orizonturi

62

Charles W. Trigg

ingeniozitate și surpriză în matematică

orizonturi

62

editura
enciclopedică
română

Charles W. Trigg

ingeniozitate și surpriză în matematică

270 de probleme

în românește de
Andrei Barsony-Nagy
și Simona Pascu

București,
1975

Ilustraţia copertei :
BOROŞ VALENTINA

Charles W. Trigg
MATHEMATICAL QUICKIES

Dedic această carte soției mele Faye, ca un umil act de recunoștință pentru voia bună cu care a acceptat de-a lungul anilor rolul de „cvasi-văduvă matematică".

Cuvînt înainte

În această culegere accentul se pune pe metoda de rezolvare. Astfel, culegerea îl pune pe cititor în fața unei duble provocări: nu numai de a rezolva problemele, ci și de a găsi soluții mai elegante decît cele propuse.

Colecția mea de „ingeniozități matematice" a luat ființă în martie 1950, cînd, în calitate de redactor al rubricii *Probleme și întrebări* a revistei „Mathematics Magazine" am creat o subrubrică intitulată *Ingeniozități*. În articolul inaugural precizam: „Această rubrică va publica probleme a căror rezolvare cere adesea multă trudă, dar pe care inspirația te poate ajuta să le soluționezi rapid și cu un efort minim. Cititorii sînt solicitați să ne trimită problemele lor favorite — ne referim la probleme de această natură

— însoțite de o soluție elegantă și eventual de indicația sursei din care provin". Rubrica a avut succes din capul locului și și-a păstrat și mai departe popularitatea sub conducerea actualului ei redactor, R. T. Horton.

O soluție este considerată, în general, elegantă dacă ea se distinge prin claritate, concizie, logică și printr-un element de surpriză. Concizia nu se realizează omițînd pași esențiali pentru o clară înțelegere a problemei și nici recurgînd la evaziunea matematică („este evident că..."). Bineînțeles, elementul surpriză dispare dacă cititorul este dinainte familiarizat cu calea de rezolvare a problemei respective.

Ingeniozitatea și eleganța sînt noțiuni relative, pentru care nu există un criteriu de apreciere absolut. Adesea „efectul magic" rezultă fie din aplicarea unei teoreme mai puțin cunoscute sau neelementare, fie din conexiunea cu o altă disciplină. Alteori, dimpotrivă, simplitatea provine din aplicarea unor metode matematice mai elementare. Un „artificiu" neobișnuit sau aparent fără legătură cu problema poate de asemenea să ne conducă la o soluție ingenioasă, elegantă.

Problemele bune au tendința de a deveni cu timpul anonime, cu atît mai mult cu cît unii autori modifică enunțurile, în scopul de a ascunde „împrumuturile" nemărturisite. Pentru a nu continua această nedorită situație, dar totodată fiind conștienți că e practic imposibil de a preciza cu certitudine prima apariție a unei probleme, în această carte se indică autorii și sursa soluțiilor. Astfel, indicația „Leo Moser, *M. M.*, 25 (mai 1952), 290" pe care o găsim la sfîrşitul soluţiei problemei 15 înseamnă că soluţia aparţine lui Leo Moser şi că ea a fost extrasă din revista „Mathematics Magazine", din mai 1952, pagina 290, volumul 25. Dacă nu există indicaţii cu privire la autori, aceasta înseamnă că soluţia ne aparţine.

Prescurtările folosite sînt: *A.M.M.* („American Mathematical Monthly"); *M.M.* („Mathematics Magazine"); *P.M.E.J.* („Pi Mu Epsilon Journal"); *S.S.M.* (School, Science and Mathematics"). Conducătorii acestor reviste, ca şi cei ai revistei „The Pentagon" au binevoit să-mi ofere permisiunea de a reproduce din publicaţiile lor. Atît lor cît şi altor surse care au contribuit la găsirea soluţiilor respective le exprimăm recunoştinţa noastră.

În unele cazuri soluţia originală a fost altfel formulată, fără a modifica însă metoda folosită. Cîteodată, atunci cînd simboluri binecunoscute care permit o compactificare a soluţiei nu sînt utilizabile, expunerea soluţiei poate să fie mai lungă, cu toate că ideile fundamentale şi etapele folosite sînt relativ puţine.

Deoarece o parte esenţială a rezolvării problemei este încadrarea ei în disciplina matematică din care face parte, am evitat conştient orice clasificare a problemelor pe domenii ale matematicii. În această dezordine intenţionată, dificultatea problemelor este şi ea variabilă, în tot cuprinsul cărţii problemele relativ uşoare fiind repartizate la întîmplare.

Toate ideile care intervin în rezolvări pot fi înţelese de un elev de liceu bine pregătit şi, în foarte multe cazuri, şi de elevi din ultimele clase ale şcolii generale. Unele probleme pot interesa şi pe studenţi. Orice cititor care descoperă o soluţie mai elegantă decît cea dată în carte este rugat să mi-o comunice.

2404 Loring Street
San Diego
California 92109

CHARLES W. TRIGG

Probleme

Găsiţi în paginile următoare un număr de 270 probleme de diferite grade de dificultate şi din variate domenii ale matematicii, culese din diverse surse şi selectate astfel încît să supună unei solicitări cît mai vii interesul şi perspicacitatea cititorului. Ele vă adresează o dublă provocare — aceea de a le rezolva şi, totodată, de a descoperi soluţii mai simple, mai ingenioase şi mai elegante decît cele oferite în a doua parte a cărţii.

Problemele sînt aşezate într-o ordine întîmplătoare; nu există o împărţire a lor pe domenii ale matematicii sau pe grade de dificultate. Oricare dintre probleme poate fi foarte grea sau foarte uşoară.

1. Funcționarul neglijent

După ce dactilografa a bătut la mașină zece scrisori și a scris adresele pe plicurile corespunzătoare, un funcționar neglijent a introdus, la întîmplare, fiecare scrisoare în cîte un plic. Care este probabilitatea ca exact nouă scrisori să fi fost introduse în plicurile care le erau destinate?

2. Teorema lui Pitagora

Să se demonstreze că pătratul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal cu suma pătratelor celor două catete.

3. Patru ecuații cu patru necunoscute

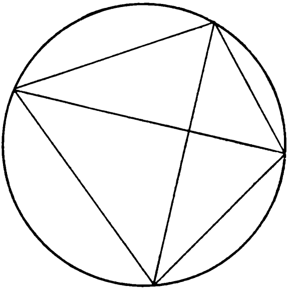
Se se găsească toate soluțiile sistemului următor:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 10 \\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 &= 30 \\ x^3 + y^3 + z^3 + w^3 &= 100 \\ xyzw &= 24 \end{aligned}$$

4. Un test notat cu zero

Un test alcătuit din 26 de întrebări a fost notat în modul următor: pentru fiecare răspuns corect s-au dat în plus opt puncte și pentru fiecare răspuns greșit s-au scăzut cinci puncte. Care este numărul de răspunsuri corecte, dacă au fost abordate toate întrebările și nota finală a fost zero?

5. Teorema lui Ptolemeu



Să se demonstreze că în orice patrulater inscriptibil convex produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse.

6. O descompunere în factori uşor de efectuat

Să se descompună în factori, fără a grupa termenii, polinomul:

$$x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + \\ + x^2y^6 - xy^7 + y^8.$$

7. Un calcul mintal

Ridicaţi la pătrat fără hîrtie şi creion numărul 85.

8. O ecuaţie de gradul patru

Cîte rădăcini negative are ecuaţia:

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0.$$

9. Un milion de fiecare parte

O mulţime de două milioane de puncte este inclusă în interiorul unui cerc cu diametrul de 1 cm. Există oare o dreaptă care să aibă de fiecare parte a ei exact un milion de puncte? Dacă există, de ce?

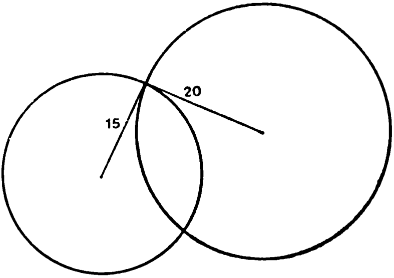
10. O infinitate de numere prime

Să se demonstreze că există o infinitate de numere prime.

11. Numere complexe

Să se simplifice fracția $(27 + 8i)/(3 + 2i^3)$.

12. Arii suprapuse



Un cerc cu raza de 15 unități intersectează un alt cerc cu raza de 20 de unități sub un unghi drept. Care este diferența ariilor porțiunilor nesuprapuse?

13. Turneul de tenis

La un turneu de tenis de tip eliminator participă n jucători. Cîte meciuri trebuie jucate (sau cîștigate prin neprezentare) pentru a ști cine este cîștigătorul?

14. O sumă de factoriale

Să se calculeze suma

$$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + n(n!).$$

15. Intersecția a doi cilindri

Axele de simetrie a doi cilindri circulari drepți cu diametrele bazelor de 2 cm se intersectează sub un unghi drept. Care este volumul comun celor doi cilindri?

16. Reprezentările numerelor întregi

Numărul 3 poate fi scris ca un singur număr sau ca sumă de numere naturale în următoarele patru moduri: 3, 1+2, 2+1, 1+1+1. Să se demonstreze că orice întreg pozitiv n poate fi scris în același fel în 2^{n-1} moduri.

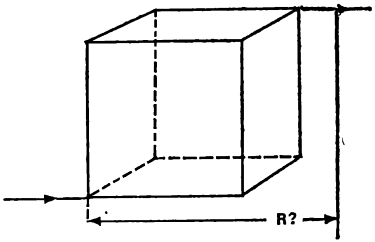
17. O ecuație cuadratică cu rădăcini raționale

Să se arate că ecuația

$$(\ )x^4 + (\ )x^3 + (\ )x^2 + (\ )x + (\ ) = 0$$

în care parantezele vor fi înlocuite cu o permutare arbitrară a numerelor 1, —2, 3, 4, —6 admite întotdeauna cel puțin o rădăcină rațională.

18. Rezistența electrică a unui cub



Fiecare muchie a unui cub este o rezistență electrică de 1 ohm. Care este în acest caz rezistența totală dintre două vîrfuri diagonal opuse ale cubului?

19. Cînd împărțitorul este ... o glumă*

Fiecare literă din criptograma *AHHAAH*: *JOKE*=*HA* reprezintă în mod unic o cifră în sistemul de numerație cu baza zece. Să se reconstituie această împărțire.

20. Vînzătorul de ciorapi

Intrînd într-un magazin, o fată a vrut să cumpere x perechi de ciorapi pentru y sutare (x și y fiind numere întregi). Vînzătorul i-a propus

---

* *Joke* înseamnă în limba engleză glumă. Celelalte litere redau rîsul pe care-l stîrnește o glumă: ah! ha! ah! ha! *(N.T.)*.

următorul tîrg: — Dacă mai cumperi zece perechi de ciorapi, ți le voi da pe toate pe 2 sutare și deci vei economisi 80 de lei la o duzină. Să se afle x și y.

21. Raportul unor arii poligonale

Un triunghi echilateral și un hexagon regulat au perimetrele egale. Care este raportul ariilor lor?

22. Paharele răsturnate

Să considerăm o mulțime de n pahare așezate cu gura în sus. Se cere să răsturnăm toate paharele printr-o serie de operații, astfel încît la fiecare operație să fie întoarse $n-1$ pahare. Să se arate că acest lucru este posibil pentru n par și că nu este posibil pentru n impar.

23. Sfîrșitul lumii

În ziua de 1 aprilie 1946, ziarul „Erewhon Daily Howler" a publicat următorul articol: „Renumitul astrolog și numerolog din Guayazuela, Profesorul Euclide Parcelso Bombast Umbugio, prezice sfîrșitul lumii pentru anul 2141. La baza acestei predicții se află profundele sale cercetări cu caracter istorico-matematic. Profesorul Umbugio a calculat valoarea expresiei

$$1492^n - 1770^n - 1863^n + 2141^n$$

pentru n = 0, 1, 2, 3, ..., 1945 şi a demonstrat că toate numerele pe care le-a obţinut, de-a lungul multor luni de calcule laborioase, sînt divizibile prin 1946. Să observăm că numerele 1492, 1770, 1863 reprezintă date memorabile ale istoriei americane: descoperirea Lumii Noi, masacrul de la Boston* şi sfîrşitul războiului de secesiune. Ce dată remarcabilă ar mai putea fi în acest caz 2141? Fără îndoială, numai aceea a sfîrşitului lumii."

Daţi-i o lecţie Profesorului! Obţineţi rezultatul lui cu mult mai puţine calcule!

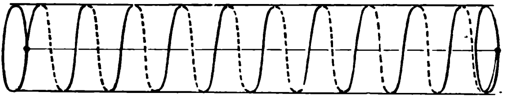
24. Şase întregi distincţi

Să se găsească mulţimea formată din cei mai mici şase întregi pozitivi distincţi care satisfac condiţia ca produsul oricăror cinci dintre ei să fie egal cu perioada inversului celui de-al şaselea număr scris ca fracţie zecimală, luată o dată sau de mai multe ori. De exemplu $1/41 = 0,\mathit{02439}02439...$, deci 02439 este perioada inversului lui 41.

---

* Eveniment memorabil al istoriei S.U.A., care a premers războiului pentru independenţă (1775—1883). La 5 martie 1770, în cursul unor ciocniri cu populaţia oraşului Boston, care sprijinea mişcarea pentru independenţă, trupele coloniale engleze au tras în mulţime: au căzut morţi şi răniţi. Masacrul de la Boston a stîrnit indignare, înteţind spiritul de revoltă al poporului american *(N.T.)*.

25. Lungimea unei elice



În jurul unei țevi cilindrice cu circumferința exterioară de 4 cm și cu lungimea de 9 cm sînt înfășurate în mod elicoidal zece spire de sîrmă. Capetele sîrmei coincid cu capetele cilindrului. Să se găsească lungimea sîrmei.

26. O problemă de minim

Arătați că pentru orice valori pozitive ale lui p, q, r și s, expresia

$$\frac{(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1)}{pqrs}$$

nu poate lua valori mai mici decît 81.

27. O proprietate a pătratelor perfecte

Să se demonstreze că orice pătrat perfect scris în sistemul zecimal cu două sau mai multe cifre are cel puțin două cifre distincte.

28. O problemă de conducere

Consiliul de conducere al unei mari întreprinderi este format din 15 membri. Sub conducerea acestui consiliu lucrează 20 de comisii. Cum îi vom repartiza pe membrii consiliului astfel încît: (1) fiecare membru al consiliului de conducere să lucreze în patru comisii; (2) fiecare comisie să înglobeze trei membri ai consiliului de conducere; (3) oricare două comisii să aibă cel mult un membru al consiliului de conducere în comun.

29. Mozaicul

Să considerăm un carton desenat, pe care îl divizăm prin tăieturi în cartonașe de diferite forme. Jocul numit „Mozaic“ constă în îmbinarea acestor cartonașe astfel încît să reconstituim desenul inițial. Vom numi „mutare“ îmbinarea corectă a două piese sau două grupuri de piese gata îmbinate. Ce procedură va reduce la minimum numărul de mutări necesare pentru a reconstitui un mozaic cu n piese? Care este numărul minim de mutări?

30. Aflarea restului unei împărțiri

Dîndu-se $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x+1$ să se calculeze restul împărțirii lui $f(x^5)$ prin $f(x)$.

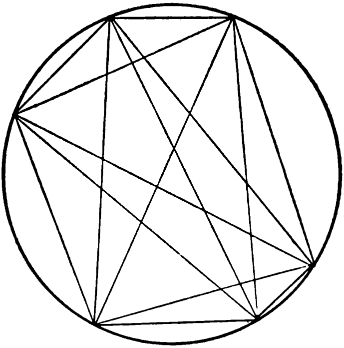
31. Scheletul unei împărțiri

Bunul nostru prieten și eminentul numerolog, Profesorul Euclide Parcelso Bombast Umbugio, are din nou necazuri. El își petrece prețiosul său timp încercînd să regăsesacă, cu ajutorul calculatorului, printre cele $81 \cdot 10^9$ soluții posibile, forma inițială a următoarei împărțiri fără rest, în care cifrele necunoscute au fost înlocuite cu x.

$$
\begin{array}{llllllll|l}
x & x & x & x & x & x & x & x & x\,x\,x \\
\cline{9-9}
x & x & x & & & & & & x\,x\,8\,x\,x \\
\cline{1-3}
 & x & x & x & x & & & & \\
 & & x & x & x & & & & \\
\cline{2-5}
 & & & & x & x & x & x & \\
 & & & & x & x & x & x & \\
\cline{5-8}
\end{array}
$$

Dați-i o lecție Profesorului! Reduceți numărul soluțiilor posibile la $(81 \cdot 10^9)^\circ$!

