pe care le folosise, între paralela 35 și paralela 40.

Mai rămînea să obțină longitudinea insulei, ca să aibă coordonatele ei complete. Longitudinea putea s-o afle în aceeași zi, la amiază, în clipa cînd Soarele avea să treacă la meridian".

DETERMINAREA LONGITUDINII GEOGRAFICE

„Cum va constata oare Cyrus Smith trecerea Soarelui la meridianul insulei, fără nici un instrument? Iată un lucru pe care Herbert nu poate să și-l închipuie.

Între timp, Cyrus Smith se pregăti pentru observațiile sale astronomice. El alese pe plajă un loc neted, pe care marea în retragere îl nivelase cu desăvîrșire. Prăjina, care avea o lungime de 6 picioare și se afla înfiptă în acel loc, era perpendiculară pe acest teren.

Herbert începu să înțeleagă ce avea de gînd să facă inginerul, ca să constate trecerea Soarelui la meridianul insulei, cu alte cuvinte, ca să știe cînd e miezul zilei în acel punct al globului. Voia să afle aceasta cu ajutorul umbrei pe care o proiecta bățul pe nisip și, în lipsa altor instrumente, avea să obțină cu aproximație rezultatul dorit.

Într-adevăr, în clipa în care această umbră va fi cea mai scurtă, va fi ora 12 fix; va fi deajuns să se urmărească extremitatea umbrei, ca să se cunoască clipa în care, după ce a scăzut, ea va reîncepe să crească. Umbra bastonului reprezenta astfel acul unui cadran.

Cînd socoti că a sosit momentul, Cyrus Smith îngenunchie pe nisip și începu să măsoare micșorarea umbrei cu ajutorul unor mici țăruși, pe care-i înfigea în nisip.

Reporterul (unul dintre însoțitorii inginerului) ținea cronometrul său în mînă, gata să anunțe ora cînd umbra va fi de lungime minimă. În afară de aceasta, deoarece Cyrus Smith făcea aceste operații în ziua de 16 aprilie, adică o zi în care timpul mijlociu se confundă cu timpul adevărat, ora pe care avea s-o anunțe reporterul după cronometrul său avea să fie chiar ora Washingtonului (locul de unde au plecat călătorii).

Între timp, soarele înainta încet. Umbra bățului scădea mereu și în clipa în care lui Cyrus Smith i se păru că ea crește din nou, întrebă:

— Cît e ora?

— Cinci și un minut, răspunse reporterul.

Observația era terminată. Nu-i mai rămînea decît să facă calculele, ceea ce nu-i era prea greu.

Observația a stabilit că între meridianul pe care se află Washingtonul și meridianul insulei Lincoln exista o diferență de aproape 5 ore. Aceasta însemna că atunci cînd pe insulă era amiază, la Washington era deja ora 5 după amiază. Soarele în mișcarea lui circulară parcurge în jurul globului terestru 1° în 4 min, iar într-o oră va parcurge 15°. 15° înmulțite cu 5 (numărul de ore) dau 75°.

Așadar, Washingtonul, aflîndu-se la 77°3'11'' longitudine vestică, măsurate de la meridianul din Greenwich — în raport cu care americanii, ca și englezii, măsoară longitudinea — insula Lincoln urma să aibă cu 75° mai mult, adică să se afle la 152° longitudine vestică.

Avîndu-se în vedere erorile care s-ar fi putut strecura la această observație, se putea totuși afirma că insula Lincoln se afla așezată între paralelele 35 și 40 latitudine sudică și între 150 și 155 de grade la vest de Greenwich".

Vom menționa, în încheiere, că există mai multe procedee pentru determinarea longitudinii geografice; procedeul folosit de eroii lui Jules Verne este doar unul dintre ele (cunoscut sub denumirea „procedeul de transport al cronometrelor"). Tot astfel există și alte procedee de stabilire a latitudinii, mai precise decît cel ce a fost descris aici (și care este inaplicabil, de exemplu, în navigație).

Partea a doua

ÎNTRE ACTIVITATE SERIOASĂ ȘI GLUMĂ ÎN GEOMETRIE

Obiectul matematicii este atît de serios, încît este util să nu pierdem ocazia pentru a-l face puțin mai distractiv.

PASCAL

Capitolul VIII

GEOMETRIE ÎN BEZNĂ

ÎN FUNDUL CALEI

De la aerul curat al cîmpiilor şi mării să ne mutăm într-o cală întunecoasă şi strîmtă a unei corăbii vechi, unde un tînăr erou al unuia dintre romanele lui Maine Red a rezolvat cu succes o problemă geometrică într-o situaţie, în care, desigur, nici unuia dintre cititorii mei nu i-a fost dat să se ocupe de matematică. În romanul *Băiatul-marinar* (sau *În fundul calei*), Maine Red povesteşte despre un tînăr amator de aventuri, care, neavînd mijloace pentru a-şi plăti călătoria, s-a strecurat în cala unei corăbii necunoscute şi aici s-a trezit închis pe neaşteptate pentru tot timpul călătoriei sale. Răscolind bagajele care se aflau în închisoarea sa, el a dat peste o ladă cu pesmeţi şi un butoi cu apă. Băiatul chibzuit înţelegea că trebuie să fie cît mai econom cu această rezervă limitată de alimente şi apă, de aceea a hotărît s-o împartă în raţii zilnice.

Nu i-a fost prea greu să numere pesmeţii, însă cum să stabilească raţiile de apă, fără să cunoască rezerva întreagă? Iată problema care se afla în faţa tînărului erou al lui Maine Red. Să vedem cum a dus-o el la bun sfîrşit.

MĂSURAREA BUTOIULUI

„Trebuia să stabilesc raţia zilnică de apă. Pentru aceasta trebuia să aflu cîtă apă conţine butoiul şi apoi s-o împart în raţii.

Spre norocul meu, la şcoala sătească învăţătorul ne-a predat, în cursul lecţiilor de aritmetică, unele noţiuni elementare de geometrie: eu aveam unele cunoştinţe privitoare la cub, piramidă, cilindru, sferă; mai ştiam de asemenea că butoiul poate fi considerat drept două trunchiuri de con, cu bazele mari alăturate. Pentru a stabili capacitatea butoiului, trebuia să cunosc înălţimea lui (sau, de fapt, jumătate din această înălţime), apoi circumferinţa unuia dintre funduri şi circumferinţa secţiunii transversale, în partea cea mai groasă a butoiului. Cunoscînd aceste trei date puteam să stabilesc cu exactitate, cîte unităţi cubice conţine butoiul.

Îmi rămînea doar să măsor aceste valori, însă tocmai în aceasta consta întreaga dificultate.

Cum să efectuez această măsurătoare?

Nu era greu să aflu înălţimea butoiului: el se afla în faţa mea; în ceea ce priveşte circumferinţele, nu puteam să mă apropii de ele. Eram prea mic de statură pentru a ajunge pînă sus; afară de aceasta, mă împiedicau şi lăzile care se aflau în jurul butoiului.

Mai exista încă o dificultate: nu aveam nici o linie, nici o sfoară pe care le-aş fi putut folosi în vederea măsurătorilor; cum aş fi putut să calculez valorile, dacă nu aveam nici un fel de unitate de măsură? Totuşi, m-am hotărît să nu renunţ la planul meu pînă nu-l voi judeca sub toate aspectele".

RIGLA GRADATĂ
(Problema lui Maine Red)

„Tot gîndindu-mă la butoi, pe deplin hotărît să-l măsor, am descoperit dintr-o dată ceea ce-mi lipsea. Îmi va fi de folos o vergea care să aibă o astfel de lungime, încît să poată trece prin butoi în regiunea grosimii lui maxime. Dacă voi introduce vergeaua în butoi şi o voi sprijini în peretele opus, voi afla lungimea diametrului. Îmi va rămîne doar să înmulţesc lungimea vergelei cu trei, pentru a obţine lungimea circumferinţei. Aceasta n-ar fi fost o valoare absolut precisă, însă era pe deplin satisfăcătoare pentru măsurătorile obişnuite. Iar întrucît deschizătura pe care o făcusem mai înainte în butoi se afla în partea lui cea mai lată, introducînd prin ea vergeaua puteam să aflu diametrul de care aveam nevoie.

Unde să găsesc vergeaua? Acest lucru nu era prea greu. M-am hotărît să folosesc o scîndură de la lada cu pesmeţi şi imediat m-am apucat de lucru. Este adevărat că scîndura avea o lungime de numai 60 cm, iar butoiul avea o lăţime de două ori mai mare. Aceasta nu putea constitui însă o dificultate. Trebuia doar să confecţionez trei beţişoare pe care să le leg împreună, pentru a obţine o vergea de lungimea corespunzătoare.

Tăind scîndura de-a lungul fibrelor lemnoase, am confecționat trei bețișoare rotunjite și bine netezite. Cu ce să le leg însă între ele? Pentru aceasta am folosit șireturile de la ghetele mele, care aveau o lungime de aproape 1 m. Legînd bețișoarele, am obținut o vergea de o lungime satisfăcătoare, adică de aproximativ 1,5 m.

Eram gata să încep măsurătoarea, dar s-a ivit o nouă piedică. Era imposibil să-mi introduc vergeaua în butoi. Gura lui era prea strîmtă. Nu puteam nici să îndoi vergeaua, căci, desigur, s-ar fi rupt.

Curînd am găsit modul în care să pot introduce în butoi vergeaua mea de măsurat: am desfăcut-o în părți, am introdus prima parte și abia atunci am legat de capătul ei partea a doua a vergelei; apoi, împingînd înăuntru cea de-a doua parte, am legat-o și pe a treia.

Am îndreptat vergeaua în așa fel încît ea să se sprijine în peretele opus al butoiului exact în dreptul deschizăturii și am făcut un semn pe vergea în dreptul suprafeței laterale a butoiului. Scăzînd grosimea pereților, am obținut valoarea de care aveam nevoie pentru măsurători.

Am scos vergeaua în același fel cum am introdus-o, căutînd să observ cu exactitate acele locuri unde părțile separate au fost legate între ele, pentru ca apoi să fac vergeaua de aceeași lungime pe care a avut-o și în butoi. O eroare neînsemnată ar fi putut să dea naștere la o mare greșeală în rezultatul final.

Așadar, cunoșteam diametrul bazei inferioare a trunchiului de con. Acum trebuia să găsesc diametrul capacului butoiului care servea drept bază superioară a trunchiului de con. Am pus vergeaua pe butoi, am sprijinit-o în punctul opus al marginii și am însemnat pe ea lungimea diametrului. Pentru aceasta nu am avut nevoie mai mult de un minut.

Îmi rămînea doar să măsor înălțimea butoiului. Ar fi trebuit, veți spune dv., să pun vergeaua perpendicular lîngă butoi și să însemn pe ea înălțimea lui. Însă încăperea în care mă aflam era foarte întunecoasă și punînd vergeaua în poziție perpendiculară nu aș fi putut vedea pînă la ce punct ajunge capacul butoiului. Puteam acționa numai pe pipăite: ar fi trebuit să pipăi cu mîinile capacul butoiului și locul corespunzător de pe vergea. În afară de aceasta, vergeaua, învîrtindu-se pe lîngă butoi, ar fi putut să se încline și aș fi obținut o înălțime inexactă.

Gîndindu-mă mai bine, am găsit cum să birui și această piedică. Am legat numai două bețișoare, iar pe cel de-al treilea l-am pus pe capacul butoiului în așa fel, ca el să depășească marginea cu 30—40 cm; apoi am sprijinit de el vergeaua mai lungă, astfel încît să formeze un unghi drept cu bețișorul și, prin urmare, să fie paralelă cu înălțimea butoiului. Făcînd un semn în dreptul punctului unde butoiul avea cea mai mare curbură, adică la mijloc, și scăzînd grosimea fundului, am obținut jumătate din înălțimea butoiului sau — ceea ce era același lucru — înălțimea unui trunchi de con.

Acum posedam toate datele necesare pentru a rezolva problema.

CEEA CE ERA DE EFECTUAT

Exprimarea volumului butoiului în unități cubice și apoi transformarea lor în galloane[1] reprezenta o simplă operație aritmetică, care nu era greu de dus la bun sfîrșit. Este adevărat că pentru aceste calcule nu aveam unelte de scris, dar ele tot mi-ar fi fost nefolositoare, deoarece mă aflam într-un întuneric absolut. Am fost adesea nevoit să efectuez în gînd cele patru operații aritmetice fără toc și hîrtie. Acum trebuia să operez cu numere nu prea mari și problema nu mă punea de loc în încurcătură.

M-am lovit însă de o altă dificultate. Aveam trei factori cunoscuți: înălțimea și ambele baze ale trunchiului de con; dar, ce valoare numerică aveau acești factori? Era necesar ca înainte de a calcula, să exprim aceste valori prin numere.

Mai întîi această dificultate mi s-a părut de neînvins. Dacă nu aveam nici metru, nici picior și nici o riglă de măsurat, trebuia să renunț la rezolvarea acestei probleme.

Mi-am amintit însă că, fiind în port, mi-am măsurat înălțimea, care era egală cu 4 picioare. Cum aș fi putut oare folosi acum această informație? Extrem de simplu: puteam să măsor 4 picioare pe vergeaua mea și să le iau drept bază pentru calcul.

---

[1] Gallonul este o unitate de măsură pentru capacitate. Gallonul englez conține 277 de țoli cubici (aproximativ 4,5 l). Un gallon are 4 ocale, iar 1 oca, 2 pinți.

Pentru a însemna înălțimea mea, m-am lungit pe jos, apoi am pus vergeaua pe mine în așa fel, încît una din extremitățile ei să-mi atingă picioarele, iar cealaltă să se sprijine pe frunte. Țineam vergeaua cu o mînă, iar cu cea liberă am însemnat pe ea locul, în dreptul căruia se afla creștetul capului.

Mai departe au urmat noi greutăți. Vergeaua egală cu 4 picioare era nefolositoare pentru măsurătoare, dacă pe ea nu erau însemnate diviziunile mai mici, adică țolii. Pare că nu e greu să împărțim 4 picioare în 48 de părți (țoli) și să însemnăm aceste diviziuni pe o linie. În teorie este, într-adevăr, extrem de simplu; în practică însă, și încă în acea bezná în care mă aflam eu, toate acestea nu erau de loc ușoare și simple.

În ce fel să găsim pe vergea punctul de mijloc al acestor 4 picioare? Cum să împărțim fiecare jumătate a vergelei din nou în jumătăți, apoi fiecare dintre picioare în 12 țoli, absolut egali între ei?

Am început cu confecționarea unui bețișor puțin mai lung de 2 picioare. Comparînd apoi cu vergeaua pe care erau însemnate 4 picioare, m-am convins că lungimea dublată a bețișorului reprezintă puțin mai mult de 4 picioare. Micșorînd bețișorul și repetînd operația de cîteva ori, a cincea oară am obținut ca lungimea dublată a bețișorului să fie egală exact cu 4 picioare.

Această operație mi-a răpit mult timp. Dispuneam însă de suficient timp. Eram chiar mulțumit că aveam cum să-l folosesc.

De altfel, m-am priceput să scurtez munca ulterioară înlocuind bețișorul printr-un șnur care putea fi îndoit la mijloc. Pentru aceasta mi-au servit foarte bine șireturile de la ghete. Legîndu-le într-un nod strîns, m-am apucat de lucru și, curînd, am putut deja să tai o bucată lungă exact de un picior. Pînă acum trebuia să îndoi în două, ceea ce era foarte ușor. Pe urmă a trebuit să îndoi în trei, ceea ce era mai greu. Însă am reușit să rezolv și acest lucru și iată că țineam în mînă trei bucăți, avînd fiecare o lungime de 4 țoli. Îmi rămînea să le îndoi în două și pe urmă încă în două, pentru a obține o sforicică lungă de un țol.

Aveam acum ceea ce-mi lipsea pentru a însemna pe vergea diviziunile de 1 țol; așezînd pe ea cu grijă unitățile mele de măsură am făcut 48 de semne, care reprezentau țolii. Astfel, am devenit posesorul unei rigle împărțite în țoli, cu ajutorul căreia puteam să măsor lungimile obținute de mine. Numai acum puteam să duc la bun sfîrșit problema care avea pentru mine o importanță atît de mare.

M-am apucat imediat de calcule. Măsurînd ambii diametri, am luat media lungimilor lor, apoi am găsit suprafața ce corespundea acestui diametru mediu. Astfel am obținut valoarea bazei unui cilindru egal cu un con dublu, de înălțime egală. Înmulțind aceste rezultate cu înălțimea, am stabilit capacitatea volumului necunoscut.

Împărțind numărul țolilor cubi obținuți la 69 (numărul de țoli cubi dintr-o oca)[1], am aflat cîte ocale conține butoiul meu.

În butoi erau peste 100 de galloane, mai exact 108".

VERIFICAREA CALCULULUI

Cititorii care au cunoștințe de geometrie vor observa, fără îndoială, că modul de calcul al volumului a două trunchiuri de con, folosit de tînărul erou al lui Maine Red, nu este tocmai exact. Dacă (fig. 102) vom nota raza bazelor mici prin r,

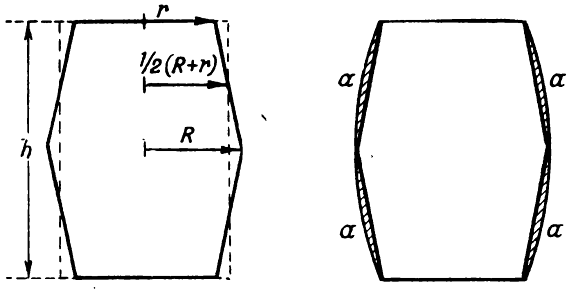


Fig. 102. Verificarea calculului.

iar raza bazelor mari prin R, iar înălțimea butoiului, adică înălțimea dublată a fiecărui trunchi de con, prin h, volumul obținut de băiat va fi exprimat prin următoarea formulă:

$$\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h}{4}\,(R^2 + r^2 + 2Rr).$$

[1] Vezi observația de la p. 180.

Pe cînd, procedînd după regulile geometriei, adică folosind formula pentru volumul trunchiului de con, noi am fi obţinut pentru volumul necunoscut următoarea expresie:

$$\frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

Aceste două expresii nu sînt identice, şi este uşor să ne convingem că cea de-a doua este mai mare decît cea dintîi cu:

$$\frac{\pi h}{12}(R - r)^2$$

Cei ce au cunoştinţe de algebră îşi dau seama imediat că diferenţa $\frac{\pi h}{12}(R - r)^2$ este un număr pozitiv, adică procedeul folosit de eroul lui Maine Red i-a dat un rezultat mai mic.

Ar fi interesant de stabilit, aproximativ cît de mare este această micşorare a rezultatului. Butoaiele se fac, de obicei, în aşa fel, încît lăţimea lor maximă întrece diametrul fundului cu 1/5 din acesta, adică $R - r = \frac{R}{5}$. Presupunînd că butoiul din romanul lui Maine Red avea această formă, putem găsi diferenţa dintre volumul obţinut şi cel real al trunchiurilor de con:

$$\frac{\pi h}{12}(R - r)^2 = \frac{\pi h}{12}\left(\frac{R}{5}\right)^2 = \frac{\pi h R^2}{300},$$

adică, aproximativ $\frac{hR^2}{100}$ (dacă considerăm $\pi = 3$). După cum vedem eroarea va fi egală cu volumul unui cilindru cu raza bazei egală cu raza secţiunii maxime a butoiului şi cu înălţimea egală cu a 300-a parte din înălţimea acestuia.

Însă, în cazul de faţă, este de dorit o mică mărire a rezultatului, deoarece se cunoaşte că volumul butoiului este mai mare decît volumul a două trunchiuri de con înscrise în el. Aceasta reiese în mod limpede din figura 102 (dreapta), unde se poate observa, că prin procedeul arătat de măsurare a butoiului se lasă deoparte o porţiune din volumul lui, notată cu literele *a*, *a*, *a*, *a* (şi haşurată în figură).

Tînărul matematician al lui Maine Red nu a inventat singur această formulă pentru calcularea volumului unui butoi; ea este dată în unele manuale de geometrie elementară ca fiind un procedeu comod pentru calcularea aproximativă a conţinutului butoaielor. Trebuie să observăm că măsurarea volumului unui butoi, în mod absolut exact, este o problemă destul de grea. În secolul al XVII-lea, marele astronom german Kepler s-a gîndit la această problemă şi a lăsat printre operele sale matematice o lucrare specială privitoare la arta de a măsura butoaiele. O rezolvare geometrică simplă şi precisă a acestei probleme nu a fost găsită nici pînă în prezent; există doar procedee elaborate în practică şi care dau rezultate mai mult sau mai puţin aproximative. De exemplu, în sudul Franţei se foloseşte o formulă simplă:

$$\text{volumul butoiului} = 3{,}2\, hRr,$$

care dă rezultate bune în practică.

Ar fi interesant să examinăm şi următoarea problemă: din ce cauză oare butoaielor li se dă o formă atît de incomodă pentru efectuarea unei măsurători, adică a unui cilindru cu pereţi convecşi? Nu ar fi mai simplu oare să fabricăm butoaie strict cilindrice? Este adevărat că se fac astfel de butoaie cilindrice, însă nu din lemn, ci din metal (pentru petrol, de exemplu). De ce butoaiele de lemn se fabrică cu pereţi convecşi? Care este avantajul pe care-l oferă o asemenea formă? Avantajul este acela că, atunci cînd se bat cercurile la butoi, ele se pot aşeza strîns şi fix într-un mod extrem de simplu: prin baterea lor către partea mai lată; atunci cercul strînge destul de tare doagele, asigurînd butoiului rezistenţa necesară.

Din aceeaşi cauză doniţele, ciuberele şi căzile din lemn etc. se fac, de obicei, în formă de trunchi de con şi nu de cilindru; aici de asemenea consolidarea acestor produse cu cercuri se obţine prin simpla lor batere spre partea mai lată.

Ar fi util să facem cunoscute cititorilor raţionamentele expuse de către Johann Kepler cu privire la acest subiect. În perioada de timp dintre descoperirea legii a doua şi a treia a mişcării planetelor, marele matematician a acordat atenţie şi problemei privitoare la forma butoaielor şi chiar a scris o lucrare matematică cu această temă: *O nouă stereometrie a butoaielor de vin*. Iată cum îşi începe Kepler lucrarea: „După cum o cer materialul, construcţia şi folosirea butoaielor de vin, acestora li s-a dat o formă rotundă, înrudită cu cea conică şi cea cilindrică. Un lichid, păstrat mult timp în vase de metal, se altereazā din cauza ruginii; vasele din sticlă şi lut sînt insuficiente ca mărime şi nu prezintă siguranţă; iar vasele de piatră nu corespund din cauza greutăţii lor, aşa încît ne rămîne doar să turnăm şi să păstrăm vinul în vase de lemn. Dintr-un trunchi întreg nu se pot confecţiona cu uşurinţă vase suficient de încăpătoare şi în cantitate necesară şi, chiar dacă acest lucru este posibil, ele crapă. Din această cauză butoaiele trebuie să fie fabricate din mai multe bucăţi din lemn, unite între ele. Nu putem evita însă scurgerea lichidului prin crăpăturile dintre bucăţile separate, nici chiar cu ajutorul unui alt material sau printr-un alt procedeu, afară de strîngerea lor cu cercuri...

Dacă s-ar putea face din scîndurele de lemn o sferă, atunci vasele sferice ar fi cele mai bune. Însă, deoarece scîndurile nu pot fi strînse cu ajutorul cercurilor astfel încît să formeze un vas sferic, acesta a fost înlocuit cu unul cilindric. Dar acest cilindru nu poate să fie pe deplin regulat, pentru că cercurile slăbite ar fi devenit dintr-o dată inutile şi n-ar fi putut fi strînse mai mult, dacă butoiul nu ar fi avut o formă conică, care se îngustează întrucîtva în ambele părţi, pornind de la mijlocul lui. Această formă este comodă şi pentru rostogolire şi pentru transportul în căruţe şi fiind constituită din două jumătăţi asemănătoare una cu alta, cu o bază comună, este forma cea mai avantajoasă pentru clătinare şi frumoasă ca aspect"[1].

PEREGRINĂRILE NOCTURNE ALE LUI MARK TWAIN

Ingeniozitatea de care a dat dovadă băiatul din romanul lui Maine Red, aflîndu-se într-o situaţie atît de jalnică, pur şi simplu ne uimeşte. În întunericul deplin, în care se afla el, majoritatea oamenilor nu ar fi putut nici măcar să se orienteze cît de cît just, fără a mai vorbi de efectuarea unor măsurători şi calcule. Este instructiv de comparat, cu povestirea lui Maine Red, o istorioară comică privitoare

[1] Nu trebuie să credem că lucrarea lui Kepler cu privire la măsurarea butoaielor este o jucărie matematică, o distracţie a geniului în orele sale de odihnă. Nu, aceasta este o lucrare serioasă, în care pentru prima oară se introduc în geometrie mărimi infinitezimale şi începuturile calculului integral. Butoiul de vin şi problema administrativă de măsurare a capacităţii lui i-au servit lui Kepler drept bază pentru raţionamente matematice profunde şi rodnice.

la o peregrinare fără rost printr-o cameră întunecoasă de hotel, — aventură care i s-ar fi întîmplat renumitului compatriot al lui Maine Red, umoristul Mark Twain. În această povestire se relevă just cît de greu este să ne facem o imagine exactă a poziției obiectelor, în întuneric, chiar și într-o cameră obișnuită, dacă locul ne este puțin cunoscut. Vom da mai departe, într-o formă prescurtată, acest episod amuzant din *Inocenții în străinătate*, de Mark Twain.

„M-am trezit și am simțit că mi-e sete. Atunci mi-a venit în minte o idee strălucită: să mă îmbrac, să ies în grădină și să mă răcoresc spălîndu-mă la fîntîna arteziană.

M-am sculat încetișor și am început să-mi caut lucrurile. Am găsit un ciorap. Unde era cel de-al doilea nu puteam să-mi închipui. M-am lăsat cu precauție pe dușumea, am început să-l caut împrejur, însă fără succes. Am început să caut mai departe, scotocind și răscolind. Mă deplasam tot mai departe și mai departe, însă nu-mi găseam ciorapul și dădeam numai de mobilă. Cînd m-am culcat, în jurul meu era mult mai puțină mobilă; acum însă camera era plină, mai ales de scaune, care erau pretutindeni. Nu cumva s-au mutat aici încă două familii în răstimpul acesta? În întuneric nu vedeam nici unul dintre aceste scaune, în schimb mă loveam neîncetat de ele cu capul.

În cele din urmă am ajuns la concluzia că pot trăi și fără un ciorap. Sculîndu-mă în picioare, m-am îndreptat spre ușă, după cum credeam eu, însă pe neașteptate mi-am văzut chipul șters în oglindă.

Era limpede că m-am rătăcit și nu am nici cea mai mică idee despre locul unde mă aflu. Dacă în cameră s-ar fi aflat o singură oglindă, ea m-ar fi ajutat să mă orientez, însă erau două oglinzi, iar aceasta este tot atît de rău ca și cum ar fi o mie.

Am vrut să ajung la ușă pipăind peretele. Mi-am reînceput eforturile și am făcut să cadă un tablou. Nu era prea mare, însă a făcut zgomot cît o întreagă panoramă. Harris (vecinul de cameră care dormea pe un alt pat) nici nu s-a clintit, însă eu am simțit că dacă voi acționa și mai departe în același mod, îl voi trezi negreșit. Să încerc o altă cale. Voi găsi iarăși masa rotundă — am fost lîngă ea deja de cîteva ori — și de la ea voi căuta să ajung la patul meu; dacă voi găsi patul, voi găsi și carafa cu apă și atunci, cel puțin, îmi voi potoli setea insuportabilă. Cel mai bine este să mă tîrăsc de-a bușilea; acest mod îl încercasem deja și de aceea aveam mai multă încredere în el.

În sfîrșit, am reușit să ajung pînă la masă — s-o simt cu capul meu — făcînd un zgomot relativ mic. Atunci m-am ridicat din nou și am început să bîjbîi, balansîndu-mă cu mîinile întinse înainte și cu degetele depărtate. Am găsit un scaun, apoi un perete. Alt scaun. Apoi divanul. Bastonul meu. Încă un divan. Știam foarte bine că în cameră era numai un singur divan. Iarăși am dat de masă și am primit o nouă lovitură. Apoi am dat de un alt rînd de scaune.

Numai atunci mi-a venit în minte ceea ce de mult ar fi trebuit să-mi vină. Masa era rotundă, deci nu putea să-mi servească drept punct de plecare în peregrinările mele. Am început să merg la întîmplare prin spațiul existent între scaune și divan, însă m-am pomenit într-o zonă cu totul necunoscută, trîntind pe jos sfeșnicul de pe cămin. După sfeșnic am doborît și lampa, iar după lampă a căzut pe podele cu zgomot și carafa.

Aha, — m-am gîndit eu — în sfîrșit te-am găsit drăguțo!

— Ajutor! Hoții! — a început să strige Harris.

Strigătele și gălăgia au ridicat în picioare toată casa. Au sosit cu lumînări și felinare stăpînul casei, musafirii, servitorii.

Am privit în jurul meu. Am constatat că mă aflu lîngă patul lui Harris. Numai un singur divan se afla la perete; numai un singur scaun stătea în așa fel încît puteai să dai peste el, iar eu m-am învîrtit în jurul lui asemenea unei planete și, timp de o jumătate de noapte, m-am ciocnit de el, ca o cometă. Măsurîndu-mi pasul m-am convins că am mers în cursul nopții 47 de mile“.

Ultima afirmație este peste măsură de exagerată: nu se poate ca în cursul a cîtorva ore să parcurgi pe jos 47 de mile, însă celelalte amănunte ale acestei teorii sînt destul de verosimile și caracterizează exact acele dificultăți comice, de care te poți lovi, de obicei, cînd peregrinezi nesistematic și la întîmplare prin întuneric, într-o încăpere necunoscută. Cu atît mai mult trebuie să prețuim uimitoarea prezență de spirit și metodicitatea tînărului erou al lui Maine Red, care nu numai că a știut să se orienteze în întuneric absolut, dar să și rezolve, în aceste condiții, o problemă dificilă de matematică.

În legătură cu rătăcirile lui Twain prin camera întunecoasă este interesant de relevat încă un fenomen enigmatic, care se observă la oamenii care umblă cu ochii închişi: ei nu pot să meargă în linie dreaptă, ci neapărat trebuie să se abată într-o parte, descriind o curbă, închipuindu-şi totuşi că se deplasează drept înainte (fig. 103).

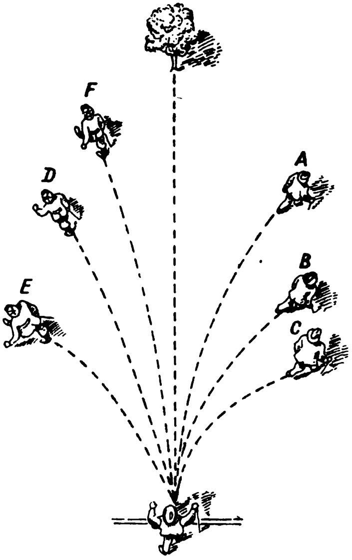


Fig. 103. Mersul cu ochii închişi.

De asemenea, s-a mai observat, de mai multă vreme, că şi călătorii care rătăcesc fără busolă într-un pustiu, în stepă, prin viscol sau ceață — în genere, în toate cazurile cînd nu există o posibilitate de a se orienta — se abat de la drumul drept şi se învîrtesc într-un cerc, înapoindu-se de cîteva ori în acelaşi loc. Raza cercului, descris în astfel de cazuri de un pieton, este de aproximativ 60—100 m; cu cît mersul este mai rapid, cu atît raza cercului va fi mai mică adică cercurile descrise vor fi mai mici.

S-au efectuat chiar experiențe speciale pentru studierea tendinței oamenilor de a se abate de la drumul drept, formînd cercuri. Iată ce ne spune, cu privire la aceste experiențe, I. Spirin, erou al Uniunii Sovietice:

„Pe un aerodrom neted şi înverzit au fost aliniați 100 de viitori piloți. Toți au fost legați la ochii şi li s-a propus să meargă drept înainte. Oamenii au început să meargă... La început mergeau drept; apoi unii au început să se abată la dreapta, iar alții la stînga, descriind treptat cercuri, întorcîndu-se la vechile lor urme".

Este cunoscută o experiență asemănătoare care a fost efectuată în piața San Marco din Veneția. Au fost legați la ochi mai mulți oameni și au fost așezați într-o extremitate a pieței, exact în fața catedralei, propunîndu-li-se să ajungă pînă la ea. Cu toate că trebuiau să parcurgă doar 175 m, totuși nici unul dintre ei nu a ajuns pînă în fața clădirii (82 m lățime); toți se abăteau într-o parte, descriau o curbă și se izbeau pînă la urmă de una din colonadele laterale (fig. 104).

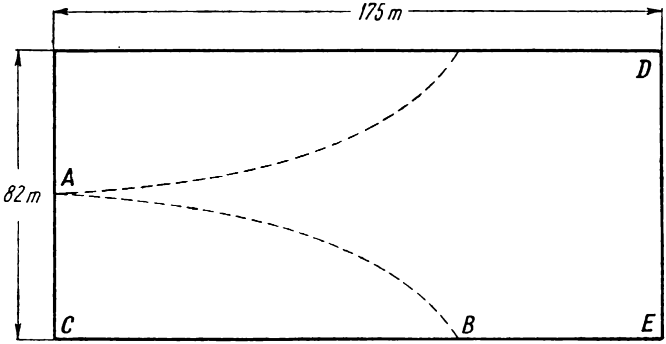


Fig. 104. Schema experienței efectuate în piața San Marco din Veneția.

Cine a citit romanul lui Jules Verne *Aventurile căpitanului Hetteras* își amintește, probabil, episodul în care călătorii au dat, în pustiul înzăpezit și nelocuit, de urme omenești: „— Acestea sînt urmele noastre, prietenii mei! — a exclamat doctorul. — Noi ne-am rătăcit în ceață și am dat chiar de propriile noastre urme..."

O descriere clasică a unei astfel de învîrtiri în cerc ne-a lăsat-o L.N. Tolstoi în povestirea *Stăpîn și slugă*.

„Vasili Andreici își îmboldea calul, îndreptîndu-l încotro bănuia, fără să știe nici el de ce, că s-ar afla pădurea și coliba pădurarului. Zăpada îl orbea, iar vîntul voia cu tot dinadinsul parcă să-l oprească în loc; dar el zorea mereu calul aplecîndu-se înainte.

Vreo cinci minute, după cît i se păru, călări astfel, tot mereu înainte, fără să vadă nimic altceva decît capul calului și pustietatea albă.

Deodată se ivi în față o pată neagră. Inima începu să-i bată de bucurie și se îndreptă spre această pată neagră, în care începu să vadă parcă pereții caselor din sat. Dar pata respectivă era o tufă înaltă de pelinița, crescută pe un hat... și cine știe de ce, la vederea acestei tufe de pelinița chinuită de vîntul nemilos, Vasili Andreici se cutremură și începu să gonească grăbit calul, fără să-și dea seama că, ajungînd în preajma tufei schimbase cu desăvîrșire direcția de mai înainte.