32. Triunghiuri în cerc



Un număr de n puncte situate pe circumferința unui cerc sînt unite două cîte două în toate modurile posibile, prin drepte. Să se găsească numărul tuturor triunghiurilor formate cu aceste drepte—triunghiuri care au vîrfurile situate în interiorul cercului —, știind că cele n puncte au fost alese astfel încît să nu existe trei drepte concurente.

33. Înmulțire ușor de efectuat

Să se înmulțească 5 746 320 819 cu 125.

34. Un șir alternant

Să se găsească o expresie pentru termenul general al șirului:

$$-4,\ +7,\ -4,\ +7,\ -4,\ +7,\ -\dots.$$

35. O expresie cu radicali

Să se simplifice

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

36. Comoara îngropată

Un pirat a hotărît să îngroape o comoară pe țărmul unei insule; pe țărm erau două stînci asemănătoare A și B și, ceva mai departe de mare, trei cocotieri C_1, C_2 și C_3. Stînd în C_1, piratul a măsurat segmentul C_1A_1 perpendicular pe C_1A și egal cu acesta și îndreptat, față de

C_1A, în regiunea opusă perimetrului triunghiului AC_1B. În același mod el a măsurat segmentul C_1B_1, perpendicular și egal cu C_1B și îndreptat, față de C_1B, în regiunea opusă perimetrului triunghiului AC_1B. Apoi piratul a marcat punctul P_1, intersecția segmentului AB_1 și BA_1. Stînd în C_2 și C_3, el a determinat în mod similar punctele P_2 și P_3 și, în cele din urmă, a îngropat comoara în locul determinat de centrul cercului circumscris triunghiului $P_1P_2P_3$. Întorcîndu-se după cîțiva ani, piratul și-a dat seama că între timp o furtună puternică smulsese din pămînt toți cocotierii. Cum a reușit el, în pofida acestui fapt, să-și regăsească comoara?

37. Plata gratificațiilor

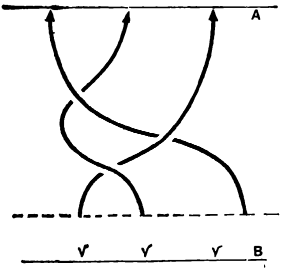
O companie a oferit gratificații celor 350 de angajați ai ei, în modul următor: fiecărui bărbat 10 dolari și fiecărei femei 8,15 dolari. Toate femeile au acceptat gratificația, dar un anumit procent de bărbați au refuzat-o. Să se afle suma totală plătită femeilor, știind să suma plătită atît bărbaților cît și femeilor nu depinde de numărul total al bărbaților.

38. Simplificarea unui produs

Să se aducă la forma cea mai simplă produsul

$$(3^{2^0}+1)(3^{2^1}+1)(3^{2^2}+1)\dots(3^{2^n}+1).$$

39. Sforile sînt încurcate?



Trei sfori fixate de o scîndură *A* sînt încurcate în modul arătat în desen. Cum pot fi dispuse alte trei sfori astfel încît, după ce vom lega un capăt al fiecăreia dintre ele cu cîte un capăt liber al sforilor date şi vom prinde la celelalte capete sforile suplimentare de o scîndură *B*, să obţinem, prin depărtarea celor două scînduri, trei sfori paralele?

40. Diferenţa egală cu cîtul

Să se găsească două numere cu proprietatea că atît diferenţa cît şi cîtul lor sînt egale cu 5.

41. Elevul somnoros

La sfîrşitul unei ore de algebră elevul nostru s-a trezit din somn şi a mai apucat să-l audă pe profesor spunînd: „...şi vă voi da indicaţia că toate rădăcinile sînt reale şi pozitive“. Uitîndu-se la tablă, el a văzut tema pentru acasă — rezolvarea unei ecuații de gradul 20 — pe care a început să și-o copieze în grabă. Pînă cînd a reușit să copieze primii doi termeni, $x^{20} - 20x^{19}$, profesorul a șters toată tabla și elevul nu a mai reușit să vadă decît că ultimul termen este $+1$. Puteți să-l ajutați pe eroul nostru să rezolve ecuația?

42. Muchiile unui poliedru

Să se demostreze că nici un poliedru nu poate să aibă exact șapte muchii, dar poate să aibă orice alt număr de muchii mai mare decît cinci.

43. O congruență simplă

Să se arate că $63! \equiv 61!$ (modulo 71)*

44. Triunghiul este echilateral

Să se arate că dacă laturile unui triunghi verifică relația:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca,$$

triunghiul este echilateral.

---

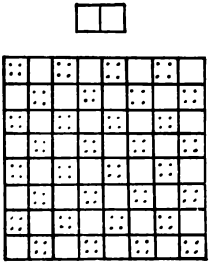
* $a \equiv b$ (mod m) este echivalent cu „$a - b$ se divide cu m" (*N.T.*).

45. Mai simplă decît pare

Evaluați expresia:

$$\left(\frac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+3\cdot6\cdot12+\cdots}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+3\cdot9\cdot27+\cdots}\right)^{1/3}.$$

46. Acoperirea unei table de şah



Dacă eliminăm în mod arbitrar două pătrate de culori opuse de pe o tablă de şah, poate fi acoperit restul tablei cu dreptunghiuri de dimensiunea 1×2?

47. O egalitate numerică

Arătați că

$$(1110)\,(1111)\,(1112)\,(1113) = (1235431)^2-1$$

în orice sistem de numerație cu baza mai mare decît cinci.

48. Editorială

Un număr de cărți au fost publicate periodic, una la cîte șapte ani. Cînd a apărut cea de-a șaptea carte, suma anilor de publicare menționați pe copertele interioare ale celor șapte cărți era 13 524. În ce an a fost publicată prima carte?

49. Trei medii

Demonstrați prin raționamente geometrice că media geometrică G a două numere a și b este medie proporțională între media aritmetică A și media armonică H a acelorași numere.

50. Concursul de frumusețe

— Ce ar fi dacă mi-ai divulga — se înțelege, confidențial — ordinea celor cinci cîștigătoare ale concursului de frumusețe organizat de revista voastră? — am sugerat eu directoarei revistei. Ea, bineînțeles, m-a refuzat dar a acceptat să-mi pună la încercare gustul, invitîndu-mă să formulez un pronostic. „Este cumva $A - B - C - D - E$?" am întrebat eu.

— Ai un talent extraordinar în a greși, — mi-a răspuns ea compătimitor, — nu numai că în pronosticul dumitale nici una dintre persoane nu se află pe locul respectiv, dar, în plus, nici o persoană nu e plasată imediat după predecesoarea ei din ordinea corectă".

— Bine, atunci ordinea nu e cumva $D - A - E - C - B$? — am întrebat eu.

— Acum ai ghicit ceva mai bine, m-a încurajat ea prudent. Ai două persoane plasate pe pozițiile corecte și două care sînt corect plasate în urma predecesoarelor lor imediate.

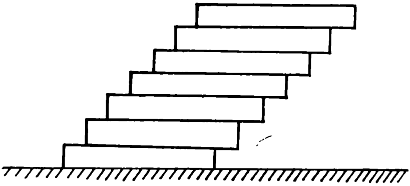
După ce m-am gîndit puțin i-am spus ordinea corectă și ea m-a pus să jur că nu o voi destăinui nimănui. Care e această ordine?

51. O ecuație în care intervin sume

Să se determină n, știind că:

$$\frac{1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3} = \frac{199}{242}.$$

52. O construcție cu piese de domino



Un număr de n piese de domino, fiecare avînd forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 2, 1 și 1/4 unități sînt suprapuse orizontal pe o masă, una peste cealaltă. Să se găsească distanța maximă, măsurată pe orizontală, dintre extremitatea piesei de deasupra și piesa de bază, astfel încît construcția să nu se răstoarne.

53. Dînd cu zarul

Un zar pe ale cărui fețe figurează 0, 1, 2, 3, 4, 5 este aruncat de atîtea ori pînă cînd totalul cifrelor obținute depășește 12. Care este numărul pe care-l putem obține cu o probabilitate mai mare decît oricare dintre celelalte totaluri posibile?

54. Un sistem de ecuații liniare

— Acest sistem liniar de n ecuații cu n necunoscute, are o proprietate ciudată — a spus Marele Matematician.

— Doamne Dumnezeule! Ce proprietate? — a exclamat Micul Învățăcel.

— Remarcă faptul că numerele constante care intervin în sistem sînt în progresie aritmetică — a spus Marele Matematician.

— Cînd explicați dumneavoastră, totul mi se pare așa de clar! — a spus Micul Învățăcel. Vreți să spuneți că, de exemplu, în sistemul: $6x + 9y = 12$ și $15x + 18y = 21$?

— Chiar așa — a răspuns Marele Matematician cu vocea sa de bas. Evident, sistemul are o soluție unică. Poți s-o găsești?

— Doamne Dumnezeule! — a strigat Micul Învățăcel. Problema aceasta mă depășește!

Dar pe dumneavoastră?

55. Teorema bisectoarei

Să se demonstreze că bisectoarea unghiului unui triunghi împarte latura opusă în segmente proporționale cu laturile alăturate.

56. Probabilitatea divizibilității

Să se găsească probabilitatea ca, înlocuind într-o ordine arbitrară cu cifrele 0, 1, 2,..., 9 spațiile goale din numărul

$$5\_383\_8\_2\_936\_5\_8\_203\_$$
$$\_9\_3\_76,$$

rezultatul să se dividă cu 396.

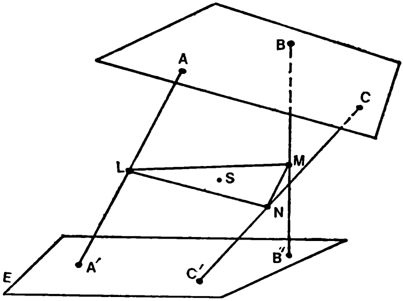
57. O ecuație fără soluții întregi

Să se demonstreze că ecuația $x^2 - 3y^2 = 17$ nu admite soluții întregi.

58. Fiul profesorului de matematică

Profesorul de matematică scrie pe tablă un polinom $f(x)$ cu coeficienți întregi și spune: „Azi e ziua de naștere a fiului meu. Dacă dăm lui x valoarea A egală cu vîrsta lui, atunci $f(A) = A$. Rețineți de asemenea că $f(0) = P$ și că P e un număr prim mai mare decît A". Care este vîrsta fiului profesorului de matematică?

59. Un loc geometric în spațiu



Se dă un plan E și trei puncte A, B, C necoliniare, situate de aceeași parte a planului E; în plus, planul ABC nu e paralel cu planul E. Fie A',B',C' trei puncte arbitrare din planul E. Punctele L,M,N sînt respectiv mijloacele segmentelor AA', BB' și CC', iar S centrul de greutate al triunghiului LMN. Să se găsească locul geometric al lui S cînd A', B' și C' se mișcă independent în planul E.

60. Observații meteorologice

Făcînd observații de-a lungul unei perioade de cîteva zile, s-a constatat că în nici una din zile nu a plouat și dimineața și după-amiaza. A plouat în total în 9 zile și n-a plouat în 7 dimineți și 6 după-amieze. Cîte zile au durat observațiile?

61. Teorema lui Steiner-Lehmus

Să se demonstreze că dacă într-un triunghi două bisectoare interioare sînt egale, atunci triunghiul e isoscel.

62. Dansul Hula-Hoop

Considerăm o fată a cărei talie este un cerc perfect şi care stă vertical în repaus. În jurul mijlocului ei se învîrteşte un cerc* cu diametrul egal cu dublul diametrului taliei. Să se arate că după o rotaţie completă punctul de pe cerc care era iniţial în contact cu talia fetei a descris o distanţă egală cu perimetrul pătratului circumscris taliei fetei.

63. Împărţirea cercului în opt părţi egale

Să se arate că, pentru orice k real, punctele de intersecţie ale curbei

$$x^4 + kx^3y - 6x^2y^2 - kxy^3 + y^4 = 0$$

cu cercul $x^2 + y^2 = 1$ determină pe cerc opt arce egale.

64. O progresie aritmetică specială

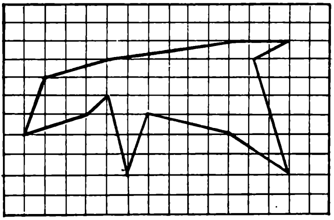
Să se găsească o progresie aritmetică infinită de numere naturale astfel încît nici un termen al progresiei să nu fie o putere de ordinul r ($r = 2, 3, \ldots, n$) a unui număr întreg.

---

* Cercul se roteşte într-un plan orizontal fără să alunece pe talia fetei *(N.T.)*.

65. Aria unui poligon

Să se calculeze aria poligonului desenat în această figură:



66. O ecuație cu factoriale

Să se găsească toate soluțiile întregi ale ecuației:

$$n!\,(n-1)! = m!$$

67. Două triunghiuri corelate

Să se arate că dacă a, b, c sînt lungimele laturilor unui triunghi, atunci cu segmentele de lungime $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ și $\sqrt{c}$ se poate forma, de asemenea, un triunghi.

68. Unghi maxim în cerc

Fiind date două puncte A și B în interiorul unui cerc, să se găsească un punct C pe cerc astfel încît unghiul ABC să aibă cea mai mare valoare posibilă.

69. Determinantul unui pătrat magic

Fie S suma elementelor unui pătrat magic de ordinul trei și fie D valoarea pe care o obținem considerînd acest pătrat ca un determinant. Să se demonstreze că D/S este un număr întreg.

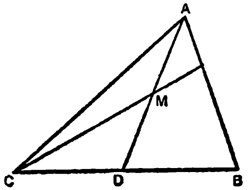
70. Un număr cu cinci cifre care nu este pătrat perfect

Să se demonstreze că nici un pătrat perfect nu poate fi scris în sistemul de numerație zecimal cu exact cinci cifre distincte congruente modulo 2.

71. Divizarea unei sfere

Cum poate fi divizată suprafața unei sfere într-un număr maxim de figuri egale, astfel încît fiecare latură a unei figuri să fie un arc de cerc mare, mai mic însă decît un semicerc?

72. Trisectoarea laturii unui triunghi



Să se demonstreze că dacă o dreaptă care trece prin vîrful C al unui triunghi intersectează mediana dusă din A la mijlocul acesteia, ea împarte latura AB în raportul 1:2.

73. O descompunere în factori

Să se descompună în factori polinomul $a^{15}+1$.

74. Un număr curios

Să se găsească un număr pozitiv care este egal cu produsul dintre o cincime și o șeptime din el.

75. Două hexagoane regulate

Să se găsească, fără ajutorul radicalilor, raportul ariilor hexagoanelor regulate înscrise și respectiv circumscrise aceluiași cerc.

76. Termenii generali ai unor șiruri

Să se găsească expresiile care dau termenul general al șirurilor

(a) 0, 3, 26, 255, 3124,...

(b) 1, 2, 12, 288, 34560,...

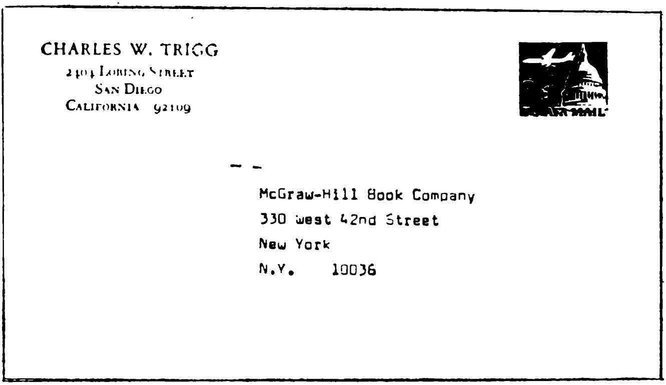
77. Propagarea căldurii

Trei muchii ale unui pătrat de tablă omogen sînt menţinute la temperatura de 0°, iar a treia muchie este încălzită la 100°. Neglijînd pierderile superficiale de căldură, să se găsească temperatura din centrul pătratului de tablă.

78. Are sens?

Dacă 1/4 din 20 este 6, atunci cît este 1/5 din 10?

79. Transformarea plicului în tetraedru



Un plic lipit se taie după o linie dreaptă. Cum trebuie făcută tăietura astfel încît din cele două bucăți obținute să se poată construi prin îndoire două tetraedre egale?

80. O criptogramă

În următoarea criptogramă fiecare literă reprezintă în mod unic o cifră în sistemul de numerație cu baza zece:

$$7\ (FRYHAM) = 6\ (HAMFRY)$$

Să se identifice fiecare literă cu cifra corespunzătoare.

81. Vînzarea oilor

La moartea sa, un fermier a lăsat moștenire fiilor săi cîteva oi și un miel. Fiii au vîndut aceste animale, prețul unei oi fiind de 10 dolari și prețul mielului fiind ceva mai mic. Prețul mediu (exprimat în dolari) pe cap de animal este egal cu numărul animalelor vîndute. Știind că animalele au fost împărțite în număr egal între cei doi frați pentru a fi vîndute, să se afle ce sumă trebuie să-i mai dea fiul care a primit numai oi celui care a primit și mielul, pentru ca banii să fie egal împărțiți?

82. Un volum constant

Să se demonstreze că volumul unui tetraedru ale cărui vîrfuri sînt capetele a două segmente situate pe două drepte necoplanare nu se modifică dacă aceste segmente alunecă de-a lungul dreptelor, menținîndu-și lungimile constante.

83. Un număr zecimal periodic

Să se calculeze perioada numărului zecimal egal cu 1/49.

84. O ecuaţie iraţională

Să se rezolve ecuaţia:

$$(6x + 28)^{1/3} - (6x - 28)^{1/3} = 2$$

85. Concursul cu premii

Profesorul E.P.B. Umbugio încearcă să-şi suplimenteze modestul său salariu de profesor participînd la concursuri cu premii. Unul din aceste concursuri cere participanţilor să găsească numărul de drumuri posibile în cadrul tabelului de jos, astfel ca fiecare drum să fie marcat de litere alăturate, care împreună să formeze cuvîntul MATHEMATICIAN.

M

M A M

M A T A M

M A T H T A M

M A T H E H T A M

M A T H E M E H T A M

M A T H E M A M E H T A M

M A T H E M A T A M E H T A M

M A T H E M A T I T A M E H T A M

M A T H E M A T I C I T A M E H T A M

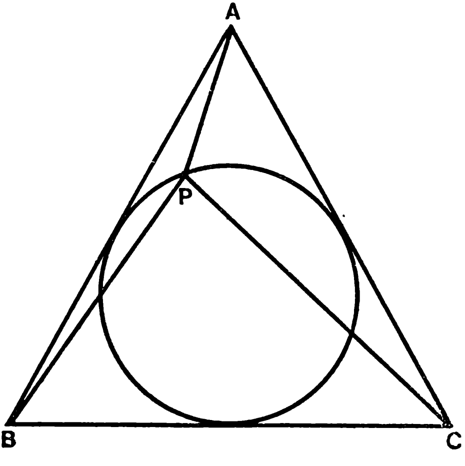
M A T H E M A T I C I C I T A M E H T A M

M A T H E M A T I C I A I C I T A M E H T A M

M A T H E M A T I C I A N A I C I T A M E H T A M

Umbugio a numărat 1587 de astfel de drumuri care pleacă de la o literă din primele cinci rînduri. Pe urmă însă și-a pierdut simțul de orientare (pentru a fi discreți vom trece sub tăcere cauzele) și a încurcat liniile și coloanele. Să-l ajutăm pe Profesor să găsească cu un efort minim de calcul numărul de drumuri posibile.

86. O sumă constantă



Fie ABC un triunghi echilateral și P un punct ales arbitrar pe cercul înscris în triunghi. Să se demonstreze că suma $PA + PB + PC$ nu depinde de poziția punctului P.

87. Doi întregi incompatibili

Să se arate că oricare ar fi numerele naturale x și y astfel încît $y>2$, 2^x+1 nu se divide prin 2^y-1.

88. O problemă de alegere

O singură pereche de valori din cele de mai jos nu satisface ecuația $187x-104y=41$.

(1) $x=3,\quad y=5$; (2) $x=107,\quad y=192$;

(3) $x=211,\quad y=379$;

(4) $x=314,\ y=565$; (5) $x=419,\ y=753$.

Care este această pereche?

89. Concurența medianelor

Să se demonstreze că medianele AA', BB' și CC' ale unui triunghi sînt concurente.

90. Un surprinzător pătrat perfect

În ce sistem de numerație numărul 11111 este un pătrat perfect?

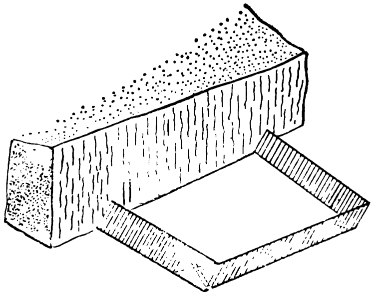
91. Poligon înscris într-o elipsă?

Să se arate că într-o elipsă cu axe inegale nu se poate înscrie nici un poligon regulat cu mai mult de patru laturi.

92. Aşteptînd o convorbire telefonică cu Sinkiang

Un om aşteaptă să primească legătura pentru o convorbire telefonică cu Sinkiang. În acest timp, ca să nu se plictisească, el scrie maşinal sub formă de număr zecimal suma seriei $\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+$ $+\frac{3}{10^3}+\ldots+\frac{u}{10^n}+\ldots$ Fiind un tip meticulos, el urmăreşte cu atenţie toate cifrele care intervin. Să se arate că el va primi legătura telefonică înainte de a ajunge să scrie cifra 8.

93. Îngrădirea unui ţarc



Un fermier a hotărît să îngrădească un ţarc dreptunghiular de 200 m². O stîncă verticală poate fi folosită drept una dintre laturile îngrădirii. Ce dimensiuni trebuie să aibă gardul, astfel încît construcţia să fie realizată la un preţ minim?

94. Un sistem de cinci ecuații liniare

Să se găsească soluțiile sistemului de ecuații:

$$x + y + z + u = 5$$
$$y + z + u + v = 1$$
$$z + u + v + x = 2$$
$$u + v + x + y = 0$$
$$v + x + y + z = 4$$

95. O teoremă aproape universală

Să se dea o teoremă referitoare la numerele întregi valabilă pentru orice întreg n diferit de 5, 17 și 257.

96. Trisectoarele unui unghi

Să considerăm, în triunghiul ABC, BD și BE, trisectoarele unghiului B, iar CD și CE, trisectoarele unghiului C · E fiind punctul cel mai apropiat de latura BC, să se demonstreze că unghiurile BDE și EDC sînt egale.

97. Cifra unităților și șirul lui Fibonacci

Șirul 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., numit șirul lui Fibonacci este dat de formula de recurență $F_{n+2} =$

$= F_n + F_{n+1}, F_1 = F_2 = 1$. Să se studieze dacă cifra unităților termenilor acestui șir formează un șir periodic. (De exemplu, șirul 0, 5, 5, 0, 5, 5, 0, 5, 5, ... este un șir periodic).

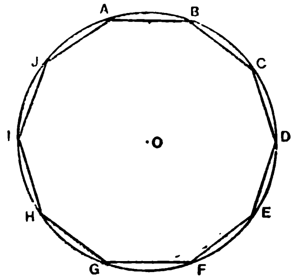
98. Două ecuații corelate

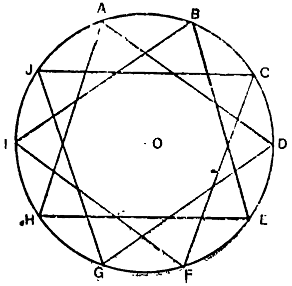
Dacă a, b, c sînt rădăcinile ecuației $x^3 + qx + r = 0$, să se formeze ecuația care admite ca rădăcini $(b+c)/a^2$, $(c+a)/b^2$ și $(a+b)/c^2$.

99. Scheletul unui produs

Produsul a trei numere întregi pare și consecutive este 87 ***** 8. Să se găsească aceste numere și să se înlocuiască cifrele care lipsesc din produs.

100. Decagoane înscrise în cerc





Dacă împărțim circumferința unui cerc în zece părți egale, atunci corzile care unesc punctele consecutive ale diviziunii formează un decagon regulat, iar corzile care unesc punctele din trei în trei formează un dodecagon echilateral stelat. Să se demonstreze că diferența dintre lungimile laturilor celor două figuri este egală cu raza cercului.

101. Cei care-și dau mîna

Fiecare om de pe pămînt a dat mîna cu un anumit număr de persoane. Să se demonstreze că numărul celor care au dat mîna cu un număr impar de persoane este par.

102. O operație cu cărți de joc

Dintr-un pachet de cărți de joc numerotate în ordine de la 1 la 97 se scot la întîmplare cinci cărți, care se amestecă apoi cu grijă. Care este probabilitatea ca cele cinci cărți să fi fost extrase din pachet în ordinea mărimii lor?

103. Mediatoarea

Să se demonstreze că mediatoarea segmentului care unește picioarele a două înălțimi ale unui triunghi împarte cea de-a treia latură a triunghiului în două părți egale.

104. O problemă de divizibilitate

Pentru ce valoare întreagă a lui a, polinomul $x^2 - x + a$ este un divizor al lui $x^{13} + x + 90$?

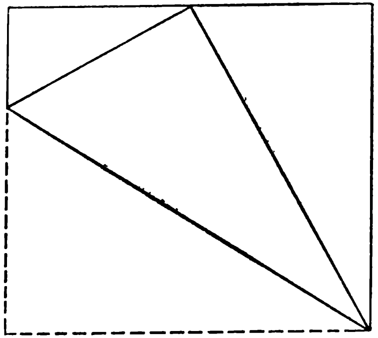
Dilema achizitorului

Achizitorul unei ferme zootehnice trebuie să cumpere 100 de animale cu suma de 10 000 de lei. Dacă un vițel costă 1 000 de lei, un porc 300 de lei și un miel 50 de lei, cîte animale din fiecare fel trebuie să cumpere achizitorul pentru a cheltui întreaga sumă?

106. O descompunere în factori

Să se afle toți factorii primi ai numărului 1 000 027.

107. Un carton îndoit



Un carton dreptunghiular este îndoit în jurul unui colț astfel încît unul din colțurile alăturate să se suprapună peste una dintre laturi. Știind că ariile celor trei triunghiuri dreptunghice care s-au format sînt în progresie aritmetică și că aria celui mai mic triunghi este de 30 cm², să se calculeze aria celui mai mare dintre triunghiuri.

108. Un pătrat perfect unic

Ce pătrat perfect este produsul a patru numere întregi impare consecutive?

109. O inegalitate strictă

Să se demonstreze că $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)$.

110. O sumă de cosinusuri

Să se calculeze

$$\cos 5° + \cos 77° + \cos 149° + \cos 221° + \cos 293°.$$

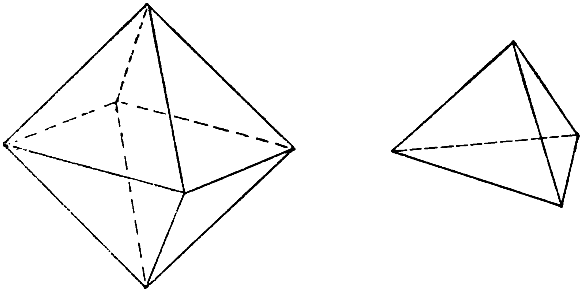
111. Cantitate divizibilă cu 9

Dîndu-se $f(x) = x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$, să se arate că $f(2i)$ este divizibil cu 9.

112. Numere triangulare în sistemul de numerație cu baza 9

Să se arate că orice termen al șirului 1, 11, 111, 1111, ... scris în sistemul de numerație cu baza nouă este un număr triangular.*

113. Două volume poliedrale



Un tetraedru regulat și un octaedru regulat au muchiile egale. Să se afle raportul volumelor lor fără a calcula aceste volume.

114. O acoperire a spațiului

Să se demonstreze că întreg spațiul poate fi umplut cu o îmbinare de octaedre și tetraedre regulate.

* Un număr triangular este egal cu suma primelor *n* numere naturale *(N.T.)*.

115. O simplificare

Să se aducă la forma de fracţie ireductibilă fracţia 116 690 151/427 863 887.

116. O sumă de sinusuri

Să se demonstreze că suma sinusurilor unghiurilor unui triunghi este mai mică sau egală decît $3\sqrt{3}/2$, egalitatea avînd loc numai în triunghiuri echilaterale.

117. Două bacuri

Două bacuri traversează fără oprire un rîu în ambele sensuri, mişcîndu-se cu viteze constante şi fără să cheltuiască timp pentru manevra de întoarcere. Ele părăsesc malurile opuse în acelaşi moment, se întîlnesc la 700 de metri de un mal, îşi continuă drumul şi apoi, întorcîndu-se, se reîntîlnesc la 400 de metri de malul opus. Să se determine, fără hîrtie şi creion, lăţimea rîului.

118. La cină

Soţii Albert şi Bertha Jones au cinci copii: Christine, Daniel, Elizabeth, Frederick şi Grace. Tatăl a hotărît să stabilească un ciclu, adică o asemenea succesiune a locurilor la masa lor rotundă la care iau cina, astfel încît fiecare persoană să stea la cină lîngă fiecare din ceilalţi membri ai familiei numai o singură dată în cursul ciclului. Cum poate fi realizată această succesiune?

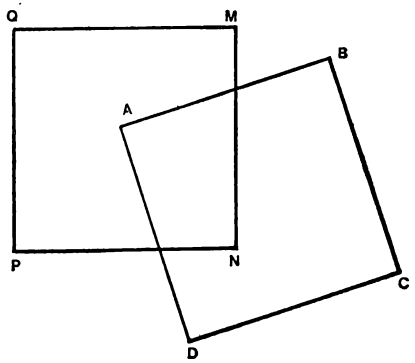
119. O sumă de cifre

Să se afle suma tuturor cifrelor care apar în scrierea întregilor 1, 2, 3, 4,..., $(10^n - 1)$.

120. Gustarea celor trei şoferi

Trei şoferi au intrat într-un han să ia nişte gustări. Primul şofer a cumpărat patru sandvişuri, o ceaşcă de cafea şi zece gogoşi cu 16,90 lei. Al doilea şofer a cumpărat trei sandvişuri, o ceaşcă de cafea şi şapte gogoşi cu 12,60 lei. Cît va plăti al treilea şofer pentru un sandviş, o ceaşcă de cafea şi o gogoaşă?

121. Pătrate intersectate



Vîrful A al pătratului $ABCD$ coincide cu centrul pătratului $MNPQ$ și latura AB taie latura MN în raportul 1:2. Știind că cele două pătrate au laturi egale, să se calculeze aria comună.

122. O soluție simplă

Fără a efectua înmulțirile, să se rezolve ecuația:

$$(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5.$$

123. Problemă cu numere prime

Înmulțirea unui număr de trei cifre cu un număr de două cifre are forma

$$\begin{array}{r} ppp \\ \underline{pp} \\ pppp \\ \underline{pppp} \\ ppppp \end{array}$$

Știind că toate cifrele care intervin în această înmulțire (și care au fost notate cu p) sînt numere prime diferite de 1, să se reconstituie înmulțirea și să se demonstreze că soluția găsită este unică.

124. Cercuri mari care se intersectează

În general n cercuri mari ale unei sfere se intersectează două cîte două în $n\,(n - 1)$ puncte.

Să se găsească un mod de a numerota aceste puncte cu 1, 2,...,$n(n-1)$, astfel încît suma numerelor corespunzătoare punctelor situate pe un cerc să fie aceeași pentru fiecare cerc mare. (Planul determinat de un cerc mare trece prin centrul sferei).

125. Un cort

Un grup de zece oameni au hotărît să cumpere un cort pe care să-l folosească pe rînd, în excursii. Dacă din grup ar fi făcut parte încă cinci oameni, cheltuiala ar fi fost mai mică cu 100 de lei de persoană. Care a fost contribuția fiecăruia dintre cei zece?

126. Coeficienți binomiali

Care este cea mai mare valoare a lui y pentru care există o dezvoltare binomială în care coeficienții a y termeni consecutivi sînt proporționali respectiv cu 1, 2, 3,...,y? Să se identifice dezvoltarea binomială corespunzătoare și termenii respectivi.

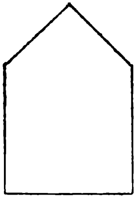
127. Numere divizibile cu 8 640

Să se arate că expresia

$$x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3$$

este divizibilă cu 8 640, pentru orice valoare întreagă a lui x.

128. Pentagonul tăiat



Pentagonul din figură a fost obținut prin alipirea unui pătrat și a unui triunghi dreptunghic isoscel cu baza egală cu latura pătratului. Să se împartă pentagonul în trei părți care să poată fi reasamblate astfel încît figura obținută să fie un triunghi dreptunghic isoscel.

129. Un produs infinit

Să se calculeze produsul

$$3^{1/3} \cdot 9^{1/9} \cdot 27^{1/27} \cdot \ldots$$

130. Nu poate fi pătrat perfect

Să se demonstreze că nu există nici un întreg pozitiv n pentru care $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ să fie un pătrat perfect.

131. Corzile unui cerc

Un cerc este împărțit în n părți egale. Plecînd apoi, pe rînd, din fiecare punct de diviziune, se numără m puncte consecutive și se unesc prin drepte primul cu ultimul punct. Știind că punctele care se unesc nu sînt diametral opuse, să se demonstreze că nu există trei drepte care să fie concurente în interiorul cercului.