Iarăși apăru în față o pată neagră. Dar era tot un hat, acoperit cu tufe de pelinița. Și de data aceasta buruiana uscată se zbătea cu aceeași deznădejde. Iar lîngă ea se vedeau și urme de cal, pe care vîntul le astupa cu omăt. Vasili Andreici se opri, se aplecă și privi cu luare aminte: era într-adevăr o urmă de cal, ușor acoperită de zăpadă și ea nu putea fi decît a propriului său cal. Se învîrtise pesemne în cerc și pe o rază mică".

Fiziologul norvegian Guldberg, care a consacrat un studiu de specialitate învîrtirii în cerc (1896), a adunat o serie de mărturii verificate cu minuțiozitate, cu privire la cazuri reale de acest fel. Cităm două exemple.

Trei călători intenționau, pe o noapte cu zăpadă, să părăsească cantonul și să ajungă dintr-un șes, cu o lățime de 4 km, pînă la casa lor situată în direcția care în desenul alăturat este desenată punctat (fig. 105). Pe drum, fără să observe, ei s-au abătut la dreapta, după linia frîntă indicată prin săgeată. Parcurgînd o distanță oarecare, au crezut, după timpul care s-a scurs, că au ajuns la țintă, pe cînd în realitate s-au pomenit la același canton pe care-l părăsiseră. Pornind la drum pentru a doua oară, ei s-au abătut și mai mult și iarăși au ajuns la punctul de plecare. Același lucru s-a întîmplat și a treia și a patra oară. Desperați, au întreprins și a cincea încercare, însă au ajuns la același rezultat. După a cincea rotire în cerc, au renunțat la alte încercări de a mai ieși din cîmpie și au așteptat dimineața.

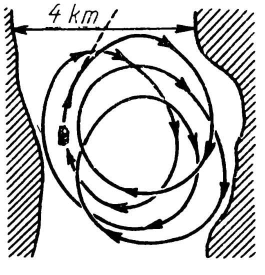


Fig. 105. Schema peregrinării celor trei drumeți.

Este și mai greu să vîslești pe mare în linie dreaptă, într-o noapte întunecoasă, fără stele sau în ceață deasă. A fost observat un caz, unul din multele asemănătoare, cînd vîslașii, care s-au hotărît să traverseze pe timp de ceață o strîmtoare cu o lățime de 4 km, au ajuns de două ori în apropierea malului opus, însă fără să-l atingă și fără să-și dea seama au descris două cercuri și au debarcat, în sfîrșit..., în locul de unde au plecat (fig. 106).

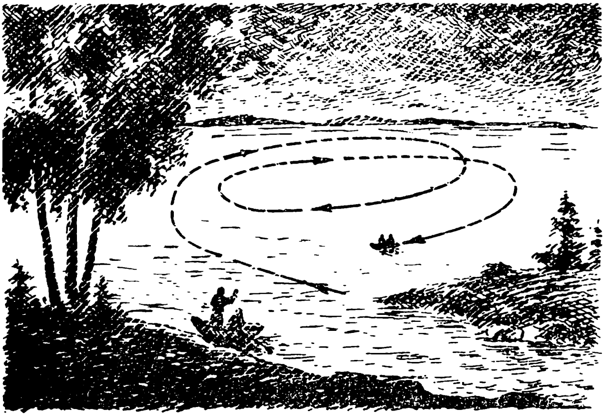


Fig. 106. Cum vîslașii au încercat să traverseze strîmtoarea pe timp de ceață.

Același lucru se întîmplă și cu animalele. Exploratorii polari povestesc despre cercurile pe care le descriu în pustiurile înzăpezite animalele înhămate la sănii. Cîinii care sînt lăsați să înoate cu ochii legați de asemenea descriu cercuri prin apă. Și păsările orbite zboară tot în cerc. O fiară hăituită, care și-a pierdut din cauza fricii capacitatea de a se orienta, se salvează nu în linie dreaptă, ci în spirală.

Zoologii au stabilit că mormolocii, crabii, meduzele și chiar amibele microscopice din picătura de apă, toate se învîrtesc în cerc.

Prin ce se poate explica înclinația enigmatică a omului și a animalelor pentru rotirea în cerc, imposibilitatea de a menține prin întuneric o direcție în linie dreaptă?

Această întrebare își va pierde deodată în ochii noștri misterul aparent ce-o învăluie, dacă o vom pune în mod just.

Vom cerceta nu cauza pentru care animalele se mişcă în cerc, ci ceea ce le este necesar pentru mişcarea în linie dreaptă.

Amintiţi-vă cum se mişcă o jucărie mecanică. Se întîmplă uneori că jucăria nu se mişcă în linie dreaptă, ci se abate într-o parte.

Această mişcare curbă nu ni se pare de loc misterioasă; oricine va înţelege de ce se întîmplă aşa: probabil că roţile din dreapta nu sînt egale cu cele din stînga.

Desigur că şi o fiinţă vie poate să se mişte, fără ajutorul ochilor, exact în linie dreaptă, numai în cazul în care muşchii din partea dreaptă şi cea stîngă funcţionează absolut la fel. Dar răspunsul căutat constă tocmai în faptul că simetria corpului omului şi animalelor nu este absolută. Majoritatea oamenilor şi a animalelor au muşchii din partea dreaptă a corpului dezvoltaţi inegal cu cei din stînga. Natural că un pieton care tot timpul păşeşte cu piciorul drept puţin mai departe decît cu cel stîng nu va putea să respecte o linie dreaptă; dacă ochii nu-l vor ajuta să-şi corecteze direcţia, el se va abate inevitabil spre stînga. La fel şi vîslaşul, care din cauza ceţei este lipsit de posibilitatea de a se orienta, în mod inevitabil se va abate spre stînga, dacă mîna lui dreaptă este mai viguroasă decît cea stîngă. Aceasta este o necesitatea geometrică.

Imaginaţi-vă, de exemplu, că, păşind cu piciorul stîng, un om face pasul cu 1 mm mai lung decît pasul făcut cu piciorul drept. Atunci, făcînd alternativ cîte 1 000 de paşi cu fiecare picior, acest om va parcurge cu piciorul stîng un drum cu 1 000 mm, adică 1 m, mai lung decît cu piciorul drept. Pe drumurile drepte paralele acest lucru este imposibil, pe cînd pe cercuri concentrice este pe deplin realizabil.

Putem chiar, folosind schema învîrtirii prin cîmpia înzăpezită, descrisă mai sus, să calculăm cu cît piciorul stîng al acelor drumeţi făcea un pas mai lung decît piciorul drept (deoarece ei se abăteau din drum la dreapta, este limpede că paşii mai lungi erau făcuţi tocmai de piciorul stîng). Distanţa dintre liniile urmelor piciorului drept şi piciorului stîng în timpul mersului (fig. 107) este aproximativ egală cu 10 cm, adică 0,1 m. Cînd un om descrie un cerc închis, piciorul lui drept parcurge drumul $2\pi R$, piciorul stîng $2\pi\ (R+0{,}1)$, unde R reprezintă raza acestui cerc în metri. Diferenţa $2\pi(R+0{,}1) - 2\pi R = 2\pi 0{,}1$, adică 0,62 m sau 620 mm, a fost formată din diferența dintre lungimea pașilor făcuți de piciorul drept și cel stîng, repetată de atîtea ori, cîți pași s-au făcut. Din figura 110 putem deduce că drumeții noștri descriau cercuri ce aveau un diametru aproximativ de 3,5 km, adică o lungime de aproximativ 10 000 m. Luîndu-se ca medie lungimea pasului de 0,7 m, pe parcursul acestui drum s-au făcut $\frac{10\,000}{0{,}7} = 14\,000$ de pași; dintre ei 7 000 au fost făcuți cu piciorul drept și tot atîția de piciorul stîng. Așadar am aflat că 7 000 de pași „stîngi“ sînt mai mari decît 7 000 de pași „drepți“ cu 620 mm. De aici rezultă că un pas stîng este mai lung decît unul drept cu $\frac{620 \text{ mm}}{7\,000}$, sau mai puțin de 0,1 mm. Iată ce diferență infimă între pași este suficientă pentru a produce un rezultat atît de uimitor!

Raza cercului pe care-l descrie un om ce rătăcește depinde de diferența dintre lungimea pașilor „drepți“ și a celor „stîngi“. Această dependență nu este greu de stabilit. Numărul de pași făcuți la parcurgerea unui cerc, cînd lungimea pasului este de 0,7 m, va fi egal cu $\frac{2\pi R}{0{,}7}$, unde R reprezintă raza cercului, în metri; dintre ei, pași „stîngi“ sînt $\frac{2\pi R}{2\cdot 0{,}7}$ și tot atîția pași „drepți“. Înmulțind această valoare cu diferența x dintre lungimile pașilor, vom obține diferența dintre lungimile acelor cercuri concentrice care au fost descrise de piciorul drept și cel stîng, adică

$$\frac{2\pi Rx}{2\cdot 0{,}7} = 2\pi\cdot 0{,}1, \text{ sau } Rx = 0{,}14,$$

unde Rx sînt exprimați în metri.

După această formulă simplă, este ușor de calculat raza cercului cînd se cunoaște diferența dintre pași și invers. De exemplu pentru participanții la experiența efectuată în piața San Marco din Veneția, putem calcula raza celui mai mare dintre cercurile descrise de ei în cursul mersului. Întrucît $AC = 41$ m este „săgeata“ fiecăruia din aceste cercuri, iar BC este semicoarda și BC nu depășește 175 m (fig. 104), raza R a arcului AB este dată de egalitatea:

$$BC^2 = 2R\cdot AC - AC^2.$$

Admițînd că $BC = 175$ m, vom obține:

$$2R = \frac{BC^2+AC^2}{AC} = \frac{175^2+41^2}{41} \approx 780 \text{ m},$$

de unde R, adică raza celui mai mare dintre cercurile descrise pe piața San Marco nu depășește 390 m.

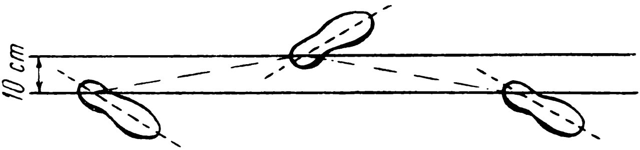


Fig. 107. Liniile făcute de urmele piciorului drept și ale celui stîng în timpul mersului.

Cunoscînd aceasta, vom stabili cea mai mică diferență dintre lungimea pașilor din formula obținută anterior, adică $Rx = 0{,}14$:

$$390x = 0{,}14, \text{ de unde } x = 0{,}35 \text{ mm}.$$

Așadar, diferența dintre lungimea pașilor „drepți" și a celor „stîngi", la participanții la experiență, nu este mai mică de 0,35 mm.

Cîteodată se întîmplă să citim sau să auzim că faptul învîrtirii în cerc la mersul pe dibuite depinde de deosebirea existentă între lungimea piciorului drept și a celui stîng; deoarece piciorul stîng, la majoritatea oamenilor, este mai lung decît cel drept, oamenii, în timpul mersului, trebuie să se abată inevitabil la dreapta de la direcția în linie dreaptă. O astfel de explicație este bazată pe o eroare geometrică. Prezintă importanță lungimea diferită a pașilor și nu a picioarelor. Din figura 108 reiese limpede că, chiar atunci cînd există o diferență între lungimea picioarelor, se pot face totuși pași care să aibă exact aceeași lungime, dacă la fiecare pas, unghiul format de picioare este același, adică dacă $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B$. Deoarece totdeauna $A_1B_1 = AB$ și $B_1C_1 = BC$, atunci $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ și, prin urmare, $AC = C_1A_1$. Și invers, chiar dacă avem absolut aceeași lungime a picioarelor, pașii pot fi de lungimi diferite dacă un picior este dus în timpul mersului mai departe decît celălalt.

Dintr-o cauză asemănătoare un barcagiu, care vîslește cu mîna dreaptă mai tare decît cu cea stîngă, în mod inevitabil va trebui să abată barca pe un cerc, deviind în partea stîngă. Animalele care fac pași inegali cu piciorul drept sau

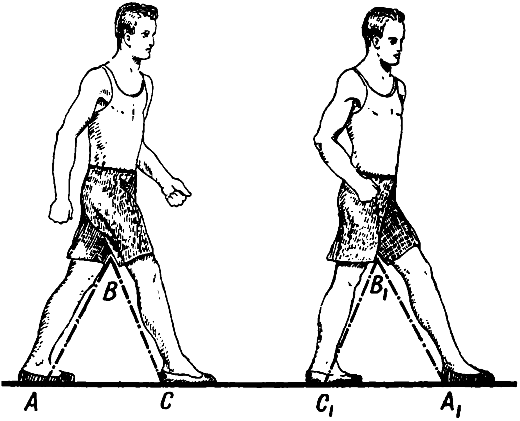


Fig. 108. Dacă unghiul fiecărui pas va fi unul și același, atunci pașii vor fi absolut egali.

stîng, ori păsările ce lovesc aerul cu putere inegală, de asemenea vor trebui să se miște în cercuri de fiecare dată cînd sînt lipsite de posibilitatea de a controla, cu ajutorul văzului, direcția în linie dreaptă. Aici, de asemenea, este suficientă o diferență extrem de mică în forța mîinilor, picioarelor sau aripilor.

Faptele arătate mai sus își pierd caracterul lor misterios și devin pe deplin firești, dacă privim lucrurile sub acest aspect. Și invers, ar fi ciudat dacă oamenii și animalele ar putea să-și mențină direcția în linie dreaptă, fără s-o controleze cu ochii. Căci o condiție necesară pentru aceasta ar fi o strictă simetrie geometrică a corpului, absolut imposibilă pentru o ființă vie. Iar cea mai mică deviere de la simetria perfectă, din punct de vedere matematic, trebuie să atragă după sine, ca o urmare inevitabilă, mișcarea în linie curbă. Nu este o minune faptul de care ne mirăm aici, ci cel pe care am fost gata să-l considerăm drept natural.

Neputința omului de a se menține pe un drum în linie dreaptă nu constituie pentru el o piedică importantă: busola, drumurile, hărţile îl salvează, în majoritatea cazurilor, de consecinţele acestui neajuns.

Altfel stau lucrurile la animale, mai ales la cele care locuiesc în pustiuri, stepe sau în întinderile nemărginite ale mării: pentru ele lipsa de simetrie a corpului, care le obligă să descrie cercuri în loc de linii drepte, reprezintă un important factor vital. El parcă îi ţintuieşte de locul lor de naştere, lipsindu-i de posibilitatea de a se îndepărta de el la o distanţă mai însemnată. Leul care şi-a luat îndrăzneala de a pleca mai departe în pustiu, în mod inevitabil, se va întoarce înapoi. Pescăruşii, care-şi părăsesc stîncile natale pentru zborul deasupra mării nu pot să nu se întoarcă la cuib (însă cu atît mai enigmatice sînt migrările pe distanţe lungi ale păsărilor ce traversează în linie dreaptă continentele şi oceanele).

MĂSURĂTORI EFECTUATE CU MÎINILE GOALE

Băiatul lui Maine Red a reuşit să rezolve cu succes problema sa geometrică numai pentru că, cu puţin timp înaintea călătoriei, şi-a măsurat înălţimea şi a memorat precis rezultatele măsurătorii. Ar fi bine ca fiecare dintre noi să-şi facă rost de un astfel de „metru viu", pentru ca, în caz de nevoie, să-l folosească la măsurători. De asemenea, este util să ţinem minte că, la majoritatea oamenilor, distanţa dintre extremităţile braţelor îndepărtate este egală cu înălţimea (fig. 109), regulă observată de genialul pictor şi savant Leonardo da Vinci: ea ne permite să ne folosim de „metrii noştrii vii" într-un mod mai comod decît a făcut-o băiatul din romanul lui Maine Red. În medie, înălţimea unui om adult (de neam slav) este aproximativ

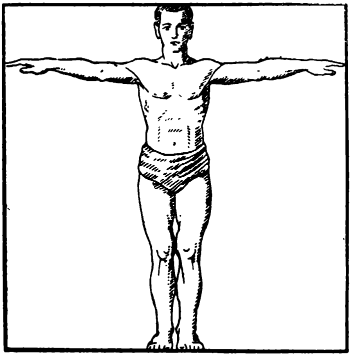


Fig. 109. Regula lui Leonardo da Vinci.

de 1,7 m, sau 170 cm; aceasta este ușor de ținut minte. Însă nu trebuie să ne bazăm pe mărimea medie: fiecare trebuie să-și măsoare înălțimea și deschiderea brațelor sale.

Pentru măsurarea, fără etalon, a unor distanțe mici, tre-

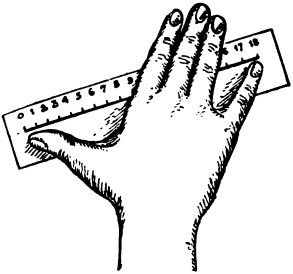


Fig. 110. Măsurarea distanței dintre vîrfurile degetelor.

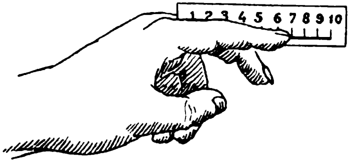


Fig. 111. Măsurarea lungimii degetului arătător.

buie să memorăm lungimea palmei noastre, adică distanța dintre vîrfurile degetului mare și a celui mic îndepărtate (fig. 110). La un bărbat adult ea reprezintă aproximativ 18 cm, adică cam 1/4 dintr-un arșin (de unde și denumirea de „cetvert“, adică „sfert“), însă la oamenii tineri ea este mai mică și se mărește încet pe măsură ce înaintează în vîrstă (pînă la 24 de ani).

Apoi, în vederea aceluiași scop, este util să măsurăm și să ținem minte lungimea degetului nostru arătător, măsurînd-o în două feluri: de la baza degetului mijlociu (fig. 111) și de la baza degetului mare. De asemenea, trebuie să cunoaștem și distanța cea mai mare dintre vîrfurile degetelor arătător și mijlociu; la un om adult ea este egală cam cu 10 cm (fig. 112). Trebuie, în sfîrșit, să cunoaștem și lățimea degetelor noastre.

Lățimea celor trei degete de la mijloc, strîns alipite, este aproximativ de 5 cm.

Cunoscînd toate aceste date, vom putea efectua, într-un mod destul de satisfăcător, diferite măsurători pur și simplu cu mîinile goale, chiar și pe întuneric. În figura 113 este reprezentat un exemplu de acest fel: aici se măsoară

Fig. 112. Măsurarea distanței dintre vîrfurile a două degete.

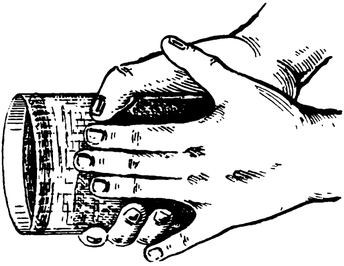


Fig. 113. Măsurarea circumferinței paharului cu „mîinile goale".

circumferința unui pahar cu ajutorul degetelor. Bazîndu-ne pe valorile medii, putem spune că lungimea circumferinței paharului este egală cu $18+5$, adică 23 cm.

UN UNGHI DREPT ÎN ÎNTUNERIC

Problemă

Întorcîndu-ne din nou la tînărul matematician al lui Maine Red se pune următoarea întrebare: cum ar fi trebuit să procedeze el pentru a obține, într-un mod sigur, un unghi drept? „Am sprijinit de el (de bețișorul care ieșea în afară) vergeaua mai lungă, astfel încît să formeze un unghi drept" — citim noi în roman. Făcînd aceasta pe întuneric și bazîndu-ne numai pe percepțiile mușchilor noștri, putem să greșim destul de mult. Totuși băiatul, în situația lui, avea la îndemînă un mijloc de a construi un unghi drept cu ajutorul unui procedeu mult mai sigur. Care anume?

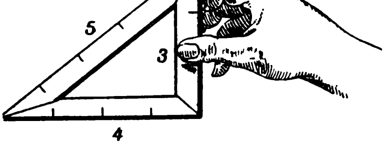


Fig. 114. Cel mai simplu triunghi dreptunghic, ale cărui laturi sînt numere întregi.

Rezolvare

Trebuie să folosim teorema lui Pitagora și să construim din șipci un triunghi ale cărui laturi să aibă o asemenea lungime încît triunghiul să fie dreptunghi. Cel mai simplu ar fi să luăm pentru aceasta șipci care să aibă lungimea de 3, 4 și 5 ori mai mare decît a unor segmente etalon, alese arbitrar (fig. 114).

Acesta este un procedeu egiptean străvechi, care a fost folosit în țara piramidelor cu cîteva mii de ani în urmă. Totuși, încă și în zilele noastre, în cursul lucrărilor de construcție, se recurge adesea la un procedeu asemănător.

Capitolul IX

CUNOŞTINŢE VECHI ŞI NOI CU PRIVIRE LA CERC

GEOMETRIA PRACTICĂ A EGIPTENILOR ŞI ROMANILOR

În prezent, orice şcolar calculează lungimea unei circumferinţe după diametrul ei, într-un mod mai exact decît cel mai înţelept preot din străvechea ţară a piramidelor sau cel mai iscusit arhitect al măreţei Rome. Vechii egipteni considerau că circumferinţa este mai lungă decît diametrul de 3,16 ori, iar romanii o considerau de 3,12 ori mai mare, pe cînd raportul exact este următorul: 3,14159... Matematicienii egipteni şi romani au stabilit raportul dintre lungimea circumferinţei şi diametru nu printr-un calcul geometric strict, ca matematicienii de mai tîrziu, ci l-au aflat pur şi simplu din experienţă. De unde rezultau însă la ei astfel de greşeli? Ei nu puteau oare să înconjure un obiect rotund oarecare cu un fir de aţă şi apoi, îndreptînd firul, să-l măsoare?

Fără îndoială că procedau astfel; însă nu trebuie să credem că un astfel de procedeu dă negreşit un rezultat exact. Imaginaţi-vă, de exemplu, un vas cu fundul rotund care are un diametru de 100 mm. Lungimea circumferinţei fundului trebuie să fie egală cu 314 mm. Totuşi, în practică, măsurînd cu un fir de aţă, este puţin probabil că vom obţine această lungime: este uşor să greşeşti cu 1 mm şi atunci π va fi egal cu 3,13 sau cu 3,15. Dacă vom avea în vedere că nici diametrul vasului nu-l putem măsura absolut exact, că şi aici o eroare de 1 mm este foarte probabilă, atunci ne vom convinge că pentru π se obţin limite destul de largi, adică între

$$\frac{313}{101} \text{ şi } \frac{315}{99}$$

sau în fracţii zecimale, între:

$$3,09 \text{ şi } 3,18.$$

După cum vedem, calculîndu-l pe π prin metoda arătată, putem obţine un rezultat care nu coincide cu 3,14: o dată obținem 3,1, altă dată 3,12, a treia oară 3,17 etc. Întîmplător, se poate să fie printre ele și 3,14, însă în ochii celui care calculează acest număr nu va avea mai multă importanță decît celelalte.

Un astfel de procedeu experimental nu poate să dea o valoare pentru π care să poată fi acceptată. Astfel devine clar de ce lumea antică nu cunoștea raportul exact dintre lungimea circumferinței și diametru. Și a fost nevoie de geniul lui Arhimede pentru a afla valoarea lui π egală cu $3\frac{1}{7}$, și aceasta fără măsurători, numai prin raționamente.

AȘA E UȘOR A SCRIE RENUMITUL ȘI UTILUL NUMĂR[1]

În *Algebra* matematicianului arab din vechime Mahomed-ben-Musa, cu privire la calcularea lungimii unei circumferințe citim următoarele rînduri:

„Cel mai bun mijloc este de a înmulți diametrul cu $3\frac{1}{7}$. Acesta este procedeul cel mai rapid și cel mai ușor. Numai Dumnezeu cunoaște unul mai bun".

În prezent știm că și valoarea găsită de Arhimede de $3\frac{1}{7}$ nu exprimă pe deplin exact raportul dintre lungimea circumferinței și diametru. S-a dovedit în mod teoretic că acest raport nu poate fi în general, exprimat printr-o fracție oarecare exactă. Noi îl putem scrie doar cu o aproximație mai mare sau mai mică, care întrece cu mult precizia necesară pentru cele mai stricte cerințe din viața practică. Un matematician din secolul al XVI-lea, Ludolf, din Leyda a avut răbdarea să-l calculeze pe π cu 35 de zecimale și a lăsat prin testament ca acest număr să fie gravat pe monumentul său funerar[2].

Iată acest număr:
3,14159265358979323846264338327950288...

În anul 1873, un oarecare Shenks, a publicat o astfel de valoare a lui π în care după virgulă urmau 707 zecimale!

---

[1] Textul titlului prezentului paragraf permite memorarea în limba romînă a primelor opt zecimale ale lui π — *N.R.*

[2] Pe atunci această notație „π" nu se folosea încă: ea a fost introdusă doar la mijlocul secolului al XVIII-lea, de către renumitul matematician Leonard P. Euler, membru al Academiei de Științe din Petersburg (azi Leningrad).

Astfel de numere lungi care exprimă în mod aproximativ valoarea lui π, nu au o importanță nici practică, nici teoretică. Numai din lipsă de ocupație și în goana după „recorduri" umflate a putut să apară în timpurile noastre dorința de a-l întrece pe Shenks; între anii 1946 și 1947, Fergusson (Universitatea din Manchester) și, independent de el, Ranch (din Washington) au calculat 808 zecimale pentru valoarea lui π și s-au simțit satisfăcuți că în calculele lui Shenks au descoperit o eroare, începînd cu cifra a 528-a.

Dacă am fi dorit, de exemplu, să calculăm lungimea ecuatorului terestru cu o exactitate de pînă la 1 cm, presupunînd că se cunoaște lungimea exactă a diametrului său, atunci pentru aceasta ne-ar fi fost pe deplin suficient să luăm numai nouă cifre după zecimale din valoarea lui π. Luînd de două ori mai multe cifre (18), am fi putut calcula lungimea unei circumferințe, care să aibă drept rază distanța de la Pămînt la Soare, cu o eroare ce nu ar fi depășit 0,0001 mm (de 100 de ori mai mică decît grosimea unui fir de păr!).

Matematicianul Grave a demonstrat într-un mod extrem de clar absoluta inutilitate chiar și a primei sute de cifre zecimale din valoarea lui π. El a calculat că, dacă ne-am imagina o sferă, a cărei rază să fie egală cu distanța de la Pămînt pînă la steaua Sirius, adică cu un număr de kilometri egal cu 132 urmat de zece zerouri: $132 \cdot 10^{10}$, am umple această sferă cu bacterii, presupunînd că în fiecare milimetru cub al sferei ar exista cîte un bilion (10^{10}) de bacterii, apoi toate aceste bacterii le-am așeza într-o linie dreaptă în așa fel ca distanța dintre două bacterii învecinate să fie egală din nou cu distanța de la Pămînt la steaua Sirius, atunci acceptînd acest segment fantastic drept diametru al unui cerc, am putea calcula lungimea cercului gigantic astfel obținut cu o precizie microscopică, adică de pînă la $\frac{1}{1\,000\,000}$ mm, folosind 100 de zecimale după virgulă din valoarea lui π. Astronomul francez Arago observă, în mod just, că „în privința exactității nu am fi cîștigat nimic, dacă între lungimea cercului și diametru ar fi existat un raport care să fie exprimat pe deplin exact printr-un număr".

Pentru calculele obișnuite cu π este pe deplin suficient să ținem minte primele două zecimale (3,14), iar pentru calcule mai exacte vom ține minte patru zecimale (3,1416: ultima cifră o luăm 6 în loc de 5, pentru că mai departe urmează o cifră mai mare decît 5).

Mici poezii sau fraze strălucitoare rămîn mai mult timp în memorie decît numere, din această cauză pentru memorarea unei oarecare valori numerice a lui π se inventează poezii speciale sau anumite fraze. În operele de acest gen de „poezie matematică", cuvintele sînt alese în așa fel încît numărul de litere din fiecare cuvînt să coincidă succesiv cu cifra corespunzătoare a valorii lui π.

Se cunoaște o poezie în limba engleză care are 13 cuvinte, deci care dă 12 zecimale în valoarea lui π; în limba germană se cunoaște o poezie formată din 24 de cuvinte, iar în limba franceză una formată din 30 de cuvinte[1] (există o poezie și de 126 de cuvinte!).

Ele sînt interesante, dar prea lungi și greoaie. Printre elevii lui E.I. Terskov, un profesor de matematică de la o școală medie din Moscova, se bucură de popularitate următoarea strofă, născocită de el:

„Это	я	знаю	и	помню	прекрасно"[2]
3	1	4	1	5	9

Dar una din elevele lui — Esea Cerikover — cu inventivitatea proprie școlarilor, a compus o continuare iscusită și puțin cam ironică:

„Пи	многие	знаки	мне	лишни,	напрасны"[3]
...2	6	5	3	5	8

În total rezultă următorul distih format din 12 cuvinte:

„Это я знаю и помню прекрасно,
Пи многие знаки мне лишни, напрасны."

---

[1] Iată aceste poezii:
a) în limba engleză:
See I have a rhyme assisting
My feeble brain, its tasks ofttimes resisting.
b) în limba germană:
Wie o dies π
Macht ernstlich, so vielen viele Müh'!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein'.
c) în limba franceză:
Que j'aime à faire apprendre un
nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, sublime ingénieur,
Qui de ton jugement peut sonder la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

[2] Acest lucru eu îl cunosc și-l țin minte admirabil,

[3] Pentru „pi" multe zecimale îmi sînt de prisos.

Autorul acestei cărţi nu are curajul să născocească poezii, însă la rîndul său propune următoarea frază simplă şi pe deplin suficientă:

„Ето я знаю о кругах?” — întrebare care conţine şi un răspuns ascuns: 3,1416.

GREŞEALA LUI JACK LONDON

Următorul pasaj din romanul lui Jack London *Doamna mică din casa mare* oferă material pentru calcule geometrice: „În mijlocul cîmpului se înalţă o prăjină de oţel înfiptă adînc în pămînt. Din vîrful prăjinii spre marginea cîmpului era întins un cablu fixat de un tractor. Mecanicii au apăsat pe manetă şi motorul a început să lucreze.

Maşina a pornit singură înainte, descriind un cerc în jurul prăjinii, care-i servea drept centru.

— Pentru a perfecţiona definitiv maşina, — a spus Graham, — dv. vă rămîne să transformaţi cercul pe care îl descrie într-un pătrat.

— Da, însă pe un cîmp în formă de pătrat se va pierde cu acest sistem foarte mult pămînt.

Graham a efectuat unele calcule, apoi a observat:

— Se pierd aproximativ 3 acri la fiecare 10.

— Nu mai puţin“.

Propunem cititorilor noştri să verifice acest calcul.

Rezolvare

Calculul este inexact: se pierde mai puţin decît 0,3 din suprafaţa de pămînt. Să presupunem că latura pătratului este a. Suprafaţa unui astfel de pătrat va fi a^2. Diametrul cercului înscris va fi, de asemenea, egal cu a, iar suprafaţa lui cu $\frac{\pi a^2}{4}$. Partea care se pierde din terenul în formă de pătrat constituie:

$$a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) a^2 = 0,22\, a^2.$$

Observăm că partea care rămîne neprelucrată din cîmpul în formă de pătrat constituie aproximativ 22% și nu 30%, cum presupuneau eroii romancierului american.

ARUNCAREA ACULUI

Cel mai original și neașteptat procedeu pentru calcularea aproximativă a valorii lui π constă în următoarele: facem rost de un ac de cusut scurt (circa 2 cm), mai bine cu vîrful rupt, pentru ca acul să fie de aceeași grosime, și trasăm pe o foaie de hîrtie un șir de linii subțiri paralele, despărțite una de alta printr-un interval de două ori mai mare decît lungimea acului. Apoi aruncăm acul de la o oarecare înălțime pe hîrtie și observăm dacă a întretăiat sau nu una dintre linii (fig. 115, stînga). Pentru ca acul să nu sară, punem sub foaia de hîrtie o sugativă sau o bucată de stofă. Repetăm aruncarea acului de mai multe ori de exemplu de 100, sau, și mai bine, de 1000 de ori, însemnînd de fiecare dată dacă a avut loc întretăierea[1]. Dacă apoi împărțim numărul total de căderi ale acului la numărul de cazuri în care am observat întretăierea, atunci, ca rezultat, trebuie să obținem valoarea lui π, desigur mai mult sau mai puțin aproximativă.

Vom explica acum de ce se întîmplă astfel. Să presupunem că cel mai probabil număr de întretăieri ale acului este egal cu K, iar lungimea acului nostru este de 20 mm. În caz de întretăiere, punctul de întîlnire trebuie, desigur, să fie situat pe unul dintre acești milimetri, și nici unul dintre ei și nici o parte din ac nu au, în această privință, nici un fel de avantaje față de celelalte. Din această cauză, numărul cel mai probabil de întretăieri ale fiecărui milimetru, luat în parte, va fi egal cu $\frac{K}{20}$. Pentru o porțiune a acului cu o lungime de 3 mm el va fi egal cu $\frac{3K}{20}$, pentru o porțiune de 11 mm acest număr va fi de $\frac{11K}{20}$ etc. Cu alte cuvinte, numărul cel mai probabil de întretăieri este direct proporțional cu lungimea acului.

---

[1] Trebuie să considerăm ca întretăiere și acel caz cînd acul atinge numai cu vîrful linia trasată pe hîrtie.

Această proporție se menține și în cazul cînd acul este îndoit. Să presupunem că acum este îndoit în forma reprezentată în desenul II fig. 115, dreapta, unde porțiunea $AB = 11$ mm, $BC = 9$ mm. Pentru porțiunea AB numărul cel mai probabil de întretăieri va fi egal cu $\frac{11K}{20}$, pentru BC el este egal cu $\frac{9K}{20}$, iar pentru întreaga lungime a acului va fi $\frac{11K}{20} + \frac{9K}{20}$, adică va fi egal, ca și în trecut cu K. Putem îndoi acul și într-un mod mai complicat ca în desenul III fig. 115 și numărul de întretăieri nu se va modifica din această cauză. (Observați că atunci cînd avem un ac îndoit, sînt posibile întretăieri ale liniei de către două sau mai multe părți ale acului dintr-o dată; o astfel de întretăiere trebuie s-o considerăm, desigur, egală cu 2, cu 3 etc., pentru că prima a fost înregistrată la calcularea întretăierilor pentru o parte a acului, cea de-a doua pentru alta etc.).