132. Determinanți formați cu nouă cifre

Cele nouă cifre diferite de zero pot fi aranjate într-o matrice cu trei linii și trei coloane în $9!$ moduri. Să se calculeze suma determinanților corespunzători acestor matrice.

133. Șase puncte comune

Să se determină șase puncte comune ale conicelor date de ecuațiile:

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 6x + 3y = 0$$

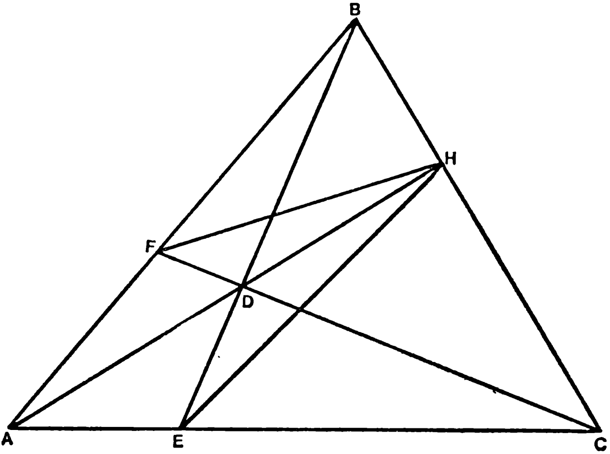
și

$$3x^2 + 7xy + 2y^2 - 7x + y - 6 = 0.$$

134. Pachetul de cărți

Să se demonstreze că dacă printre primele 26 de cărți dintr-un pachet de cărți de joc bine amestecate sînt mai multe cărți roșii decît numărul de cărți negre din ultimele 26 de cărți, atunci în pachet există cel puțin trei cărți de aceeași culoare consecutiv*.

135. Unghiuri egale



Să considerăm un triunghi ascuțitunghic ABC, AH o înălțime a triunghiului și D un punct arbitrar pe AH. Dreapta BD intersectează latura AC în E. Dreapta CD intersectează latura AB în F. Să se demonstreze că $\widehat{AHE} = \widehat{AHF}$.

---

* Pachetul conține 26 de cărți negre și 26 roșii *(N.T.)*.

136. Un sistem compatibil

Pentru ce valoare a lui k următorul sistem este compatibil:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ kx + y &= 2 \\ x + ky &= 3 \end{aligned}$$

137. O ecuație diofantică

Să se arate că oricare ar fi numărul întreg pozitiv a, ecuația $x^2 - y^2 = a^3$ are totdeauna soluții întregi.

138. Împărțirea unui triunghi în două triunghiuri asemenea

Să se arate că orice triunghi dat poate fi împărțit prin tăieturi rectilinii în patru părți care pot fi aranjate sub forma a două triunghiuri asemenea cu triunghiul dat.

139. Cifrele care se deplasează

Scrierea unui număr de cel mult 30 de cifre începe la stînga cu cifrele 15, adică 15 — — —; dacă el se înmulțește cu 5, rezultatul este numai deplasarea acestor două cifre la extremitatea din dreapta a numărului, prin urmare — — — 15. Să se determine numărul.

140. Vîrful unui tetraedru

Să se arate că orice tetraedru are cel puțin un vîrf astfel încît toate unghiurile formate de muchii în acest vîrf să fie ascuțite.

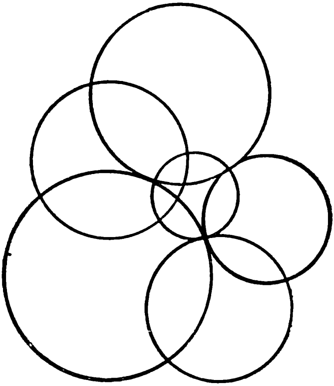
141. Deținuții norocoși

Un gardian, executînd prevederile unei amnistii parțiale, deschide pe rînd toate celulele închisorii. Pe urmă închide fiecare a doua celulă. Apoi, luînd celulele din trei în trei, răsucește cheia în broasca acestor celule, închizîndu-le pe cele deschise și deschizîndu-le pe cele închise. El continuă această operație luînd celulele din n în n și răsucind cheia în broască lor. Deținuții ale căror celule au rămas deschise după efectuarea tuturor operațiilor posibile de acest fel sînt puși în libertate. Care sînt acești norocoși?*

---

* Celulele se consideră așezate la rînd, fiecare operație începînd din dreptul primei celule. De exemplu: celulele închise la a doua operație sînt acelea al căror număr este par *(N.T.)*.

142. O intersecție vidă



Șase discuri circulare plane sînt așezate astfel încît nici un disc nu conține centrul altuia. Să se demonstreze că nu există nici un punct comun tuturor celor șase discuri.

143. O înmulțire mintală

Înmulțiți 96 cu 104.

144. Un triplet unic

Să se demonstreze că există un sistem unic de trei numere întregi pozitive, distincte, avînd cel mai mare divizor comun egal cu 1, astfel că fiecare dintre aceste numere divide suma celorlalte două.

145. Colțul înconjurat

Într-un colț al unei încăperi dreptunghiulare sînt plasate două paravane de cîte patru unități, în așa fel încît, împreună cu pereții care formează colțul respectiv, ele separă din încăpere suprafața maximă posibilă de pardoseală. Să se determine poziția acestor paravane.

146. Numere întregi prime între ele

Dacă a, b și c sînt numere întregi, cel mai mare divizor comun al lor fiind 1, și $1/a + 1/b = 1/c$, să se arate că $(a+b)$, $(a-c)$ și $(b-c)$ sînt toate pătrate perfecte.

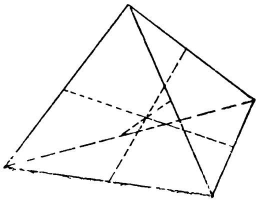
147. Un sistem diofantic

Să se rezolve în numere întregi și pozitive sistemul:

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$$

$$a^2 = 2(b + c)$$

148. Bimedianele unui tetraedru



Să se demonstreze că segmentele care unesc mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru regulat se intersectează toate trei într-un punct și sînt perpendiculare două cîte două.

149. Un produs amestecat

Cînd s-a dactilografiat o înmulțire de forma $(abc) \cdot (bca) \cdot (cab)$, cifrele produsului au fost amestecate și s-a bătut $234 \cdot 235 \cdot 286$. Dîndu-se că $a > b > c$ și specificîndu-se că unica cifră corect plasată a produsului este 6, să se rearanjeze cifrele în ordinea lor corectă.

150. Un număr special

Dacă dintr-un număr scădem 7 și diferența o înmulțim cu 7, sau dacă scădem din același număr 11 și diferența o înmulțim cu 11, se obține același rezultat. Să se determine acest număr.

151. Trei la fel

Să se demonstreze că într-un grup de șase persoane există trei persoane care fie că se cunosc reciproc, fie că nu se cunosc deloc între ele.

152. O problemă de simplificare

Să se simplifice:

$$\frac{(4+\sqrt{15})^{3/2}+(4-\sqrt{15})^{3/2}}{(6+\sqrt{35})^{3/2}-(6-\sqrt{35})^{3/2}}.$$

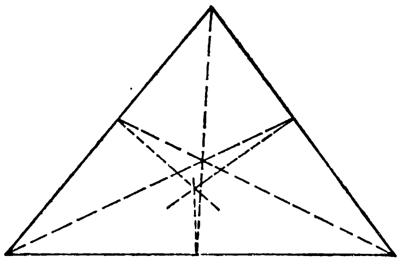
153. Produsul a trei numere prime

Un număr este produsul a trei numere prime, suma pătratelor cărora este 2331. Există 7560 numere (inclusiv unitatea) prime cu numărul dat şi mai mici ca el. Suma divizorilor numărului (inclusiv unitatea şi numărul însuşi) este 10 560. Să se găsească acest număr.

154. Reprezentarea numerelor raţionale

Să se demonstreze că orice număr raţional pozitiv se poate exprima ca o sumă finită de termeni distincţi ai seriei armonice 1, 1/2, 1/3, 1/4,...1/n,....

155. O condiţie ca un triunghi să fie isoscel



Să se demonstreze că dacă perpendicularele ridicate pe laturile unui triunghi din picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului aflate pe laturile respective sînt concurente, atunci triunghiul este isoscel.

156. Întregii clasificați

Împărțiți numerele întregi 1, 2, 3,...16 în două clase de opt numere, astfel ca oricare dintre cele $C_8^2 = 28$ sume ce se pot forma luînd cîte două numere din aceeași clasă, să fie identică cu o sumă de două numere alese din cealaltă clasă.

157. Buletine de vot economice

Într-o societate științifică se intenționează să se organizeze un scrutin cu scopul de a alege trei funcționari. Pentru cele trei funcții candidează respectiv 3, 4 și 5 persoane. Există o regulă (avînd ca scop eliminarea influenței ordinii în care figurează numele candidaților pe buletinele de vot asupra rezultatului scrutinului) că pentru toate posturile, numele fiecărui candidat la postul respectiv trebuie să apară în fiecare poziție de același număr de ori ca numele oricărui alt canditat. Care este numărul minim necesar de buletine de vot diferite?

158. Compararea raporturilor

Dacă x și y sînt pozitivi, care dintre următoarele rapoarte este mai mare:

$$(x^2 + y^2):(x + y) \quad \text{sau} \quad (x^2 - y^2):(x - y)?$$

159. Un triunghi curbiliniu

Să se determine raza cercului înscris în triunghiul curbiliniu format din cele două catete ale unui triunghi dreptunghic dat ABC și semicircumferința descrisă în partea opusă unghiului drept avînd ipotenuza AB ca diametru.

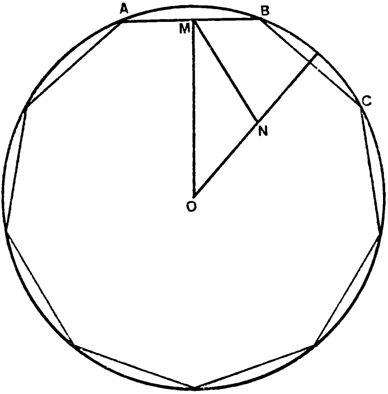
160. Un pătrat antimagic

Definim un pătrat antimagic ca o dispunere în formă de pătrat a primelor n^2 numere întregi pozitive, aranjate astfel încît toate sumele numerelor de pe linii, coloane și diagonale (care se pot compune și din două segmente paralele cu o diagonală a pătratului pe care sînt plasate n numere) să fie diferite. Există oare un n pentru care aceste $4n$ sume să fie numere consecutive?

161. Un multiplu al lui 2^{m+1}

Să se demonstreze că cel mai mic număr întreg mai mare ca $(\sqrt{3} + 1)^{2m}$ se divide cu 2^{m+1}.

162. Într-un poligon cu nouă laturi



Fie AB și BC două laturi adiacente ale unui poligon regulat cu nouă laturi înscris într-un cerc de centru 0. Fie M mijlocul lui AB, și N mijlocul razei perpendiculare pe BC. Să se arate că unghiul $OMN = 30°$.

163. Banii de buzunar

Pentru a avea bani de buzunar în timpul unei excursii, un tată împarte în mod egal copiilor săi 240 lei. Apoi alți doi veri se hotărăsc să ia parte și ei la excursie; ei participă, de asemenea, în mod egal la împărțirea banilor, astfel că fiecare copil primește cu 10 lei mai puțin decît ar fi primit inițial. Cîți copii au plecat pînă la urmă în excursie?

164. Sumarea unei serii

Să se afle suma seriei:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots, \text{ pentru } x < 1.$$

165. Îngrădirea unui teren pătratic

Un teren de forma unui pătrat este înconjurat de un gard compact de scînduri dreptunghiular cu lungimea de 10 m, scîndurile fiind așezate cu lungimea pe orizontală, cîte patru una peste alta, pe verticală. Numărul total al scîndurilor din gard este egal cu numărul de ari (1 ar = = 100 m^2) ai terenului. Care sînt dimensiunile terenului?

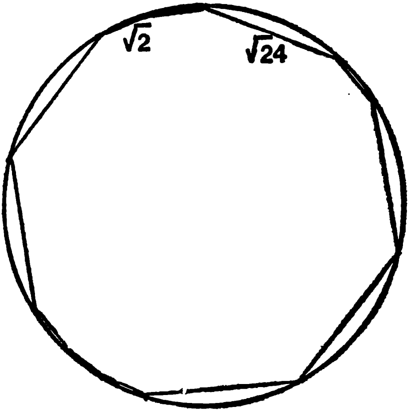
166. Numere triangulare și pătrate impare

Să se demonstreze că pătratul oricărui număr impar scris în baza opt se termină cu cifra 1 și că dacă înlăturăm această ultimă cifră, ceea ce rămîne este un număr triangular.

167. Cercuri înscrise

Care dintre următoarele triunghiuri are cercul înscris mai mare: cel cu laturile de 17, 25 și 26 sau cel cu laturile 17, 25 și 28?

168. Un dodecagon înscris



Un poligon convex cu douăsprezece laturi înscris într-un cerc are șase laturi de lungime $\sqrt{2}$ și șase de lungime $\sqrt{24}$, ordinea lor fiind absolut arbitrară. Să se determine raza cercului.

169. O soluție a unei ecuații diofantice

Să se găsească în mulțimea numerelor întregi și pozitive o soluție a ecuației $a^3 + b^4 = c^5$.

170. Soluție antigel

Un radiator de automobil cu capacitatea de 21 litri este umplut cu o soluție de 18% alcool. Cîți litri trebuie scoși și apoi înlocuiți cu o soluție de 90% alcool, pentru ca soluția rezultantă în radiator să aibă concentrația în alcool de 42%?

171. Maxim și minim fără derivare

Fără a face uz de calculul diferențial, să se găsească maximul și minimul funcției $(x^2 - 2x + 2)/(2x - 2)$.

172. Tangente a căror sumă e egală cu produsul lor

Considerăm tangentele unghiurilor de 117°, 118° și 125°. Să se demonstreze că suma și produsul lor sînt egale.

173. Cifre șterse

Să se reconstituie următoarea împărțire, în care unele cifre au fost șterse și înlocuite prin steluțe*.

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
* & * & * & * & 0 & * & * & * & & \\ \cline{7-10}
 & * & * & & & & * & * & * & * \\ \cline{1-3}
 & & * & * & * & & & & & \\
 & & * & * & 1 & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & * & * & & & & \\
 & & & & 3 & * & & & & \\ \cline{5-6}
 & & & & = & = & & & &
\end{array}
$$

---

* Numerele nu sînt neapărat scrise în baza 10 *(N.T.)*.

174. Împărțirea în două părți cu aceeași arie

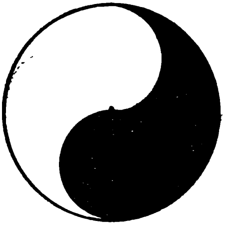


Figura numită monadă sau „Yin și Yang“ se compune dintr-un cerc împărțit în două părți egale prin două semicercuri egale, descrise de o parte și de alta a unui diametru al cercului mare. Cu o singură linie curbă să se împartă ambele arii egale în cîte două părți egale.

175. Un număr care divide simetricul său

Care este baza sistemului de numerație în care numărul 297 divide pe 792?

176. O vîrstă pătratică

Căsătorit în mod legal în California*, vecinul meu a împlinit o vîrstă care e un pătrat perfect. Produsul cifrelor numărului care reprezintă vîrsta sa e egal cu vîrsta soției sale. Vîrsta fiicei este egală cu suma cifrelor numărului care reprezintă

* În California pentru ca o căsătorie să fie legală, fiecare dintre soți trebuie să aibă cel puțin 18 ani *(N.T.)*.

vîrsta tatălui, iar vîrsta fiului este egală cu suma cifrelor numărului care reprezintă vîrsta mamei. Cîți ani are fiecare?*

177. Un tetraedru trecut printr-un tub

Se dă un cilindru cu pereții subțiri, flexibil ca un tub de material plastic, avînd diametrul d. Să se determine muchia e a celui mai mare tetraedru regulat care poate fi trecut prin tub.

178. O divizibilitate cu (a—1)²

Să se arate că $a^{n+1} - n(a-1) - a$ se divide cu $(a-1)^2$, n fiind un număr întreg pozitiv.

179. Determinantul triunghiului lui Pascal

Triunghiul aritmetic al coeficienților binominali a fost aranjat de către Pascal sub forma:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21\ldots \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56\ldots \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126\ldots \\
1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252\ldots
\end{array}$$

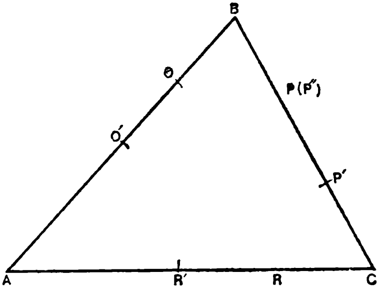
* În problemă se acceptă că vîrsta tatălui nu depășește 150 de ani *(N.T.)*.