Imaginați-vă acum că aruncăm un ac îndoit în formă de cerc, cu un diametru egal cu distanța dintre linii (această distanță este de două ori mai mare decît acul). Un astfel de inel trebuie să întretaie, de fiecare dată, de două ori, o linie oarecare (sau să atingă cîte o singură dată două linii, însă în orice caz, rezultă două intersecții). Dacă numărul

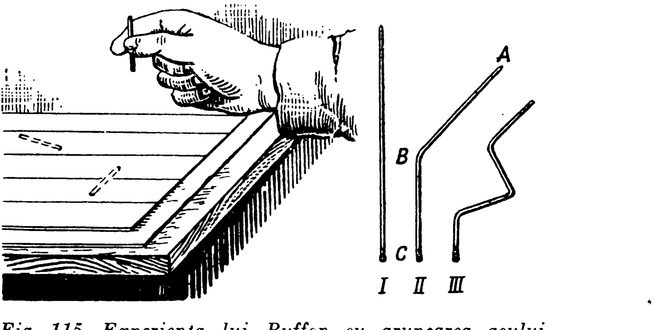


Fig. 115. Experiența lui Buffon cu aruncarea acului.

total de aruncări este însemnat cu N, atunci numărul de întretăieri va fi egal cu $2N$. Acul nostru drept este mai mic decît acest inel în ce privește lungimea, de atîtea ori, de cîte ori jumătate din diametru este mai mică decît lungimea cercului, adică de 2π ori. Am stabilit însă că numărul cel mai probabil de întretăieri este proporțional cu lungimea acului. Din această cauză, numărul cel mai probabil (K) de întretăieri ale acului nostru trebuie să fie mai mic decît $2N$ de 2π ori, adică va fi egal cu $\frac{N}{\pi}$. De unde:

$$\pi = \frac{\text{numărul de aruncări}}{\text{numărul de întretăieri}}$$

Cu cît au fost observate mai multe căderi, cu atît mai exact se obținea valoarea lui π. Un astronom elvețian, R. Wolf, a observat, la mijlocul secolului trecut, 5 000 de căderi ale acului pe o hîrtie liniată și a obținut pentru π următorul număr: 3,159... — expresie care totuși este mai puțin exactă decît valoarea obținută de Arhimede.

După cum observați, raportul dintre lungimea cercului și diametrul său este găsit aici pe cale experimentală și — ceea ce este mai interesant — nu se desenează nici cercul nici diametrul, adică nu se recurge la ajutorul compasului. Un om care nu are nici un fel de idee despre geometrie și chiar despre cerc poate tot așa de bine să calculeze, cu ajutorul acestui procedeu, valoarea lui π, dacă efectuează, cu răbdare, un mare număr de aruncări ale acului.

ÎNDREPTAREA CERCULUI

Problemă

În vederea multor scopuri practice este suficient să luăm pentru π valoarea $3\frac{1}{7}$ și să îndreptăm cercul, însemnînd diametrul lui pe o oarecare linie dreaptă de $3\frac{1}{7}$ ori (împărțirea unui segment în șapte părți egale poate fi efectuată, după cum se știe, absolut exact). Există și alte procedee aproximative de îndreptare a cercului și care sînt aplicate în practică de către tîmplari, tinichigii etc. Nu le vom examina aici și vom arăta doar un singur procedeu, destul de simplu, de îndreptare a cercului, care ne dă un rezultat extrem de exact.

Dacă trebuie să îndreptăm cercul O de rază r (fig. 116), vom duce diametrul AB, iar în punctul B o dreaptă perpendiculară pe el, CD. Din centrul O, sub un unghi de 30°, vom duce la AB o dreaptă OC. Apoi pe linia dreaptă CD, din punctul C, vom duce o dreaptă egală cu trei raze ale cercului respectiv, care unește punctul obținut D cu A: lungimea segmentului AD va fi egală cu jumătate din lungimea cercului. Dacă vom lungi de două ori segmentul AB, atunci vom obține, cu aproximație, cercul O îndreptat. Eroarea va fi mai mică de $0{,}0002r$.

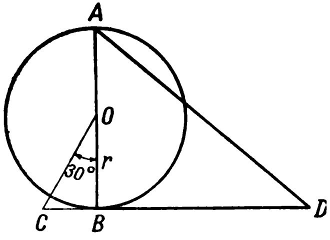


Fig. 116. Metoda geometrică aproximativă pentru îndreptarea cercului.

Pe ce se bazează această construcție?

Rezolvare

După teorema lui Pitagora:

$$CB^2 + OB^2 = OC^2.$$

Notînd raza OB cu r și avînd în vedere că $CB = \frac{OC}{2}$ (ca o catetă opusă unghiului de 30°), vom obține:

$$CB^2 + r^2 = 4CB^2,$$

de unde

$$CB = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Mai departe, în triunghiul ABD vom avea:

$$BD = CD - CB = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3},$$

$$AD = \sqrt{BD^2 + 4r^2} = \sqrt{\left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4r^2} =$$

$$= \sqrt{9r^2 - 2r^2\sqrt{3} + \frac{r^2}{3} + 4r^2} = 3{,}14153\, r.$$

Comparînd acest rezultat cu cel care se obține dacă vom lua cu cel mai mare grad de exactitate ($\pi = 3,141593$), observăm că diferența este de numai 0,00006 r. Dacă am îndrepta cu ajutorul acestui procedeu un cerc cu raza egală cu 1 m, eroarea care ar rezulta ar fi pentru jumătate din cerc doar de 0,00006 m, iar pentru întregul cerc, de 0,00012 m sau 0,12 mm.

CVADRATURA CERCULUI

Nu se poate ca cititorii să nu fi auzit niciodată despre „cvadratura cercului", despre acea renumită problemă de geometrie, cu rezolvarea căreia s-au ocupat matematicienii încă cu 20 secole în urmă. Sînt chiar convins că printre cititori se vor găsi și unii care au încercat și singuri să rezolve această problemă. Totuși, și mai mulți vor fi cei nedumeriți, care se vor întreba în ce constă anume greutatea acestei probleme nerezolvabile clasice. Sînt mulți acei care, obișnuindu-se să repete ceea ce au auzit de la alții, spun că problema cvadraturii cercului este de nerezolvat și nu-și dau seama, în mod limpede, nici de esența problemei, nici de greutățile legate de rezolvarea ei.

În matematică există multe probleme mai interesante, din punct de vedere teoretic și practic, decît cea a cvadraturii cercului. Însă nici una dintre ele nu a dobîndit o astfel de popularitate ca această problemă, care de mult a devenit proverbială. În decursul a două milenii s-au trudit pentru rezolvarea ei matematicieni profesioniști remarcabili și nenumărați amatori.

„A găsi cvadratura cercului" înseamnă a desena un pătrat, a cărui suprafață să fie egală exact cu suprafața unui cerc dat. În practică această problemă se ivește foarte des, și din acest punct de vedere ea poate fi rezolvată cu orice grad de exactitate. Renumita problemă din vechime cere, însă, ca desenul să fie executat absolut exact cu ajutorul doar a două feluri de operații de desen: 1) ducerea circumferinței, cu raza dată, în jurul unui punct; 2) ducerea unei linii drepte prin două puncte date.

Vorbind mai pe scurt, trebuie să efectuăm desenul în așa fel, încît să folosim doar două instrumente de desen: compasul și rigla.

În cercurile largi ale celor care nu se ocupă de matematică, este răspîndită convingerea că toată dificultatea este condiționată de faptul că raportul dintre lungimea circumferinței și diametrul ei (renumitul număr π) nu poate fi exprimat printr-un număr finit de cifre. Acest lucru este just doar în măsura în care caracterul de nerezolvat al problemei depinde de natura specială a numărului π. Într-adevăr, transformarea dreptunghiului într-un pătrat cu o suprafață egală este o problemă ușor de rezolvat în mod exact. Însă problema cvadraturii cercului se reduce la construirea cu ajutorul compasului și al riglei a unui dreptunghi egal cu cercul dat. Din formula suprafeței cercului, $S = \pi r^2$, sau (ceea ce este același lucru) $S = \pi r \times r$, este clar că suprafața cercului este egală cu suprafața unui astfel de dreptunghi, care are o latură egală cu r, iar cealaltă este de π ori mai mare. Prin urmare, principalul constă în a desena un segment care să fie de π ori mai lung decît cel dat. După cum se știe, π nu este egal exact nici cu $3\frac{1}{7}$, nici cu 3,14, nici chiar cu 3,14159. Seria de cifre care exprimă acest număr este infinită.

Particularitatea arătată a numărului π, caracterul său irațional[1], a fost stabilită încă în secolul al XVIII-lea de către matematicienii Lambert și Legendre, care se bazau în mod direct în această problemă pe aprofundatele studii ale renumitului matematician Euler (1707—1783). Și totuși, cunoașterea caracterului irațional al lui π nu a oprit eforturile „cvadraturiștilor" cunoscători ai matematicii. Ei înțelegeau că iraționalitatea lui π nu face, prin ea însăși, ca rezolvarea acestei probleme să fie complet lipsită de speranță. Există numere iraționale pe care geometria le poate „construi" absolut exact. Să presupunem, de exemplu, că trebuie să desenăm un segment care să fie mai lung decît segmentul dat de $\sqrt{2}$ ori. Numărul $\sqrt{2}$, ca și π, este un număr irațional. Cu toate acestea nimic nu poate fi mai ușor decît să desenăm segmentul necunoscut: el este egal cu diagonala pătratului construit pe segmentul dat.

Orice școlar va duce la bun sfîrșit și construirea unui segment $a\sqrt{3}$ (latura unui triunghi echilateral înscris). Nu pre-

[1] Un număr se numește irațional, dacă nu poate fi exprimat exact printr-o fracție de forma $\frac{p}{q}$, unde p și q sînt numere întregi. Numerele iraționale se exprimă prin fracții zecimale infinite neperiodice.

zintă prea multă dificultate nici construcţia unei astfel de expresii iraţionale, care este extrem de complicată ca formă

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}},$$

pentru că ea se reduce la construirea unui poligon regulat cu 64 de unghiuri.

După cum vedem, un număr iraţional care intră într-o expresie algebrică dată nu face totdeauna ca aceastăexpresie să fie imposibil de construit cu ajutorul compasului şi al riglei. Faptul că cvadratura cercului este de nerezolvat nu constă numai în faptul că numărul π este un număr iraţional, ci într-o altă particularitate a acestui număr. Anume, numărul π nu este algebric, adică el nu poate fi obţinut în urma rezolvării unei ecuaţii algebrice oarecare cu coeficienţi raţionali. Astfel de numere se numesc transcendente.

Un matematician francez din secolul al XVI-lea Viète a demonstrat că:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\cdots}$$

Această expresie pentru π ar fi rezolvat problema cvadraturii cercului, dacă numărul operaţiilor conţinute în ea ar fi finit (atunci expresia de mai sus ar putea fi construită geometric). Deoarece numărul extragerilor de rădăcini pătrate din această expresie este infinit[1], formula lui Viète nu ajută la rezolvare.

Aşadar, caracterul de nerezolvat al problemei cvadraturii cercului este condiţionat de caracterul transcendent al numărului π, adică de faptul că el nu poate să rezulte în urma rezolvării unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi raţionali. Această particularitate a numărului π a fost demonstrată în anul 1882 de către matematicianul german Liendemann. În fond, acest savant trebuie considerat drept unicul om care a rezolvat cvadratura cercului, cu toate că soluţia lui este negativă: el afirmă că această construcţie este de neefectuat din punct de vedere geometric. În felul acesta, în anul 1882 s-au încheiat strădaniile de multe secole ale matematicienilor în această

[1] Punctele de la numitor înseamnă că numărul termenilor (rădăcini pătrate) de la numitor este infinit (legea de alcătuire a termenilor este determinată de primii trei, care au fost deja notaţi).

direcţie, însă, din păcate, nu contenesc încercările lipsite de succes ale numeroşilor amatori, care nu cunosc suficient de bine istoria acestei probleme.

Astfel stau lucrurile în ce priveşte problema cvadraturii cercului din punct de vedere teoretic. În ceea ce priveşte practica, ea nu are nevoie de loc de rezolvarea exactă a acestei probleme renumite. Convingerea pe care o au multe persoane, precum că rezolvarea pozitivă a problemei referitoare la cvadratura cercului ar avea o covîrşitoare importanţă pentru viaţa practică, este o gravă eroare. Pentru cerinţele pe care le întîlnim în viaţa de toate zilele este pe deplin suficient să dispunem de procedee aproximative, satisfăcătoare pentru rezolvarea acestei probleme.

Din punct de vedere practic, căutările pentru aflarea cvadraturii cercului au devenit inutile de atunci de cînd au fost găsite primele 7—8 cifre exacte ale numărului π. Pentru necesităţile vieţii practice este pe deplin suficient să ştim că $\pi = 3{,}1415926$. Nici o măsurătoare a lungimii nu poate da un rezultat care să fie exprimat prin mai mult decît şapte cifre semnificative. Din această cauză, este inutil să luăm pentru π mai mult de opt cifre. Exactitatea calculelor nu se îmbunătăţeşte cu aceasta[1]. Dacă raza este exprimată prin şapte cifre semnificative lungimea circumferinţei nu va avea mai mult de şapte cifre exacte, chiar dacă luăm pentru π o sută de cifre. Faptul că matematicienii din vechime au făcut risipă de forţe pentru obţinerea unor expresii pe cît posibil mai „lungi“ pentru π nu are nici un fel de sens practic. Dar şi importanţa ştiinţifică a acestor lucrări este infimă. Aceasta este pur şi simplu o chestiune de răbdare. Dacă aveţi plăcere şi destul timp, puteţi găsi chiar şi 1000 de zecimale pentru π, folosind, de exemplu, următoarea serie (sumă cu o infinitate de termeni) găsită de către Leibniz[2]:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Acesta va fi însă un exerciţiu de aritmetică care nu va folosi nimănui şi care nu modifică de loc rezultatul obţinut în rezolvarea renumitei probleme de geometrie.

---

[1] Vezi I. I. Perelman, *Aritmetica distractivă*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1960.

[2] Un astfel de calcul cere multă răbdare, deoarece pentru obţinerea, de exemplu, a valorii lui π cu şase zecimale ar fi fost nevoie să se ia, în seria menţionată, nici mai mult nici mai puţin de 2 000 000 de termeni.

Astronomul francez Arago, pe care l-am citat mai înainte (vezi p. 202), scria cu privire la aceasta următoarele:

„Cei care caută cvadratura cercului continuă să se ocupe de rezolvarea unei probleme a cărei imposibilitate a fost dovedită cu prisosință în prezent şi care, chiar dacă ar putea fi realizată, nu ar prezenta nici un interes practic. Nu trebuie însă să mai intrăm în amănunte cu privire la acest obiect: bolnavii mintali care năzuiesc să descopere cvadratura cercului nu se lasă convinși de nici un fel de argumente".

Arago încheie cu ironie: „Academiile din toate țările, luptînd împotriva celor ce caută să descopere cvadratura, au observat că această boală se intensifică, de obicei, primăvara".

TRIUNGHIUL LUI BING

Să examinăm una din soluțiile aproximative ale problemei privitoare la cvadratura cercului şi care este foarte comodă pentru cerințele din viața practică.

Acest procedeu constă în calculul unghiului α (fig. 117) sub care trebuie să ducem, la diametrul AB, coarda $AC = x$, care reprezintă latura pătratului necunoscut. Pentru a afla mărimea acestui unghi, trebuie să recurgem la trigonometrie:

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r},$$

unde r este raza cercului.

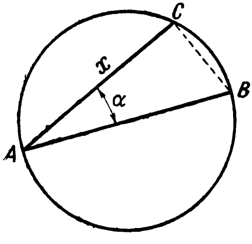


Fig. 117. Metoda inginerului rus Bing (1836).

Prin urmare, latura pătratului necunoscut va fi $x = 2r \cos \alpha$, iar suprafața lui va fi egală cu $4r^2 \cos^2\alpha$. Pe de altă parte, suprafața pătratului este egală cu πr^2, adică cu suprafața cercului respectiv. Deci:

$$4r^2\cos^2\alpha = \pi r^2,$$

de unde

$$\cos^2\alpha = \frac{\pi}{4}, \cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0,886.$$

Cu ajutorul tabelelor vom găsi:

$$\alpha = 27°36'.$$

Așadar, ducînd în cerc o coardă sub un unghi de 27°36′ la diametru, obținem dintr-o dată latura unui pătrat, a cărui suprafață este egală cu suprafața cercului dat. În practică, pentru aceasta se confecționează un echer de desen, care să aibă un unghi ascuțit de 27°36′ (celălalt va avea 62°24′)[1]. Avînd la dispoziție un astfel de echer putem afla deodată, pentru orice cerc dat, latura pătratului a cărui suprafață să fie egală cu suprafața cercului.

Pentru cei care doresc să confecționeze un astfel de echer pentru desen, este utilă următoarea indicație: întrucît tangenta unghiului de 27°36′ este egală cu 0,523 sau $\frac{23}{44}$ între catetele unui astfel de triunghi există raportul 23:44. De aceea, confecționînd un triunghi cu catetele, de exemplu, de 22 cm și 11,5 cm, vom avea obiectul care ne trebuie. Se înțelege de la sine că putem folosi acest echer ca și pe unul obișnuit.

CAPUL SAU PICIOARELE

Se pare că unul dintre eroii lui Jules Verne calcula ce parte a corpului său a parcurs o cale mai lungă în timpul călătoriei sale în jurul Pămîntului — capul sau tălpile picioarelor.

Aceasta este o problemă instructivă de geometrie dacă punem întrebarea într-un anumit mod. Noi o propunem sub forma următoare.

Problemă

Să ne închipuim că am ocolit globul terestru, pe la ecuator. Cu cît a fost mai lung drumul parcurs de vîrful capului nostru decît cel parcurs de vîrful piciorului, în timpul acestei călătorii?

[1] Acest procedeu comod a fost propus în 1836 de inginerul rus Bing; echerul menționat se numește de aceea „echer Bing".

Rezolvare

Picioarele au parcurs un drum egal cu $2\pi R$, unde R este raza globului terestru. Creştetul capului a parcurs în acest timp un drum egal cu 2π (R + 1,7), unde 1,7 m reprezintă înălţimea omului. Diferenţa dintre drumurile parcurse va fi egală cu $2\pi (R + 1{,}7) - 2\pi R = 2\pi \cdot 1{,}7 = 10{,}7$ m. Aşadar, capul a făcut o cale mai lungă cu 10,7 m decît picioarele.

Este interesant că în rezultatul final nu intră valoarea razei globului terestru. Din această cauză, acelaşi rezultat s-ar obţine şi pe Pămînt, şi pe Jupiter, şi pe cea mai mică planetă. În general, diferenţa dintre lungimile a două cercuri concentrice nu depinde de razele lor, ci numai de distanţa dintre ele. Adăugarea unui centimetru la raza orbitei pămînteşti ar fi mărit lungimea ei exact cu atît, cu cît se va lungi la un adaos similar, raza unei monede rotunde de un leu.

Pe acest paradox geometric[1] se bazează următoarea problemă interesantă, ce figurează în multe culegeri de probleme distractive.

Dacă vom înconjura globul terestru la ecuator cu o sîrmă şi apoi vom adăuga la lungimea ei 1 m, atunci va putea oare să treacă un şoarece prin intervalul dintre sîrmă şi Pămînt?

De obicei se răspunde că această distanţă va fi mai mică decît grosimea unui fir de păr: ce contează 1 m în comparaţie cu cei 40 000 000 m ai ecuatorului pămîntesc! În realitate mărimea distanţei va fi egală cu

$$\frac{100}{2\pi}\text{ cm} \approx 16 \text{ cm}$$

Această distanţă va permite nu numai strecurarea unui şoarece, ci chiar şi a unui motan mare.

SÎRMA DE-A LUNGUL ECUATORULUI

Problemă

Acum imaginaţi-vă că globul terestru este strîns înfăşurat la ecuator cu o sîrmă de oţel. Ce se va întîmpla dacă această

[1] Paradox se numeşte un adevăr care pare neverosimil, spre deosebire de sofism, care este o teză eronată, dar cu aparenţa unui adevăr.

sîrmă se va răci cu 1°? Din cauza răcirii, sîrma va trebui să se contracte. Dacă nu s-a rupt în acest timp și nu s-a întins, cît de adînc va pătrunde ea în pămînt?

Rezolvare

S-ar părea că o astfel de scădere neînsemnată de temperatură, doar cu 1°, nu poate să provoace pătrunderea vizibilă a sîrmei în sol. Calculele arată cu totul altceva.

Răcindu-se cu un 1° sîrma de oțel se contractă cu a 100 000-a parte din lungimea sa. Avînd o lungime de 40 000 000 m — lungimea ecuatorului pămîntesc — sîrma va trebui să se contracte, deci să se scurteze, după cum este ușor de calculat, cu 400 m. Însă raza acestui cerc de sîrmă se va micșora nu cu 400 m, ci mult mai puțin. Pentru ca să aflăm cu cît se va micșora raza, trebuie să împărțim 400 m la 6,28, adică la 2π. Vom obține aproximativ 64 m. Așadar, sîrma răcindu-se doar cu 1° ar trebui, în condițiile arătate, să pătrundă în pămînt nu la o adîncime de cîțiva milimetri după cum s-ar părea, ci la mai mult de 60 m!

FAPTE ȘI CALCULE

Problemă

În fața noastră se află opt cercuri egale. Șapte cercuri hașurate sînt fixe, iar cel de-al optulea cerc (cel nehașurat) se rostogolește pe ele fără să alunece. Cîte rotații va efectua el, înconjurînd cercurile fixe o singură dată?

Desigur că putem clarifica aceasta dintr-o dată, într-un mod practic: vom pune pe masă opt monede de aceeași valoare, de exemplu, opt monede cinci bani și, așezîndu-le ca în figură, adică presînd de masă șapte monede, vom rostogoli-o pe cea de-a opta. Pentru stabilirea numărului de rotații vom urmări, de exemplu, poziția cifrei înscrise pe monedă. De fiecare dată cînd cifra va lua poziția inițială, moneda se va roti în jurul centrului său o dată.

Efectuați această experiență nu în imaginație, ci în realitate și veți stabili că în total moneda va face patru rotații.

Acum să încercăm să obţinem acelaşi rezultat cu ajutorul raţionamentelor şi al calculelor.

Să clarificăm, de exemplu, pe ce arc al fiecărui cerc fix se va rostogoli cercul mobil. În acest scop, să ne imaginăm deplasarea cercului mobil de pe „culmea“ A în cea mai apropiată „depresiune“ dintre două cercuri fixe (linia punctată din fig. 118).

Pe desen nu este greu de stabilit că arcul AB, pe care se rostogoleşte cercul, are 60°. Pe circumferinţa fiecăruia dintre cercurile fixe există două asemenea arce; împreună, ele formează un arc de 120° sau 1/3 din circumferinţă.

Prin urmare, cercul care se rostogoleşte face 1/3 de rotaţii, înconjurînd 1/3 din fiecare cerc fix. În total sînt şase cercuri fixe; rezultă că cercul care se rostogoleşte efectuează doar, $1/3 \times 6 = 2$ rotaţii.

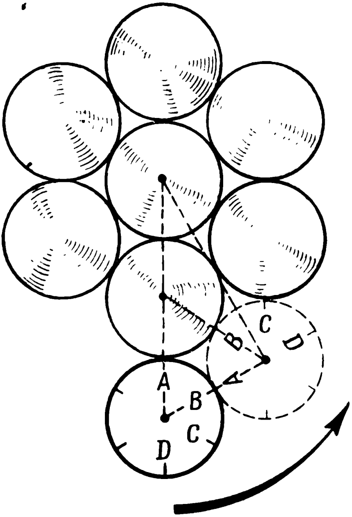


Fig. 118. Cîte rotaţii va efectua cercul nehaşurat înconjurînd cercurile haşurate?

Dar aici e o nepotrivire cu rezultatele experienţei! Însă „faptele sînt încăpăţînate“. Dacă observaţia nu confirmă calculul, înseamnă că în calcule s-a făcut o greşeală. Găsiţi eroarea în raţionamentele de mai sus.

Rezolvare

Într-adevăr atunci cînd cercul se rostogoleşte, fără să alunece, pe un segment de linie dreaptă, cu o lungime egală cu 1/3 din circumferinţa cercului mobil, atunci, într-adevăr el efectuează 1/3 de rotaţie în jurul centrului său. Această afirmaţie devine inexactă, necorespunzînd cu realitatea, dacă cercul se rostogoleşte pe arcul unei linii curbe oarecare. În problema pe care am studiat-o, cercul mobil, parcurgînd arcul cu lungimea egală cu 1/3 din lungimea circumferinței sale, nu efectuează 1/3 din rotație, ci 2/3 și, prin urmare, parcurge șase asemenea arce, adică

$$6\cdot\frac{2}{3} = 4 \text{ rotații.}$$

Ne putem convinge practic de acest lucru.

Linia punctată din figura 118 reprezintă poziția cercului mobil după ce el a parcurs arcul AB ($= 60°$) al cercului fix, adică un arc ce formează 1/6 din lungimea circumferinței. În noua poziție a cercului, locul cel mai înalt de pe circumferința sa nu mai este punctul A, ci punctul C, ceea ce — este ușor de observat — corespunde rotirii punctelor de pe circumferință cu 120°, adică cu 1/3 dintr-o rotație întreagă. „Cărăruiei" de 120° îi vor corespunde 2/3 din rotația totală a cercului mobil.

Așadar, dacă cercul se rostogolește pe o linie curbă (sau frîntă) el efectuează un alt număr de rotații decît în cazul cînd se rostogolește pe un segment rectiliniu, de aceeași lungime.

Să ne oprim încă puțin asupra aspectului geometric al acestui fapt uimitor, cu atît mai mult cu cît explicația care i se dă de obicei nu este totdeauna convingătoare.

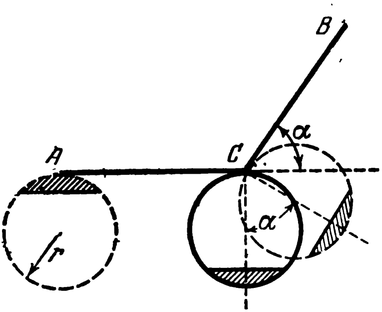


Fig. 119. Cum apare rotația suplimentară în timpul rostogolirii cercului pe o linie frîntă.

Să presupunem că cercul de rază r se rostogolește pe o linie dreaptă. El face o rotație întreagă pe segmentul AB, a cărui lungime este egală cu lungimea circumferinței cercului rostogolit ($2\pi r$). Să frîngem acum segmentul AB la mijlocul său C și să înclinăm segmentul CB astfel, încît să formeze unghiul α cu poziția lui inițială.

Acum cercul, efectuînd o jumătate de rotație, va ajunge pînă în vîrful C și, pentru a ocupa poziția, în care să fie tangent în punctul C la dreapta CB, se va roti, împreună cu centrul său, cu un unghi egal cu unghiul α (aceste unghiuri sînt egale între ele, avînd laturile perpendiculare).

În procesul acestei rotiri cercul se rostogolește fără a se deplasa de-a lungul segmentului. Iată de unde provine partea suplimentară a rotației totale, în comparație cu rostogolirea în linie dreaptă.

Rotirea suplimentară constituie acea parte din rotația totală, pe care o formează și unghiul α față de 2π, adică $\frac{\alpha}{2\pi}$. De-a lungul segmentului CB cercul va efectua de asemenea o jumătate de rotație, astfel că, în total, în mișcarea lui pe linia frîntă ACB el va efectua $1 + \frac{\alpha}{2\pi}$ rotații.

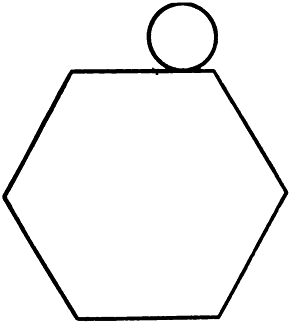


Fig. 120. Cîte rotații în plus va efectua un cerc, dacă el se va rostogoli pe laturile poligonului și nu pe o linie dreaptă cu lungimea egală cu perimetrul poligonului?

Nu ne va fi greu să ne imaginăm cîte rotații trebuie să efectueze un cerc care se rostogolește pe partea exterioară a laturilor unui hexagon regulat. Este evident că numărul acestor rotații este egal cu cel ce s-ar efectua de-a lungul unei linii drepte egale cu perimetrul (adică suma laturilor) acestui hexagon, plus numărul de rotații egal cu suma unghiurilor exterioare ale hexagonului împărțită la 2π. Întrucît suma unghiurilor exterioare ale oricărui poligon convex este egală cu $4d$ sau 2π, aflăm că $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

În felul acesta, înconjurînd un hexagon sau orice alt poligon convex, cercul va efectua întotdeauna cu o rotație mai mult decît la deplasarea sa pe un segment rectiliniu egal cu perimetrul poligonului.

Dublînd la infinit numărul laturilor, un poligon convex regulat se apropie de cerc, prin urmare, toate raționamentele expuse, rămîn valabile și pentru acesta din urmă. Dacă, de exemplu, corespunzător cu problema pusă inițial, un cerc se rostogolește pe un arc de 120° al unui cerc identic, afirmația că cercul mobil efectuează în acest timp nu 1/3, ci 2/3 de rotații, devine absolut clară din punct de vedere geometric.

Cînd un cerc se rostogolește pe o linie oarecare situată în același plan, atunci fiecare punct al cercului se deplasează

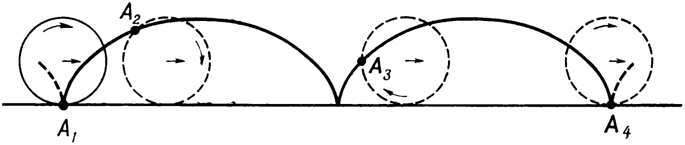


Fig. 121. Cicloida este traiectoria punctului A *de pe circumferința unui disc care se rostogolește fără frecare pe o linie dreaptă.*

pe acea suprafață, adică, după cum se spune, își are traiectoria sa.

Urmăriți traiectoria oricărui punct al unui cerc ce se rostogolește de-a lungul unei linii drepte sau unei circumferințe și veți avea în față diferite linii curbe[1].

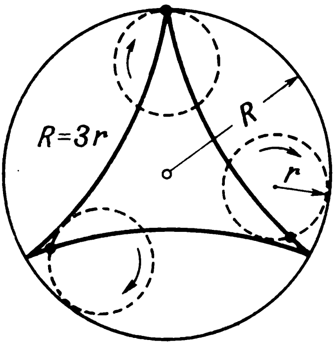


Fig. 122. Hipocicloida reprezintă traiectoria unui punct fix de pe circumferința unui disc de rază r *ce se rostogolește în interiorul unei circumferințe de rază* R = *3*r.

Unele dintre ele sînt reprezentate în figurile 121 și 122.

Se naște întrebarea: poate oare un punct al cercului ce se rostogolește pe „partea interioară“ a circumferinței unui alt cerc, să nu descrie o linie curbă, ci una dreaptă? La prima vedere se pare că acest lucru este imposibil.

Totuși, tocmai o astfel de construcție am văzut-o cu ochii mei. Aceasta era o jucărie: „Fetița pe frînghie“. Noi o putem confecționa cu ușurință. Pe o foaie de carton gros sau de placaj desenăm un cerc cu un diametru de 30 cm, în așa fel

[1] Foarte multe lucruri interesante și utile, precum și exemple privitoare la această problemă, cititorii le vor găsi în interesanta carte a lui G. N. B e r m a n, *Cicloida*, apărută în Editura Tehnică, București, 1959.

încît să mai rămînă margini şi unul dintre diametri îl prelungim în ambele sensuri.

Pe prelungirile diametrului se înfige cîte un ac cu aţă; se întinde orizontal firul de aţă şi ambele lui capete se fi-

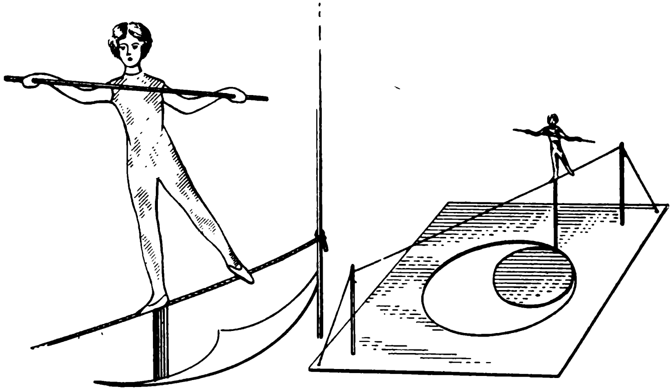


Fig. 123. „Fetiţa pe frînghie". *Fig. 124. Pe cercul ce se rostogoleşte există astfel de puncte care se deplasează rectiliniu.*

xează de carton (placaj). Decupăm cercul desenat şi, în deschizătura astfel formată aşezăm încă un cerc de carton (sau de placaj) cu diametrul de 15 cm. Chiar la marginea cercului mai mic se înfige de asemenea un ac, ca în figura 124, se decupează din hîrtie groasă figura fetiţei-acrobat şi se lipeşte piciorușul ei cu ceară roşie de urechea acului.

Să încercăm acum să rostogolim cercul mai mic de-a lungul pereţilor deschizăturii; urechea acului şi împreună cu ea şi figura fetiţei vor aluneca ba înainte, ba înapoi, de-a lungul firului întins. Acest lucru poate fi explicat numai prin faptul că punctul de pe cercul rostogolit, în care este fixat acul, se deplasează strict de-a lungul diametrului deschizăturii.

Însă de ce în cazul asemănător, reprezentat în figura 122, punctul de pe cercul mobil nu descrie o linie dreaptă, ci una curbă (ea se numeşte hipocicloidă)? Totul constă în raportul dintre diametrul cercului mare şi cel al cercului mic.

Iroblemă

Demonstrați că dacă în interiorul unui cerc mare se rostogolește pe circumferința lui un cerc cu un diametru de două ori mai mic, în timpul acestei mișcări orice punct de pe circumferința cercului mic se va mișca în linie dreaptă, care reprezintă diametrul cercului mare.

Rezolvare

Dacă diametrul cercului O_1 este de două ori mai mic decît diametrul cercului O, în orice moment al mișcării cercului O_1 un punct de pe el se află în centrul cercului O.

Să urmărim cum se deplasează punctul A.

Să presupunem că cercul mic s-a rostogolit pe arcul AC.

Unde se va afla punctul A în noua poziție a cercului O_1?.

Este evident că el trebuie să se afle într-un astfel de punct B de pe circumferința lui, încît arcele AC și BC să fie egale ca lungime (cercul se rostogolește fără frecare). Să presupunem că $OA = R$ și $\sphericalangle AOC = \alpha$, atunci $AC = R\cdot\alpha$; prin urmare, și $BC = R\cdot\alpha$, însă deoarece $O_1C = \frac{R}{2}$ avem $\sphericalangle BO_1C = \frac{R\cdot\alpha}{\frac{R}{2}} = 2\alpha$; atunci $\sphericalangle BOC$ ca unghi înscris va fi egal cu $\frac{2\alpha}{2} = \alpha$, adică punctul B a rămas pe raza OA.

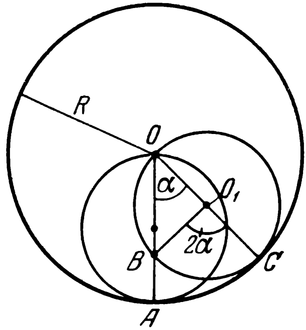


Fig. 125. Explicația geometrică a jucăriei „Fetița pe frînghie".

Jucăria care a fost descrisă aici reprezintă un mecanism simplu pentru transformarea unei mișcări circulare în mișcare rectilinie.

Construirea unor astfel de mecanisme (ele se numesc inversoare) i-a interesat pe tehnicienii mecanici încă de pe vremea mecanicului din Ural I.I. Polzunov, unul dintre inventatorii mașinii cu abur. De obicei, aceste mecanisme care transmit punctului o mișcare rectilinie au un dispozitiv cu articulații.

Matematicianul rus Pafnuti Lvovici Cebîşev (1821—1894) a adus o mare contribuţie la teoria matematică a mecanismelor.