Să se demonstreze că determinantul oricărei matrice formate dintr-un pătrat care are o latură pe prima linie (sau coloană) este egal cu 1.

180. Coordonate raționale

Să se arate că pentru orice x rațional se poate calcula efectiv cel puțin o valoare rațională a lui y satisfăcînd ecuația $2x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 1 = 0$.

181. O construcție finită



Pornind dintr-un punct P de pe latura BC a triunghiului ABC, se construiesc punctele: O pe AB astfel ca $BO = BP$, R pe CA astfel ca $AR = AO$, P' pe BC astfel ca $CP' = CR$, O' pe AB astfel ca $BO' = BP'$, și așa mai departe. Să se demonstreze că construcția e finită, adică $CP = CR'$ și că cele șase puncte P, O, R, P', Q', R' sînt conciclice.

182. Grupuri de numere întregi, impare

Numerele întregi impare consecutive sînt grupate în felul următor:
1; (3, 5); (7, 9, 11); (13, 15, 17, 19);... Să se găsească suma numerelor din gruparea a n-a.

183. Sfera celor şaisprezece puncte

Poate fi raza sferei celor şaisprezece puncte jumătate din raza sferei circumscrise a unui tetraedru ? (Sfera celor şaisprezece puncte trece prin centrul cercurilor circumscrise feţelor).

184. Cercuri concurente

Celelalte trei puncte de intersecţie a trei cercuri care trec prin acelaşi punct sînt coliniare. Să se demonstreze că centrele cercurilor şi punctul lor de concurenţă sînt conciclice.

185. Un turneu de golf

Un club de golf intenţionează să organizeze un turneu de golf la care să participe 16 membri ai clubului. Participanţii joacă în grupe de cîte patru, astfel încît fiecare participant se întîlneşte în aceeaşi grupă cu fiecare dintre ceilalţi 15 numai o singură dată. Să se arate cum trebuie întocmite rundele* !

---

* O rundă include patru grupuri de participanţi, fiecare participant figurînd o singură dată în aceste grupe *(N.T.)*.

186. Numere triangulare pătratice

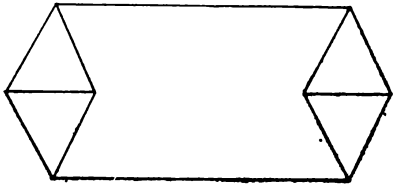
Să se arate că există o infinitate de numere triangulare care sînt pătrate perfecte.

187. Un sistem cu trei necunoscute

Să se rezolve sistemul:

$$x + y + z = 6$$
$$xy + yz + zx = 11$$
$$xyz = 6$$

188. Un poliedru aplatizat



Scheletul format din vîrfurile şi muchiile unui poliedru poate fi turtit, modificîndu-se lungimile muchiilor pînă se obţine o figură plană. Să se schiţeze poliedrul iniţial, dacă figura plană obţinută este cea indicată.

189. Clasamentul echipelor de baseball

Reproducem aci rezultatele obţinute de echipele de baseball din Liga Naţională pînă la data de

14 iulie 1965, indicînd punctele cîştigate şi pierdute de fiecare echipă:

	C	P		C	P
Chicago	41	46	New York	29	56
Cincinnati	49	36	Philadelphia	45	39
Houston	39	45	Pittsburgh	44	43
Los Angeles	51	38	St. Louis	41	45
Milwaukee	42	40	San Francisco	45	38

Aranjaţi echipele în ordinea descrescătoare a procentajelor obţinute, fără a calcula aceste procentaje.*

190. Cumpărături dulci

O gospodină cumpără zahăr pentru suma de 2,16 dolari. Dacă zahărul s-ar ieftini cu 1 cent la livră**, ea ar primi pentru aceeaşi sumă cu 3 livre mai mult decît iniţial. Cîte livre de zahăr a cumpărat gospodina?

191. Intersecţia diagonalelor

Să se găsească numărul intersecţiilor diagonalelor unui poligon convex cu n laturi.

* Prin procentaj se înţelege procentul de puncte cîştigate din totalul punctelor cîştigate (C) şi pierdute (P) de o echipă *(N.T.)*.

** O livră = 453,59 g *(N.T.)*.

192. Două triplete cu suma nulă

Să se demonstreze că fiind date două triplete numerice astfel ca suma numerelor din fiecare triplet să fie zero, atunci raportul sumei cuburilor numerelor din aceste triplete este egal cu raportul produselor acestor numere.

193. O condiție de descompunere în factori

Dacă a și b nu se divid cu 3 și $a + b$ e de forma $3k$, să se arate că $x^a + x^b + 1$ se poate descompune în factori.

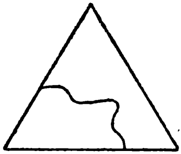
194. Rezistențe legate în paralel

Rezistența electrică z echivalentă cu două rezistențe x și y legate în paralel este dată de relația

$$1/z = 1/x + 1/y \qquad x,\ y,\ z > 0$$

Să se determine soluțiile întregi și pozitive ale acestei ecuații.

195. Curbă de lungime minimă



Care este curba de lungime minimă care împarte aria unui triunghi echilateral în două părți egale?

196. Un pătrat particular

Să se găsească un număr de nouă cifre de forma

$$a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3$$

care este produsul pătratelor a patru numere prime distincte, dîndu-se $a_1 \neq 0$, $b_1b_2b_3 = 2(a_1a_2a_3)$.

197. O serie de teste

Profesorul Tester* dă calificativele pe baza mediei obţinute la o serie de teste. Dacă la ultimul test John ar realiza procentajul 97, atunci în virtutea acestor note media sa ar fi de 90. Pe de altă parte, dacă obţine un procentaj mai scăzut, 72, media sa ar fi totuşi 87. Din cîte teste este formată seria de teste a profesorului Tester?

198. Puncte confundate într-un patrulater

Să se arate că mijlocul segmentului care uneşte mijloacele diagonalelor unui patrulater coincide cu punctul de intersecţie a segmentelor care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterelor.

199. Fracţii ireductibile

Să se arate că în şirul $1/n$, $2/n$,..., $(n-1)/n$, unde n e un număr întreg pozitiv mai mare ca

* Tester înseamnă în lb. engleză „cel ce pune teste" *(N.T.)*.

doi, numărul de termeni care sînt fracţii ireductibile este par.

200. Serviciul de ceai

Un serviciu de ceai din argint expus în vitrina unui magazin are următoarele indicaţii de preţ:

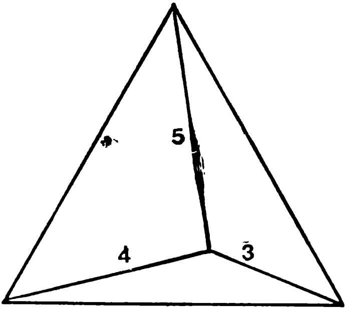
Zaharniţă	*HKHC*	67,2 lei
Tavă	*AMSL*	501,6
Cleşte de zahăr	*HBLT*	17,2
Vas pentru frişcă	*HCKH*	60,0
Ceainic	*SIAB*	910,8
Linguriţe	*HMIT*	105,2
Serviciul complet	*BLCSK*	1662,0 lei

Pe a doua coloană sînt trecute preţurile de cost, pe a treia preţurile de vînzare cu amănuntul; acestea din urmă sînt majorate în raport cu preţurile de cost respective cu acelaşi procent la toate articolele. Să se descifreze codul în care au fost scrise preţurile de cost*.

---

* Preţurile sînt date cu o singură zecimală, căci repetarea cifrei zero ar înlesni prea mult descoperirea literei corespunzătoare *(N.T.)*.

201. Segmente care determină un triunghi echilateral



Dacă unim un punct *P* din interiorul unui triunghi echilateral cu vîrfurile triunghiului, cele trei segmente au respectiv lungimile de 3, 4 şi 5 unităţi. Care este lungimea laturii triunghiului?

202. Restul invariant

Dacă împărţim 1108, 1453, 1844 şi 2281 la un număr dat se obţine totdeauna acelaşi rest. Care este acest număr?

203. O permutare de nouă cifre nenule

Să se găsească o permutare a celor nouă cifre nenule care să reprezinte un număr avînd rădăcina pătrată de forma *ababc*, unde $ab = c^3$.

204. Împărţire în vederea unei suprapuneri

Se consideră două triunghiuri egale care se pot suprapune numai dacă scoatem un triunghi din planul în care se află şi-l rotim în spaţiul tridimensional. Să se arate cum trebuie tăiat unul dintre triunghiuri astfel ca părţile tăiate să poată fi suprapuse peste celălalt triunghi prin deplasări făcute numai într-un singur plan.

205. În sfîrşit Umbugio va primi o lecţie

Profesorul E. P. B. Umbugio s-a fălit la toată lumea că a reuşit să rezolve ecuaţia de gradul patru care se obţine dacă se elimină radicalii din ecuaţia:

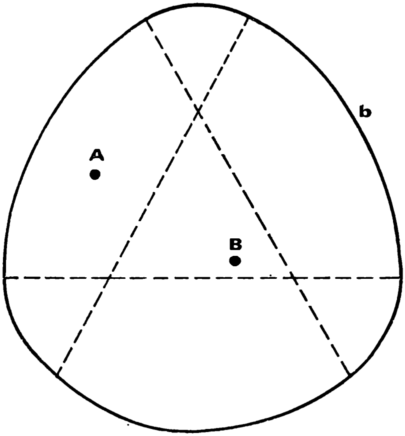
$$x = (x - 1/x)^{1/2} + (1 - 1/x)^{1/2}.$$

Daţi-i o lecţie Profesorului rezolvînd această ecuaţie şi utilizînd în acest scop numai ecuaţii de gradul doi.

206. Bărbaţi cu caracteristici comune

70% dintre bărbaţii maturi care alcătuiesc o comunitate au ochii căprui, 75% au părul şaten, 85% depăşesc înălţimea de 1,75 m şi 90% au greutatea mai mare de 65 kg. Care este procentul minim posibil al bărbaţilor care au toate cele patru caracteristici?

207. Un domeniu de lățime constantă



Se dau două puncte A și B într-un domeniu de lățime constantă egală cu 1. Să se arate că există un drum ducînd de la A la B și care atinge frontiera b a domeniului avînd lungimea $\geqslant 1$.

(O curbă cu lățime constantă este curba care are proprietatea că distanța dintre două tangente paralele, adică dintre dreptele de suport ale acestor tangente, este constantă)*.

208. Compararea radicalilor

Care dintre următoarele numere este mai mare:

$$\sqrt[8]{8!} \text{ sau } \sqrt[9]{9!}?$$

---

* Mai riguros, o curbă de lățime constantă (diametru constant) este o curbă simplă, închisă, netedă (cu tangentă în fiecare punct) astfel că maximul distanței dintre oricare punct fixat al ei și toate celelalte puncte ale curbei este constant *(N.T.)*.

209. Tetraedrul lui Fibonacci

Să se găsească volumul tetraedrului al cărui vîrfuri au respectiv coordonatele (F_n, F_{n+1}, F_{n+2}), $(F_{n+3}, F_{n+4}, F_{n+5})$, $(F_{n+6}, F_{n+7}, F_{n+8})$ şi $(F_{n+9}, F_{n+10}, F_{n+11})$, unde F_i este termenul al i-lea din şirul lui Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8,...).

210. Octaedrul regulat

Un octaedru regulat avînd muchia e se secţionează cu un plan paralel cu una din feţele sale. Să se determine: a) perimetrul secţiunii; b) aria secţiunii.

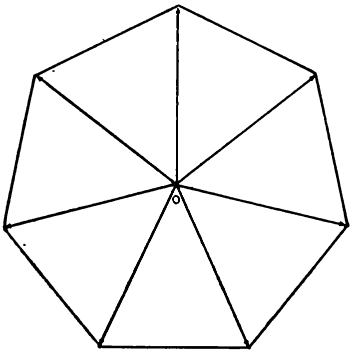
211. Nu poate fi un întreg

Să se demonstreze că suma $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$ nu poate fi un număr întreg pentru nici o valoare $n > 1$.

212. Trei numere întregi impare consecutive

Să se arate că nu există trei numere întregi impare consecutive astfel ca fiecare din ele să fie suma a două pătrate perfecte mai mari ca zero.

213. O sumă vectorială nulă



Să se demonstreze că suma vectorilor avînd originea în centrul unui poligon regulat cu n laturi și extremitățile în vîrfuri este nulă.

214. O elipsă care alunecă

Se dau două semidrepte fixe, perpendiculare în originea lor comună. O elipsă se deplasează astfel încît rămîne tot timpul tangentă la ambele semidrepte. Să se găsească locul geometric al centrului acestei elipse.

215. Radicali suprapuși

Să se calculeze

$$\sqrt[3]{11+4\sqrt[3]{14+10\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{(3n+8)+(n^2+3n)\sqrt[3]{\ldots}}}}}$$

unde expresia scrisă explicit figurează sub al n-lea radical*.

216. Un triunghi pitagoreic

Să se găsească un triunghi pitagoreic ale cărui laturi sînt numere ale lui Fibonacci.

217. Un gol într-o sferă

O sferă e străpunsă printr-o gaură cilindrică a cărei axă coincide cu un diametru al sferei şi avînd lungimea de 10 unităţi. Care este volumul materialului rămas?

218. Navetistul

Dacă un om se duce pe jos la locul de muncă şi se întoarce cu maşina, face drumul dus-întors într-o oră şi jumătate. Făcînd ambele drumuri cu maşina, el a călătorit 30 de minute. Cît ar dura dacă el ar face întregul drum, dus şi întors, pe jos?

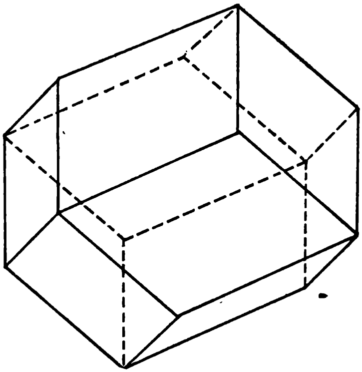
219. Bază de numeraţie impară

Să se arate că un număr scris într-un sistem de numeraţie, avînd ca bază un număr impar,

* Acest enunţ este o variantă adaptată de noi a problemei corespunzătoare din originalul în limba engleză *(N.T.)*.

este impar dacă şi numai dacă numărul cifrelor sale impare este impar.

220. Călătorie pe un dodecaedru



Să presupunem că vîrfurile unui poliedru reprezintă locurile pe care vrem să le vizităm, în timp ce muchiile reprezintă toate drumurile posibile. Hamilton a considerat problema vizitării tuturor acestor locuri fără a trece de două ori prin acelaşi loc, făcînd o singură „călătorie“.

(Vezi, de exemplu W.W. R. Ball şi H. S. M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, The Maxmilton Company, New York, 1956, p. 262).

(Această problemă este uşor de rezolvat într-un dodecaedru pentagonal. Să se demonstreze că ea nu poate fi rezolvată într-un dodecaedru rombic).

221. Dodecaedre rombice

Să se arate că întreg spațiul poate fi umplut cu dodecaedre rombice.

222. Relația de recurență a lui Fibonacci

Fiind dat șirul lui Fibonacci $\{F_n\}$, unde $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geqslant 3$, să se arate că fiecare al cincilea termen este divizibil cu 5.

223. O înmulțire criptică

După efectuarea unei înmulțiri aritmetice obișnuite se înlocuiește fiecare cifră pară cu E și fiecare cifră impară cu O. Se obține aranjamentul următor:

$$\begin{array}{cccc} & O & E & E \\ & & E & E \\ \hline E & O & E & E \\ E & O & E & \\ \hline O & O & E & E \end{array}$$

Să se reconstituie această înmulțire.

224. Dreptunghiul îndoit

Un dreptunghi cu dimensiunile x și y se curbează astfel ca două vîrfuri opuse ale sale să coincidă; apoi se aplatizează formîndu-se o îndoitură. Să se afle lungimea îndoiturii.

225. Data nașterii

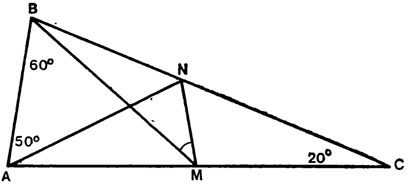
În anul 1937 un om declară că a avut vîrsta de x ani în anul x^2. El mai adaugă că „dacă se adună numărul anilor mei cu numărul lunilor fracțiunii de an suplimentare, rezultatul este egal cu pătratul datei din luna în care m-am născut". La ce dată s-a născut acest om?*

226. O ecuație în care intervin fracții

Să se rezolve ecuația:

$$(x - a)/b + (x - b)/a = b/(x - a) + a/(x - b).$$

227. Un triunghi isoscel particular



Un triunghi isoscel ABC are unghiul din vîrf $C = 20°$. Se iau punctele M și N respectiv pe AC și BC astfel ca $\widehat{ABM} = 60°$ și $\widehat{BAN} = 50°$. Să se demonstreze, fără a utiliza relații trigonometrice, că $\widehat{BMN} = 30°$.