El a fost nu numai matematician, dar şi un remarcabil mecanician. P.L. Cebîşev a construit un model de maşină „plantigradă" (care se păstrează şi în prezent la Academia de Ştiinţe a U.R.S.S.), un mecanism pentru „un fotoliu autopropulsor", un mecanism de calculat — cel mai bun pentru timpurile acelea — numit aritmometru etc.

Pafnuti Lvovici Cebîşev (1821-1894)

DRUMUL PESTE POL

Desigur că vă amintiţi renumitul zbor al lui M. M. Gromov, Erou al Uniunii Sovietice, şi al prietenilor săi din Moscova la San-Jacintho peste Polul Nord, cînd în cursul a 62 de ore şi 17 min, cît a durat zborul, au fost doborîte două recorduri mondiale pentru zboruri fără escală în linie dreaptă (10 200 km) şi în linie frîntă (11 500 km).

Cum credeţi dv., s-a rotit oare împreună cu Pămîntul în jurul axei acestuia avionul eroilor care au trecut peste pol? Se întîmplă adesea să auzim această întrebare, însă nu totdeauna se răspunde în mod just. Orice avion, inclusiv cel care zboară peste pol, trebuie neîndoielnic să ia parte la rotaţia globului terestru. Aceasta se întîmplă din cauză că avionul aflat în zbor este despărţit numai de partea solidă a globului terestru, însă rămîne legat de atmosferă şi este antrenat de ea în mişcarea de rotaţie în jurul axei planetei noastre.

Aşadar, efectuînd zborul peste pol de la Moscova în America, avionul se rotea în acelaşi timp împreună cu Pămîntul în jurul axei acestuia. Şi care este oare traseul efectuat în cursul acestui zbor?

Pentru a răspunde corect la această întrebare trebuie să avem în vedere că atunci cînd spunem „corpul se mişcă" aceasta înseamnă că se modifică poziția corpului respectiv față de poziția altor corpuri. Problema privitoare la traseu şi la mişcare în genere nu va avea nici un sens, dacă nu se va arăta totodată (sau, cel puțin, nu se va subînțelege), cum spun matematicienii, sistemul de referință, sau, pur și simplu, corpul în raport cu care se efectuează mișcarea.

Față de Pămînt, avionul lui M.M. Gromov se mişca aproape de-a lungul meridianului Moscovei. Meridianul pe care se află Moscova, ca şi orice alt meridian, se roteşte împreună cu Pămîntul în jurul axei lui; se rotea și avionul care se menținea pe linia meridianului în timpul zborului. Însă, pentru un observator aflat pe Pămînt, această mișcare nu este reflectată în forma traseului, întrucît ea se efectuează în raport cu un alt corp oarecare și nu cu Pămîntul.

Prin urmare pentru noi, care sîntem strîns legați de Pămînt, traseul acestui zbor eroic peste pol este un arc dintr-un cerc mare, dacă vom considera că avionul se mișca exact pe linia meridianului și se afla, totodată, mereu la aceeași distanță față de centrul Pămîntului.

Acum vom pune următoarea întrebare: se dă mișcarea avionului în raport cu Pămîntul și se știe că avionul și Pămîntul se rotesc împreună în jurul axei terestre, adică avem de-a face cu mișcarea avionului și a Pămîntului în raport cu un al treilea corp; ce traseu va avea zborul pentru un observator legat de acest al treilea corp?

Să simplificăm întrucîtva această problemă neobișnuită. Să ne imaginăm că zona aflată în jurul polului are forma unui disc plat care este așezat pe o suprafață ortogonală la axa globului terestru. Să presupunem că această suprafață imaginară va fi acel „corp", în raport cu care se rotește discul în jurul axei Pămîntului, și să mai presupunem că de-a lungul unuia dintre diametrii acestui disc se deplasează uniform un cărucior: el va reprezenta avionul ce zboară de-a lungul meridianului peste pol.

Ce fel de linie va reprezenta pe planul nostru drumul efectuat de cărucior (sau, vorbind mai precis, de un punct oarecare de pe cărucior, de exemplu de centrul lui de greutate)?

Perioada de timp în care căruciorul poate să străbată drumul de la o extremitate a diametrului la cealaltă depinde de viteza lui.

Vom examina trei cazuri:
1. căruciorul străbate drumul său în 12 ore;
2. parcurge acest drum în 24 de ore;
3. acelaşi drum îl parcurge în 48 de ore.
În toate cazurile, discul efectuează o rotaţie completă în 24 de ore.

Primul caz. Căruciorul parcurge drumul de-a lungul diametrului discului în 12 ore. Discul va efectua în acest timp o jumătate de rotaţie, adică se roteşte cu 180°, şi punctele A și A' își vor schimba între ele locurile. În figura 126 diametrul este împărțit în opt segmente egale și pe fiecare dintre ele căruciorul îl parcurge în 12 : 8 = 1,5 ore. Să urmărim unde se va afla căruciorul peste 1,5 ore de la începerea mişcării. Dacă discul nu s-ar roti, căruciorul, plecînd din punctul A, ar ajunge peste 1,5 ore în punctul b. Însă discul se roteşte şi după 1,5 ore se întoarce cu 180° : 8 = 22,5°. În același timp, punctul b aflat pe disc se mută într-un punct b'. Un observator care s-ar afla pe disc şi s-ar roti împreună cu el n-ar observa rotația lui și ar vedea doar că căruciorul s-a mutat din punctul A în punctul b. Dar un observator care s-ar afla în afara discului și n-ar lua parte la rotația

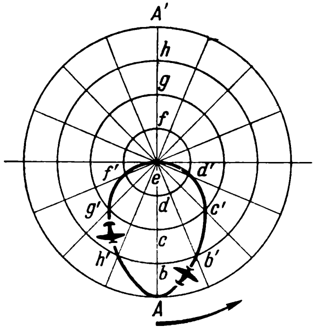


Fig. 126.

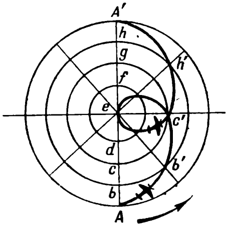


Fig. 127.

Curbele pe care le descrie, pe o suprafață fixă, un punct care ia parte la două mișcări.

lui ar vedea altceva: pentru el căruciorul s-ar deplasa pe un drum în linie curbă din punctul A în punctul b'. Peste încă 1,5 ore, observatorul care s-ar afla în afara discului, ar vedea căruciorul în c'. În cursul următoarelor 1,5 ore, căruciorul s-ar deplasa pentru el pe arcul *c'd'*, iar după încă 1,5 ore, ar ajunge în centrul *e*.

Continuînd să observe mişcarea pe care o efectuează căruciorul, un observator aflat în afara discului ar vedea un lucru cu totul neaşteptat: căruciorul descrie curba *ef' g'h'A*, şi mişcarea lui, oricît ar fi aceasta de ciudat, nu se termină în punctul opus al diametrului, ci în punctul său inițial.

Explicaţia acestui fapt neaşteptat este extrem de simplă: în cele şase ore de călătorie ale căruciorului în cea de-a doua jumătate a diametrului, această rază se rotește împreună cu discul cu 180° și ocupă poziția primei jumătăți a diametrului. Căruciorul se rotește împreună cu discul chiar și în momentul în care el trece deasupra centrului lui. Se înțelege că acest cărucior nu poate să se situeze în mod integral în centrul discului; el coincide cu centrul numai într-un singur punct și în momentul respectiv se rotește în întregime, împreună cu discul, în jurul acestui punct. Același lucru trebuie să se întîmple și cu avionul în momentul cînd zboară deasupra polului. Așadar, călătoria căruciorului pe linia diametrului discului, de la o extremitate la alta, apare în mod diferit diverșilor observatori. Aceluia care se află pe disc și se învîrtește împreună cu el, acest drum îi pare o linie dreaptă. Însă un observator imobil, care nu ia parte la rotația discului, vede mișcarea căruciorului efectuată pe linia curbă, care este reprezentată în figura 126 și amintește conturul unei picături.

Tot o astfel de linie curbă ar fi văzut oricare dintre noi, observînd, să presupunem, din centrul Pămîntului zborul unui avion în raport cu o suprafață imaginară, perpendiculară la axa Pămîntului, punîndu-se totodată condiția fantastică ca Pămîntul să fie transparent, iar noi și suprafața respectivă să nu luăm parte la rotația lui; zborul peste pol al avionului pe care-l observăm ar dura 12 ore.

Avem aici un exemplu interesant de compunere a două mișcări.

În realitate însă, zborul peste pol de la Moscova pînă la un punct diametral opus de pe aceeași paralelă nu ar dura 12 ore și din această cauză să ne oprim acum la analiza a încă unei probleme preliminare de același fel.

Cazul al doilea. Căruciorul parcurge diametrul în 24 de ore. În acest timp discul efectuează o rotaţie completă, şi atunci, pentru un observator nemişcat în raport cu discul, drumul pe care se deplasează căruciorul va avea forma curbei reprezentate în figura 127.

Cazul al treilea. Discul, ca şi mai înainte, efectuează o rotaţie completă în 24 de ore, însă căruciorul se mişcă de la o extremitate la alta a diametrului în 48 de ore.

În acest caz căruciorul parcurge 1/8 din diametru în 48:8 = = 6 ore.

În cursul aceloraşi şase ore discul efectuează 1/4 din rotaţia totală, adică se roteşte cu 90°. Din această cauză, după şase ore de la începerea mişcării căruciorul se va muta pe linia diametrului (fig. 128) în punctul *b*, însă rotaţia discului va muta acest punct în *b'*. După încă şase ore căruciorul va ajunge în punctul *g* etc. În 48 de ore căruciorul parcurge tot diametrul, iar discul efectuează două rotaţii complete. Rezultatul compunerii acestor două mişcări îi apare observatorului imobil sub forma unei curbe complicate, reprezentată în figura 128 printr-o linie groasă.

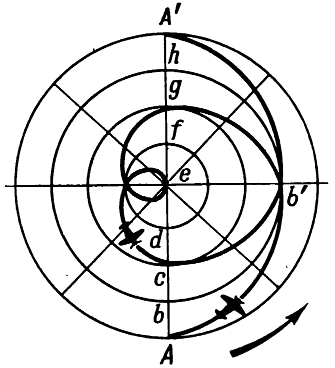


Fig. 128. Încă o curbă rezultată în urma compunerii a două mişcări.

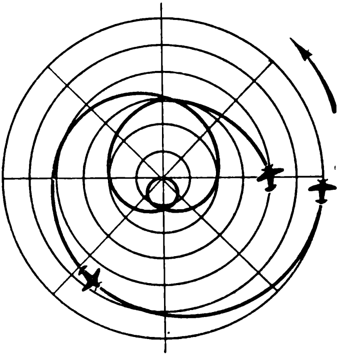


Fig. 129. Calea urmată în zborul Moscova — San Jacintho, aşa cum i-ar fi apărut ea unui observator care nu participă nici la zbor nici la rotaţia Pămîntului.

Cazul pe care l-am examinat ne apropie de condiţiile reale care au existat la zborul peste pol. Pentru zborul de la Moscova la pol, lui M.M. Gromov i-au trebuit aproximativ 24 de ore; din această cauză, un observator aflat în centrul

Pămîntului ar fi văzut această parte a traseului sub forma unei linii aproape identice cu prima jumătate a liniei curbe din figura 128. În ce privește cea de-a doua parte a zborului lui M. M. Gromov, ea a durat aproape o dată și jumătate mai mult; în afară de aceasta, distanța de la pol pînă la San Jacintho este, de asemenea, cam de o dată și jumătate mai mare decît distanța de la Moscova la Polul Nord. Din această cauză, traseul, în cea de-a doua parte a drumului, i-ar fi apărut observatorului nemișcat, ca o linie de aceeași formă ca și linia primei părți a drumului, însă o dată și jumătate mai lungă.

În figura 129 este reprezentată curba rezultată.

Poate că mulți vor fi puși în încurcătură de faptul că punctul inițial și cel final al zborului sînt arătate în această figură atît de aproape unul de altul.

Însă nu trebuie să pierdem din vedere că desenul arată poziția în care se află Moscova și San Jacintho nu simultan ci la un interval de timp de 60 de ore.

Iată deci ce formă aproximativă ar fi avut traseul zborului efectuat de M.M. Gromov peste pol, dacă am fi putut observa zborul, de exemplu, din centrul globului terestru. Oare avem dreptul să numim această buclă complicată „calea *reală*" a zborului peste pol, spre deosebire de cea relativă reprezentată în cărți? Nu, această mișcare este și ea relativă: ea se raportează la un corp care nu ia parte la rotația Pămîntului în jurul axei, exact după cum reprezentarea obișnuită a traseului efectuat în timpul zborului se raportează la suprafața Pămîntului care se rotește.

Dacă am fi putut urmări același zbor de pe Lună sau de pe Soare[1], traseul zborului ne-ar fi apărut sub alte forme.

Luna nu ia parte la rotația pe care o efectuează Pămîntul în cursul a 24 de ore, însă ea se rotește în jurul planetei noastre într-o perioadă de o lună. În cele 62 de ore ale zborului de la Moscova la San Jacintho, Luna a descris în jurul Pămîntului un arc de 30° și acest fapt nu putea să nu influențeze traiectoria zborului, pentru un observator aflat pe suprafața Lunii. Dacă traseul parcurs de avion ar fi examinat în raport cu Soarele, forma acestui traseu ar fi influențată de o a treia mișcare, adică de rotația Pămîntului în jurul Soarelui.

---

[1] Adică în raport cu sistemul de coordonate legat de Lună sau de Soare.

„Nu există mişcări ale unui corp izolat, există numai mişcare relativă“ — spune Fr. Engels în *Dialectica naturii*.

Problema pe care am examinat-o mai sus ne ilustrează aceasta în modul cel mai clar.

LUNGIMEA CURELEI DE TRANSMISIE

Cînd elevii unei şcoli profesionale şi-au terminat lucrul, meşterul lor, „la despărţire“, le-a propus amatorilor să rezolve o astfel de problemă.

Problemă

„Pentru unul din dispozitivele noi din atelierul nostru — a spus meşterul — trebuie să confecţionăm o curea de transmisie, însă nu pentru două roţi cum se face de obicei, ci dintr-o dată pentru trei — şi meşterul a arătat elevilor schema de transmisie.

Toate cele trei roţi de transmisie — a continuat el — au dimensiuni egale. Diametrele lor şi distanţele dintre axe sînt arătate în schemă.

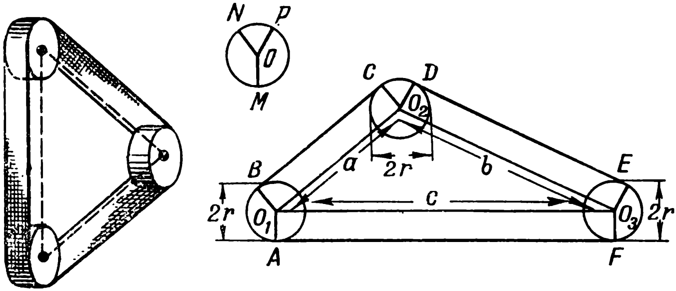


Fig. 130. Schema de transmisie. Cum să calculăm lungimea curelei de transmisie, folosind numai dimensiunile indicate.

Cum să calculăm repede lungimea curelei de transmisie cunoscînd aceste dimensiuni şi fără să efectuăm nici un fel de măsurători suplimentare?“

Elevii au căzut pe gînduri. Curînd unul dintre ei a spus: „După părerea mea, toată greutatea constă aici doar în faptul că în desen nu sînt arătate dimensiunile arcurilor AB, CD, EF, după care cureaua se înfăşoară pe fiecare roată. Pentru calcularea lungimii fiecăruia din aceste arcuri trebuie să ştim mărimea unghiului respectiv la centru şi eu consider că nu putem s-o rezolvăm fără raportor".

„Unghiurile despre care vorbim — a răspuns meşterul — pot fi calculate chiar după dimensiunile arătate în desen, cu ajutorul formulelor şi tabelelor de trigonometrie, însă aceasta este o cale lungă şi complicată. Nu ne trebuie aici nici raportor, deoarece nu este nevoie să cunoaştem lungimea fiecărui arc care ne interesează luat în parte, este suficient să ştim..."

„Suma lor" — au adăugat unii dintre copiii care au înţeles despre ce este vorba.

„Iar acum duceţi-vă acasă şi să-mi aduceţi mîine soluţiile la care aţi ajuns."

Nu vă grăbiţi, cititorilor, să aflaţi ce soluţie i-au indicat meşterului elevii lui.

După cele spuse de meşter, această problemă este uşor s-o rezolvăm şi singuri.

Rezolvare

Într-adevăr, lungimea curelei de transmisie se calculează foarte simplu: la suma distanţelor dintre axele roţilor de transmisie trebuie să adăugăm lungimea circumferinţei unei roţi. Dacă lungimea curelei este l, atunci

$$l = a + b + c + 2\pi r.$$

Faptul că suma lungimilor arcurilor de care se atinge cureaua constituie lungimea totală a unei roţi de transmisie l-au înţeles aproape toţi cei care rezolvau problema, însă nu toţi au reuşit să demonstreze aceasta.

Dintre soluţiile arătate meşterului, el a admis, ca cea mai scurtă, următoarea:

Să presupunem că BC, DE, FA sînt tangente la cercuri (fig. 130). Să ducem raze în punctele de tangenţă. Întrucît circumferinţele roţilor de transmisie au raze egale, figurile O_1BCO_2, O_2DEO_3 şi O_1O_3FA sînt dreptunghiuri, prin urmare, $BC + DE + FA = a + b + c$. Rămîne doar să demonstrăm că suma lungimilor arcurilor $AB + CD + EF$ constituie lungimea totală a circumferinţei.

Pentru aceasta, să construim cercul O de rază r (fig. 130, sus). Să ducem $OM \parallel O_1A$, $ON \parallel O_1B$ şi $OP \parallel O_2D$, atunci $\sphericalangle MON = \sphericalangle AO_1B$, $\sphericalangle NOP = \sphericalangle CO_2B$ şi $\sphericalangle POM = \sphericalangle EO_3F$, ca unghiuri cu laturi paralele.

De aici rezultă că $AB + CD + EF = MN + NP + PM = 2\pi r$.

Aşadar, lungimea curelei $l = a + b + c + 2\pi r$.

În acelaşi mod putem arăta că nu numai pentru trei, dar şi pentru orice alt număr de roţi de transmisie egale, lungimea curelei va fi egală cu suma distanţelor dintre axele lor plus lungimea circumferinţei unei roţi de transmisie.

Problemă

În figura 131 este reprezentată schema unui transportor cu patru role egale (există şi role intermediare), însă în

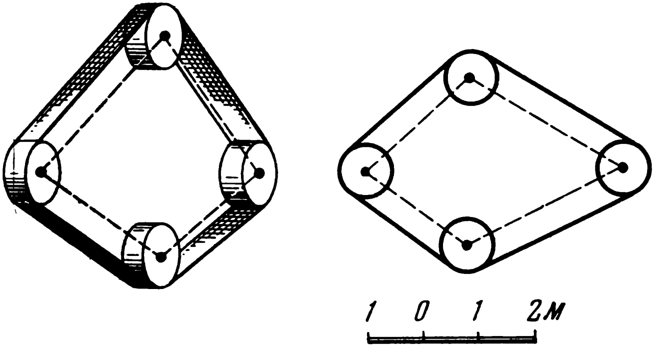


Fig. 131. Copiaţi din desen dimensiunile necesare şi calculaţi lungimea bandei transportorului.

schemă ele au fost omise, pentru că nu influenţează rezolvarea problemei). Folosind scara indicată în figură, copiaţi din desen dimensiunile necesare şi calculaţi lungimea bandei transportorului.

PROBLEMA PRIVITOARE LA CIOARA ISTEAȚĂ

În crestomațiile școlare se include adesea povestirea distractivă despre „cioara isteață". Această veche povestire istorisește despre o cioară însetată care a găsit un ulcior cu apă. În ulcior era puțină apă și nu putea să ajungă cu ciocul pînă la ea. Se spune însă că cioara a înțeles cum să rezolve această problemă: ea a început să arunce pietricele în ulcior. În urma acestei născociri, nivelul apei a crescut pînă la marginea ulciorului și cioara a putut să bea.

Nu vom începe să discutăm aici faptul dacă cioara ar fi putut să dea dovadă de o asemenea istețime. Acest caz ne interesează sub aspectul său geometric. El ne dă prilejul să examinăm următoarea problemă.

Problemă

Ar fi putut oare cioara să bea, dacă apa din ulcior ar fi fost pînă la jumătatea lui?

Rezolvare

Analiza acestei probleme ne va convinge că procedeul folosit de cioară își atinge scopul, însă nu la orice nivel inițial al apei din ulcior.

Pentru simplificare, să presupunem că ulciorul are forma unei prisme dreptunghiulare, iar pietricelele reprezintă niște bile de aceeași mărime. Este ușor de înțeles că apa se va ridica deasupra nivelului pietricelelor numai în acel caz, cînd rezerva inițială de apă ocupă un volum mai mare decît toate spațiile dintre pietricele: atunci apa va umple toate spațiile și se va ridica deasupra pietricelelor. Să încercăm să calculăm ce volum ocupă aceste spații. Cel mai simplu ar fi să efectuăm calculul presupunînd o astfel de așezare a bilelor de piatră, în care centrul fiecăreia dintre ele se află pe aceeași dreaptă cu centrul bilei superioare și centrul celei inferioare. Să presupunem că diametrul bilei este d și, prin urmare, volumul ei este de $\frac{1}{6}\pi d^3$, iar volumul cubulețului în care este înscrisă va fi d^3. Diferența dintre volumele lor $d^3 - \frac{1}{6}\pi d^3$ este volumul părții neumplute a cubulețului, iar raportul:

$$\frac{d^3 - \frac{1}{6}\pi d^3}{d^3} = 0,48$$

indică că partea neumplută a fiecărui cubuleț reprezintă 0,48 din volumul său. Aceeași parte, adică mai puțin de jumătate, o constituie și suma volumelor tuturor golurilor din volumul ulciorului. Lucrurile se schimbă prea puțin dacă ulciorul nu va avea o formă de prismă, iar pietricelele nu vor fi sferice. În toate cazurile, se poate afirma că dacă inițial apa din ulcior s-ar afla mai jos de jumătate, cioara n-ar fi reușit să ridice apa pînă la margine prin aruncarea pietricelelor în ulcior.

Dacă cioara ar fi fost mai puternică — așa încît să poată scutura pietricelele din ulcior, pentru ca ele să se așeze mai strîns — ea ar fi reușit să ridice apa mai mult decît de două ori peste nivelul inițial. Însă ea nu putea să facă aceasta și, admițînd că pietricelele nu erau prea înghesuite, noi n-am deviat prea mult de la condițiile reale. Totodată, ulcioarele sînt, de obicei, mai bombate în partea lor de mijloc; acest fapt trebuie de asemenea să micșoreze înălțimea de ridicare a apei și să întărească justețea concluziei noastre: dacă apa s-ar fi aflat mai jos de jumătatea înălțimii ulciorului, cioara nu ar fi reușit să bea apă.

Capitolul X

GEOMETRIE FĂRĂ MĂSURĂTORI ŞI FĂRĂ CALCULE

ÇONSTRUCŢIE FĂRĂ COMPAS

La rezolvarea problemelor de construcţie geometrică se folosesc, de obicei, rigla şi compasul. Vom vedea în cele ce urmează că, uneori, ne putem lipsi de compas în cazuri, în care la prima vedere el ne pare cu totul necesar.

Problemă

Din punctul A (fig. 132, stînga), aflat în afara semicercului dat, să se ducă la diametrul lui o perpendiculară, însă fără ajutorul compasului. Nu se indică poziţia centrului acestui semicerc.

Rezolvare

Ne va fi de folos aici proprietatea triunghiului, că toate înălţimile lui se intersectează în acelaşi punct. Să unim A cu B şi C; vom obţine punctele D şi E (fig. 132, dreapta). Dreptele BE şi CD sînt, evident, înălţimile triunghiului

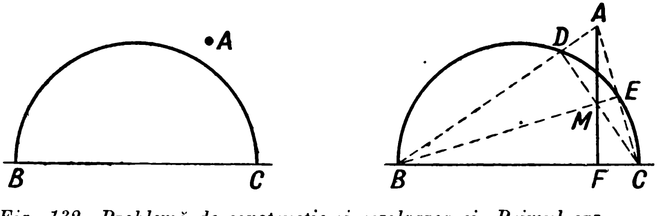


Fig. 132. Problemă de construcţie şi rezolvarea ei. Primul caz.

ABC. Cea de-a treia înălţime va fi perpendiculara necunoscută la BC care trebuie să treacă prin punctul de intersecţie ale celorlalte două, adică prin M. Ducînd cu rigla o dreaptă prin punctele A şi M, rezolvăm problema, fără a recurge la compas. Dacă punctul este situat astfel încît perpendiculara necunoscută cade pe prelungirea diametrului, problema se va putea rezolva doar cu condiția ca, în locul unui semicerc, să fie dat un cerc complet. Figura 133 arată că rezol-

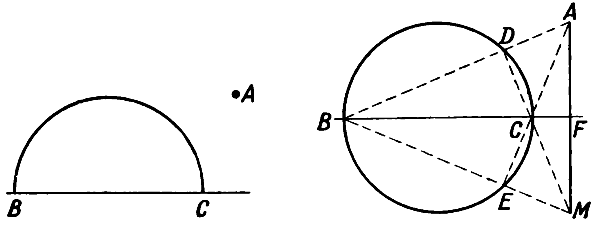


Fig. 133. Aceeași problemă. Cel de-al doilea caz.

varea nu se deosebește de aceea pe care noi o cunoaștem deja, numai că înălțimile triunghiului *ABC* se intersectează aici nu în interiorul, ci în afara lui.

CENTRUL DE GREUTATE AL UNEI PLĂCI

Problemă

Știți, probabil, că centrul de greutate al unei plăci omogene subțiri, care are forma unui dreptunghi sau a unui romb, se află în punctul de intersecție al diagonalelor, iar dacă placa este triunghiulară, el se va afla în punctul de intersecție al medianelor și dacă este rotundă, atunci în centrul acestui cerc.

Încercați acum să aflați, prin construcție, centrul de greutate al unei plăci alcătuite din două dreptunghiuri oarecare, reunite într-o singură figură, reprezentată în figura 134. Totodată, să convenim să folosim numai rigla și să nu măsurăm sau calculăm ceva.

Rezolvare

Prelungim latura *DE* pînă la intersecția ei cu *AB* în punctul *N* și latura *FE* pînă la intersecția ei cu *BC* în punctul M (fig. 135). Vom examina această figură, la început, ca fiind formată din dreptunghiurile $ANEF$ şi $NBCD$. Centrul de greutate al fiecăruia dintre ele se află în punctele de intersecţie ale diagonalelor lor O_1 şi O_2.

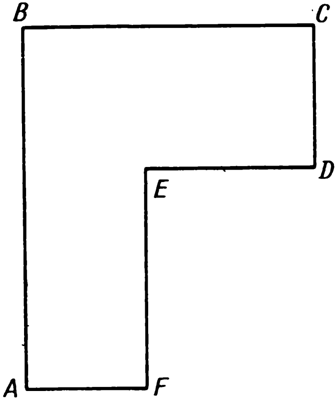


Fig. 134. Folosind numai rigla, găsiţi centrul de greutate al plăcii reprezentate aici.

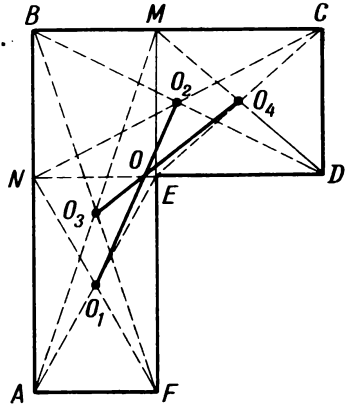


Fig. 135. Centrul de greutate al plăcii a fost găsit.

Prin urmare, centrul de greutate al întregii figuri se va afla pe linia dreaptă O_1O_2. Acum, aceeaşi figură o vom examina ca fiind formată din dreptunghiurile $ABMF$ şi $EMCD$, ale căror centre de greutate se află în punctele de intersecţie ale diagonalelor lor O_3 şi O_4. Centrul de greutate al întregii figuri se va afla pe dreapta O_3O_4. Prin urmare el se află în punctul O de intersecţie al dreptelor O_1O_2 şi O_3O_4. Toate aceste construcţii se efectuează, într-adevăr, numai cu ajutorul riglei.

PROBLEMA LUI NAPOLEON

Ne-am ocupat pînă în prezent de construcţii efectuate numai cu ajutorul riglei, fără să recurgem la compas (cu condiţia ca o circumferinţă de pe desen să fie dată dinainte). Să analizăm acum cîteva probleme în care se introduce o restricţie inversă: se interzice folosirea riglei şi toate construcțiile trebuie să fie efectuate numai cu compasul. Una dintre aceste probleme l-a interesat și pe Napoleon I. După ce a citit cartea privitoare la astfel de construcții, scrisă de către savantul italian Mascheroni, el a propus matematicienilor francezi următoarea problemă.

Problemă

Să se împartă un cerc dat în patru părți egale fără a se recurge la riglă. Se dă poziția centrului acestui cerc.

Rezolvare

Să presupunem că trebuie să împărțim în patru părți egale cercul O. Începînd dintr-un punct oarecare A, luăm pe circumferința lui de trei ori raza cercului: vom obține punctele B, C și D. Este ușor de observat că distanța AC este coarda arcului, ce reprezintă 1/3 din circumferință, deci este latura triunghiului echilateral înscris și, prin urmare, este egală cu $r\sqrt{3}$, unde r este raza circumferinței. Este evident că AD reprezintă diametrul cercului. Din punctele A și D, ducem arcuri de rază egale cu AC, care se intersectează în punctul M. Vom demonstra că distanța MO este egală cu latura pătratului înscris în cercul nostru. În triunghiul AMO cateta

$$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2},$$

adică este egală cu latura pătratului înscris. Acum ne mai rămîne doar ca, printr-o deschidere a compasului egală cu MO, să însemnăm pe circumferință succesiv patru puncte pentru a obține vîrfurile pătratului înscris, care, evident, împart circumferința în patru părți egale.

Iată o altă problemă de același gen, însă mai ușoară.

Problemă

Să mărim fără riglă distanța dintre punctele date A și B de cinci ori, în general, de un număr de ori dat.

Rezolvare

Din punctul B, cu raza AB descriem un cerc (fig. 137). Pe acest cerc ducem din punctul A de trei ori distanța AB: obținem punctul C, evident diametral opus punctului A.

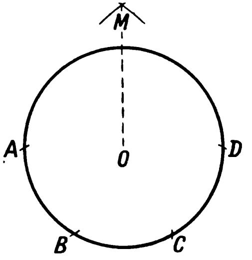


Fig. 136. Să împărțim circumferința în patru părți egale folosind numai compasul.

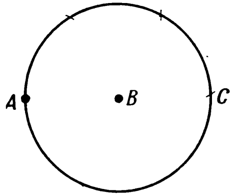


Fig. 137. Cum să mărim distanța dintre punctele AB *de* n *ori* (n *este un număr întreg*), *folosind numai compasul?*

Distanța AC reprezintă de două ori distanța AB. Cu raza BC descriem un cerc din punctul C și în felul acesta putem găsi punctul diametral opus punctului B, deci care se află la o distanță de trei ori distanța AB față de punctul A etc.

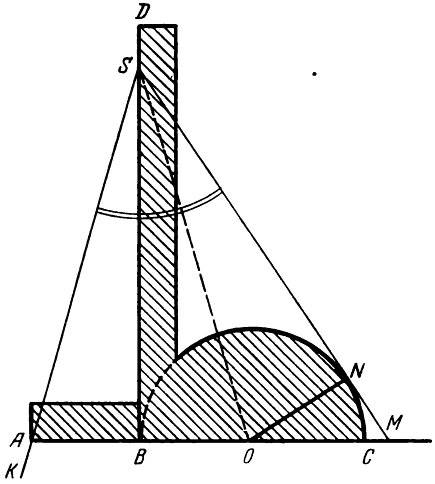
CEL MAI SIMPLU TRISECTOR

Folosind numai compasul și o riglă care nu are nici un fel de însemnări, nu putem împărți un unghi oarecare dat în trei părți egale. Însă matematica nu respinge de loc posibilitatea de a efectua această împărțire cu ajutorul altor instrumente. Pentru atingerea scopului arătat s-au inventat multe instrumente mecanice care se numesc trisectoare. Cel mai simplu trisector îl putem confecționa cu ușurință din hîrtie groasă, carton sau tablă subțire. El ne va servi drept instrument auxiliar la desen.

În figura 138 trisectorul este reprezentat în mărime naturală (desenul hașurat). Porțiunea alăturată semicercului AB

este egală, ca lungime, cu raza acestui semicerc. Marginea porțiunii BD formează un unghi drept cu dreapta AC; ea atinge semicercul în punctul B; lungimea acestei porțiuni este arbitrară. În acelaşi desen se arată modul de folosire a

Fig. 138. Trisectorul și schema lui de folosire.



trisectorului. Să presupunem, de exemplu, că ni se cere să împărțim unghiul KSM în trei părți egale.

Trisectorul se așază în așa fel, ca vîrful unghiului S să se afle pe linia BD, o latură a unghiului să treacă prin punctul A, iar altă latură să fie tangentă la semicerc[1]. Apoi se duc dreptele SB și SO și împărțirea unghiului dat în trei părți egale s-a terminat. Pentru a demonstra aceasta, să unim printr-un segment de dreaptă centrul semicercului O cu punctul de tangență N. Este ușor să ne convingem de faptul că triunghiul ASB este egal cu triunghiul SBO, iar triunghiul SBO este egal cu triunghiul OSN. Din egalitatea acestor trei

[1] Posibilitatea unei astfel de introduceri a trisectorului nostru în unghiul dat reprezintă urmarea uneia dintre proprietăţile simple ale punctelor de pe razele care împart unghiul respectiv în trei părţi egale: dacă dintr-un punct oarecare O de pe raza SO vom duce segmentele $ON \perp SM$ și $OA \perp SB$ (fig. 138), vom avea: $AB = OB = ON$. Cititorii vor demonstra singuri aceasta cu uşurinţă.

triunghiuri rezultă că unghiurile ASB, BSO şi OSN sînt egale între ele, ceea ce trebuia demonstrat.

Această trisecţie a unghiului nu este pur geometrică; o putem numi mai curînd procedeu mecanic.

CEASUL-TRISECTOR

Problemă

Oare este posibil să împărţim cu ajutorul compasului, al riglei şi al unui ceas, un unghi dat în trei părţi egale?

Rezolvare

Este posibil. Să copiem figura unghiului dat pe o hîrtie transparentă şi în momentul cînd ambele ace ale ceasului coincid, să aşezăm desenul pe cadran în aşa fel încît vîrful unghiului să coincidă cu centrul de rotaţie al acelor şi o latură a unghiului să se suprapună de-a lungul acelor.

În momentul cînd minutarul ceasului se va mişca pînă va coincide cu direcţia celei de-a doua laturi a unghiului dat

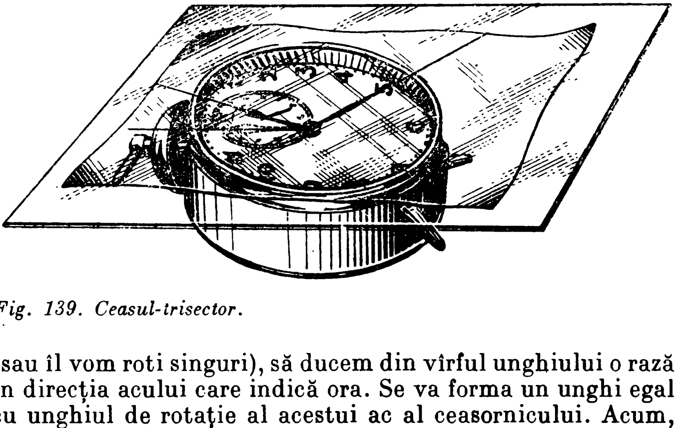


Fig. 139. Ceasul-trisector.

(sau îl vom roti singuri), să ducem din vîrful unghiului o rază în direcţia acului care indică ora. Se va forma un unghi egal cu unghiul de rotaţie al acestui ac al ceasornicului. Acum, cu ajutorul compasului şi al riglei să dublăm acest unghi, iar unghiul astfel dublat să-l dublăm din nou (modul de dublare a unui unghi este cunoscut din geometrie). Unghiul obținut astfel va constitui 1/3 din unghiul dat.

Într-adevăr, de fiecare dată cînd minutarul descrie un unghi oarecare α, acul care indică orele se va mişca în acest timp cu un unghi de 12 ori mai mic $\frac{\alpha}{12}$, iar după mărirea acestui unghi de patru ori se va obține $\frac{\alpha}{12} \cdot 4 = \frac{\alpha}{3}$.

ÎMPĂRȚIREA CIRCUMFERINȚEI

Radioamatorii, constructorii, cei care construiesc modele de orice fel și, în general, amatorii de lucru manual se întîmplă uneori să cadă pe gînduri în fața următoarei probleme practice.

Problemă

Să se decupeze dintr-o placă un poligon regulat cu un număr dat de laturi.

Această problemă se reduce la următoarea:

Să se împartă o circumferință în n părți egale, unde n este un număr întreg.

Să lăsăm deocamdată la o parte rezolvarea evidentă a problemei respective cu ajutorul raportorului — aceasta va fi totuși o rezolvare „din ochi“ — și să reflectăm asupra rezolvării ei geometrice: cu ajutorul compasului și al riglei.

Înainte de toate se naște întrebarea: în cîte părți egale se poate împărți exact, în mod teoretic, o circumferință cu ajutorul compasului și al riglei? Această problemă a fost rezolvată în întregime de către matematicieni: nu în orice număr de părți[1].

Se poate: în 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, ..., 257, ... părți.

Nu se poate în 7, 9, 11, 13, 14... părți.

Este destul de rău și faptul că nu există un procedeu unic de construcție; procedeul de împărțire, de exemplu, în 15

[1] Vezi amănunte în Manualul de geometrie.

părţi egale nu este acelaşi ca la împărţirea în 12 părţi egale etc., iar toate procedeele nu se pot ţine minte.

Practicienii au nevoie de un procedeu geometric, fie chiar şi aproximativ, însă suficient de simplu şi care să fie acelaşi pentru împărţirea circumferinţei în orice număr de arce egale.

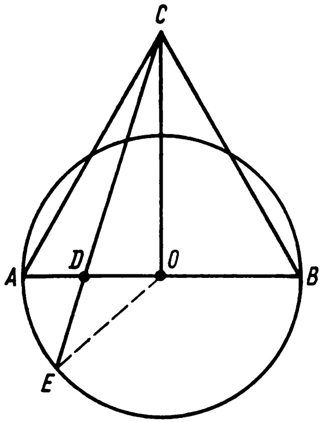


Fig. 140. Procedeul geometric aproximativ de împărţire a circumferinţei în n *părţi egale.*

Spre regretul nostru, în manualele de geometrie nu se acordă nici un fel de atenţie acestei probleme. Din această cauză, să cităm aici un procedeu interesant de rezolvare aproximativă a problemei puse.

Să presupunem, de exemplu, că trebuie să împărţim o circumferinţă dată în nouă părţi egale. Să construim pe un diametru AB al circumferinţei un triunghi echilateral ACB şi să împărţim diametrul AB, cu ajutorul punctului D, în raportul $AD : AB = 2 : 9$ (în cazul general $AD : AB = 2 : n$).

Să unim punctele C şi D printr-un segment şi să-l prelungim pînă unde intersectează circumferinţa în punctul E. Atunci arcul AE va constitui aproximativ 1/9 din circumferinţă (în cazul general $AE = \frac{360°}{n}$) deci coarda AE va fi latura unui poligon regulat înscris cu nouă laturi (un poligon cu n laturi). Eroarea relativă care poate apărea în acest calcul este egală aproximativ cu 0,8%.

Dacă vom exprima dependenţa existentă între valoarea unghiului la centru AOE, care se formează prin construcţia arătată mai sus, şi numărul n, atunci va rezulta următoarea formulă exactă:

$$\operatorname{tg} \widehat{AOE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 16n - 32} - n}{n - 4},$$

care pentru valori mai mari ale lui n poate fi înlocuită cu formula aproximativă:

$$\operatorname{tg} \widehat{AOE} \approx 4\sqrt{3} \cdot (n^{-1} - 2n^{-2}).$$

Pe de altă parte, la o împărţire exactă a circumferinţei în n părţi egale, unghiul la centru trebuie să fie egal cu $\frac{360°}{n}$.

Comparînd unghiul de $\frac{360°}{n}$ cu unghiul AOE, vom obţine eroarea pe care o facem considerînd arcul AE drept $1/n$ părţi din circumferinţă.

Rezultă următorul tabel pentru unele valori ale lui n:

n	3	4	5	6	7	8	10	20	60
$\frac{360°}{n}$	120°	90°	72°	60°	51°26′	45°	36°	18°	6°
$\widehat{AOE}$	120°	90°	71°57′	60°	51°31′	45°11′	36°21′	18°38′	6°26′
Eroarea în %	0	0	0,07	0	0,17	0,41	0,97	3,5	7,2

După cum se vede din tabel, prin procedeul arătat aici se poate împărţi aproximativ circumferinţa în cinci, şapte, opt sau 10 părţi, cu o eroare relativ neînsemnată: de la 0,07 pînă la 1%; o astfel de eroare este cu totul admisibilă pentru majoritatea lucrărilor practice. Cînd creşte numărul de împărţiri n, exactitatea acestui procedeu scade în mod simţitor, adică eroarea relativă creşte, însă, după cum arată cercetările, pentru orice n ea nu depăşeşte 10%.

DIRECŢIA LOVITURII (PROBLEMA BILEI DE BILIARD)

Trimiterea bilei de biliard în pungă nu cu o lovitură directă, ci făcînd ca ea să se lovească odată, de două ori sau chiar de trei ori de bandă ale mesei — aceasta înseamnă, înainte de toate, rezolvarea „în minte“ a unei probleme geometrice „de construcţie“.

Este important să aflăm corect „din ochi“ primul punct din ciocnirea cu banda; drumul pe care-l va urma bila elastică pe o masă bună va fi determinat de legea reflexiei („unghiul de incidenţă este egal cu unghiul de reflexie“).

Problemă

Ce reprezentări geometrice ne pot fi de folos pentru a afla direcția loviturii astfel executate ca bila aflată, de exemplu, la mijlocul mesei de biliard, după trei ciocniri de bandă să ajungă în punga A?

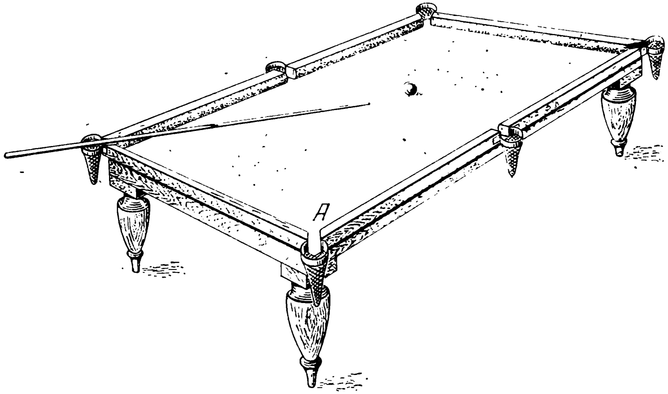


Fig. 141. Problema geometrică de pe masa de biliard.

Rezolvare

Trebuie să ne imaginăm că de-a lungul laturii mai scurte a mesei de biliard s-au așezat încă trei asemenea mese și trebuie să ochim în direcția celei mai îndepărtate pungi de pe cea de a treia dintre mesele imaginate.

Figura 142 ne va ajuta să înțelegem mai bine această afirmație. Să presupunem că $OabcA$ este calea urmată de bilă. Dacă vom roti „masa“ $ABCD$ în jurul lui CD cu 180°, ea va ocupa poziția I; dacă apoi o vom roti în jurul lui AD și încă o dată în jurul lui BC, atunci ea va ocupa poziția III. În cele din urmă, punga A se va afla în punctul însemnat prin litera A'.

Bazîndu-ne pe egalitatea evidentă a triunghiurilor, vom demonstra cu ușurință că $ab_1 = ab$, $b_1c_1 = bc$ și $c_1A_1 = cA$, astfel că lungimea segmentului OA_1 este egală cu lungimea liniei frînte $OabcA$.

Prin urmare, ochind în punctul imaginar A_1 vom face ca bila să se rostogolească pe linia frîntă $OabcA$, și să ajungă în punga A.

Să mai examinăm și următoarea problemă: în ce condiții

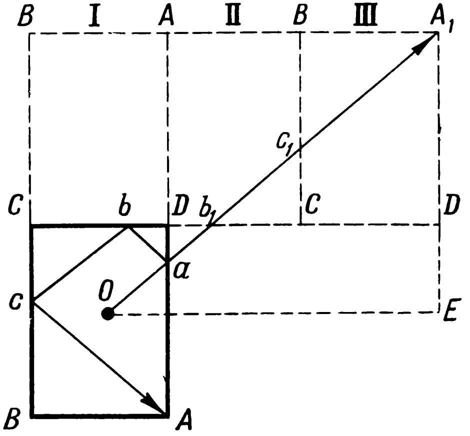


Fig. 142. Să ne imaginăm că la masa de biliard au mai fost așezate încă trei mese la fel, și să ochim în direcția pungii celei mai îndepărtate.

laturile OE și A_1E ale unui triunghi dreptunghic A_1EO sînt egale?

Este ușor să stabilim că $OE = \frac{5}{2} AB$ și $A_1E = \frac{3}{2} BC$. Dacă $OE = A_1E$, atunci $\frac{5}{2} AB = \frac{3}{2} BC$ sau $AB = \frac{3}{5} BC$.

În felul acesta, dacă partea mai scurtă a mesei de biliard formează 3/5 din partea ei mai lungă, atunci $OE = EA_1$; în acest caz lovitura dată bilei aflate la mijlocul mesei poate fi îndreptată sub un unghi de 45° spre bandă.

BILA „INTELIGENTĂ"

Unele construcții geometrice simple ne-au ajutat să rezolvăm probleme privitoare la bila de biliard, iar acum, fie ca aceeași bilă de biliard să rezolve singură o problemă veche interesantă.

Oare acest fapt e posibil? Bila nu poate gîndi. Acest lucru este just, însă în acele cazuri cînd este necesar de făcut un anumit calcul, cunoscîndu-se ce operații cu numere date trebuie efectuate și în ce ordine anume în vederea acestui scop, calculul poate fi încredințat unei mașini care îl va efectua repede și fără greșeli.

Pentu aceasta s-au inventat multe mecanisme, începînd de la aritmometrul simplu și pînă la cele mai complicate mașini electronice.

În orele de odihnă unele persoane se distrează deseori cu problema privitoare la faptul cum să se verse o cantitate oarecare de apă dintr-un vas plin, căruia i se cunoaște capacitatea, cu ajutorul altor vase goale, cărora de asemenea li se cunoaște capacitatea.

Iată una dintre numeroasele probleme de acest fel.

Să se împartă în jumătate conținutul unui butoi de 12 vedre cu ajutorul a două butoaie goale de 9 vedre și de 5 vedre.

Pentru rezolvarea acestei probleme nu trebuie să facem neapărat experiențe cu butoaie adevărate. Toate operațiile necesare de „turnare“ le putem face pe hîrtie, după o astfel de schemă:

Butoiul de 9 vedre	0	7	7	2	2	0	9	6	6
Butoiul de 5 vedre	5	5	0	5	0	2	2	5	0
Butoiul de 12 vedre	7	0	5	5	10	10	1	1	6

În fiecare coloană se înscrie rezultatul operației de turnare efectuate.

În prima coloană: s-a umplut butoiul de 5 vedre, butoiul de 9 vedre este gol (0), în butoiul de 12 vedre au mai rămas 7 vedre.

În coloana a doua: s-au turnat 7 vedre din butoiul de 12 vedre în cel de 9 vedre etc.

Schema are în total nouă coloane; prin urmare, pentru rezolvarea acestei probleme a fost nevoie de nouă operații de turnare.

Încercați să găsiți o rezolvare proprie pentru problema propusă, stabilind o altă ordine a operațiilor de turnare.

După o serie de încercări și probe, fără îndoială că veți izbuti acest lucru, deoarece schema propusă pentru operația de turnare nu este singura posibilă; totuși, la o altă ordine a operațiilor de turnare pot să rezulte mai mult de nouă operații.

În legătură cu aceasta este interesant de lămurit următoarele:

1) Nu se poate oare stabili o ordine anumită a operațiilor de turnare, pe care s-o urmărim în toate cazurile, independent de capacitatea vaselor respective?

2) Se poate oare ca, cu ajutorul a două vase goale, să turnăm dintr-un al treilea vas orice cantitate de apă, adică, de exemplu, din butoiul de 12 vedre să turnăm, cu ajutorul butoaielor de 9 și de 5 vedre, o singură vadră de apă, sau 2 vedre, sau 3, 4 etc. pînă la 11?

La toate aceste întrebări ne va răspunde bila „inteligentă“, dacă vom amenaja acum pentru ea „o masă de biliard“ de construcție specială.

Să liniem o foaie de hîrtie în pătrățele oblice, în așa fel ca ele să prezinte romburi egale cu unghiuri ascuțite de 60°, și să construim figura *OBCDA*, ca în figura 143.

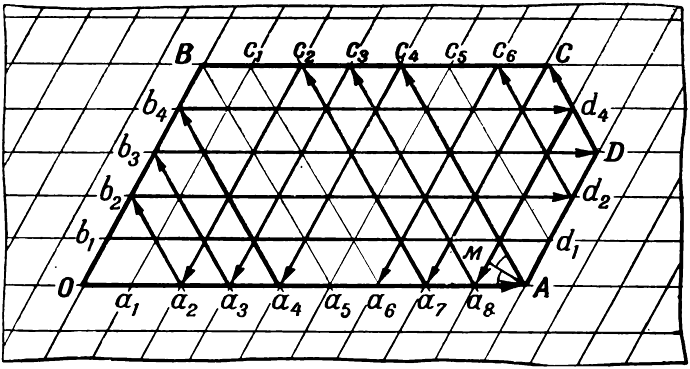


Fig. 143. Mecanismul bilei „inteligente“.

Aceasta va fi „masa de biliard“. Dacă împingem bila de biliard de-a lungul lui *OA*, atunci sărind de la banda *AB* conform cu legea „unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie“ ($\sphericalangle\ OAM = \sphericalangle\ MAc_4$), bila se va rostogoli pe linia dreaptă Ac_4, care unește vîrfurile romburilor mici; va fi respinsă în punctul c_4 de la banda BC și se va rostogoli pe linia dreaptă c_4a_4, apoi pe dreptele a_4b_4, b_4d_4, d_4a_8 etc.

După condițiile impuse de problemă, avem trei butoaie, adică de 9, 5 și 12 vedre. Corespunzător cu acestea vom construi o figură în așa fel, ca latura OA să aibă 9 pătrățele, OB — 5 pătrățele, AD — 3 pătrățele (12 — 9 = 3,) BC —7 pătrățele[1] (12 — 5 = 7).

Să observăm că fiecare punct de pe laturile figurii este despărțit printr-un anumit număr de pătrățele de laturile OB și OA. De exemplu, din punctul c_4 sînt 4 pătrățele pînă la OB și 5 pătrățele pînă la OA, din punctul a_4 sînt 4 pătrățele pînă la OB și 0 pătrățele pînă la OA (fiindcă acest punct se află pe latura OA), din punctul d_4 sînt 8 pătrățele pînă la OB și 4 pătrățele pînă la OA etc.

În felul acesta, fiecare punct de pe laturile figurii în care se lovește bila de biliard determină două numere.

Să convenim ca primul dintre ele, adică numărul de pătrățele care despart punctul de OB, să reprezinte cantitatea de vedre de apă care se află în butoiul de 9 vedre, iar cel de-al doilea număr, adică numărul de pătrățele care despart același punct de OA, să însemne numărul de vedre de apă din butoiul de 5 vedre. Cantitatea rămasă de apă, e limpede, se va afla în butoiul de 12 vedre.

Avem, prin urmare, toate condițiile pregătitoare pentru rezolvarea problemei cu ajutorul bilei de biliard.

Să o lăsăm să se rostogolească din nou de-a lungul laturii OA și, interpretînd fiecare punct în care se lovește de bandă, în așa fel cum s-a arătat, să urmărim mișcarea ei cel puțin pînă la punctul a_6 (fig. 143).

Primul punct unde se lovește bila: A (9; 0); prin urmare, prima operație de turnare trebuie să ne dea această distribuire a apei:

Butoiul de 9 vedre	9
Butoiul de 5 vedre	0
Butoiul de 12 vedre	3

[1] Butoiul plin este întotdeauna cel mai mare din cele trei butoaie. Să presupunem că, capacitatea butoaielor goale este a și b, iar a celui plin c. Dacă $c \geq a + b$, atunci „masa de biliard“ trebuie să fie construită în forma unui paralelogram cu laturile a și b ale pătrățelelor.

Aceasta se poate realiza.

Al doilea loc unde se lovește bila: c_4 (4; 5); prin urmare, bila ne arată următorul rezultat al celei de a doua turnări:

Butoiul de 9 vedre	....	9	4
Butoiul de 5 vedre	....	0	5
Butoiul de 12 vedre	....	3	3

Aceasta se poate de asemenea realiza.

Al treilea punct unde se lovește bila: a_4 (4; 0); la cea de-a treia turnare bila ne arată că trebuie să turnăm 5 vedre în butoiul de 12 vedre:

Butoiul de 9 vedre	....	9	4	4
Butoiul de 5 vedre	....	0	5	0
Butoiul de 12 vedre	....	3	3	8

Al patrulea punct: b_4 (0; 4); este rezultatul celei de-a patra turnări:

Butoiul de 9 vedre	....	9	4	4	0
Butoiul de 5 vedre	....	0	5	0	4
Butoiul de 12 vedre	....	3	3	8	8

Al cincilea punct: d_5 (8; 4); bila arată turnarea a 8 vedre în butoiul gol de 12 vedre:

Butoiul de 9 vedre	....	9	4	4	0	8
Butoiul de 5 vedre	....	0	5	0	4	4
Butoiul de 12 vedre	....	3	3	8	8	0

Să continuăm urmărirea bilei și vom avea următorul tabel:

Butoiul de 9 vedre	......	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
Butoiul de 5 vedre	......	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0
Butoiul de 12 vedre	......	3	3	8	8	0	4	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6

Şi astfel, după o serie de turnări, scopul a fost atins: în două butoaie avem cîte 6 vedre de apă. Bila a rezolvat problema!

Dacă lăsați bila să-și continue mișcarea și după punctul a_6, atunci nu va fi greu de controlat că în cazul dat, aceasta va trece prima toate punctele marcate pe laturile figurii (și, în general, toate vîrfurile romburilor) și numai apoi se va întoarce la punctul de plecare O. Aceasta înseamnă că din butoiul de 12 vedre se poate turna în butoiul de 9 vedre un număr întreg oarecare de vedre de la 1 pînă la 9, iar în cel de 5 vedre — de la 1 la 5.

Dar bila a rezolvat mai greu problema. Noi am reușit să găsim rezolvarea în nouă mișcări (vezi tabelul întîi), iar bila a rezolvat-o în 18 mișcări.

Bila poate însă să ne dea o rezolvare și mai scurtă decît a noastră.

Într-adevăr. Să împingem bila de-a lungul benzii OB (fig. 143) și să-i urmărim mișcarea, considerînd că ea are loc după legea: „unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie". Ajungînd pe OB pînă la punctul B, bila va sări de la banda BC și va merge pe Ba_5. Mai departe va merge pe a_5c_5, pe c_5d_1, pe d_1b_1, pe b_1a_1, pe a_1c_1 și, în sfîrșit, pe c_1a_6. În total vor fi opt ciocniri!

Interpretînd fiecare punct unde se lovește bila de bandă, așa după cum am convenit vom obține rezolvarea problemei sub forma următorului tabel:

Butoiul de 9 vedre	0	5	5	9	0	1	1	6
Butoiul de 5 vedre	5	0	5	1	1	0	5	0
Butoiul de 12 vedre	7	7	2	2	11	11	6	6

Bila ne-a dat o rezolvare mai economică a acestei probleme: în opt mișcări.

Însă, o problemă de acest gen ar putea să nu aibă soluția cerută.

Cum va descoperi bila aceasta?

Foarte simplu: în acest caz ea se va întoarce în punctul inițial O, fără să se lovească în punctul necesar.

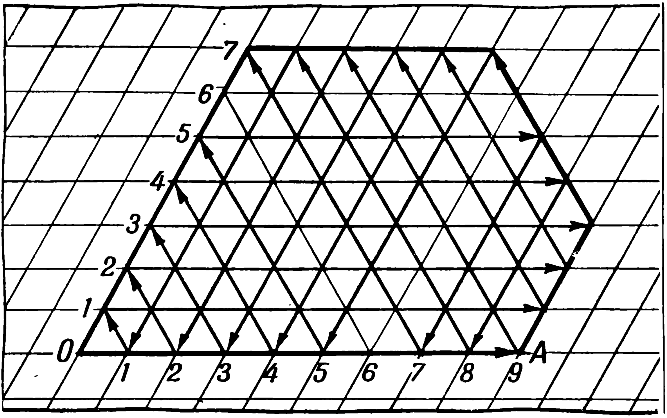


Fig. 144. Mecanismul arată că butoiul plin de 12 vedre nu poate fi împărțit în jumătate cu ajutorul butoaielor goale de 9 și 7 vedre.

În figura 144 este reprezentat mecanismul de rezolvare a problemei pentru butoaiele de 9, 7 și 12 vedre:

Butoiul de 9 vedre	9	2	2	0	9	4	4	0	8	8	1	1	0	9	3	3	0	9	5	5	0	7	7	0
Butoiul de 7 vedre	0	7	0	2	2	7	0	4	4	0	7	0	1	1	7	0	3	3	7	0	5	5	0	7
Butoiul de 12 vedre	3	3	10	10	1	1	8	8	0	4	4	11	11	2	2	9	9	0	0	7	7	0	5	5

„Mecanismul" arată că din butoiul plin de 12 vedre se poate turna orice număr de vedre cu ajutorul butoaielor goale de 9 și 7 vedre, în afară de jumătatea conținutului lui, adică în afară de 6 vedre.

În figura 145 este reprezentat mecanismul de rezolvare a problemei pentru butoaiele de 3, 6 și 8 vedre. Aici bila face patru sărituri și se întoarce în punctul inițial O.

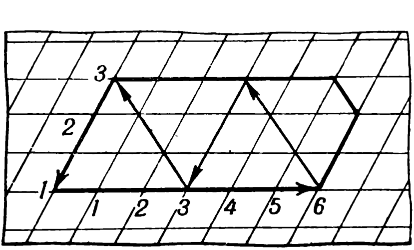


Fig. 145. Mecanismul de rezolvare a unei probleme în plus cu privire la turnare.

Tabelul corespunzător

Butoiul de 6 vedre	6	3	3	0
Butoiul de 3 vedre	0	3	0	3
Butoiul de 8 vedre	2	2	5	5

arată că, în acest caz, este imposibil să turnăm 4 vedre sau 1 vadră din butoiul cu 8 vedre.

Astfel, biliardul nostru cu bila „inteligentă“ într-adevăr reprezintă o mașină curioasă și interesantă de calcul, care rezolvă destul de bine problemele referitoare la operațiile de turnare.

CU O SINGURĂ TRĂSĂTURĂ

Problemă

Copiați pe o foaie de hîrtie cele cinci figuri reprezentate în figura 146 și încercați să le desenați cu o singură trăsătură de creion, adică fără a ridica creionul de pe hîrtie și fără a trece mai mult decît o singură dată pe aceeași linie.

Mulți din cei cărora li s-a propus această problemă începeau cu figura *d*, care pare cea mai simplă, însă toate încercările lor de a desena această figură dintr-o singură trăsătură de creion nu erau încununate de succes. Dezamăgiți, se apucau cu mai puțină siguranță de celelalte figuri și, spre mirarea și mulțumirea lor, reușeau să ducă la bun sfîrșit, fără prea multe dificultăți, primele două figuri și chiar pe cea de-a treia, care este destul de complicată, reprezentînd cuvîntul „ДОМ“ (casă), care a fost tăiat cu o linie. Dar nici cea de-a cincea figură, *e* ca și cea de-a patra *d*, nimeni n-a reușit s-o deseneze cu o singură trăsătură de creion.

De ce oare pentru unele figuri putem duce la bun sfîrșit rezolvarea problemei puse, iar pentru altele nu? Poate doar din cauză că, în unele cazuri, nu ne ajunge ingeniozitatea sau, poate că chiar problema în genere nu are rezolvare în ceea ce privește unele figuri? Oare în acest caz nu s-ar putea arăta un criteriu oarecare, după care am putea ști dinainte dacă putem desena sau nu figura respectivă dintr-o singură trăsătură de creion?

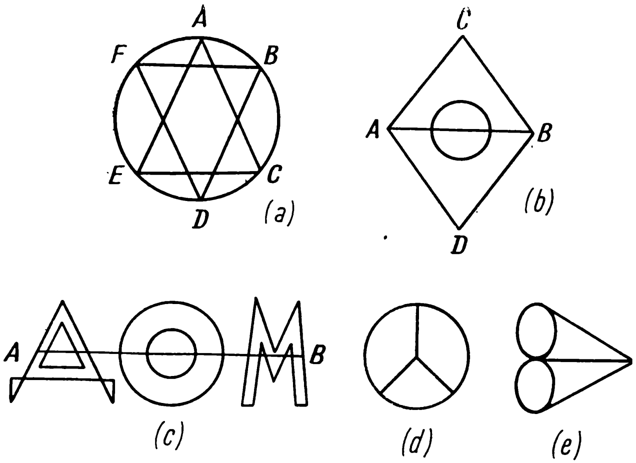


Fig. 146. Încercați să desenați fiecare din aceste figuri dintr-o singură trăsătură de creion, fără a trece mai mult decît o singură dată pe aceeași linie.

Rezolvare

Fiecare încrucișare, în care se întîlnesc liniile figurii respective, să o numim nod. Totodată, să-l numim nod par dacă în el se întîlnesc un număr par de linii și nod impar, dacă numărul liniilor care se întîlnesc în el este impar. În figura *a* toate nodurile sînt pare; în figura *b* există două noduri impare (punctele *A* și *B*); în figura *c* nodurile impare sînt extremitățile dreptei care taie cuvîntul „ДОМ"; în figurile *d* și *e* există cîte patru noduri impare.

Să examinăm la început o astfel de figură, în care toate nodurile să fie pare; de exemplu, figura *a*. Să ne începem ruta din orice punct *S*. Trecînd, de exemplu, prin nodul *A*, trecem peste două linii: cea care ne duce la *A* și cea care ne duce de la *A*. Deoarece în fiecare nod par există tot atîtea posibilități de ieșire cîte sînt de intrare, așa că pe măsură ce ne mișcăm de la un nod la altul, rămîn de fiecare dată cu două linii mai puțin din cele peste care n-am trecut, în principiu este pe deplin posibil ca trecînd peste toate liniile, să ne întoarcem în punctul inițial *S*.

Să presupunem însă că ne-am întors în punctul inițial și nu mai avem o ieșire din el, iar pe figură a mai rămas încă o linie nedesenată, care pornește dintr-un nod oarecare *B* în care am mai fost o dată. Prin urmare, trebuie să ne corectăm ruta. Ajungînd pînă la nodul *B*, mai întîi să desenăm liniile omise și, întorcîndu-ne în *B*, să mergem mai departe pe drumul pe care am mers și în trecut.

Să presupunem, de exemplu, că ne-am hotărît să înconjurăm figura *a* în modul următor: la început, de-a lungul laturilor triunghiului *ACE*, apoi întorcîndu-ne în punctul *A*, pe circumferința *ABCDEFA* (fig. 146). Deoarece în acest caz ne rămîne nedesenat triunghiul *BDF* atunci, mai înainte de a părăsi, de exemplu, nodul *B* și de a merge pe arcul *BC*, trebuie să trasăm triunghiul *BDF*.

Așadar, dacă toate nodurile figurii date sînt pare atunci, pornind din orice punct de pe figură, o putem desena întotdeauna cu o singură trăsătură de creion; în acest caz, înconjurul figurii trebuie să se termine în același punct din care l-am început.

Și acum să examinăm figura în care sînt două noduri impare.

Figura *b*, de exemplu, are două noduri impare *A* și *B*. Ea poate fi de asemenea desenată printr-o singură trăsătură de creion.

Într-adevăr, să începem înconjurul de la nodul impar nr. 1 și să urmăm una din linii pînă la nodul nr. 2, de exemplu, de la *A* la *B* pe traseul *ACB* din figura *b* (fig. 146).

Trasînd această linie, eliminăm astfel cîte o linie din fiecare nod impar, ca și cum aceasta nici n-ar fi existat în desen. După aceasta, ambele noduri impare devin pare. Deoarece în figură nu am mai avut și alte noduri impare, avem în față o figură ce nu conține decît noduri pare; de exemplu, în figura *b*, după trasarea liniei *ACB* rămîn doar triunghiul și cercul.

După cum s-a mai arătat, o astfel de figură poate fi desenată cu o singură trăsătură de creion și, prin urmare, tot dintr-o singură trăsătură poate fi desenată întreaga figură.

O observație suplimentară: începînd cu nodul impar nr. 1, calea care duce la nodul impar nr. 2 trebuie s-o alegem în așa fel ca să nu se formeze figuri izolate de figura dată[1]. De exemplu, la trasarea desenului *b* din figura 146 ar fi greșit să

[1] Amănunte și detalii cu privire la problema expusă, cititorul curios și pregătit le va afla în manualele de topologie.

ne grăbim să mergem din nodul impar A în nodul impar B pe dreapta AB, deoarece astfel cercul ar rămîne izolat de restul figurii şi n-ar putea fi desenat.

Aşadar, dacă figura conţine două noduri impare, pentru ca să ducem la bun sfîrşit desenul trebuie să-l începem din unul dintre ele şi să-l terminăm în celălalt.

Prin urmare, extremităţile trăsăturii noastre sînt izolate.

De aici, rezultă că dacă figura are patru noduri impare, ea poate fi desenată din două trăsături de creion şi nu din una singură, însă aceasta nu mai corespunde condiţiei din problema noastră. Astfel sînt, de exemplu, figurile *d* şi *e* din figura 146.

După cum vedem, dacă ne vom obişnui să raţionăm just, vom putea prevedea multe şi în felul acesta vom fi scutiţi de o pierdere inutilă de timp şi forţe, iar modul de a raţiona corect ne învaţă, în particular, geometria.

Poate că pe d-ta, cititorule, te-au obosit raţionamentele expuse aici, însă eforturile d-tale îţi sînt răsplătite de acele avantaje pe care le oferă ştiinţa faţă de neştiinţă.

Putem să stabilim întotdeauna de mai înainte dacă problema înconjurării unei figuri date poate fi rezolvată şi să ştim din ce nod trebuie să înceapă înconjurul ei.

Mai mult decît atît, vom putea acum să născocim cu uşurinţă, pentru prietenii noştri, oricîte figuri complicate de acest gen.

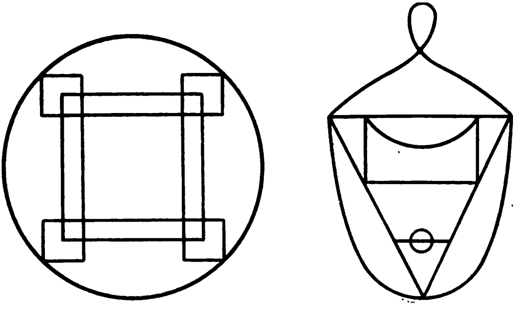


Fig. 147. Desenaţi fiecare figură dintr-o singură trăsătură de creion.

Desenaţi, în încheiere, încă o pereche de figuri reprezentate în figura 147.

Cu două sute de ani în urmă în oraşul Kaliningrad[1] existau şapte poduri care uneau malurile rîului Preghel.

În anul 1736, cel mai mare matematician din acea vreme, L. Euler (pe atunci avea aproximativ 30 de ani) a fost preocupat de următoarea problemă: este oare posibil ca, plimbîndu-ne prin oraş, să trecem peste toate aceste şapte poduri, însă numai cîte o singură dată pe fiecare din ele?

Este uşor de înţeles că această problemă este la fel cu cea examinată mai sus cu privire la desenarea unei figuri.

Să reprezentăm schema drumurilor posibile (linia punctată din figura 148). Rezultă una din figurile din problema anterioară cu patru noduri impare (fig. 146, desenul *e*). După cum ştiţi acum, dintr-o singură trăsătură n-o putem desena,

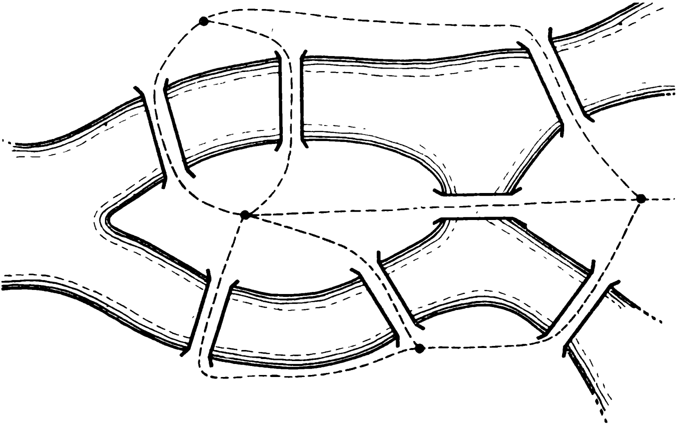


Fig. 148. Este imposibil de a trece peste toate aceste şapte poduri, străbătîndu-le numai o singură dată pe fiecare din ele.

prin urmare, este imposibil de a trece peste cele şapte poduri traversîndu-l numai o singură dată pe fiecare. Euler a demonstrat aceasta chiar atunci.

---

[1] În acea vreme el se numea Königsberg.

După ce noi şi prietenii noştri am aflat secretul desenării cu succes a figurilor dintr-o singură trăsătură de creion, vom declara prietenilor că, totuşi, ne vom apuca să desenăm o figură cu patru noduri impare, de exemplu un cerc cu două diametre, fără a ridica creionul de pe hîrtie şi netrecînd de două ori peste aceeaşi linie.