---

* Se admite că vîrsta omului nu depășește 120 de ani *(N.T.)*.

228. Frunzele copacilor

Dacă există mai mulți copaci decît numărul frunzelor de pe oricare dintre ei, atunci există cel puțin doi copaci cu același număr de frunze. Această afirmație este adevărată sau falsă?

229. O ecuație diofantică de gradul trei

Să se rezolve în numere întregi ecuația $x^3 + 1 = y^2$.

230. Domenii pe o sferă

Se presupune că suprafața unei sfere este împărțită în domenii triunghiulare, prin *triunghiular* înțelegîndu-se că fiecare domeniu este în contact cu exact alte trei domenii*. Un vîrf al grafului format de liniile de separație a acestor domenii se numește par sau impar, în funcție de paritatea numărului de linii care intră în el. Există oare o triangulare care are exact două vîrfuri impare, și în care aceste vîrfuri sînt adiacente?**

231. Excursia lui Henry

Henry a plecat în excursie la țară între 8 și 9 dimineața, într-un moment în care arătătoarele

---

* Domeniile care au numai un vîrf comun nu se consideră a fi în contact *(N.T.)*.

** Două vîrfuri sînt adiacente dacă există o linie care le unește și care nu trece prin nici un alt vîrf *(N.T.)*.

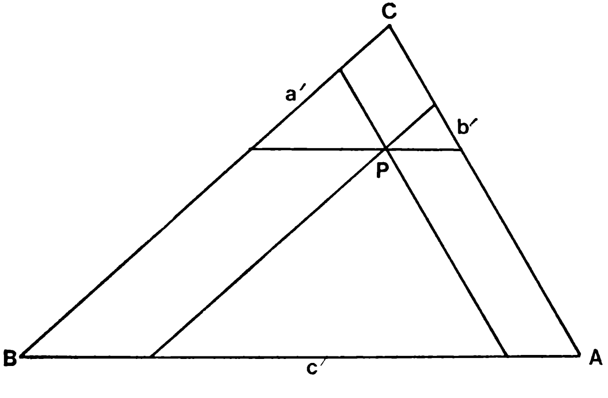
ceasului erau suprapuse. El a ajuns la destinație între orele 2 și 3 după-amiază, într-un moment în care arătătoarele ceasului formau un unghi de 180°. Cît timp a călătorit?

232. O serie de puteri

Să se exprime ca o serie de puteri expresia:

$$1/(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

233. Paralele într-un triunghi



Printr-un punct oarecare P din interiorul triunghiului ABC se duc paralele la cele trei laturi ale triunghiului. Aceste drepte determină pe fiecare latură trei segmente.

Dacă segmentele din mijloc aflate pe laturile a, b, c sînt notate respectiv a', b' și c', să se arate că $a'/a + b'/b + c'/c = 1$.

234. O problemă de descompunere

Să se descompună 316 într-o sumă de doi termeni astfel încît unul să se dividă cu 13, iar celălalt cu 11.

235. Prețuri convenabile*

În egalitatea $FARES = (FEE)^2$, scrisă în sistemul de numerație cu baza șase, literele corespund în mod biunivoc unor cifre din acest sistem. Să se găsească această corespondență.

236. Ce vîrstă are Willie?

— Profesorul tău ți-a dat această problemă? — l-am întrebat pe Willie. Pare destul de plicticoasă.

— Nu! — a spus Willie, eu am compus-o. Este o ecuație polinomială care admite ca rădăcină vîrsta mea x, pe care am împlinit-o la ultima mea aniversare.

— Atunci nu poate fi o problemă prea grea. Este o ecuație cu coeficienți întregi care admite o rădăcină întreagă — am remarcat eu. Să încerc $x = 7$. Nu, astfel obțin 77.

---

* În engleză, „fares" înseamnă prețuri și „fee" înseamnă „plată" *(N.T.)*.

— Păi, eu, să am numai 7 ani?—mă întrebă Willie ofensat.

— Atunci să încerc un întreg mai mare... Nu, nici acesta nu e bun; obţin 85 şi nu 0.

— Fii serios—spuse Willie, uitîndu-se peste umărul meu. Ştii bine că sînt mai mare.

Ce vîrstă are Willie?

237. O particulă accelerată

O particulă se mişcă neuniform şi rectiliniu, pornind din repaus şi fiind în repaus la sfîrşitul mişcării; spaţiul parcurs este egal cu o unitate de lungime şi mişcarea a durat o unitate de timp. Să se demonstreze că există cel puţin un punct în care acceleraţia* este de patru unităţi. Se presupune că v şi a sînt funcţii continui de t.

238. Timbrele

Un funcţionar cumpără pentru instituţia în care lucrează timbre în sumă de 100 lei. El a cerut să i se dea un număr de timbre de 2 lei, de zece ori mai multe timbre de 1 leu şi pentru rest timbre de 5 lei bucata. Cîte timbre de fiecare fel a cumpărat?

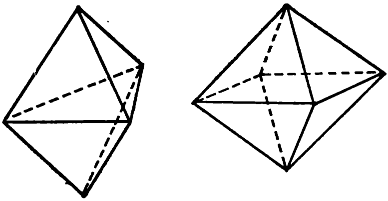
239. Jocul cu douăzeci de întrebări

Ca o variantă a jocului „Douăzeci de întrebări", să presupunem că eu mă gîndesc la un număr

* Modulul acceleraţiei *(N.T.)*.

pe care tu trebuie să-l determini punîndu-mi cel mult douăzeci de întrebări. La fiecare întrebare eu pot să răspund numai prin „da“ sau „nu“. Care este cel mai mare număr pe care-l pot alege, astfel ca tu să-l poți determina cu ajutorul acestor întrebări?

240. Sfere înscrise



Să se găsească raportul lungimilor razelor sferelor înscrise într-un hexaedru regulat și un octaedru regulat care au fețele triunghiuri echilaterale egale.

241. Discuri decupate dintr-un disc

Dintr-un disc de placaj cu diametrul de 30 cm se taie două discuri, unul cu diametrul de 20 cm și celălalt cu diametrul de 10 cm. Care este cel mai mare disc care mai poate fi decupat din bucata de placaj rămasă?

242. Suma pătratelor coeficienților binomiali

Să se găsească suma pătratelor coeficienților dezvoltării $(a+b)^n$.

243. O criptogramă de Crăciun

Formula tradițională de felicitare *A MERRY XMAS TO ALL** reprezintă o criptogramă în care fiecare literă corespunde în mod unic unei cifre şi fiecare cuvînt este un pătrat perfect. Să se găsescă corespondența, ştiind că suma cifrelor fiecărui cuvînt este, de asemenea, un pătrat perfect.

244. Centre de greutate

Să se determine centrul de greutate:
a) al unui arc semicircular;
b) al unei suprafețe semicirculare.

245. Două triplete egale

Se dau două triplete de numere pozitive x, y, z și a, b, c cu proprietățile următoare: nici unul dintre numerele din primul triplet nu este mai mic ca cel mai mic din al doilea triplet sau mai mare decît cel mai mare; $x+y+z=a+b+c$ și $xyz=abc$. Să se arate că într-o anumită ordine cele două triplete sînt egale.

246. O sumă irațională

Să se demonstreze că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6^{(2-3n-n^2)/2}$$

este un număr irațional.

---

* Complet: *A merry Christmas to all*, ceea ce în limba engleză înseamnă „Un Crăciun fericit tuturor" *(N.T.)*.

247. Un examen cu şase elevi

Să presupunem că la un examen şase elevi sînt aşezaţi într-o bancă din care se poate ieşi numai la capetele ei. Dacă ei sînt scoşi la tablă într-o ordine arbitrară, care este probabilitatea ca măcar un elev să fie nevoit să-şi deranjeze unul sau mai mulţi colegi pentru a putea ieşi din bancă?

248. O construcţie numai cu compasul

Folosind numai compasul, să se împartă circumferinţa unui cerc dat în patru arce egale.*

249. Fondul de premii

S-a stabilit ca toţi funcţionarii unei companii să primească o gratificaţie de 500 de lei, dar s-a constatat că în acest caz ultimului funcţionar nu i-ar fi rămas din suma planificată decît 450 de lei. Pentru ca împărţirea să fie echitabilă s-a recurs la următoarea soluţie: fiecare funcţionar va primi 450 de lei şi suma de 950 de lei care rămîne astfel nefolosită va fi păstrată pentru fondul de premii pe anul următor. Ce sumă a fost destinată iniţial pentru plata gratificaţiilor?

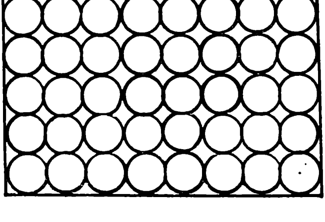
---

* Centrul cercului se presupune cunoscut *(N. T.)*.

250. Salariul matematicianului curții regale

Într-o bună zi, matematicianul curții regale din X... și-a primit salariul pentru munca depusă timp de un an, în monede de argint. El a distribuit monedele în grămezi inegale, numărul monedelor din grămezi formînd un pătrat magic. Regele a privit, s-a minunat, dar a deplîns faptul că nici una din grămăjoarele de bani nu conținea un număr prim de monede. „Dacă aș fi primit cu nouă monede mai mult — a spus matematicianul — aș fi putut adăuga cîte o monedă la fiecare grămadă, construind astfel un pătrat magic cu toate elementele numere prime". Sfetnicii au studiat problema și au găsit bineînțeles că matematicianul nu s-a înșelat. Pe cînd regele se pregătea să-i dăruiască matematicianului cele nouă monede suplimentare, vistiernicul a strigat: „Stați puțin!" — apoi a luat cîte o monedă din fiecare grămadă și toți cei prezenți au observat că și pătratul magic astfel obținut avea toate elementele numere prime. Vistiernicul a păstrat astfel cele nouă monede. Ce salariu primise inițial matematicianul?

251. Împachetarea cilindrilor



Patruzeci de cilindri avînd fiecare diametrul de o unitate și înălțimile egale sînt strîns împachetați într-o cutie*, astfel că pot fi transportați fără să se miște în timpul transportului. Cîți cilindri trebuie scoși din cutie pentru a putea reîmpacheta în ea patruzeci și unu de cilindri de același fel? În noua împachetare, cilindrii se pot mișca în timpul transportului?

252. Catetele unui triunghi pitagoreic

Să se arate că într-un triunghi pitagoreic cel puțin lungimea unei catete este un multiplu de 3.

253. Puteri ale lui 2

Să se calculeze suma $2 + 2^2 + 2^3 + \dots 2^n$.

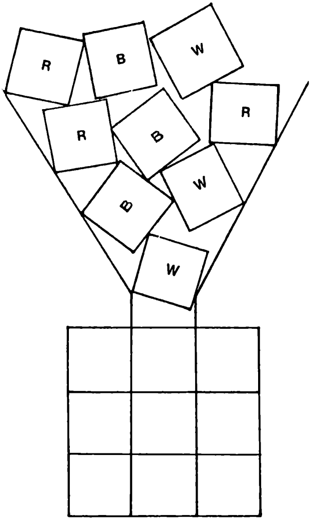
254. Aranjarea unor pătrate colorate

Cîte modele diferit colorate** se pot obține dispunînd într-un pătrat nouă pătrate mai mici egale, 3 roșii, 3 albe și 3 albastre, astfel ca pe fiecare linie și coloană a modelului să figureze fiecare dintre cele trei culori?

---

* Capacul cutiei e paralel cu bazele cilindrilor *(N.T.)*.

** Prin modele diferite se înțelege că modelele nu se pot suprapune prin rotații și translații în plan *(N.T.)*.



255. Paralelogramul împărțit în două

Pe laturile BC și AD ale unui paralelogram $ABCD$ se iau respectiv punctele E și F. Fie G intersecția lui AE cu BF și H intersecția lui ED și CF. Să se demonstreze că dreapta care trece prin punctele G și H împarte paralelogramul în două figuri egale.

256. Un pătrat simetric

Un pătrat perfect se exprimă în sistemul de numerație cu baza șase cu ajutorul celor cinci cifre nenule scrise cîte o singură dată. Dacă transferăm cifra unităților la începutul numărului, obținem pătratul numărului care are cifrele inversate față de cele ale rădăcinii pătrate a numărului inițial. Să se afle numărul considerat.

257. O sumă problematică

Dacă a și b sînt numere întregi, poate fi suma $a/b+b/a$ un număr întreg diferit de ± 2?

258. Un pătrat nesecționat

Pot fi aranjate optsprezece piese de domino cu dimensiunile de 2 cm și 1 cm, astfel încît să formeze „un pătrat nesecționat"? Prin pătrat nesecționat înțelegem o aranjare astfel ca muchiile pieselor de domino care nu coincid cu laturile pătratului să nu formeze nici un segment de dreaptă care unește două laturi opuse.

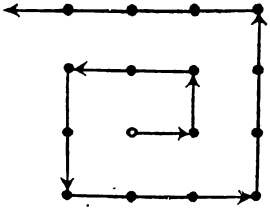
259. Numere prime între ele

În ce sisteme de numerație numerele 35 și 58 sînt relativ prime?

260. Cinci numere întregi consecutive

Există oare cinci numere întregi pozitive consecutive astfel ca suma puterilor a patra ale primelor patru numere să fie egală cu puterea a patra a celui de al cincilea număr?

261. Drum poligonal într-o rețea



Fiind dată o rețea pătratică de $N \times N$ puncte, să se arate că se poate construi un drum poligonal trecînd prin toate cele N^2 puncte ale rețelei și care se compune din $2N-2$ segmente (folosind metoda din figură se obțin $2N-1$ segmente).

262. Rezolvare în numere întregi

Să se găsească toate soluțiile întregi ale ecuației:

$$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x.$$

263. Un număr compus

Să se arate că dacă $p_1 + p_2 = 2q$ unde p_1 și p_2 sînt două numere prime consecutive impare, atunci q este un număr compus.

264. Un sistem de patru ecuații liniare

Să se rezolve următorul sistem:

$$x + 7y + 3v + 5u = 16 \quad (1)$$

$$8x + 4y + 6v + 2u = -16 \quad (2)$$

$$2x + 6y + 4v + 8u = 16 \quad (3)$$

$$5x + 3y + 7v + u = -16 \quad (4)$$

265. O relație într-un patrulater

Un patrulater de arie Q este împărțit de diagonalele sale în patru triunghiuri avînd ariile A, B, C și D. Să se arate că:

$$A \cdot B \cdot C \cdot D =$$

$$= (A + B)^2(B + C)^2(C^2 + D^2)(D + A)^2/Q^4.$$

266. O problemă de divizibilitate

Pentru ce valori întregi și pozitive ale lui n, $2n + 1$ divide $n^4 + n^2$?

267. O ecuație dubioasă

Afirmația, „342 = 97" poate să devină adevărată dacă mai adăugăm cîteva simboluri algebrice, de exemplu $(-3 + 4)2 = 9 - 7$. Putem oare să facem ca această afirmație să fie adevărată fără a mai adăuga alte simboluri?

268. Împărțirea unui dodecagon

a) Să se împartă un dodecagon regulat în pătrate și triunghiuri echilaterale;

b) Fie $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ vîrfurile consecutive ale unui dodecagon regulat. Să se studieze modul în care se intersectează diagonalele $P_1 P_9$, $P_2 P_{11}$ și $P_4 P_{12}$.

269. Fără rădăcini reale

Să se arate că ecuația

$$1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots + x^{2n}/(2n)! = 0$$

nu admite nici o rădăcină reală.

270. Un cub imposibil

Să se arate că nu există nici un sistem de numerație în care numărul de trei cifre *aaa* să fie egal cu a^3.

Soluții

În paginile următoare veți găsi, pentru fiecare problemă enunțată în prima parte a cărții, cea mai elegantă soluție culeasă de mine, însoțită de indicații asupra autorului ei și a sursei din care a fost luată. Ne adresăm cititorilor cu rugămintea de a ne trimite orice soluție propusă de ei, mai elegantă decît cea din text.

Numerele de ordine ale soluțiilor sînt aceleași cu ale enunțurilor respective.

1. Funcționarul neglijent

Dacă nouă scrisori sînt introduse corect în plicuri, a zecea scrisoare va fi de asemenea introdusă corect, deci probabilitatea este zero.