Ştim foarte bine că acest lucru este imposibil. Însă putem insista în declaraţia aceasta senzaţională. Acum vă voi învăţa o mică şmecherie.

Vom începe să desenăm circumferinţa din punctul A (fig. 149). Imediat ce am dus un sfert din circumferinţă, adică arcul AB, să punem pînă în punctul B o altă foaie de hîrtie (sau îndoim partea inferioară a foii de hîrtie pe care desenăm) şi continuăm să ducem cu creionul partea de jos a semicircumferinţei pînă la punctul D opus punctului B.

Fig. 149. Glumă geometrică.

Acum să dăm la o parte bucata de hîrtie pe care am pus-o (sau dezdoim foaia); pe faţa hîrtiei se va afla desenat numai arcul AB, însă creionul va fi în punctul D (cu toate că noi nu l-am ridicat de pe hîrtie!).

Nu este greu să terminăm de desenat figura: vom duce la început arcul DA, apoi diametrul AC, arcul CD, diametrul DB şi, în sfîrşit, arcul BC. Putem să alegem şi altă rută din punctul D; aflaţi-o.

VERIFICAREA FORMEI

Problemă

Dorind să controleze dacă o bucată de material tăiată are forma unui pătrat, croitoreasa se convinge de acest lucru dacă prin îndoirea în diagonală marginile bucăţii de material coincid. Este oare suficientă o astfel de verificare?

Rezolvare

Cu ajutorul acestui procedeu croitoreasa se convinge numai de faptul că toate laturile unui patrulater de stofă sînt egale între ele. Dintre patrulaterele convexe, această proprietate nu o are numai pătratul, ci şi orice romb, iar rombul reprezintă un pătrat numai în cazul cînd unghiurile lui sînt drepte. Prin urmare, verificarea folosită de croitoreasă nu este suficientă. Trebuie, cel puţin din ochi să ne convingem şi de faptul că unghiurile din vîrful bucăţii de stofă sînt drepte. În vederea acestui scop putem, de exemplu, să îndoim suplimentar bucata de stofă după linia ei din mijloc şi să observăm dacă unghiurile adiacente la o latură coincid.

UN JOC

Pentru acest joc avem nevoie de o coală de hîrtie dreptunghiulară şi de figuri de formă simetrică, de exemplu, figurile de domino sau monede de aceeaşi valoare sau cutii de chibrituri etc.

Numărul figurilor trebuie să fie suficient pentru ca să acopere toată foaia de hîrtie. La acest joc iau parte două persoane. Jucătorii aşază pe rînd figurile în orice poziţie şi pe orice loc liber de pe foaia de hîrtie pînă cînd nu mai rămîne spaţiu liber.

Nu se admite mutarea figurilor aşezate pe hîrtie. Se consideră cîştigător acel jucător care va pune ultimul obiectul.

Problemă

Să se găsească un astfel de mod de desfăşurare a jocului, în care cel care începe jocul cîştigă obligatoriu.

Rezolvare

Jucătorul, care începe jocul trebuie ca, la prima mişcare, să ocupe suprafaţa din centrul colii de hîrtie, aşezînd figura astfel ca centrul ei de simetrie să coincidă, pe cît posibil, cu centrul foii de hîrtie, şi ulterior să aşeze figurile în mod simetric cu poziţia figurilor adversarului.

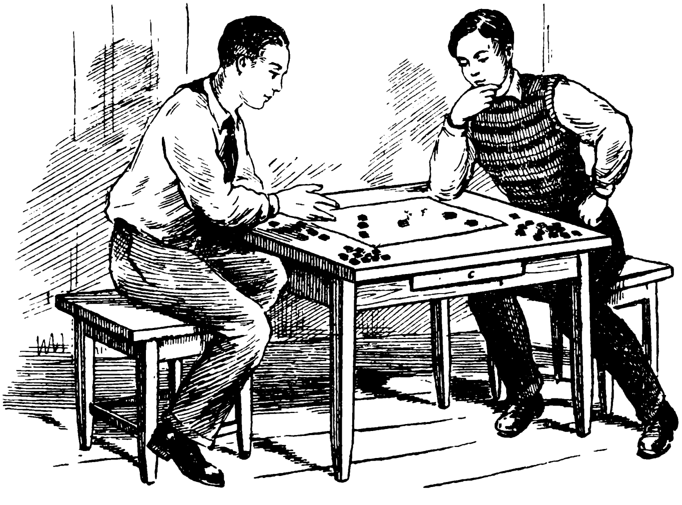


Fig. 150. Joc geometric. Cîştigă acel jucător care pune ultimul obiectul.

Respectînd această regulă, jucătorul care a început jocul va găsi totdeauna pe foaia de hîrtie un loc pentru figura sa şi va cîştiga în mod inevitabil.

Fondul geometric al procedeului arătat de desfășurare a jocului constă în următoarele: dreptunghiul are un centru de simetrie, punctul în care toate segmentele de dreaptă care trec prin el se împart în două și împart figura în două părți egale. Din această cauză, oricărui punct sau porțiuni dintr-un dreptunghi îi corespunde un punct sau o porțiune simetrică care ține de aceeași figură, și numai centrul dreptunghiului nu are un punct simetric.

De aici, rezultă că dacă primul jucător va ocupa porțiunea din mijloc, atunci, orice loc ar alege pentru figura sa adversarul, pe foaia de hîrtie dreptunghiulară se va găsi negreșit un loc liber simetric cu porțiunea ocupată de figura adversarului.

Deoarece alegerea locului pentru figură îi revine de fiecare dată celui de-al doilea jucător, în cele din urmă nu va rămîne pe hîrtie un loc liber tocmai pentru figurile sale și jocul este cîștigat de primul jucător.

Capitolul XI

NUMERE MARI ȘI MICI ÎN GEOMETRIE

27 000 000 000 000 000 000 ÎNTR-UN DEGETAR

Numărul douăzeci și șapte cu optsprezece zerouri scris în titlu poate fi citit în diverse moduri. Unii vor spune simplu: 27 de trilioane; alții, de exemplu lucrătorii financiari, îl vor citi 27 cvintilioane, iar alții îl vor scrie pe scurt $27 \cdot 10^{18}$ și-l vor citi ca 27 ori zece la puterea optsprezece.

Oare cum poate să încapă o asemenea cantitate nemaipomenită într-un singur degetar?

Este vorba despre particulele existente în aerul care ne înconjură. Ca și toate substanțele din univers, aerul este format din molecule. Fizicienii au stabilit că în fiecare centimetru cub (adică aproximativ un degetar) din aerul ce ne înconjură la o temperatură de 0°, există 27 de trilioane de molecule. Avem de-a face cu un uriaș numeric. Să ni-l reprezentăm într-un mod cît de cît corect, este peste puterile unei imaginații dintre cele mai vii. Într-adevăr cu ce putem compara o asemenea mulțime? Cu numărul oamenilor care trăiesc pe pămînt? Însă oamenii de pe globul pămîntesc reprezintă „numai“ 3 000 de milioane ($3 \cdot 10^9$) adică de 9 000 de milioane de ori mai puțin decît moleculele dintr-un degetar. Dacă toate stelele din univers care se pot vedea prin cel mai puternic telescop ar fi înconjurate de planete ca Soarele nostru și dacă fiecare dintre aceste planete ar fi atît de populată ca Pămîntul, nici atunci nu s-ar constitui numărul de locuitori egal cu „populația“ moleculară a unui singur degetar? Dacă am încerca să numărăm această populație invizibilă, numărînd fără întrerupere, de exemplu, cîte 100 de molecule pe minut, ar trebui să numărăm nu mai puțin de 500 000 de milioane de ani.

Nu întotdeauna ne putem reprezenta într-un mod limpede chiar și numere mai modeste.

Ce ne imaginăm atunci cînd ni se spune, de exemplu, despre un microscop care mărește de 1 000 de ori? O mie nu este un număr chiar atît de mare și, totuși, o mărire de 1 000

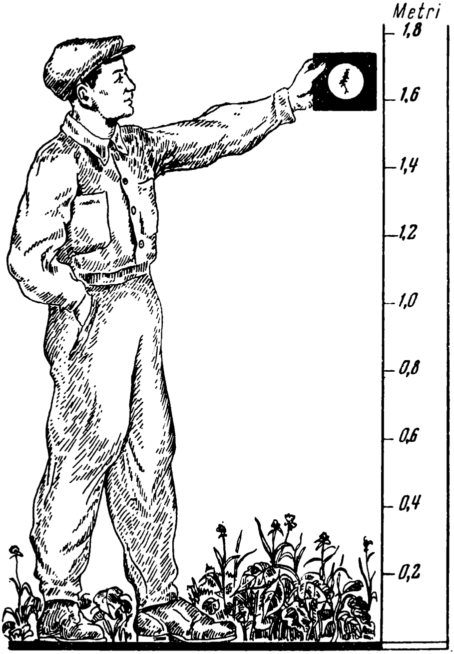


Fig. 151. Un tînăr examinează bacilul febrei tifoide mărit de 1 000 de ori.

de ori nu este intuită corect de toți oamenii. Adesea nu știm să apreciem dimensiunile reale infime ale acelor obiecte pe care le vedem în cîmpul de observație al microscopului la o astfel de mărire. Bacilul febrei tifoide mărit de 1 000 de ori ne apare de mărimea unei musculițe, examinată la distanța necesară vederii clare, adică la 25 cm. Cît de mic este însă aceast bacilul în realitate? Să ne imaginăm că împreună cu bacteria ne-am fi mărit și noi de 1 000 de ori. Aceasta ar însemna că înălțimea noastră ar fi atins 1700 m! Capul ar fi mai sus de nori, iar orice clădire înaltă, nouă, din cele care se construiesc în prezent, ar fi mult mai joasă de genunchii noştri. De cîte ori sîntem mai mici decît acest uriaş imaginar, tot de atîtea ori şi acest bacil este mai mic decît mica musculiţă.

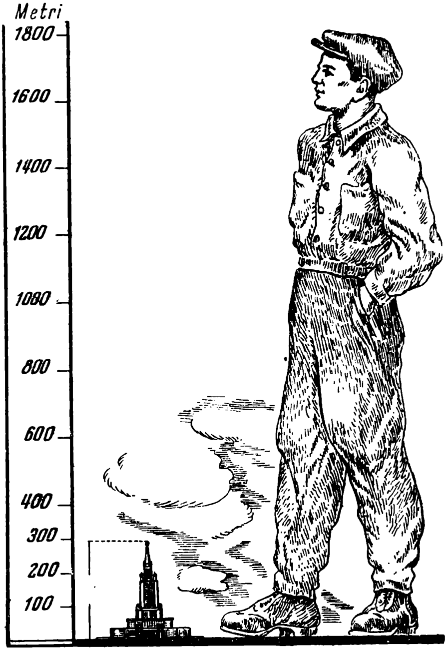


Fig. 152. Tînărul mărit de 1 000 de ori.

VOLUMUL ŞI PRESIUNEA

Am putea crede că cele 27 trilioane de molecule de aer stau prea înghesuite într-un degetar. Dar nu! O moleculă de oxigen sau azot are $\frac{3}{10\,000\,000}$ mm (sau $3 \cdot 10^{-7}$ mm) în diametru. Dacă vom considera volumul moleculei egal cu diametrul ei la cub, atunci vom obţine:

$$\left(\frac{3}{10^7}\,\text{mm}\right)^3 = \frac{27}{10^{21}}\ \text{mm}^3.$$

În degetar sînt $27 \cdot 10^{18}$ molecule. Prin urmare, volumul ocupat de toţi locuitorii degetarului va fi aproximativ egal cu:

$$\frac{27}{10^{21}} \cdot 27 \cdot 10^{18} = \frac{729}{10^3} \text{ mm}^3,$$

adică aproximativ 1 mm³, ceea ce reprezintă doar a 1000-a parte dintr-un centimetru cub. Spaţiile existente între molecule sînt de mai multe ori mai mari decît diametrii lor, aşa că ele au loc suficient de plimbare. Într-adevăr, după cum ştim, particulele de aer nu stau liniştite adunate într-o grămăjoară, ci se mişcă neîncetat şi haotic dintr-un loc într-altul, zburdînd prin spaţiul ocupat de ele. Oxigenul, oxidul de carbon, hidrogenul, azotul şi alte gaze au o importanţă industrială, însă pentru păstrarea lor în cantităţi mari ar fi nevoie de rezervoare uriaşe. De exemplu, 1 t (1 000 kg) de azot la presiune normală ocupă un volum de 800 m³, adică pentru păstrarea numai a 1 t de azot pur ar fi nevoie de o ladă care să aibă următoarele dimensiuni: $10 \times 10 \times 8$ m³. Iar pentru păstrarea a 1 t de hidrogen pur ar fi nevoie de o cisternă cu o capacitate de 10 000 m³.

Oare n-am putea obliga moleculele să se restrîngă? Inginerii chiar procedează în acest fel, cu ajutorul presiunii le obligă să se condenseze. Aceasta nu este însă o treabă uşoară. Să nu uităm că, cu aceeaşi forţă cu care se presează gazul şi gazul presează pereţii vasului. Este nevoie de pereţi extrem de rezistenţi, care să nu fie atacaţi de gaze din punct de vedere chimic.

Aparatura chimică modernă, fabricată din oţeluri aliate, este capabilă să reziste la presiuni uriaşe, temperaturi înalte şi la acţiunea chimică vătămătoare a gazelor.

În prezent inginerii comprimă hidrogenul de 1 163 de ori, astfel că 1 t de hidrogen, care ocupă la presiunea atmosferică un volum de 10 000 m³, încape într-un balon relativ mic, cu o capacitate de aproximativ 9 m³.

Cum credeţi dv., la ce presiune ar trebui să supunem hidrogenul pentru a-i micşora volumul de 1 163 de ori? Amintindu-ne din fizică că volumul unui gaz se micşorează de atîtea ori, de cîte ori creşte presiunea, am propune următorul răspuns: presiunea asupra hidrogenului a fost mărită, de asemenea, de 1 163 de ori. Astfel stau lucrurile în realitate? Nu. În realitate, hidrogenul a trebuit să fie supus la o presiune de 5 000 de atmosfere, adică presiunea s-a mărit de

5 000 de ori și nu de 1 163 de ori. Într-adevăr volumul gazului se modifică invers proporțional cu presiunea numai în cazul unor presiuni neînsemnate. În cazul cînd avem presiuni extrem de înalte, această lege nu este valabilă. Astfel,

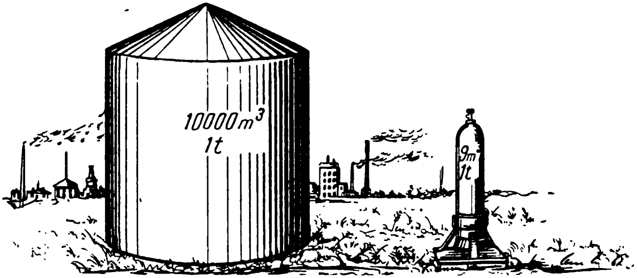


Fig. 153. O tonă de hidrogen la presiune atmosferică normală (stînga) și la o presiune de 5 000 de atmosfere (dreapta). (Desenul este convențional; proporțiile nu sînt respectate.)

de exemplu, 1 t de azot supusă unei presiuni de 1 000 de atmosfere ocupă un volum egal cu 1,7 m^3, în loc de 800 m^3 pe care îi ocupă azotul la presiunea atmosferică normală. Iar la mărirea în continuare a presiunii pînă la 5 000 de atmosfere sau de cinci ori, volumul azotului se micșorează doar pînă la 1,1 m^3.

MAI SUBȚIRE DECÎT FIRUL DE PĂIANJEN, ÎNSĂ MAI TARE CA OȚELUL

O secțiune transversală a unui fir de ață, sîrmă, chiar a firului de păianjen, oricît de mică ar fi ea, are totuși o anumită formă geometrică, cel mai frecvent forma unui cerc. Totodată, diametrul secțiunii transversale sau grosimea unui fir de păianjen reprezintă aproximativ 5 microni (5/1 000 mm). Oare există ceva mai subțire decît firul de păianjen? Cine este cel mai iscusit „torcător de fire subțiri“? Păianjenul sau, poate, viermele de mătase? Nu. Diametrul unui fir de mătase naturală este de 18 microni, adică firul este de trei ori și jumătate mai gros decît un fir de păianjen.

Oamenii visau încă de mult ca, prin meşteşugul lor, să întreacă iscusinţa păianjenului şi a viermelui de mătase. Este cunoscută o veche legendă despre renumita ţesătoare — grecoaica Arachneea. Ea stăpînea atît de perfect meseria de ţesătoare, încît ţesăturile sale erau subţiri ca pînza de păianjen, transparente ca sticla şi uşoare ca aerul. Nici chiar Atena, zeiţa înţelepciunii şi protectoarea meşteşugarilor, nu putea să rivalizeze cu ea.

Această legendă, ca şi multe altele au devenit realitate în timpurile noastre. Mai iscusiţi decît Arachneea s-au dovedit a fi inginerii chimişti, care au creat din lemn obişnuit o fibră extraordinar de subţire şi uimitor de rezistentă. Firele de mătase obţinute, de exemplu, prin procedeul industrial cupro-amoniacal sînt de două ori şi jumătate mai subţiri decît firul de păianjen, iar în ce priveşte rezistenţa, aproape că nu sînt mai prejos decît firele de mătase naturală. Mătasea naturală rezistă la o greutate de pînă la 30 kgf/mm^2, iar mătasea tratată prin procedeul cupro—amoniacal, la o greutate de pînă la 25 kgf/mm^2.

Este interesant modul de fabricare a mătăsii cupro-amoniacale. Lemnul este transformat în celuloză, iar celuloza dizolvată într-o soluţie amoniacală de cupru. Soluţia este turnată prin nişte deschizături înguste în apă, apa ia dizolvantul, după care firele care s-au format sînt înfăşurate pe dispozitive corespunzătoare. Grosimea unui fir de mătase cupro-amoniacală este de 2 microni. Firul de mătase denumită mătase acetată, care de asemenea este artificială, este mai subţire cu 1 micron. Este uimitor faptul că unele sorturi de mătase acetată sînt mai rezistente decît sîrma de oţel! Dacă sîrma de oţel rezistă la o greutate de 110 kgf/mm^2, un fir de mătase acetată suportă 126 kgf/mm^2.

Ne este bine cunoscută tuturor mătasea viscoză care are grosimea firului de aproximativ 4 microni, iar limita de rezistenţă de la 20 la 62 kgf/mm^2. În figura 154 este reprezentată grosimea unui fir de păianjen în comparaţie cu grosimea unui fir de păr omenesc, a diverselor fibre sintetice, precum şi a fibrelor de lînă şi bumbac, iar în figura 155 rezistenţa lor în kilogram forţă pe milimetru pătrat. Fibra artificială sau, cum mai este denumită, fibra sintetică este una dintre cele mai mari invenţii ale tehnicii moderne şi are o uriaşă importanţă economică. Iată ce povesteşte inginerul Buianov: „Bumbacul creşte încet, iar cantitatea lui depinde de climă şi recoltă. Producătorul mătăsii naturale, viermele de mătase, este extrem de mărginit în posibilităţile sale. În cursul vieţii sale el va toarce o

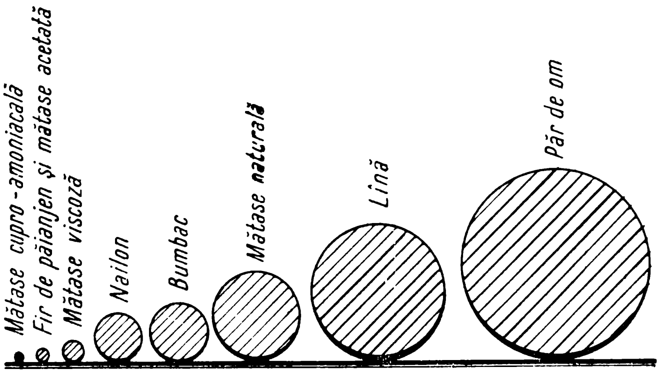


Fig. 154. Grosimea comparată a fibrelor.

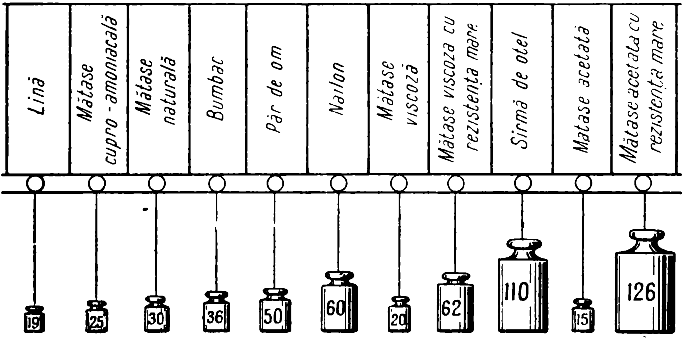


Fig. 155. Rezistenţa-limită a diverselor fibre în kilogram forţă pe milimetru pătrat.

singură gogoaşă din care se obţine doar 0,5 g de fir de mătase...

Cantitatea de mătase artificială obţinută pe calea prelucrării chimice a 1 m³ de material lemnos înlocuieşte 320 000 de gogoşi de mătase sau cantitatea de lînă tunsă într-un an de pe 30 de oi, sau o recoltă medie de bumbac de pe 0,5 ha. Această cantitate de fibre este suficientă pentru fabricarea a 4 000 de perechi de ciorapi de femeie sau 1 500 m de țesături de mătase".

DOUĂ BORCANE

Și mai slab intuim elementele mari și mici în geometrie, cînd trebuie să comparăm suprafețe, și volume și nu numere. Oricine, fără să se gîndească prea mult, va răspunde că 5 kg de dulceață sînt mai mult decît 3 kg, însă nu întotdeauna va spune dintr-o dată care dintre două borcane puse pe masă este mai încăpător.

Problemă

Care dintre cele două borcane este mai încăpător, cel din dreapta, mai larg, sau cel din stînga, care este de trei ori mai înalt, dar de două ori mai îngust?

Rezolvare

Pentru mulți, probabil, va fi o surpriză faptul că, în cazul nostru, borcanul mai înalt este mai puțin încăpător decît

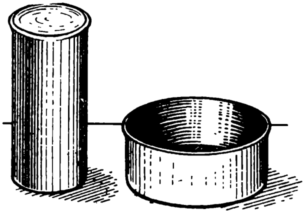


Fig. 156. Care borcan este mai încăpător?

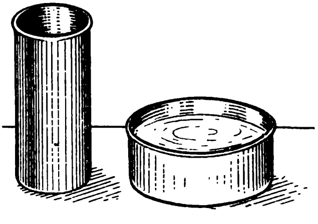


Fig. 157. Rezultatul turnării conținutului borcanului înalt în borcanul lat.

borcanul mai larg. Însă acest lucru este ușor de verificat prin calcul. Suprafața bazei borcanului mai larg este de 2×2, adică de patru ori mai mare decît cea a borcanului îngust;

înălţimea lui este de numai trei ori mai mică. Prin urmare, volumul borcanului larg este de 4/3 ori mai mare decît cel al borcanului îngust. Dacă conţinutul borcanului înalt se va turna în borcanul larg, el va umple doar 3/4 din volumul lui.

O ŢIGARĂ URIAŞĂ

Problemă

• În vitrina unui debit de tutun este expusă o ţigară uriaşă, de 15 ori mai lungă şi de 15 ori mai groasă decît una obişnuită. Dacă pentru umplerea unei ţigări de dimensiuni obişnuite este nevoie de 0,5 g de tutun, de cît tutun a fost nevoie pentru a umple această ţigară uriaşă expusă în vitrină?

Rezolvare

$$\frac{1}{2} \times 15 \times 15 \times 15 = 1\ 700\ \text{g},$$

adică de peste 1,5 kg.

OUL DE STRUŢ

Problemă

În figura 158 sînt reprezentate, la aceeaşi scară, un ou de găină, în dreapta, şi un ou de struţ, în stînga. (Desenul din mijloc reprezintă oul epiornisului dispărut, despre care

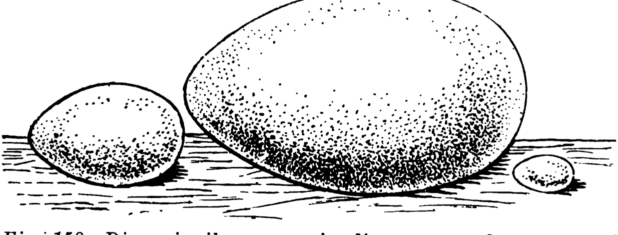


Fig. 158. Dimensiunile comparative dintre un ou de struţ, unul de epiornis şi unul de găină.

vom vorbi în problema următoare.) Priviți cu atenție figura şi spuneţi de cîte ori conținutul oului de struț este mai mare decît conținutul oului de găină? La prima privire, se pare că diferența nu este atît de mare. Cu atît mai surprinzător va fi rezultatul obținut printr-un calcul exact.

Rezolvare

Printr-o măsurare directă pe desen ne convingem că oul de struț este mai lung decît oul de găină de două ori și jumătate, prin urmare, volumul oului de struț este mai mare decît volumul oului de găină de

$$2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = \frac{125}{8},$$

adică aproximativ de 15 ori.

Dintr-un astfel de ou ar putea să-și pregătească dejunul o familie formată din cinci oameni, considerînd că fiecare se va mulțumi cu o omletă din trei ouă.

OUL DE EPIORNIS

Problemă

În Madagascar au existat cîndva păsări uriașe, epiornișii, care depuneau ouă cu o lungime de 28 cm (desenul din mijloc, din figura 158). Oul de găină are o lungime de 5 cm. Cu cîte ouă de găină este egal, ca volum, un singur ou de struț dispărut din Madagascar?

Rezolvare

Înmulțind $\frac{28}{5} \times \frac{28}{5} \times \frac{28}{5}$, obținem aproximativ 170. Un singur ou de epiornis este egal aproape cu 200 de ouă de găină. Peste 50 de oameni s-ar fi putut sătura dintr-un astfel de ou, a cărui greutate, după cum nu este greu de calculat, ar fi egală cu 8—9 kg. (Amintim cititorilor că există o povestire fantastică inspirată a lui Herbert Walles cu privire la oul de epiornis.)

OUĂLE PĂSĂRILOR DIN UNIUNEA SOVIETICĂ

Problemă

Contrastul cel mai mare în ce privește dimensiunile va rezulta însă atunci, cînd ne vom întoarce privirile spre natura din Uniunea Sovietică și vom compara ouăle lebedei — care trăiește în lacurile din stepă — și cele ale aușelului cu cap galben, cea mai mică dintre toate păsările din Uniunea Sovietică. În figura 159 contururile acestor ouă sînt reprezentate în mărime naturală. Care este raportul dintre volumele lor?

Rezolvare

Măsurînd lungimea acestor două ouă, obținem 125 și 13 mm. Măsurînd, de asemenea, și lățimea lor, vom avea 80 și 9 mm. Este ușor de observat că aceste numere sînt aproape proporționale; verificînd proporția

$$\frac{125}{80} = \frac{13}{9},$$

prin compararea produselor termenilor medii și extremi ai proporției, obținem 1 125 și 1 040, numere care se deosebesc prea puțin. De aici deducem că, admițînd faptul că aceste ouă sînt corpuri asemenea din punct de vedere geometric, nu vom face o eroare prea mare.

Din această cauză, raportul dintre volumele lor este aproximativ egal cu:

$$\frac{80^3}{9^3} = \frac{510\ 000}{730} = 700.$$

Așadar, oul de lebădă este de circa 700 de ori mai mare decît oul de aușel.

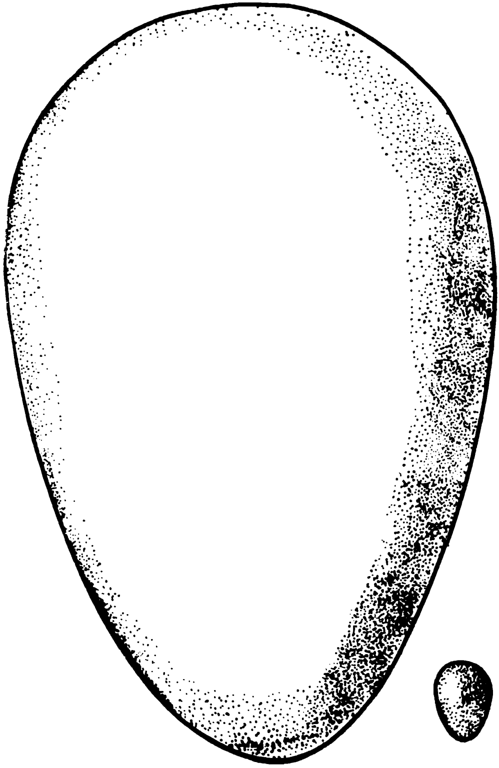


Fig. 159. Oul de lebădă și oul de aușel (mărime naturală). De cîte ori unul este mai mare decît celălalt ca volum?

SĂ SE DETERMINE GREUTATEA COJII OULUI FĂRĂ A-L SPARGE

Problemă

Avem două ouă de aceeași formă, însă de mărimi diferite. Ni se cere ca, fără să spargem ouăle, să stabilim cu aproximație greutatea cojii lor. Ce măsurători, cîntăriri și calcule trebuie să efectuăm pentru aceasta? Grosimea cojii celor două ouă o putem considera ca fiind aceeaşi.

Rezolvare

Măsurăm lungimea axei mari a fiecărui ou: obţinem D şi d. Greutatea cojii primului ou o însemnăm prin x, iar greutatea cojii celui de al doilea o vom însemna prin y. Greutatea cojii este proporţională cu suprafaţa ei, adică cu pătratul dimensiunilor ei liniare. Din această cauză, considerînd că coaja celor două ouă are aceeaşi grosime, alcătuim următoarea proporţie:

$$x : y = D^2 : d^2.$$

Cîntărim ouăle: vom obţine greutăţile P şi p. Greutatea conţinutului din ou o putem considera proporţională cu volumul său, adică cu cubul dimensiunilor sale liniare:

$$(P - x) : (p - y) = D^3 : d^3.$$

Avem un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute x şi y; rezolvînd aceste ecuaţii, aflăm:

$$x = \frac{p \cdot D^3 - P \cdot d^3}{d^2 (D - d)}, \quad y = \frac{p \cdot D^3 - P \cdot d^3}{D^2 (D - d)}.$$

REPREZENTĂRI INTUITIVE

Cititorul care a dobîndit din exemplele anterioare o obişnuinţă pentru compararea volumelor corpurilor geometrice asemenea, după dimensiunile lor liniare, nu va fi surprins luat pe neaşteptate cu întrebări de acest gen. Din această cauză el va putea lesne evita erorile existente în unele reprezentări aparent concrete, care sînt publicate uneori în revistele ilustrate.

Problemă

Iată un exemplu de asemenea reprezentări. Dacă un om mănîncă zilnic — luînd o cifră medie şi rotunjită 400 g de carne, în 60 de ani de viață aceasta va constitui aproximativ 9 t. Cum greutatea unui taur este de aproximativ 0,5 t, omul poate să afirme spre sfîrşitul vieții că a mîncat 18 tauri.

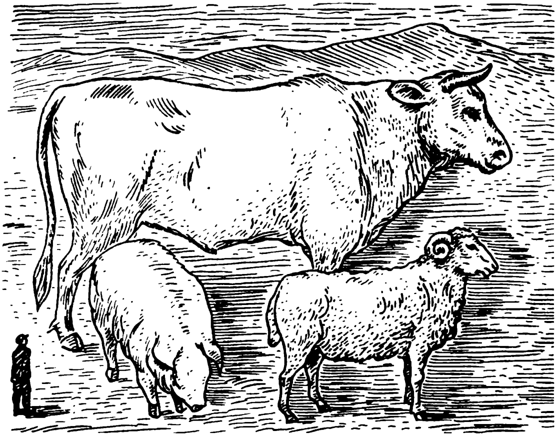


Fig. 160. Ce cantitate de carne mănîncă un om în cursul vieții. (Să descoperim eroarea pe care o conține acest desen.)

În figura alăturată 160, reprodusă după o revistă engleză, este reprezentat acest taur uriaş alături de omul care-l consumă în cursul vieții sale. Este oare desenul exact? Care ar fi scara exactă?

Rezolvare

Desenul este inexact. Taurul reprezentat aici este mai înalt decît unul normal de 18 ori, și desigur, tot de atîtea ori mai gros și mai lung. Prin urmare, ca volum el este mai mare decît un taur normal de $18 \times 18 \times 18 = 5\,832$ de ori. Un astfel de taur omul l-ar putea mînca doar dacă ar trăi nu mai puțin de două milenii.

Un taur reprezentat în mod exact ar trebui să fie mai înalt, mai lung, mai gros decît unul normal de $\sqrt[3]{18}$, adică de 2,6 ori; acesta nu ar fi chiar așa de impunător în desen, pentru a putea servi drept o ilustrare uimitoare a cantității pe care o mănîncă omul în cursul vieții.

Problemă

În figura 161 este reprodusă o altă ilustrație, de același gen. Omul consumă zilnic, în medie, 1,5 l (7—8 pahare) de diverse lichide. În cursul a 70 de ani de viață aceasta con-

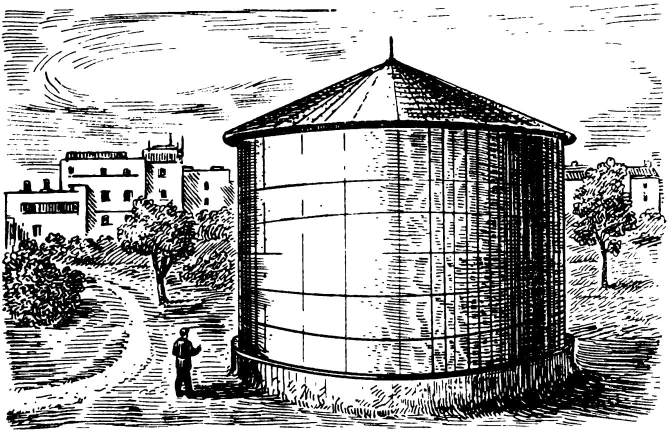


Fig. 161. Ce cantitate de apă bea un om în cursul vieții. (În ce constă eroarea desenatorului?)

stituie aproximativ 40 000 l. Întrucît o găleată are 12 l, desenatorul a trebuit să reprezinte un vas oarecare care să fie mai mare decît găleata de 3 300 de ori. El considera că a făcut acest lucru în figura 161. Oare are dreptate acel desenator?

Rezolvare

În figură dimensiunile cisternei sînt mult exagerate. Vasul trebuie să fie mai înalt și mai lat decît o găleată obișnuită numai de $\sqrt[3]{3\,300} = 14{,}9$, adică aproape de 15 ori. Dacă înălțimea și lățimea unei găleți obișnuite sînt de 30 cm, pentru toată cantitatea de apă pe care o bem în cursul vieții ar fi suficientă o găleată cu o înălțime de 4,5 m și de aceeași lățime. În figura 162 este reprezentat acest vas la scară corectă.

Exemplele examinate arată, printre altele, că reprezentarea unor numere statistice sub forma unor corpuri volumetrice nu este suficient de grăitoare, nu produce acea impresie care este așteptată de obicei. Diagramele sub formă de coloane au un avantaj indiscutabil în această privință.