— *M.M.*, 33 (martie 1950), 210.

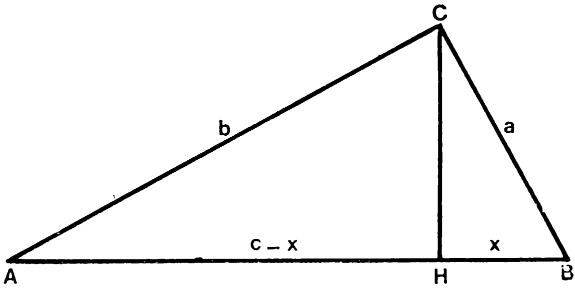
2. Teorema lui Pitagora

În triunghiul dreptunghic ABC, fie CH înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Triunghiurile ACB, AHC și CHB sînt asemenea, prin urmare

$$x : a = a : c \quad \text{și} \quad (c - x) : b = b : c,$$

deci

$$a^2 = cx \quad \text{și} \quad b^2 = c^2 - cx.$$



Adunînd vom obține $a^2 + b^2 = c^2$.

În legătură cu această metodă de demonstrare a teoremei lui Pitagora, ca și pentru alte 365 de soluții, recomand spre consultare lucrarea: *Elisha S. Loomis, The Pythagorean Proposition*, Edward Brothers, Ann Arbor, Michigan (1940).

3. Patru ecuații cu patru necunoscute

Prin încercări succesive se deduce că (1, 2, 3, 4) este o soluție a sistemului. Deoarece ecuațiile sînt simetrice în x, y, z, w, celelalte 23 de permutări ale numerelor 1, 2, 3, 4 vor fi de asemenea soluții.

Dar acestea vor fi toate soluțiile, deoarece produsul gradelor ecuațiilor este 24!

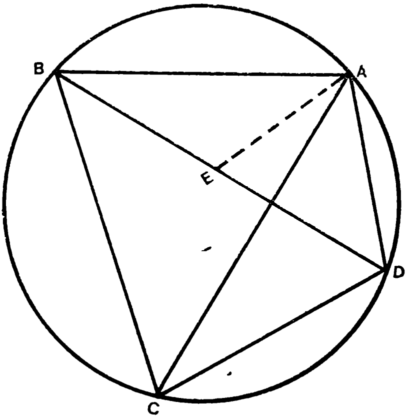
— *M.M.*, 23 (martie 1950), 211.

4. Un test notat cu zero

Numărul de răspunsuri pentru fiecare categorie este, evident, invers proporțional cu punctajul categoriei respective. S-au dat, prin urmare $[5/(5+8)]26 = 10$ răspunsuri corecte.

— *M.M.*, 31 (martie 1958), 237.

5. Teorema lui Ptolemeu



În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ să ducem AE astfel încît unghiul $BAE =$ unghiul CAD. Triunghiurile BEA și CDA sînt asemenea și, la fel, sînt asemenea și triunghiurile AED și ABC.

Deducem $AC : AB = CD:BE$ și $AC : AD = BC:ED$ sau transformînd rapoartele, $AC \cdot BE = AB \cdot CD$ și $AC \cdot ED = AD \cdot BC$. Adunînd și ținînd seama de faptul că $BE + ED = BD$, obținem

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

deci teorema lui Ptolemeu este demonstrată.

— Roy Mackay, *S.S.M.*, 35 (martie 1935), 314. (Dacă patrulaterul inscriptibil este un dreptunghi, va rezulta nemijlocit teorema lui Pitagora).

6. O descompunere în factori ușor de efectuat

Avem:

$$x^9 + y^9 = (x + y)(x^8 - x^7y + x^6y^2 + \dots y^8)$$
$$= (x^3 + y^3)(x^6 - x^3y^3 + y^6)$$
$$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6)$$

deci:

$$x^8 - x^7y + x^6y^2 - \dots + y^8 =$$
$$= (x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6).$$

— Anice Seybold, *M.M.*, 34 (noiembrie 1961), 434.

7. Un calcul mintal

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 =$$
$$= a(a + 1) \cdot 100 + 25,$$

deci

$$85^2 = 8 \cdot 9 \cdot 100 + 25 = 7225.$$

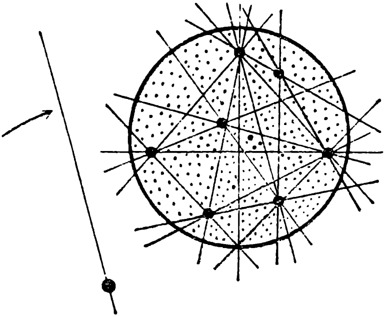
— *M.M.*, 24 (mai 1951), 273.

8. O ecuaţie de gradul patru

Ecuaţia $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ poate fi pusă sub forma $(x^2 - 2)^2 = 5x^3 + 7x$. Pentru x negativ, membrul stîng al ecuaţiei este pozitiv şi membrul drept este negativ. Rezultă deci că ecuaţia dată nu admite soluţii negative.

— R. E. Horton, *M.M.*, 21 (noiembrie 1950), 111.

9. Un milion de fiecare parte



Să considerăm toate dreptele determinate de perechi de puncte din mulţime. Să alegem apoi un nou punct aflat în afara cercului şi care nu aparţine nici uneia din aceste drepte. Să considerăm o dreaptă care trece prin acest punct, situată la stînga mulţimii de puncte date. Cînd această dreaptă se rotește în jurul noului punct înspre mulțime (în cazul figurii noastre, spre dreapta) ea nu întîlnește în nici o poziție mai mult decît un punct. Rotim această dreaptă pînă cînd a trecut peste exact un milion de puncte. Poziția finală va fi cea căutată.

— Herbert Wills, *M.M.*, 37 (mai 1964), 206.

10. O infinitate de numere prime

Să presupunem, prin absurd, că există cel mai mare număr prim și să-l notăm cu p. Să considerăm cantitatea mai mare cu o unitate decît produsul tuturor numerelor prime mai mici sau egale cu p, deci:

$$Q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1.$$

Q nu este divizibil cu nici unul din numerele prime din produs, deci Q este sau prim, sau produs de numere prime mai mari decît p. În orice caz, există un număr prim mai mare decît p, deci nu există cel mai mare număr prim.

— Euclid, *Elementele*, cartea IX, Propoziția 20. (Deși binecunoscută, această frumoasă demonstrație clasică merită să fie inclusă în orice culegere de soluții cu veleități de eleganță).

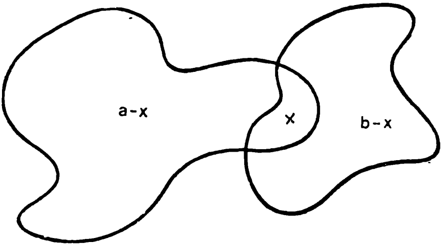
11. Numere complexe

Deoarece $i = \sqrt{-1}$, $i^8 = 1$. Putem deci scrie

$$\frac{27 + 8i}{3 + 2i^3} = \frac{27 + 8i^9}{3 + 2i^3} = 9 - 6i^3 + 4i^6 = 5 + 6i.$$

— J. M. Howell, *M.M.*, 26 (mai 1953), 287.

12. Arii suprapuse



În general, dacă două arii a și b au în comun aria x, atunci porțiunile nesuprapuse sînt $a - x$ și $b - x$. Diferența ariilor porțiunilor nesuprapuse este $a - b$. În cazul nostru, diferența este egală cu $\pi \cdot 20^2 - \pi \cdot 15^2 = 175\pi$.

— *M.M.*, 26 (mai 1953), 287.

13. Turneul de tenis

În fiecare meci există un învins. Fiecare jucător (în afară de cîștigătorul turneului) trebuie să fie învins o singură dată. Vor fi $n-1$ învinşi; prin urmare vor fi $n-1$ meciuri.

— Fred Marer, *M.M.*, 23 (mai 1950), 278.

14. O sumă de factoriale

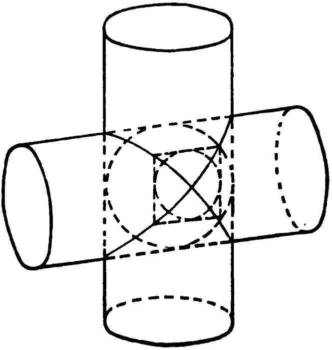
Avem:

$$1(1!)+2(2!)+3(3!)+\ldots+(n-1)[(n-1)!]+$$
$$+n(n!)=$$
$$=2(1!)+3(2!)+4(3!)+\ldots+n[n-1)!]+$$
$$+(n+1)(n!)-1!-2!-3!-\ldots-$$
$$-(n-1)!-n!=(n+1)!-1.$$

15. Intersecţia a doi cilindri

Să considerăm o secţiune arbitrară a volumului comun celor doi cilindri, paralelă cu secţiunea centrală determinată de axele de simetrie. Ea va fi un pătrat, al cărui cerc înscris va fi secţiunea corespunzătoare a sferei înscrise în volumul comun al celor doi cilindri. De aici rezultă că raportul dintre volumul comun şi volumul sferei înscrise este egal cu raportul dintre aria pătratului şi aria cercului înscris în pătrat, deci:

$$V = (4\pi r^3/3)(4/\pi) = 16r^3/3$$



— Leo Moser, *M.M.*, 25 (mai 1952), 290.

(Se observă că spaţiul comun celor doi cilindri poate fi subdivizat în piramide infinitezimale ale căror vîrfuri se află la intersecţia axelor şi cu bazele de-a lungul generatoarelor cilindrilor. Aceste piramide au înălţimea egală cu unitatea, de unde vom deduce că aria figurii noastre este egală cu 16).

— J. H. Butchart, *M.M.*, 26 (septembrie 1952), 54.

16. Reprezentările numerelor întregi

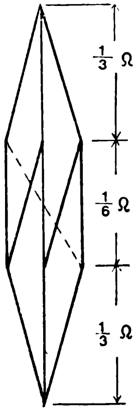
Să scriem numărul n ca un şir de n cifre 1, lăsînd un spaţiu între fiecare două cifre consecutive. Există, evident, o corespondenţă biunivocă între modurile de reprezentare a lui n ca o sumă şi modurile de a opera asupra celor $n - 1$ spaţii, lăsîndu-le goale sau adăugînd semnul plus. Avem deci două moduri de a opera asupra fiecăruia din cele $n - 1$ spaţii; prin urmare numărul total de reprezentări posibile este 2^{n-1}.

— William Moser, *P.M.E.J.*, 1 (noiembrie 1951), 186.

17. O ecuaţie cuadratică cu rădăcini raţionale

Pentru orice funcţie polinomială $f(x)$, $f(1)$ reprezintă suma coeficienţilor polinomului. Dacă această sumă este egală cu zero, $(x - 1)$ este un divizor al lui $f(x)$. Deoarece $1 - 2 + 3 + 4 - 6 = 0$, $x = 1$ este rădăcină a ecuaţiei date, indiferent de modul în care înlocuim parantezele.

18. Rezistenţa electrică a unui cub



Să ne închipuim că muchiile cubului sînt articulate la vîrfuri. Ridicînd cubul de un vîrf, muchiile vor atîrna în modul următor: trei muchii legate în paralel pornesc din vîrful cubului; acestea sînt legate în serie cu alte șase muchii legate în paralel; şi acestea, la rîndul lor, sînt legate în serie cu trei muchii legate în paralel, care se unesc în vîrful opus. Rezistența totală va fi deci:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6} \text{ ohmi.}$$

19. Cînd împărțitorul este ... o glumă

Evident,

$$JOKE=\frac{AHHAAH}{HA}=100+\frac{AH(10001)}{HA}=$$

$$=100+\frac{AH\cdot 73\cdot 137}{HA}$$

Să observăm că nu există nici o combinație de două cifre distincte AH astfel încît HA să fie un divizor al lui AH; HA va fi deci divizor al lui 10001. Rezultă că $HA=73$ și împărțirea noastră va fi:

$$377\,337/73=5169.$$

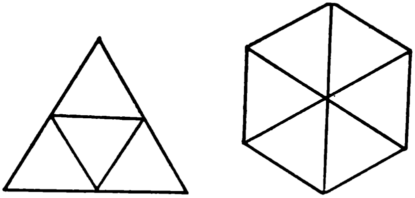
20. Vînzătorul de ciorapi

Din enunțul problemei rezultă că y este un întreg mai mic decît 2, deci $y=1$. Calculînd în lei cu cît revine mai ieftin o singură pereche de ciorapi, obținem ecuația

$$\frac{100}{x} - \frac{200}{x+10} = \frac{80}{12} \quad \text{sau} \quad x^2 + 25x - 150 = 0$$

a cărei unică rădăcină pozitivă $x = 5$ reprezintă numărul perechilor de ciorapi cumpărate inițial.

21. Raportul unor arii poligonale



Laturile triunghiului și ale hexagonului se află în raportul 2:1. Să observăm că triunghiul poate fi descompus în patru triunghiuri echilaterale, iar hexagonul în șase triunghiuri echilaterale, toate egale între ele. Rezultă că raportul ariilor este 2:3.

—*M.M.*, 34 (mai 1961), 308.

22. Paharele răsturnate

Dacă *n* este par și efectuăm *n* operații, lăsînd nemișcat cîte un alt pahar pentru fiecare operație, atunci, după ultima operație, fiecare pahar a fost întors de $n - 1$ ori, deci toate paharele au fost răsturnate.

Dacă n este impar, să reprezentăm un pahar cu buza în sus prin $+1$ și un pahar răsturnat prin -1. În poziția inițială produsul reprezentărilor este $+1$ și în cea finală -1. Orice operație inversează $n-1$ pahare, deci un număr par. Rezultă că orice operație lasă produsul reprezentărilor neschimbat.

— E. P. Starke.

23. Sfîrșitul lumii

Singurul principiu necesar demonstrației este următorul:

$$x - y \text{ divide pe } x^n - y^n \text{ pentru } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Să notăm expresia studiată de profesor cu $F(n)$ și să observăm că

$$2141 - 1863 = 1770 - 1492 = 278.$$

Rezultă că $F(n)$ este întotdeauna divizibil prin 278 și, printr-un raționament similar, $F(n)$ este divizibil prin:

$$371 = 2141 - 1770 = 1863 - 1492.$$

Numerele 278 și 371 sînt prime între ele, deci $F(n)$ este întotdeauna divizibil prin $278 \cdot 371 = 53 \cdot 1946$ și deci chiar prin 1946.

— E. P. Starke, *A.M.M.*, 54 (ianuarie 1947), 43.

24. Şase întregi distincţi

Dacă b este perioada inversului lui a, atunci produsul ab are toate cifrele egale cu 9. Obţinem: $99 = 9 \cdot 11$, $999 = 3 \cdot 9 \cdot 37$, $9999 = 9 \cdot 11 \cdot 101$, $99999 = 9 \cdot 41 \cdot 271$ şi $999999 = 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Ultima mulţime este cea căutată. De fapt,

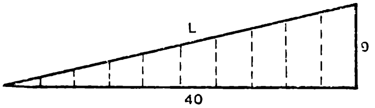
$$1/3 = 0{,}333333\ldots \quad 1/11 = 0{,}090909\ldots$$

$$1/7 = 0{,}142857\ldots \quad 1/13 = 0{,}076923\ldots$$

$$1/9 = 0{,}111111\ldots \quad 1/37 = 0{,}027027\ldots$$

— *M.M.*, 35 (noiembrie 1962) 311.

25. Lungimea unei elice



Să desfăşurăm sîrma rostogolind cilindrul pe un plan.

Generatoarea (9 cm), circumferinţa repetată ($10 \cdot 4$ cm) şi sîrma (L) vor forma un triunghi dreptunghic, deci

$$L = \sqrt{81 + 1600} = 41 \text{ cm de sîrmă.}$$

— *M.M.*, 23 (mai 1950), 278.

26. O problemă de minim

Fracția poate fi scrisă în modul următor:

$$(p + 1 + 1/p)\,(q + 1 + 1/q)\,(r + 1 + 1/r)\,(s + 1 + 1/s)$$

Se știe că suma unui număr pozitiv cu inversul său este$\geqslant 2$. Rezultă că fiecare factor al produsului este $\geqslant 3$ și deci produsul este$\geqslant 81$.

— R. L. Moenter, *S.S.M.*, 54 (noiembrie 1954), 667.