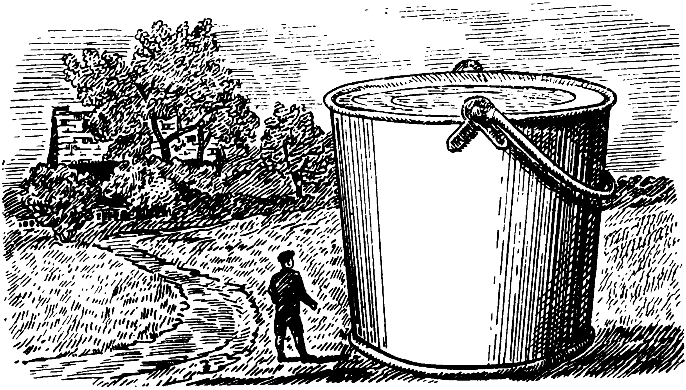


Fig. 162. Reprezentarea exactă (vezi fig. 161).

GREUTATEA NOASTRĂ NORMALĂ

Dacă vom presupune că toate corpurile omenești sînt asemenea din punct de vedere geometric (acest lucru este exact numai în medie), atunci putem calcula greutatea oamenilor după înălțimea lor, considerînd că un bărbat care are o înălțime de 1,65 m (înălțime mijlocie) cîntărește 64 kg (aceasta este greutatea medie a corpului bărbaților de diverse națiuni), iar o femeie care are o înălțime de 1,55 m (de înălțime medie) cîntărește 55 kg (greutatea medie a corpului la femeile de diverse naționalități). Rezultatele obținute din aceste calcule pot părea, unora, neașteptate.

Să calculăm, de exemplu, ce greutate a corpului poate fi considerată normală pentru un bărbat a cărui înălțime este cu 10 cm mai mică decît înălțimea medie.

Adesea se obișnuiește, în viața de toate zilele, ca această problemă să fie rezolvată în modul următor: se scade din greutatea normală a unui bărbat de înălțime mijlocie acea parte de greutate pe care o reprezintă 10 cm față de 165 cm, adică se micșorează 64 kg cu $\frac{10}{165}$ din 64 kg și greutatea obținută — 61 kg — se consideră drept răspunsul cerut.

Acesta este un calcul inexact.

Greutatea exactă o vom obține dacă o vom calcula din următoarea proporție:

$$64 : x = 1{,}65^3 : 1{,}55^3,$$

de unde

$$x \approx 53 \text{ kg}.$$

Diferența dintre rezultatul obținut și cel obișnuit este destul de mare — 8 kg.

În mod asemănător, pentru un bărbat a cărui înălțime este cu 10 cm mai mare decît înălțimea mijlocie, greutatea normală se calculează din proporția:

$$64 : x = 1{,}65^3 : 1{,}75^3.$$

Avem $x = 67$ kg, adică cu 12 kg mai mult decît greutatea mijlocie. Acest adaos este mult mai mare decît se consideră de obicei.

Fără îndoială că astfel de calcule efectuate în mod exact trebuie să aibă o importanță destul de mare, în practica medicală, la stabilirea greutății normale, la calcularea dozei de medicamente etc.

URIAȘII ȘI PITICII

Care va fi în cazul acesta raportul dintre greutatea unui uriaș și a unui pitic? Sînt sigur că multora le va părea neverosimil că uriașul poate fi de 50 de ori mai greu decît piticul. Cu toate acestea, la această concluzie ne duce un calcul geometric exact.

Unul dintre cei mai înalți uriași, a cărui existență este pe deplin dovedită, a fost austriacul Winckelmeyer, care avea o înălțime de 278 cm; altul, alsacianul Krau, avea o înălțime de 275 cm; cel de-al treilea, englezul O'Breek, despre care se povestea că își aprindea pipa de la felinarele de pe străzi atingea o înălțime de 268 cm. Toți aceștia erau cu un metru mai înalți decît un om de statură obișnuită. Dimpotrivă, piticii ajung la vîrsta adultă aproximativ la o înălțime de 75 cm, adică cu un metru mai puțin de înălțimea obișnuită. Ce raport există între volumul și greutatea unui uriaș și volumul și greutatea unui pitic? El va fi egal:

$$275^3 : 75^3 , \quad \text{sau } 11^3 : 3^3 = 49.$$

Prin urmare, greutatea unui uriaș este egală aproape cu greutatea a 50 de pitici!

Dar dacă vom crede informația privitoare la pitica arabă Aghibe care avea o înălțime de 38 cm și la cel mai înalt gigant cu o înălțime de 320 cm, acest raport va fi și mai uimitor: cel mai înalt uriaș ar fi de mai bine de 8 ori mai înalt decît această pitică și deci mai greu de 593 ori. Mai demnă de încredere este comunicarea făcută de Buffon care a măsurat un pitic ce avea o înălțime de 45 cm: acest pitic ar fi de 405 ori mai ușor decît un uriaș.

GEOMETRIA LUI GULLIVER

Autorul *Călătoriilor* lui Gulliver a evitat, cu multă precauție, pericolul de a se încurca în relații geometrice. Fără îndoială, că cititorii țin minte că în țara liliputanilor unui picior îi corespundea un țol, iar în țara uriașilor, dimpotrivă, la 1 țol corespunde 1 picior. Cu alte cuvinte la liliputani, toți oamenii, toate obiectele, toate operele naturii sînt de 12 ori mai mici decît cele normale, iar la uriași ele sînt mai mari tot de atîtea ori. Aceste rapoarte, simple la prima vedere, se complicau totuși foarte mult cînd era nevoie să se rezolve probleme asemănătoare cu cele ce urmează.

1. De cîte ori Gulliver mînca mai mult la masă decît un liliputan?

2. De cîte ori îi trebuia lui Gulliver mai multă stofă pentru costum, decît liliputanilor?

3. Ce greutate avea un măr din țara uriașilor?

Autorul *Călătoriilor*, în majoritatea cazurilor, rezolva aceste probleme, cu destul succes. El a calculat corect că dacă un liliputan are o înălțime mai mică decît cea a lui Gulliver de 12 ori, atunci volumul corpului lui va fi mai mic cu $12 \times 12 \times 12$, adică de 1 728 de ori; prin urmare, pentru îndestularea lui Gulliver era nevoie de 1 728 de ori de mai multe alimente decît pentru un liliputan. Citim din *Călătorii* următoarea descriere a prînzului lui Gulliver:

„Aveam 300 de bucătari, care-mi pregăteau merindele în niște colibe foarte potrivite pentru acest scop, clădite în jurul casei mele: aci locuiau bucătarii cu familiile lor. Eu ridicam 20 de servitori cu mîna și-i așezam pe masă, alți 100 stăteau pe jos, unii purtînd tăvile cu mîncare, alții butoaiele cu vin și alții tot soiul de vase cu băuturi în spinare; toate acestea servitorii de pe masă le trăgeau sus, pe măsură ce aveam nevoie de ele, cu ajutorul unor frînghii și scripeți..."

Swift a calculat corect cantitatea de stofă necesară pentru costumul lui Gulliver. Suprafața corpului său era mai mare decît a liliputanilor de $12 \times 12 = 144$ de ori; deci tot de atîtea ori el avea nevoie de mai mult material, de mai mulți croitori etc. Toate acestea au fost luate în considerație de Swift care povestește în numele lui Gulliver că „300 de croitori fură întrebuințați pentru a-mi face două rînduri de haine, după modelele obișnuite din partea locului".

(Urgența lucrării a necesitat un număr dublu de croitori.)

Necesitatea de a efectua astfel de calcule apărea în fața lui Swift aproape la fiecare pagină. Și, în general vorbind, el le efectua corect. Dacă la Pușkin în *Evghenii Oneghin*, după cum afirmă poetul, „timpul este calculat după calendar" în *Călătoriile* lui Swift toate dimensiunile sînt în concordanță cu regulile de geometrie. Numai arareori scara necesară nu era respectată, mai ales în descrierile țării uriașilor. Aici uneori pot fi întîlnite erori.

„O dată — povestește Gulliver — piticul Curții ne-a însoțit prin grădină. El așteptă să trec pe sub unul din meri și-l scutură în capul meu; vreo duzină de mere, fiecare din ele mare cît un butoi de Bristol, se rostogoli pe lîngă urechile mele; ba unul mă și lovi în spinare și mă trînti jos..."

Gulliver s-a sculat cu bine în picioare după această lovitură. Totuși, este ușor de calculat că lovitura cauzată de căderea unui asemenea măr ar fi trebuit să fie cu adevărat nimicitoare: căci un măr de 1 728 de ori mai greu decît un măr de-al nostru, adică care are o greutate de 80 kg, a căzut de la o înălțime de 12 ori mai mare. Energia loviturii ar fi trebuit să fie de 20 000 de ori mai mare decît energia cauzată de căderea unui măr obișnuit și ar putea fi comparată doar cu energia unui proiectil de artilerie...

Lui Swift i-a scăpat însă o eroare și mai mare în calculul forței musculare a uriașilor. Am văzut deja în primul capitol că puterea animalelor mari nu este proporţională cu dimensiunile lor. Dacă aplicăm raţionamentele citate acolo la uriaşii lui Swift, va rezulta faptul că, cu toate că forţa lor musculară era de 144 de ori mai mare decît forţa lui Gulliver, greutatea lor corporală era mai mare de 1 728 de ori. Şi dacă Gulliver era în stare să ridice nu numai greutatea corpului său, dar şi o greutate aproximativ egală, uriaşii nu ar fi fost în stare să biruie nici măcar greutatea corpului lor imens. Ei ar fi trebuit să stea nemişcaţi în acelaşi loc, fără putinţa de a face o mişcare mai însemnată. Puterea lor, care este atît de plastic descrisă la Swift, a putut fi doar o urmare a unui calcul inexact[1].

DE CE NORII ŞI PRAFUL PLUTESC ÎN AER?

„Pentru că ei sînt mai uşori decît aerul", — iată răspunsul, obişnuit, care le pare multora atît de firesc, încît nu lasă nici un fel de motive de îndoială. Însă o asemenea explicaţie, cu toată simplitatea ei cuceritoare, este cu totul greşită. Firele de praf nu numai că nu sînt mai uşoare decît aerul, ci sînt mai grele decît el de sute şi chiar de mii de ori.

Ce sînt aceste „fire de praf"? Cele mai mărunte particule din diverse corpuri solide: sfărîmături de piatră sau de sticlă, firimituri de cărbune, lemn, metale, fibre, ţesături etc. Oare toate aceste materiale sînt mai uşoare decît aerul? O simplă informare asupra tabelului greutăţilor specifice ne va convinge că oricare dintre ele este sau de cîteva ori mai greu decît apa, sau mai uşor decît ea numai de 2—3 ori. Iar apa este mai grea decît aerul cam de 800 de ori; prin urmare, firele de praf sînt mai grele decît aerul de cîteva sute, dacă nu de cîteva mii de ori. Acum este evident caracterul eronat al părerii obişnuite cu privire la cauza plutirii firelor de praf în aer.

Care este cauza reală? Înainte de toate trebuie să observăm că de obicei ne reprezentăm într-un mod inexact însuşi acest fenomen, privindu-l drept *plutire*. Plutesc în aer (sau într-un lichid) numai corpurile a căror greutate nu este mai mare decît greutatea unui volum egal de aer (sau de lichid), iar firele de praf depăşesc de mai multe ori această greutate şi,

[1] Vezi amănunţit, cu privire la aceasta, lucrarea lui I. I. Perelman, *Занимательная механика*, (*Mecanica distractivă*), Ф. М., Москва, 1959.

din această cauză, ele nu pot *pluti* prin aer. Ele nici nu plutesc, ci *planează*, adică coboară încet, reținute în căderea lor de rezistența aerului. Firul de praf în cădere trebuie să-și facă drum printre particulele de aer, dîndu-le la o parte sau atrăgîndu-le după sine. Și într-un caz și în celălalt se cheltuiește energia de cădere. Această cheltuială este cu atît mai însemnată, cu cît suprafața corpului este mai întinsă (mai exact, suprafața secțiunii transversale) în comparație cu greutatea. În cursul căderii unor corpuri mari, masive, nu observăm acțiunea încetinitoare a rezistenței aerului, deoarece greutatea lor întrece cu mult forța de rezistență a aerului.

Să vedem ce se întîmplă în cazul cînd corpul se micșorează. Geometria ne va ajuta să ne descurcăm și în această privință. Este ușor de înțeles că prin micșorarea volumului unui corp, greutatea lui se micșorează cu mult mai mult decît suprafața secțiunii transversale: micșorarea greutății este proporțională cu reducerea liniară la puterea a treia, iar slăbirea rezistenței este proporțională cu suprafața, adică cu scăderea liniară la puterea a doua.

Ce importanță are aceasta în cazul nostru reiese limpede din exemplul următor. Să luăm o bilă de crichet cu un diametru de 10 cm și o alta din același material, care să aibă un diametru de numai 1 mm. Raportul dintre dimensiunile lor liniare va fi egal cu 100, pentru că 10 cm este mai mare decît milimetrul de 100 de ori. Bila mică este mai ușoară decît bila mare de 100^3 de ori, adică de 1 000 000 de ori; ezistența pe care o întîmpină în mișcarea sa prin aer este mai mică doar de 100^2 de ori, adică de 10 000 de ori. Este limpede că bila mică va trebui să cadă mai încet decît cea mare. Vorbind mai pe scurt, cauza pentru care firele de praf se mențin în aer este „capacitatea lor de planare" condiționată de dimensiunile lor mici și nicidecum de faptul că ele ar fi mai ușoare decît aerul. O picătură de apă cu o rază de 0,001 mm cade prin aer cu o viteză egală cu 0,1 mm/s; este suficient un curent de aer, imperceptibil pentru noi, pentru a împiedica o cădere atît de înceată.

Iată de ce într-o cameră prin care se circulă mult se depune mai puțin praf decît în încăperile nelocuite, și ziua mai puțin decît noaptea, cu toate că lucrurile par că se petrec tocmai invers: curenții care iau naștere în aer împiedică depunerea, iar acești curenți aproape că nu există în aerul liniștit din încăperile puțin frecventate.

Dacă fărîmițăm un cubuleț de piatră cu o înălțime de 1 cm în firicele de praf cubice, care să aibă o înălțime de 0,0001 cm, atunci suprafața totală a aceleiași mase de piatră se va mări de 10 000 de ori și tot de atîtea ori va crește rezistența aerului opusă mișcării ei. Firicelele de praf adesea ating tocmai aceste dimensiuni și se înțelege că rezistența aerului, mult crescută, modifică cu totul desfășurarea căderii.

Din aceeași cauză norii „plutesc“ prin aer. De mult s-a renunțat la părerea învechită că norii sînt constituiți din bule umplute cu vapori de apă. Norii sînt acumulări ale unui număr imens de picături de apă extrem de mici, dar compacte. Aceste picături, cu toate că sînt mai grele decît aerul de aproximativ 800 de ori, aproape nu cad de loc; ele coboară cu o viteză abia perceptibilă. Căderea extrem de încetinită a acestora se explică, ca și în cazul firelor de praf, prin suprafața lor uriașă în raport cu greutatea.

Cel mai slab curent ascendent de aer poate, din această cauză, nu numai să oprească căderea extrem de înceată a norilor — menținîndu-i la un anumit nivel — dar să-i și ridice în sus.

Cauza principală care condiționează toate aceste fenomene este existența atmosferei: în vid, atît firele de praf cît și norii (dacă ar putea să existe) ar cădea tot atît de vertiginos ca și pietrele cele mai grele.

Este inutil să mai adăugăm că, înceata cădere a unui om cu ajutorul parașutei (aproximativ 5 m/s) aparține fenomenelor de acest gen.

Capitolul XII

ECONOMIE GEOMETRICĂ

CUM A CUMPĂRAT PAHOM PĂMÎNT

Acest capitol al cărui titlu neobişnuit va deveni de înţeles pentru cititori din cele ce urmează, îl începem cu un fragment din arhicunoscuta povestire a lui Lev Tolstoi: *Cît pămînt îi trebuie omului.*

„— Şi care-i preţul? — a întrebat Pahom...

— N-avem decît un preţ: o mie de ruble ziua.

Pahom nu înţelegea:

— Ziua? Ce fel de măsură e asta? Cîte deseatine ar fi?

— Aşa nu ne pricepem să socotim. Vindem cu ziua; tot pămîntul pe care-l poţi ocoli într-o zi, pe jos, e al tău; preţul zilei e o mie de ruble.

— Păi într-o zi poţi să ocoleşti mult pămînt — se minună Pahom.

Căpetenia başkirilor începu să rîdă.

— Acela va fi tot al tău! Trebuie să te prinzi însă că-ţi pierzi banii dacă nu te întorci în aceeaşi zi la locul din care ai pornit.

— Şi cum să însemn pe unde am trecut?

— Noi ne vom aşeza într-un loc, acolo unde-ţi vei alege tu pămînt şi nu ne vom mişca; tu vei porni pe jos, să dai roată; ia cu tine un hîrleţ, fă semne unde trebuie, sapă gropi la colţuri, înseamnă-le cu brazde de iarbă; mai tîrziu vom trage cu plugul o brazdă de la o groapă la alta. Poţi face ocolul cît de mare numai să ajungi pînă la apusul soarelui în locul de la care ai pornit. Tot pămîntul pe care-l ocoleşti e al tău.

Apoi başkirii se împrăştiară care încotro, după ce făgăduiră că se vor aduna a doua zi în zori, ca să plece spre locul de pornire înainte de răsăritul soarelui.

Cînd sosiră în stepă, se făcea lumină. Căpetenia se apropie de Pahom şi-i arătă cu mîna.

— Iată — zise el — tot pămîntul e al nostru, cît cuprinzi cu ochiul. Alege-ţi-l pe care-l vrei!

Căpetenia başkirilor îşi scoase căciula din blană de vulpe şi o puse jos.

— Iată semnul — spuse el — porneşte de aici, tot aici trebuie să te întorci. Tot pămîntul pe care-l vei ocoli va fi al tău.

Cum țîșni soarele deasupra zării, Pahom lua hîrlețul pe umăr şi porni în stepă.

După o verstă, se opri și săpă o groapă mică.Apoi merse mai departe, și, după o bucată de drum, mai săpă o groapă mică.

Mai străbătu vreo cinci verste. După soare, Pahom înțelese că e vremea gustării.

«A trecut un sfert de zi — se gîndi el — mai am încă trei sferturi înaintea mea; e prea devreme să schimb drumul. Hai să mai fac vreo cinci verste, pe urmă o iau la stînga». Mai merse o vreme drept înainte.

«Ei — se gîndi Pahom — am mers destul pe latura asta; trebuie să cîrmesc». Se opri, săpă o groapă ceva mai mare, și o cîrmi spre stînga.

Mai străbătu multă cale și pe latura aceea; apoi făcu o a doua cotitură. Privi din nou spre şihan: arşița întinsese o pîclă străvezie, o adiere de lumină părea să tremure prin văzduh și prin ceața ușoară abia se zăreau oamenii de pe șihan. «Am luat laturile cam lungi — se gîndi Pahom — pe asta trebuie s-o fac mai scurtă». Pahom porni pe latura a treia. Se uită la soare: se apropia de amiază, și el nu străbătuse pe a treia latură decît vreo două verste. Pînă la locul de sosire rămîneau tot 15 verste. «Așa nu merge — își zise Pahom — o să iasă moșia cam strîmbă, dar trebuie să mă grăbesc să ajung la movilă pe drumul cel mai drept. Săpă în grabă o groapă mică și o luă de-a dreptul spre șihan.

Pahom se îndrepta acum spre șihan, dar mergea din ce în ce mai greu. Ar fi vrut să se odihnească, dar nu se putea: n-ar fi avut timp să ajungă înainte de apus. Şi soarele nu mai era departe de zare.

Şi mergea Pahom așa; îi venea greu, dar iuțea mereu pasul. Mergea, mergea — tot departe era; o luă la fugă... Pahom fugea, sudoarea îi lipea de trup cămașa și pantalonii, gîtlejul i se uscase. Pieptul i-l umflau parcă foalele fierăriei, iar în inimă îi bătea un ciocan.

Pahom alerga cu ultimele lui puteri. Soarele căzuse aproape pe zare, mai avea puțin pînă să apună. Nu mai avea mult soare, dar nici locul de sosire nu mai era departe. Pahom vedea căciula din blană de vulpe pe jos, vedea și pe mai marele başkirilor, șezînd pe jos, în capul oaselor.

Pahom privea soarele: acesta atinsese pămîntul, apusese chiar în parte şi se vedea acum ca un arc de cerc mare, proptit pe bucata care apusese. Pahom îşi încordă ultimele puteri, îşi umflă pieptul, urcă în fugă şihanul. Pahom ajunse în vîrf şi-i căzură ochii pe căciula de blană de vulpe. Apoi i se tăiară picioarele şi căzu înainte, atingînd cu mîinile căciula.

— Hei, bravo ţie! — strigă căpetenia başkirilor. — Ai pus mîna pe mult pămînt!

Argatul lui Pahom alergă să-l ridice; dar văzu că din gură îi curgea sînge, era mort..."

PROBLEMA LUI LEV TOLSTOI

Să ne depărtăm de la tragicul deznodămînt al acestei istorii şi să ne oprim asupra laturii ei geometrice. Oare putem calcula cu aproximaţie, după datele presărate în această povestire, cîte deseatine de pămînt a înconjurat Pahom? Această problemă, la prima vedere, pare de nerezolvat, însă se rezolvă destul de simplu.

Rezolvare

Recitind cu atenţie povestirea şi extrăgînd din ea toate indicaţiile geometrice, este uşor să ne convingem că datele obţinute sînt de deplin suficiente pentru a da un răspuns concret la întrebarea pusă. Putem chiar să desenăm planul parcelei de teren pe care a înconjurat-o Pahom.

Înainte de toate, din povestire reiese în mod limpede că Pahom fugea pe laturile unui patrulater. Despre prima latură a lui citim următoarele:

„Străbătu vreo cinci verste... Hai să mai fac vreo cinci verste; pe urmă o iau la stînga..."

Prin urmare, prima latură a patrulaterului avea o lungime cam de 10 verste.

Despre cea de-a doua latură, care formează împreună cu cea dintîi un unghi drept, nu ni se comunică în povestire nici un fel de indicaţii numerice.

Lungimea celei de-a treia laturi, evident perpendiculară la cea de-a doua, se arată în povestire în mod direct: „Nu străbătuse pe a treia latură decît vreo două verste".

În mod direct ni se dă şi lungimea celei de a patra laturi: „Pînă la locul de sosire rămîneau tot 15 verste“[1].

După aceste date putem desena planul parcelei înconjurate de Pahom (fig. 163). În patrulaterul obţinut $ABCD$,

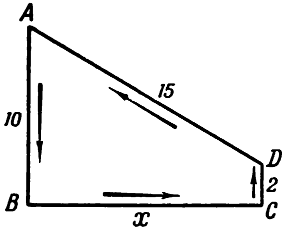


Fig. 163. Traseul urmat de Pahom.

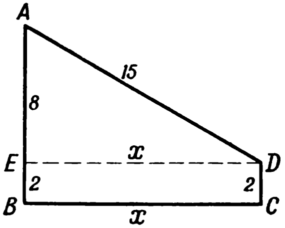


Fig. 164. Precizarea traseului.

latura $AB = 10$ verste, $CD = 2$ verste, $AD = 15$ verste; unghiurile B şi C sînt unghiuri drepte. Lungimea x a laturii necunoscute BC este uşor s-o calculăm dacă vom duce din D perpendiculara DE la AB (fig. 164). În triunghiul dreptunghic AED cunoaştem cateta $AE = 8$ verste şi ipotenuza $AD = 15$ verste. Cateta necunoscută este $ED = \sqrt{15^2 - 8^2} = 13$ verste.

Aşadar cea de-a doua latură avea o lungime aproximativă de 13 verste. Evident, Pahom s-a înşelat, considerînd că cea de-a doua latură este mai scurtă decît prima latură.

După cum vedeţi, se poate desena destul de exact planul parcelei înconjurate de Pahom. Fără îndoială că L.N. Tolstoi a avut în faţa ochilor un desen asemănător celui din figura 163, atunci cînd şi-a scris povestirea.

Acum ne va fi uşor să calculăm şi suprafaţa trapezului $ABCD$ care este format din dreptunghiul $EBCD$ şi triunghiul dreptunghic AED. Ea este egală cu:

$$2 \times 13 + \frac{1}{2} \times 8 \times 13 = 78 \text{ de verste pătrate.}$$

Calcularea după formula trapezului ar fi dat, desigur, acelaşi rezultat:

$$\frac{AB + CD}{2} \times BC = \frac{10 + 2}{2} \times 13 = 78 \text{ de verste pătrate.}$$

[1] Aici este de neînţeles cum putea Pahom să distingă oamenii aflaţi pe dîmb, de la o asemenea distanţă.

Am aflat că Pahom a înconjurat o bucată întinsă de teren care aveà o suprafață de 78 de verste pătrate, sau aproape 8 000 de deseatine. O deseatină l-ar fi costat 12 copeici și jumătate.

TRAPEZ SAU DREPTUNGHI?

Problemă

În ziua fatală pentru viața sa, Pahom a parcurs $10 + 13 + 2 + 15 = 40$ de verste, mergînd pe laturile unui trapez. Intenția sa inițială a fost să meargă pe laturile unui dreptunghi; trapezul a rezultat întîmplător, în urma unui calcul greșit. Interesant este de stabilit: oare a cîștigat el sau a pierdut din cauza faptului că parcela nu a fost un dreptunghi, ci un trapez? În ce caz ar fi trebuit să primească el o suprafață mai întinsă de pămînt?

Rezolvare

Pot să existe foarte multe dreptunghiuri cu un perimetru de 40 de verste și fiecare dintre ele să aibă o altă arie. Iată un șir de exemple:

$14 \times 6 = 84$ de verste pătrate
$13 \times 7 = 91$ „ „
$12 \times 8 = 96$ „ „
$11 \times 9 = 99$ „ „

Vedem că la toate aceste figuri care au același perimetru de 40 de verste, aria este mai mare decît la trapezul nostru. Totuși pot fi și astfel de dreptunghiuri, cu perimetrul de 40 verste, a căror suprafață să fie mai mică decît cea a trapezului.

$18 \times 2 = 36$ de verste pătrate
$19 \times 1 = 19$ „ „
$19\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 9\frac{3}{4}$ „ „

Prin urmare, la întrebarea pusă în problemă nu se poate da un răspuns determinat. Există dreptunghiuri cu o arie mai mare decît trapezul, dar există şi dreptunghiuri cu o arie mai mică, avînd acelaşi perimetru. În schimb, se poate da un răspuns pe deplin determinat la următoarea întrebare: care dintre toate figurile dreptunghiulare cu perimetrul dat are cea mai mare arie. Comparînd dreptunghiurile noastre, observăm că cu cît diferența dintre lungimile laturilor este mai mică, cu atît aria dreptunghiului va fi mai mare. Este normal să conchidem că atunci cînd această diferență nu va exista de loc, adică atunci cînd dreptunghiul se va transforma în pătrat, aria figurii va atinge mărimea maximă. Atunci ea va fi egală cu $10 \times 10 = 100$ de verste pătrate. Este ușor de observat că acest pătrat întrece cu adevărat, în ceea ce privește aria, orice dreptunghi care are perimetrul egal cu al său. Pahom ar fi trebuit să urmeze laturile pătratului, pentru a primi o parcelă cu cea mai mare suprafață, adică cu 22 de verste pătrate mai mult decît a reuşit el să cuprindă.

MINUNATA PROPRIETATE A PĂTRATULUI

Uimitoarea proprietate pe care o are pătratul, de a cuprinde în limitele sale cea mai mare arie în comparaţie cu toate celelalte dreptunghiuri, care au acelaşi perimetru, nu le este cunoscută multora. Din această cauză să facem aici o demonstraţie riguroasă a acestei proprietăți.

Să notăm perimetrul figurii dreptunghiulare cu P. Dacă vom lua un pătrat cu un astfel de perimetru, atunci fiecare latură a lui ar trebui să fie egală cu $\frac{P}{4}$. Să demonstrăm că, reducînd o latură a lui cu o lungime oarecare b și mărind cu aceeași lungime laturile învecinate, vom obţine un dreptunghi care va avea un perimetru egal cu acela al pătratului, însă cu o arie mai mică. Cu alte cuvinte, vom demonstra că aria $\left(\frac{P}{4}\right)^2$ a pătratului este mai mare decît aria $\left(\frac{P}{4} - b\right)\left(\frac{P}{4} + b\right)$ a dreptunghiului:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 > \left(\frac{P}{4} - b\right)\left(\frac{P}{4} + b\right).$$

Deoarece expresia din dreapta a acestei inegalități este egală cu $\left(\frac{P}{4}\right)^2 - b^2$, inegalitatea devine:

$$0 > -b^2 \text{ sau } b^2 > 0.$$

Însă această ultimă inegalitate este evidentă: pătratul oricărei valori, pozitive sau negative, este mai mare decît 0. Prin urmare, este adevărată și inegalitatea inițială care ne-a dus la aceasta.

Prin urmare, pătratul are aria maximă dintre toate dreptunghiurile de același perimetru.

De aici rezultă, printre altele, și faptul că, dintre toate figurile dreptunghiulare cu arii egale, pătratul are *perimetrul cel mai mic*. Putem să ne convingem de aceasta raționînd în modul următor. Să presupunem că acest lucru este inexact și că există un astfel de dreptunghi A, care avînd o suprafață egală cu cea a pătratului B, are un perimetru mai mic decît al acestuia din urmă. Atunci, desenînd un pătrat C care să aibă același perimetru cu dreptunghiul A, vom obține un pătrat care va avea o arie mai mare decît a lui A și, deci, mai mare decît a pătratului B. Ce am obținut? Că pătratul C are perimetrul mai mic decît pătratul B, iar aria lui este mai mare decît a pătratului B. Acest lucru, în mod evident, este imposibil: dacă latura pătratului C este mai mică decît latura pătratului B, atunci și aria lui trebuie să fie mai mică. Deci, nu se poate admite existența dreptunghiului A care, avînd o arie egală, să aibă un perimetru mai mic decît pătratul. Cu alte cuvinte, dintre toate dreptunghiurile care au aceeași suprafață, pătratul are perimetrul cel mai mic.

Cunoașterea acestor proprietăți ale pătratului l-ar fi ajutat pe Pahom să-și calculeze corect forțele sale și să obțină un teren dreptunghiular cu cea mai mare suprafață. Știind că el poate să parcurgă într-o zi, fără efort, să presupunem, 36 de verste, ar fi mers pe marginea pătratului cu o latură de 9 verste și spre seară ar fi fost proprietarul unui teren de 81 de verste pătrate, cu trei verste pătrate mai mult decît a obținut el cu o încordare a forțelor care l-a costat viața. Și invers, dacă s-ar fi mărginit dinainte la o anumită arie a unui teren dreptunghiular, de exemplu de 36 de verste pătrate, atunci ar fi putut să obțină rezultatul dorit cu o mai mică cheltuială de forțe, mergînd pe marginea unui pătrat a cărui latură ar fi fost de 6 verste.

Poate că pentru Pahom ar fi fost şi mai avantajos să-şi croiască o parcelă nu de formă dreptunghiulară, ci de altă formă, de exemplu de patrulater, triunghi, pentagon etc.?

Această problemă poate fi analizată dintr-un punct de vedere strict matematic; totuşi, din dorinţa de a nu obosi pe cititorii noştri, nu vom începe aici această analiză, ci le vom face cunoscute doar rezultatele.

În primul rînd, se poate demonstra că dintre toate patrulaterele care au acelaşi perimetru, suprafaţa cea mai mare o are pătratul. Din această cauză, dorind să aibă un teren dreptunghiular, Pahom nu ar fi putut nici cu ajutorul unor viclenii să pună stăpînire pe mai mult decît pe o sută verste pătrate (considerînd că el ar fi putut să parcurgă într-o zi maximum 40 de verste).

În al doilea rînd, se poate demonstra că pătratul are o arie mai mare decît oricare triunghi cu acelaşi perimetru. Un triunghi echilateral cu acelaşi perimetru are latura de $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ verste, iar aria (după formula $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, unde S este suprafaţa, iar a — o latură):

$$\frac{1}{4}\left(\frac{40}{3}\right)^2\sqrt{3} = 77 \text{ de verste pătrate,}$$

adică mai puţin chiar decît la acel trapez, pe care l-a ocolit Pahom. Mai departe (p. 297) se va demonstra că dintre toate triunghiurile cu perimetrul egal, triunghiul echilateral are aria cea mai mare. Prin urmare, dacă acest triunghi care este cel mai mare, are o arie mai mică decît aria pătratului, atunci toate celelalte triunghiuri cu acelaşi perimetru sînt cu atît mai mici, în ceea ce priveşte aria lor, decît pătratul.

Dacă însă vom compara aria unui pătrat cu suprafaţa unui poligon cu cinci, şase etc. laturi, cu un perimetru egal, aici el nu va mai avea întîietate. Un pentagon regulat are o arie mai mare, un hexagon regulat are o arie şi mai mare etc. Este uşor să ne convingem de acest fapt luînd un exemplu de hexagon regulat. Avînd un perimetru de 40 de verste latura lui este egală cu $\frac{40}{6}$, iar suprafaţa (după formula $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$) este de:

$$\frac{3}{2}\left(\frac{40}{6}\right)^2 \sqrt{3} = 115 \text{ verste pătrate.}$$

Dacă Pahom ar fi ales pentru parcela sa forma unui hexagon regulat, cu aceeaşi încordare a forţelor, el ar fi pus stăpînire pe o suprafaţă cu 115—78, adică cu 37 de verste pătrate mai mare decît în realitate, şi cu 15 verste pătrate mai mare decît i-ar fi putut oferi o parcelă în formă pătrată (însă pentru aceasta, desigur, el ar fi trebuit să pornească la drum cu un instrument pentru măsurarea unghiurilor).

Problemă

Să se formeze din şase chibrituri figura cu arie maximă.

Rezolvare

Din şase chibrituri se pot alcătui figuri destul de variate: triunghi echilateral, dreptunghi, o mulţime de paralelograme, un întreg şir de figuri neregulate cu cinci laturi, un şir de hexagoane neregulate şi, în sfîrşit, un hexagon regulat. Un cercetător al problemelor de geometrie cunoaşte dinainte, fără să mai compare între ele ariile acestor figuri, ce figură anume are aria maximă: această figură va fi hexagonul regulat.

FIGURI CU ARIA MAXIMĂ

Se poate demonstra strict geometric faptul că cu cît o parcelă în formă de poligon regulat va avea mai multe laturi, cu atît va fi mai mare aria pe care o mărgineşte, perimetrul parcelei fiind acelaşi. Iar, la un perimetru dat, aria maximă o cuprinde cercul. Dacă Pahom ar fi alergat în cerc, atunci, parcurgînd tot 40 de verste, el ar fi obţinut o suprafaţă de:

$$\pi\left(\frac{40}{2\pi}\right)^2 = 127 \text{ de verste pătrate.}$$

Nici o altă figură cu perimetrul dat, indiferent dacă are linii drepte sau curbe, nu poate să aibă o arie mai mare.

Ne vom permite să ne oprim puţin asupra acestei proprietăţi uimitoare a cercului de a cuprinde în interiorul său aria maximă, faţă de orice altă figură, de oricare formă, şi avînd acelaşi perimetru. Poate că unii cititori vor dori să afle în ce mod se demonstrează astfel de proprietăţi. Vom da mai departe demonstraţia, e drept nu tocmai riguroasă, a acestei proprietăţi a cercului — demonstraţie propusă de către matematicianul Jacob Steiner. Această demonstraţie este destul de lungă, însă aceia cărora li se va părea obositoare, pot să treacă peste ea, fără nici o pierdere în ceea ce priveşte înţelegerea celor ce vor urma.

Trebuie să demonstrăm că cercul este figura care are arie maximă, avînd un perimetru dat. Înainte de toate, vom stabili că figura necunoscută trebuie să fie convexă. Aceasta înseamnă că oricare coardă a ei trebuie să fie situată în întregime în interiorul figurii. Să presupunem că avem următoarea figură *AaBC* (fig. 165), care are o coardă exterioară *AB*. Să înlocuim arcul *a* prin arcul *b*, simetric cu el. Prin această înlocuire perimetrul figurii *ABC* nu se va modifica, însă aria evident se va mări. Prin urmare, figurile de genul *AaBC*

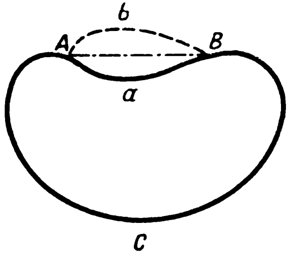


Fig. 165. Stabilim că figura cu aria maximă trebuie să fie convexă.

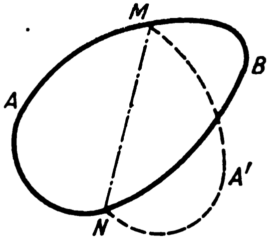


Fig. 166. Dacă coarda împarte în jumătate perimetrul figurii convexe cu aria maximă atunci ea taie în jumătate şi suprafaţa ei.

nu pot fi dintre acele figuri care, avînd acelaşi perimetru, cuprind aria maximă.

Aşadar, figura necunoscută este o figură convexă. Mai departe, putem stabili dinainte şi o altă proprietate a acestei figuri: orice coardă care-i împarte în jumătate perimetrul taie în jumătate și suprafața ei. Să presupunem că $AMBN$ (fig. 166) este figura căutată și să presupunem că coarda MN îi împarte perimetrul în două. Vom demonstra că aria AMN este egală cu aria MBN. Într-adevăr, dacă una dintre aceste părți ar avea o arie mai mare decît cealaltă, de exemplu: $AMN > MNB$, atunci îndoind figura AMN după coarda MN, am obține figura $AMA'N$, a cărei arie ar fi mai mare decît a figurii inițiale $AMBN$, însă perimetrul ar fi egal cu perimetrul ei. Prin urmare, figura $AMBN$, în care coarda taie perimetrul în două împarte suprafața în părți inegale, nu poate fi cea căutată (adică nu poate să aibă aria maximă avînd un perimetru dat).

Înainte de a merge mai departe, vom demonstra următoarea teoremă auxiliară: dintre toate triunghiurile cu două laturi date, cea mai mare arie o va avea acel triunghi, la care unghiul cuprins între aceste laturi este un unghi drept. Pentru a demonstra aceasta, să amintim expresia trigonometrică a suprafeței S a unui triunghi cu laturile a și b și unghiul C cuprins între ele:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Expresia aceasta va avea, evident, valoarea maximă (laturile fiind date) atunci cînd $\sin C$ va avea valoarea maximă, adică va fi egal cu unu. Însă unghiul al cărui sinus este egal cu unu este un unghi drept, ceea ce trebuia să demonstrăm.

Acum putem să trecem la rezolvarea problemei principale, adică la demonstrarea faptului că, dintre toate figurile cu perimetrul p, aria maximă o cuprinde cercul. Pentru a ne convinge de acest fapt, vom încerca să admitem existența unei figuri convexe necirculare $MANBM$ (fig. 167), care să posede această proprietate. Să ducem în interiorul ei coarda MN care-i împarte perimetrul în două; după cum știm, ea va împărți și suprafața figurii în două. Să îndoim jumătatea MKN după linia MN în așa fel ca ea să se situeze simetric ($MK'N$). Să observăm că figura $MNK'M$ posedă același perimetru și aceeași arie ca și figura inițială $MKNM$. Întrucît arcul MKN nu este un semicerc (astfel nici n-am avea ce demonstra), pe el trebuie să fie situate puncte, din care segmentul MN nu se vede sub unghi drept. Să presupunem că K este un astfel de punct, iar K' este simetricul lui, adică unghiurile K și K' nu sînt unghiuri drepte. Apropiind (sau depărtînd) laturile MK, KN, MK', NK', vom putea face ca unghiul cuprins între ele să fie un unghi drept și vom obține astfel triunghiuri dreptunghice egale. Aceste triunghiuri le vom îndoi după ipotenuzele lor, așa cum se

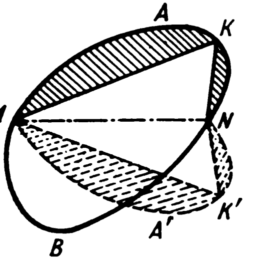


Fig. 167. Admitem existența unei figuri convexe necirculare cu aria maximă.

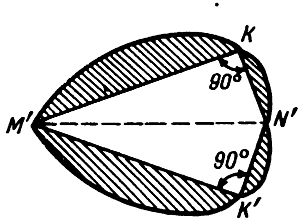


Fig. 168. Stabilim că dintre toate figurile cu un perimetru dat, aria maximă o cuprinde cercul.

arată în figura 168, și le adăugăm în locurile corespunzătoare segmente hașurate. Vom obține în acest fel figura următoare: $M'KN'K'M'$, care are același perimetru ca și figura inițială, însă evident o arie mai mare (pentru că triunghiurile dreptunghice $M'KN'$ și $M'K'N'$ au o arie mai mare decît triunghiurile care nu sînt dreptunghice, MKN și $MK'N$). Prin urmare, nici o figură care nu este circulară nu poate să posede arie maximă, avînd un perimetru dat. Numai în cazul cercului nu putem să construim o figură, prin procedeul arătat, care să aibă o arie mai mare, avînd același perimetru.

Iată prin ce raționament se poate demonstra că cercul este figura care are aria maximă, avînd un perimetru dat.

Este ușor să demonstrăm și justețea următoarei proprietăți: dintre toate figurile cu aceeași arie, cercul are perimetrul minim. Pentru aceasta trebuie să aplicăm față de cerc raționamentele pe care le-am aplicat mai înainte cu privire la pătrat (vezi p. 288).

CUIELE

Problemă

Ce cui este mai greu de scos — unul rotund, pătrat sau triunghiular, dacă ele sînt bătute la fel de adînc și au aceeași arie a secțiunii transversale?

Rezolvare

Ne vom baza pe faptul că cel mai bine se ține acel cui care vine în contact cu materialul înconjurător pe o suprafață mai mare. Care dintre cuiele noastre are o arie laterală mai mare? Știm că, avînd arii egale, perimetrul pătratului este mai mic decît perimetrul triunghiului, iar circumferința cercului este mai mică decît perimetrul pătratului. Dacă vom lua latura pătratului drept unitate, atunci calculul dă pentru aceste trei mărimi următoarele valori: 4,53; 4; 3,55. Prin urmare, cel mai bine trebuie să se țină cuiul triunghiular. Însă astfel de cuie nu se fabrică, cel puțin ele nu se pot întîlni în comerț. Explicația constă, probabil, în aceea că astfel de cuie se rup și se îndoaie mai ușor.

CORPUL DE VOLUM MAXIM

Suprafața sferică posedă o proprietate asemănătoare cu proprietatea cercului: ea are volum maxim la o arie dată. Și invers, dintre toate corpurile cu același volum aria minimă o are sfera. Aceste proprietăți nu sînt lipsite de importanță în viața practică. Un samovar sferic are o arie mai mică decît unul în formă de cilindru sau de orice altă formă, care poate cuprinde același număr de pahare de apă, iar întrucît corpul își pierde căldura numai de pe suprafața sa, samovarul sferic se va răci mai încet decît oricare altul care posedă același volum. Dimpotrivă, rezervorul termometrului se încălzește și se răcește mai repede (adică ia temperatura obiectelor înconjurătoare) atunci cînd i se dă nu forma unei sfere, ci a unui cilindru.

Din aceeași cauză globul terestru, care este format dintr-un înveliș solid și dintr-un nucleu, trebuie să se micșoreze în volum, adică să se contracte, să se strîngă, în urma oricăror cauze care îi modifică forma suprafeţei: conţinutul său interior este comprimat ori de cîte ori învelişul exterior suferă o modificare oarecare, depărtîndu-se de forma unei sfere. S-ar putea ca acest fapt geometric să fie în legătură cu cutremurele şi, în genere, cu fenomenele tectonice, însă despre aceasta trebuie să-şi spună părerea geologii.

PRODUSUL FACTORILOR EGALI

Problemele asemănătoare cu cele de care ne-am ocupat acum examinează chestiunea sub un aspect care pare economic: avînd o cheltuială dată de forţe (de exemplu, la parcurgerea unui drum de 40 de verste), cum să obţinem rezultatul cel mai avantajos (să cuprindem o parcelă de teren cît mai întinsă)? De aici vine şi titlul acestui capitol din carte: „economie geometrică". Însă aceasta este o libertate pe care ne-am permis-o în calitate de popularizatori; în matematică, întrebările de felul acesta au o altă denumire: probleme „de maxim şi de minim". Ele pot fi extrem de variate în ceea ce priveşte subiectul lor şi după gradul de dificultate pe care-l prezintă. Multe dintre ele se rezolvă numai prin procedeele folosite în matematicile superioare, însă există destul de multe probleme pentru rezolvarea cărora sînt suficiente cunoştinţele cele mai elementare. În cele ce urmează vom examina o serie de asemenea probleme din domeniul geometriei, pe care le vom rezolva folosind o proprietate interesantă a produsului factorilor egali.

Pentru cazul cînd avem doi factori, cunoaştem această proprietate. Ştim că aria pătratului este mai mare decît aria oricărui alt dreptunghi, care are acelaşi perimetru. Dacă vom traduce această teză geometrică în limbajul aritmeticii, ea va însemna următoarele: cînd trebuie să împărţim un număr în două părţi, astfel ca produsul lor să fie maxim, trebuie să împărţim acest număr în două părţi egale. De exemplu, dintre toate produsele 13×17, 16×14, 12×18, 11×19, 10×20, 15×15 etc., la care suma factorilor este egală cu 30, cel mai mare va fi 15×15, chiar dacă vom compara şi produsele numerelor fracţionare ($14\frac{1}{2} \times 15\frac{1}{2}$ etc.).

Acelaşi lucru este exact şi pentru produsele a trei termeni care au o sumă constantă: produsul lor ia valoarea maximă, cînd termenii sînt egali între ei. Aceasta decurge în mod direct din cele de mai sus. Să presupunem că trei termeni x, y, z au suma egală cu a:

$$x + y + z = a.$$

Să admitem că x și y nu sînt egali între ei. Dacă vom înlocui pe fiecare dintre ei cu semisuma lor $\frac{x+y}{2}$, suma factorilor nu se va modifica:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a.$$

Însă întrucît în conformitate cu cele de mai sus

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) \left(\frac{x+y}{2}\right) > xy,$$

atunci produsul a trei factori

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) z$$

este mai mare decît produsul xyz:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) \left(\frac{x+y}{2}\right) z > xyz.$$

În genere, dacă între factorii xyz sînt cel puțin doi inegali, atunci se pot alege întotdeauna alte numere care, fără a modifica suma totală, vor da un produs mai mare decît xyz. Și numai atunci cînd toți trei factorii sînt egali nu putem face o astfel de înlocuire. Prin urmare, atunci cînd avem $x + y + z = a$, produsul xyz va fi maxim atunci cînd

$$x = y = z.$$

Să ne folosim de cunoașterea acestor proprietăți ale factorilor egali pentru a rezolva cîteva probleme interesante.

TRIUNGHIUL DE ARIE MAXIMĂ

Problemă

Ce formă trebuie să-i dăm triunghiului, pentru ca, avînd o sumă dată a laturilor lui, el să aibă aria maximă?

Am observat mai înainte (p. 290) că triunghiul echilateral posedă această proprietate. Cum demonstrăm însă aceasta?

Rezolvare

Aria S a unui triunghi cu laturile a, b, c și perimetrul $a+b+c=2p$ se exprimă, după cum se știe din cursul de geometrie, prin formula

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

de unde

$$\frac{S^2}{p}=(p-a)(p-b)(p-c).$$

Aria S a unui triunghi va fi maximă atunci cînd și pătratul ei S^2 va avea valoarea maximă, sau expresia $\frac{S^2}{2}$, unde p (semiperimetrul), are prin ipoteză o valoare fixă. Însă, deoarece ambii membri ai egalității iau simultan valoarea maximă, problema se reduce la întrebarea în ce condiție produsul

$$(p-a)(p-b)(p-c)$$

devine maxim? Observînd că suma acestor trei factori are o valoare constantă,

$$p-a+p-b+p-c=3p-(a+b+c)=3p-2p=p,$$

rezultă că produsul lor atinge valoarea maximă cînd factorii devin egali, adică atunci cînd se realizează egalitatea:

$$p-a=p-b=p-c,$$

de unde

$$a=b=c.$$

Așadar, triunghiul avînd un perimetru dat va avea aria maximă atunci cînd laturile lui sînt egale între ele.

GRINDA CEA MAI GREA

Problemă

Dintr-o bîrnă cilindrică trebuie să se taie o grindă cu greutatea maximă. Cum să facem aceasta?

R e z o l v a r e

Evident problema se reduce la faptul de a înscrie într-un cerc un dreptunghi cu aria maximă. Cu toate că, după cele expuse mai sus, cititorul este pregătit pentru ideea că acest dreptunghi va fi un pătrat, este interesant de a demonstra în mod riguros această proprietate.

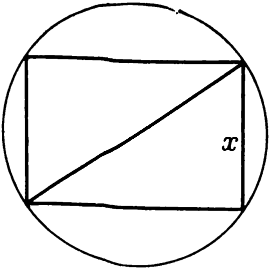


Fig. 169. Referitor la problema privitoare la grinda cea mai grea.

Să notăm o latură a dreptunghiului necunoscut (fig. 169) prin x, atunci, cealaltă latură va fi exprimată prin $\sqrt{4R^2 - x^2}$, unde R este raza secțiunii circulare a bîrnei. Suprafața dreptunghiului va fi

$$S = x\sqrt{4R^2 - x^2}, \text{ de unde}$$

$$S^2 = x^2(4R^2 - x^2).$$

Deoarece suma factorilor x^2 și $4R^2 - x^2$ are o valoare constantă ($x^2 + 4R^2 - x^2 = 4R^2$), produsul lor S^2 va fi maxim atunci cînd $x^2 = 4R^2 - x^2$, adică atunci cînd $x = R\sqrt{2}$. Atunci și S va atinge valoarea maximă, adică aria dreptunghiului necunoscut.

Prin urmare, latura dreptunghiului cu aria maximă este egală cu $R\sqrt{2}$, adică cu latura pătratului înscris. Grinda are volumul maxim, dacă secțiunea ei este un pătrat înscris în secțiunea bîrnei cilindrice.

DINTR-UN TRIUNGHI DE CARTON

P r o b l e m ă

Avem o bucată de carton de formă triunghiulară. Trebuie să decupăm din ea un dreptunghi cu aria maximă, care să aibă o latură paralelă cu baza iar cealaltă cu înălțimea triunghiului.

Rezolvare

Fie ABC triunghiul dat (fig. 170), iar $MNOP$ este dreptunghiul care trebuie să rămînă după decupare. Din asemănarea triunghiurilor ABC şi NBM avem:

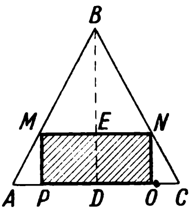


Fig. 170. Să se înscrie într-un triunghi dreptunghiul cu aria maximă.

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{NM}$$

de unde

$$NM = \frac{BE \cdot AC}{BD}$$

Însemnînd latura NM a dreptunghiului necunoscut prin y, distanţa BE, de la vîrful triunghiului la ea, prin x, baza AC a triunghiului dat, prin a, iar înălţimea sa BD prin h, transcriem expresia obţinută anterior în următoarea formă:

$$y = \frac{a\,x}{h}.$$

Aria S a dreptunghiului necunoscut $MNOP$ va fi:

$$S = MN \cdot NO = MN \cdot (BD - BE) = (h - x)y =$$
$$= (h - x)\frac{a\,x}{h};$$

prin urmare

$$\frac{Sh}{a} = (h - x)x.$$

Aria S va fi maximă cînd şi produsul $\frac{Sh}{a}$ va fi cel mai mare, deci atunci cînd produsul factorilor $(h - x)$ şi x va atinge valoarea maximă. Însă suma $h - x + x = h$ are o valoare constantă. Prin urmare, produsul lor este maxim atunci cînd:

$$h - x = x,$$

de unde

$$x = \frac{h}{2}.$$

Am aflat că latura NM a dreptunghiului necunoscut trece prin mijlocul înălţimii triunghiului şi, prin urmare, uneşte mijloacele laturilor lui. Rezultă deci că această latură a dreptunghiului este egală cu $\frac{a}{2}$, iar cealaltă egală cu $\frac{h}{2}$.

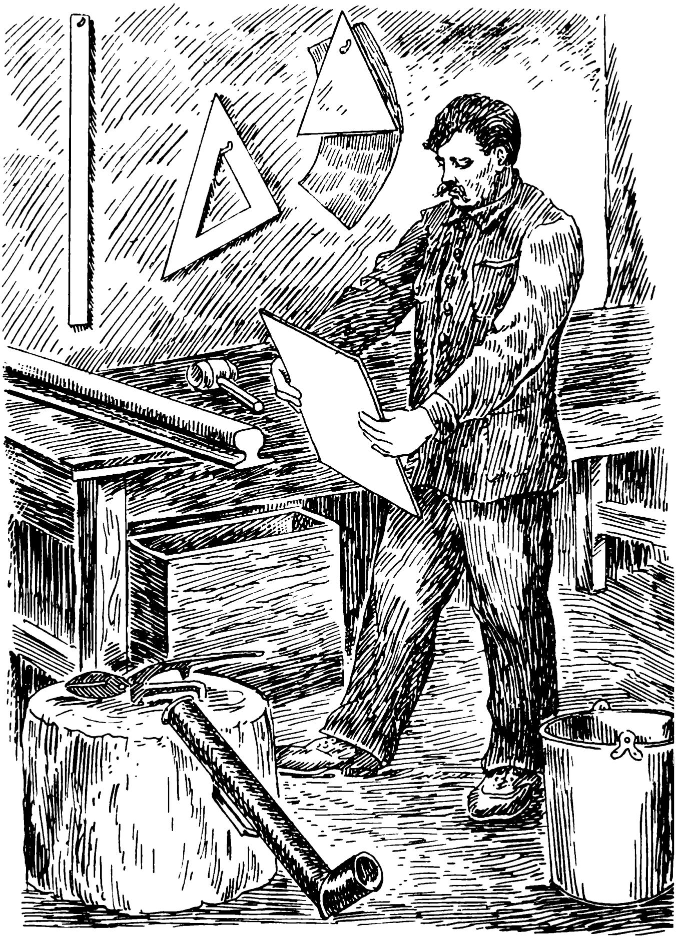


Fig. 171. Încurcătura tinichigiului.

Problemă

Unui tinichigiu i s-a comandat să confecționeze dintr-o bucată pătrată de tablă, cu o lățime de 60 cm, o cutie fără capac, cu fund pătrat și i s-a pus condiția, ca această cutie să aibă capacitatea maximă. Tinichigiul a chibzuit un timp îndelungat ce lățime ar trebui să aibă pereții acestei cutii, însă nu a putut să ajungă la o anumită soluție (fig. 171). Oare n-ar putea cititorul să-l ajute să iasă din această încurcătură?

Rezolvare

Să presupunem că lățimea marginilor îndoite este egală cu x (fig. 172). Atunci, latura fundului pătrat al cutiei va fi egală cu $60 - 2x$, iar volumul v al cutiei va fi exprimat prin produsul

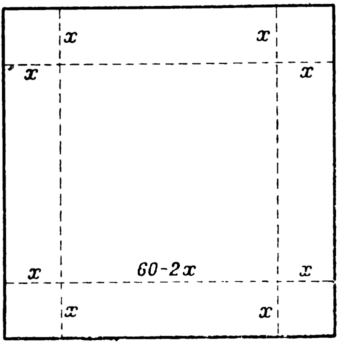


Fig. 172. Rezolvarea problemei tinichigiului.

$$v = (60 - 2x)(60 - 2x)x.$$

Pentru ce valoare a lui x acest produs va fi maxim? Dacă suma celor trei factori ar fi constantă, produsul ar fi maxim în cazul egalității lor. Însă aici suma factorilor este

$$60 - 2x + 60 - 2x + x = \\ = 120 - 3x,$$

adică nu are o valoare constantă, deoarece ea variază atunci cînd variază x. Totuși, nu este greu să facem în așa fel ca suma celor trei factori să fie constantă: pentru aceasta este suficient doar să înmulțim ambii membri ai egalității cu 4. Vom obține:

$$4v = (60 - 2x)(60 - 2x)\ 4x.$$

Suma acestor factori va fi egală cu:

$$60 - 2x + 60 - 2x + 4x = 120,$$

care este constantă. Prin urmare, produsul acestor factori ajunge la valoarea maximă atunci cînd ei sînt egali, adică, cînd:

$$60 - 2x = 4x,$$

de unde

$$x = 10.$$

Iar atunci și $4v$, precum și v vor atinge valoarea lor maximă.

Așadar, cutia va avea volumul maxim dacă vom îndoi din foaia de tablă 10 cm. Acest volum maxim este egal cu $40 \times 40 \times 10 = 16\,000$ cm^3. Îndoind cu 1 cm mai mult sau mai puțin, în ambele cazuri vom micșora volumul cutiei. Într-adevăr:

$$9 \times 42 \times 42 = 15\,900 \text{ cm}^3,$$
$$11 \times 38 \times 38 = 15\,900 \text{ cm}^3;$$

deci și într-un caz și în celălalt vom obține un rezultat mai mic decît 16 000 cm^3*

ÎNCURCĂTURA STRUNGARULUI

Problemă

Unui strungar i s-a dat un con și i s-a comandat să strunjească din el un cilindru în așa fel, încît să fie strunjit, pe cît posibil, cît mai puțin material (fig. 173). Strungarul a început să reflecteze asupra formei dimensiunilor cilindrului necunoscut: cum să-l facă înalt deci îngust (fig. 174), sau dimpotrivă, mai lat, însă scund (fig. 175). Mult timp n-a

* Rezolvînd problema în cazul general, vom afla că, avînd lățimea a a foii pătrate de tablă, pentru a obține o cutie cu volumul maxim va trebui să îndoim marginile cu lățimea $x = \frac{1}{6}a$, pentru că produsul $(a - 2x)(a - 2x)x$ sau $(a - 2x)(a - 2x)4x$ este maxim atunci cînd $a - 2x = 4x$.

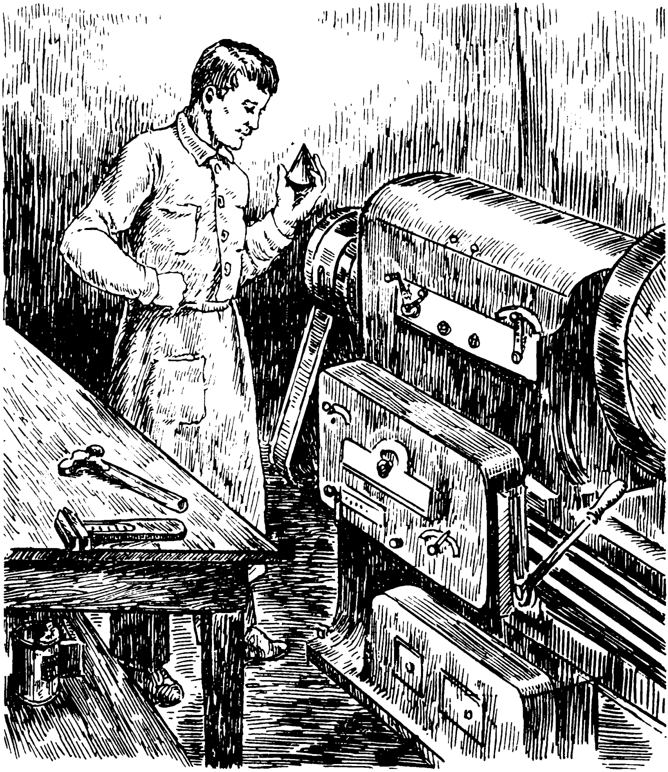


Fig. 173. Încurcătura strungarului.

putut afla în ce caz cilindrul va avea volumul maxim, adică va rămîne mai puțin material strunjit. Cum ar fi trebuit să procedeze?

Rezolvare

Problema necesită o examinare atentă din punct de vedere geometric. Să presupunem că ABC (fig. 176) este secțiunea axială a conului, BD reprezintă înălțimea lui, pe care o însemnăm prin h, iar raza bazei $AD = DC$ o vom nota prin R. Cilindrul pe care-l putem strunji din acest con, are secţiunea $MNOP$. Să aflăm la ce distanţă $BE = x$ de la vîrful B trebuie să se afle baza de sus a cilindrului, pentru ca volumul lui să fie maxim.

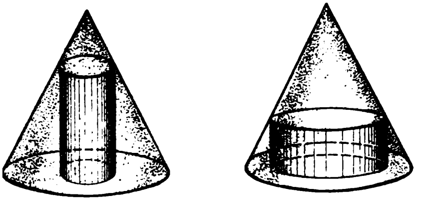


Fig. 174—175. Dintr-un con se poate strunji un cilindru înalt dar îngust, sau unul lat şi scund. În care caz va rămîne mai puţin material strunjit?

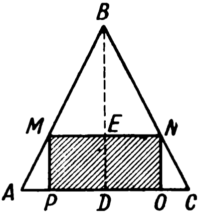


Fig. 176. Secţiunea axială a conului şi cilindrului.

Raza r a bazei cilindrului (PD sau ME) este uşor de aflat din următoarea proporţie

$$\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD}, \text{ adică } \frac{r}{R} = \frac{x}{h},$$

de unde

$$r = \frac{Rx}{h}.$$

Înălţimea ED a cilindrului este egală cu $h - x$. Prin urmare volumul lui va fi

$$v = \pi \left(\frac{Rx}{h}\right)^2 \cdot (h - x) = \pi \frac{R^2x^2}{h^2} (h - x),$$

de unde

$$\frac{vh^2}{\pi R^2} = x^2(h - x).$$

În expresia $\frac{vh^2}{\pi R^2}$ mărimile h, R sînt constante şi numai v este variabilă. Vrem să găsim un astfel de x, pentru care v devine maxim. Însă, evident, v va deveni maxim în acelaşi timp cu $\frac{vh^2}{\pi R^2}$, adică cu $x^2(h-x)$. Cînd, însă, această ultimă expresie devine maximă? Avem aici trei factori variabili

x, x şi $(h - x)$. Dacă suma lor ar fi constantă, produsul ar fi maxim atunci cînd factorii ar fi egali. Putem obţine constanţa sumei cu uşurinţă dacă vom înmulţi cu 2 ambii membri ai egalităţii din urmă. Obţinem

$$\frac{2vh^2}{\pi R^2} = x^2(2h - 2x).$$

Acum cei trei factori ai membrului al doilea au suma constantă

$$x + x + 2h - 2x = 2h.$$

Prin urmare, produsul lor va fi maxim atunci cînd toţi factorii vor fi egali, adică

$$x = 2h - 2x \quad \text{şi} \quad x = \frac{2h}{3}.$$

Atunci va deveni maximă şi expresia $\frac{2vh^2}{\pi R^2}$, iar împreună cu ea şi volumul v al cilindrului.

Acum ştim cum trebuie să fie strunjit cilindrul necunoscut: baza lui de sus trebuie să fie situată la o distanţă, de vîrful conului, egală cu $\frac{2}{3}$ din înălţimea lui.

CUM SĂ LUNGIM SCÎNDURA?

În timpul confecţionării unui obiect oarecare în atelier sau la domiciliu se întîmplă uneori ca dimensiunile materialului aflat la îndemînă să nu fie acelea de care avem nevoie.

Atunci trebuie să încercăm să modificăm dimensiunile materialului, prelucrîndu-l în mod corespunzător, şi putem obţine multe cu ajutorul ingeniozităţii geometrice şi constructive şi al calculelor.

Să ne reprezentăm un astfel de caz: pentru confecţionarea unui raft de cărţi avem nevoie de o scîndură cu dimensiuni exacte, şi anume avînd 1 m lungime şi 20 cm lăţime, iar noi avem o scîndură mai scurtă, dar mai lată, de exemplu, 75 cm lungime şi 30 cm lăţime (fig. 177, stînga).

Cum vom proceda?

Desigur putem tăia de-a lungul scîndurii o porțiune cu o lățime de 10 cm (linia punctată), tăind-o apoi în trei bucăți egale, avînd fiecare o lungime de 25 cm, și cu două dintre ele să putem lungi scîndura (fig. 177, jos).

O astfel de rezolvare a problemei nu ar fi economică din cauza numărului de operații (trei operații de tăiere și trei

Fig. 177. Cum să lungim scîndura cu ajutorul a trei operații de tăiere și al unei operații de încleiere?

operații de încleiere) și nu ar satisface cerințele de rezistență (rezistența ar fi scăzută în locul unde bucățile sînt lipite la scîndură).

Problemă

Găsiți un procedeu de lungire a scîndurii respective cu ajutorul a trei operații de tăiere și ale unei singure operații de încleiere.

Rezolvare

Trebuie (fig. 178) să tăiem scîndura $ABCD$ pe diagonala AC și să deplasăm o jumătate (de exemplu, $\Delta\ ABC$) de-a lungul diagonalei paralel cu ea însăși pe distanța C_1E, egală cu lungimea care nu ne ajunge, adică cu 25 cm; lungimea totală a celor două jumătăți va fi egală cu 1 m. Apoi, aceste jumătăți trebuie să le lipim pe linia AC_1 și capetele rămase (triunghiurile hașurate) să le tăiem. Vom obține o scîndură cu dimensiunile necesare.

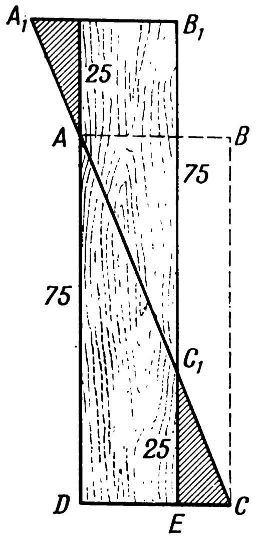


Fig. 178. Rezolvarea problemei privitoare la lungirea scîndurii.

Într-adevăr, din asemănarea triunghiurilor ADC și C_1EC vom avea:

$$AD : DC = C_1E : EC,$$

de unde

$$EC = \frac{DC}{AD} \cdot C_1E,$$

sau

$$EC = \frac{30}{75} \cdot 25 = 10 \text{ cm};$$

$$DE = DC - EC = 30 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm}.$$

DRUMUL CEL MAI SCURT

În încheiere, să examinăm o problemă de „maxim și minim“, care se rezolvă printr-o construcție geometrică extrem de simplă.

Problemă

Pe malul unui rîu trebuie să construim un castel de apă din care apa să ajungă prin țevi pînă în punctele populate A și B (fig. 179).

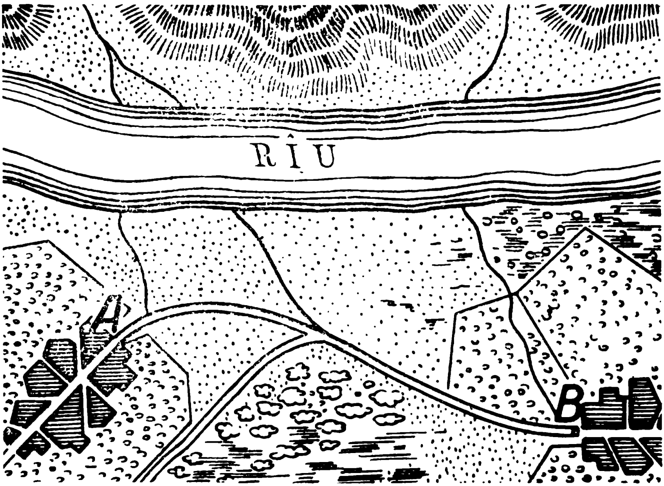


Fig. 179. Problema privitoare la castelul de apă.

În ce punct trebuie să construim castelul pentru ca lungimea totală a țevilor de la castelul de apă și pînă la ambele sate să fie minimă?

Rezolvare

Problema se reduce la aflarea drumului celui mai scurt de la A la malul rîului și apoi la B.

Să admitem că drumul căutat este ACB (fig. 180). Să îndoim desenul pe linia CN. Obținem punctul B'. Dacă ACB este drumul cel mai scurt, atunci, deoarece $CB' = CB$, drumul ACB' trebuie să fie mai scurt decît oricare altul (de exemplu, ADB'). Prin urmare, pentru a afla drumul cel mai scurt trebuie să găsim doar punctul C de intersecție al dreptei AB' cu linia malurilor. Atunci, unind C şi B, vom găsi ambele părţi ale drumului celui mai scurt de la A la B.

Ducînd în punctul C o perpendiculară la CN, este uşor să observăm, că unghiurile ACP şi BCP, alcătuite de această perpendiculară cu ambele laturi ale drumului celui mai scurt, sînt egale între ele ($\sphericalangle ACP = \sphericalangle B'CQ = \sphericalangle BCP$).

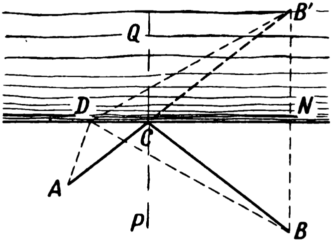


Fig. 180. Rezolvarea geometrică a problemei privitoare la alegerea drumului celui mai scurt.

Aceasta este, după cum se ştie, legea de reflexie a unei raze de lumină căzută pe o oglindă: unghiul de incidenţă este egal cu unghiul de reflexie. De aici rezultă că raza de lumină în timpul reflexiei alege drumul cel mai scurt, — concluzie care era cunoscută încă cu 2000 de ani în urmă fizicianului şi cercetătorului antic al problemelor de geometrie, Heron din Alexandria.

CUPRINS

Capitolul II

Geometria la rîu

Capitolul III

Geometria în cîmp liber

Capitolul IV

Geometria în marş

Capitolul V

Trigonometrie de marş fără formule şi tabele

Capitolul VI

Unde cerul se uneşte cu pămîntul

Capitolul VII

Geometria Robinsonilor

Partea a doua

ÎNTRE ACTIVITATE SERIOASĂ ŞI GLUMĂ ÎN GEOMETRIE

Capitolul VIII

Geometrie în beznă

Capitolul IX

Cunoştinţe vechi şi noi cu privire la cerc

Capitolul XI

Numere mari și mici în geometrie

Capitolul XII

Economie geometrică