Este evidentă următoarea generalizare a acestei probleme:
pentru $a_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{(a_1^2 + a_1 + 1)\,(a_2^2 + a_2 + 1) \ldots (a_n^2 + a_n + 1)}{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant 3^n$$

27. O proprietate a pătratelor perfecte

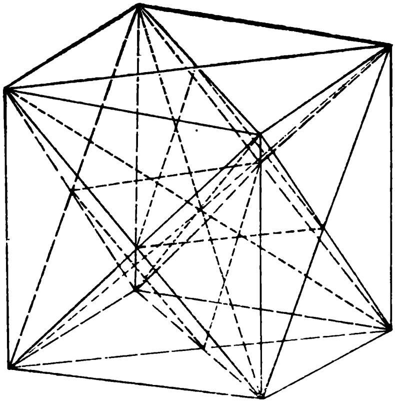
Examinarea unui tabel de pătrate ale numerelor naturale scrise în sistemul zecimal ne arată că:

1. Un pătrat se poate termina doar în 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.
2. Cifra zecilor este pară cînd cifra unităților diferă de 6 și impară cînd cifra unităților este egală cu șase. Astfel, cifrele unui pătrat perfect nu pot fi toate aceleași decît în cazul în care sînt toate egale cu 4.

N	N^2
..	...
10	100
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
..	...

(Un pătrat cu toate cifrele zero este lipsit de sens). Dar...444 = 4(...111), deci numărul nu poate fi pătrat perfect.

28. O problemă de conducere



Să figurăm întreprinderea sub forma unui cub și să situăm cîte un membru al consiliului de conducere în fiecare vîrf al cubului, în centrul cubului și în centrele fețelor laterale. Diagonalele cubului și ale fețelor laterale reprezintă șaisprezece comisii, patru pentru fiecare membru al consiliului de conducere, cu excepția celor situați în centrele fețelor laterale. Ei nu au decît două comisii. Aceste centre formează însă un octaedru și, alegînd prin alternare patru din fețele octaedrului, obținem celelalte comisii.

— I. Evernden și R. Spira, *A.M.M.*, 69 (noiembrie 1962), 921.

29. „Mozaicul"

Numărul pieselor este la început n şi la sfîrşit 1. Fiecare mutare reduce numărul pieselor cu 1, deci numărul total de mutări necesare este $n-1$ și, evident, este independent de procedură atît timp cît nu separăm piese odată îmbinate.

— Leo Moser, *M.M.*, 26 (ianuarie 1953), 169.

30. Restul unei împărţiri

Avem: $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, deci $(x-1) \cdot f(x) = x^5 - 1$. Putem scrie: $f(x^5) = (x^{20} - 1) + (x^{15} - 1) + (x^{10} - 1) + (x^5 - 1) + 4 + 1$. Fiecare polinom dintre paranteze este multiplu al lui $x^5 - 1$ și prin urmare al lui $f(x)$. În consecință $f(x^5) = [\text{un multiplu al lui } f(x)] + 5$.

— Norman Anning, *S.S.M.*, 54 (octombrie 1954), 576.

31. Scheletul unei împărţiri

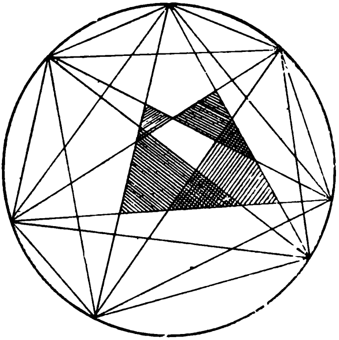
Dacă notăm împărțitorul cu d, avem $8d < 1000$ și deci $d < 125$. Deoarece $7d < 900$, din prima împărțire rezultă că prima cifră a cîtului este 8.

Continuînd raționamentul în același mod, deducem valoarea cîtului egală cu 80 809. Deîmpărțitul are opt cifre și deci $80809d > 10\,000\,000$ și $d > 123$; prin urmare $d = 124$ și împărțirea este:

$$\begin{array}{r|l} 10020316 & 124 \\ \cline{2-2} 992 & 80809 \\ \cline{1-1} 1003 & \\ 992 & \\ \cline{1-1} 1116 & \\ 1116 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

— W. B. Carver, *A.M.M.*, 61 (decembrie 1954), 712.

32. Triunghiuri în cerc



Să observăm că oricare șase puncte situate pe circumferința cercului pot fi aranjate în perechi într-un singur mod astfel încît segmentele care unesc perechile de puncte să formeze un triunghi admisibil. Reciproc, prelungirile laturilor oricărui triunghi admisibil intersectează circumferința cercului în șase puncte. Rezultă deci că numărul triunghiurilor admisibile care se pot forma unind n puncte date este de

$$C_n^6, \text{ deci } n!/6!(n-6)!$$

— Leo Moser, *M.M.*, 26 (martie 1953), 226. Desenul ne arată cazul $n = 7$.

33. Înmulțire ușor de efectuat

$$125 = 1000/8, \text{ deci } (5\,746\ 320\ 819)(125) =$$
$$= 5\ 746\ 320\ 819\ 000/8 = 718\ 290\ 102\,375.$$

— *M.M.*, 25 (mai 1952), 289.

34. Un șir alternant

Să scădem $\frac{1}{2}(7-4) = 1{,}5$ din fiecare termen al șirului dat. Obținem șirul:

$$-5{,}5;\ +5{,}5;\ -5{,}5;\ +5{,}5;\ \ldots$$

deci termenul de rang n al șirului dat este

$$1{,}5 + 5{,}5(-1)^n.$$

35. O expresie cu radicali

Să notăm:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = a,\quad \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = b \text{ și } a+b = x.$$

Atunci:

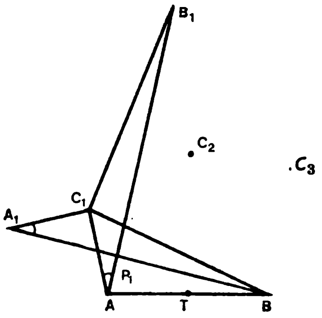
$$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 +$$

$$+ 3ab(a + b) = 4 + 3\sqrt[3]{-1}\ x = 4 - 3x, \text{ deci}$$

$x^3 + 3x - 4 = 0$ și singura rădăcină reală a acestei ecuații este $x = 1$.

— Claire Adler, *A.M.M.*, 59 (mai 1952), 328.

36. Comoara îngropată



Triunghiurile AB_1C_1 și A_1BC_1 sînt egale și prin urmare unghiurile C_1AB_1 și C_1A_1B sînt egale. În plus, $\widehat{AP_1A_1} = \widehat{AC_1A_1} = 90°$ și deci $\widehat{AP_1B} = 90°$. Astfel, P_1 (și prin urmare și P_2 și P_3) sînt situate pe un cerc cu diametrul AB; comoara este deci ascunsă la mijlocul segmentului AB.

37. Plata gratificațiilor

Fie m numărul total al bărbaților și fie x procentul celor care au refuzat gratificația. Suma totală plătită atît femeilor cît și bărbaților este

$$T = 8{,}15(350 - m) + 10(1 - x)m = 2852{,}50 + $$

$$+ m(1{,}85 - 10x).$$

Ea va fi independentă de m doar pentru $x = 0{,}185$, deci

$$T = 2\,852{,}50.$$

Atît m cît și $0{,}185\ m$ sînt întregi și, în plus, $m < 350$, deci $m = 200$. Rezultă că cele 150 de femei au primit o sumă de 1 222,50 dolari.

38. Simplificarea unui produs

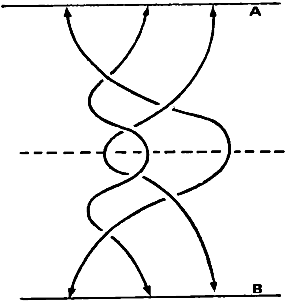
Să înmulțim produsul nostru cu $(1/2)(3^{2^0} - 1) = 1$. Să observăm că $(3^{2^0} - 1)(3^{2^0} + 1) = (3^{2^1} - 1$, apoi $(3^{2^1} - 1)(3^{2^1} + 1) = (3^{2^2} - 1)$ și așa mai departe; prin urmare produsul este egal cu $(1/2)(3^{2n+1} - 1)$.

În general, folosind în locul lui 3 o bază arbitrară $x > 1$, produsul va fi egal cu

$$[1/(x-1)]\,(x^{2^{n+1}} - 1)$$

— *M. M.*, 38 (martie 1965), 124.

39. Sforile sînt încurcate?



Obținem rezultatul căutat construind simetricul primei figuri față de linia punctată.

— N. Grossman, *P.M.E.J.*, 2 (noiembrie 1954), 26.

40. Diferența egală cu cîtul

În general, dacă $x - y = x/y = a$, atunci $x = ay$ și deci

$$x = a^2/(a - 1) \text{ și } y = a/(a - 1).$$

În cazul nostru $a = 5$, $x = 25/4$, $y = 5/4$.

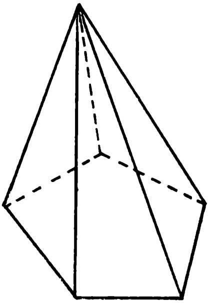
41. Elevul somnoros

Rădăcinile sînt pozitive; folosind relațiile dintre rădăcini și coeficienți să observăm că atît media lor aritmetică cît și media lor geometrică sînt egale cu 1. Rezultă că toate rădăcinile sînt egale cu 1.

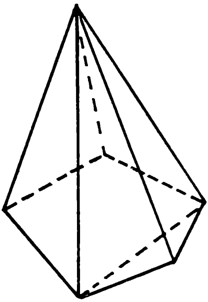
— D. S. Greenstein, *A.M.M.*, 63 (septembrie 1956), 493.

42. Muchiile unui poliedru

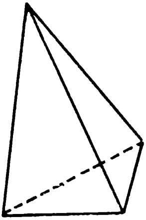
Fie $n>3$. Cel mai simplu poliedru cu $2n$ muchii este o piramidă care are ca bază un poligon cu n laturi. Dacă îndoim acest poligon de-a lungul unei diagonale şi unim vîrfurile poligonului cu un punct exterior celor două plane în care sînt situate părţile îndoite, obţinem un poliedru cu $2n+1$ muchii.



$2n,\ n>3$



$2n+1,\ n>3$



6

În fiecare vîrf al poliedrului se întîlnesc cel puţin trei muchii şi fiecare muchie uneşte două vîrfuri ale poliedrului. Rezultă că un poliedru cu m vîrfuri are cel puţin $3m/2$ muchii. Orice poliedru cu patru vîrfuri are şase muchii şi orice alt poliedru are cinci sau mai multe vîrfuri, deci cel puţin $5 \cdot 3/2 = 7^1/_2$ muchii. Rezultă deci că nici un poliedru nu poate avea exact şapte muchii.

— E. P. Starke, *A.M.M.*, **58** (martie 1951), 190.

43. O congruență simplă

$$63! - 61! = (63 \cdot 62 - 1)(61!) = 5 \cdot 11 \cdot 71(61!),$$

deci

$$63! \equiv 61! \ (\text{modulo } 71).$$

— *M.M.*, 34 (septembrie 1961), 358.

44. Triunghiul este echilateral

Ecuația $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ este echivalentă cu ecuația $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$. Fiecare termen al sumei trebuie să fie nul, deci $a = b = C$.

— M. S. Klamkin, *M.M.*, 27 (mai 1954), 287.

45. Mai simplă decît pare

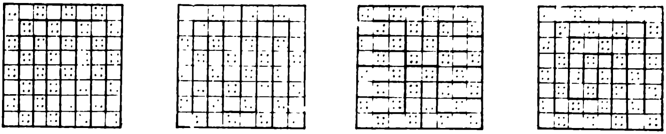
$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \ldots}\right)^{1/3} =$$

$$= \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots)}{1 \cdot 3 \cdot 9(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots)}\right)^{1/3} = (8/27)^{1/3} = 2/3.$$

— Max Beberman, *S.S.M.*, 49 (octombrie 1949), 558.

46. Acoperirea unei table de șah

Răspunsul este afirmativ. Să stabilim pe tabla de șah un drum închis cu lățimea egală cu latura unui pătrat, care să acopere toată tabla și care să nu se intersecteze niciodată cu sine însuși. Cele patru figuri de mai jos reprezintă patru moduri de a construi un astfel de drum*.



Să observăm că de-a lungul drumului culorile pătratelor alternează. Eliminarea a două pătrate de culori diferite va tăia drumul în alte două drumuri, care nu vor mai fi închise (sau în unul singur, dacă cele două pătrate sînt adiacente de-a lungul drumului). Fiecare segment conține un număr par de pătrate și deci poate fi acoperit cu dreptunghiuri; rezultă că în acest mod poate fi acoperită întreaga suprafață dată.

47. O egalitate numerică

Problema este o particularizare a identității algebrice:

$$a(a+b)(a+2b)(a+3b)=(a^2+3ab+b^2)^2-b^4,$$

* Figura din stînga reproduce desenul lui Ralph E. Gomory dat în rubrica *Mathematical Games* (Jocuri matematice) a lui Martin Gardner din „Scientific American", noiembrie 1962, pp. 151–152.

în care luăm $a = r^3 + r^2 + r$ (r este baza sistemului de numerație) și $b = 1$.
Avem:

$$a^2 + 3ab + b^2 = r^6 + 2r^5 + 3r^4 + 5r^3 + 4r^2 + 3r + 1.$$

Cel mai mare coeficient este 5 și deci identitatea este adevărată pentru orice sistem de numerație cu baza mai mare decît cinci.

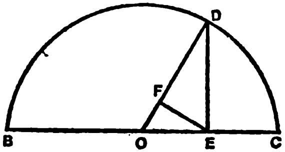
— E. P. Starke, *A.M.M.*, 51 (decembrie 1944), 590.

48. Editorială

Media aritmetică a anilor de publicare este 13 524/7=1932 și ea reprezintă anul de apariție a celei de-a patra cărți. Prima carte a apărut cu $3 \cdot 7$ ani înainte, deci în anul $1932 - 3 \cdot 7 = 1911$.

— *M.M.*, 34 (septembrie 1961), 377.

49. Trei medii



Fie BC un segment de dreaptă, iar E un punct aparținînd segmentului, astfel încît $BE = a$ și $EC = b$ și să considerăm un semicerc cu diametrul

BC și de centru O. Perpendiculara ridicată în E pe BC intersectează semicercul în D. Fie F piciorul perpendicularei coborîte din E pe OD. OD este rază, deci $OD = (a+b)/2 = A$ și $ED = (ab)^{1/2} = G$. Din triunghiurile asemenea OED și EFD obținem proporțiile $DF/ED = ED/OD$, deci $DF = (ED)^2/OD = 2\, ab/a+b = H$. În consecință, $G^2 = HA$ și, mai mult, $A \geqslant G \geqslant H$.

— Adrien L. Hess, *S.S.M.*, 61 (ianuarie 1961), 45.

50. Concursul de frumusețe

În ordinea $D - A - E - C - B$, cele două poziții corecte trebuie să fie alăturate, deoarece, în caz contrar, una din pozițiile corecte este precedată sau urmată în mod inevitabil de încă o poziție, care va fi, la rîndul ei, corectă. Rezultă deci că una din perechile $D - A$, $A - E$, $E - C$ sau $C - B$ sînt plasate corect. Perechile $A - E$ și $E - C$ vor fi eliminate, deoarece pozițiile lor nu permit existența unei alte alternări corecte. Dacă perechea $D - A$ este bine plasată, atunci ordinea corectă va fi sau $D - A - B - E - C$ sau $D - A - C - B - E$, însă ambele ordonări sînt eliminate de comentariul la primul pronostic. Perechea bine plasată va fi deci $C - B$. Eliminînd ordinea $A - E - D - C - B$, care nu satisface primul comentariu, rămîne numai $E - D - A - C - B$, care este ordinea corectă.

— J. F. Leetch, *A.M.M.*, 68 (august 1961), 669.

51. O ecuație în care intervin sume

Conform unei cunoscute reguli referitoare la proporții, dacă $a/b = c/d$, atunci $(a+b)/b = (c+d)/d$. Aplicînd această regulă la ecuația dată se obține:

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (2n)^3}{2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3)} = \frac{441}{242}.$$

Restrîngînd sumele de cuburi, obținem:

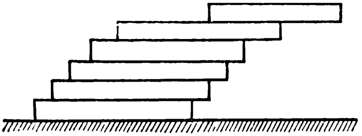
$$\frac{(2n)^2(2n+1)^2/4}{(8n^2)(n+1)^2/4} = \frac{441}{242} = \frac{21^2}{2 \cdot 11^2}.$$

$$\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{21^2}{11^2}.$$

Deci $n = 10$ (rădăcina negativă nu e acceptabilă).

52. O construcție cu piese de domino

Dacă o construcție de $k-1$ paralelipipede dreptunghice, fiecare avînd lungimea de $2x$ este suprapusă peste un alt paralelipiped, astfel încît centrul de greutate al construcției se află deasupra muchiei paralelipipedului de la bază, atunci centrul de greutate al întregii configurații se află la distanța măsurată pe orizontală $\frac{x}{k}$ de muchea respectivă a bazei.



Prin urmare, cele n dominouri cu lungimea bazei $x = 1$, inițial perfect suprapuse, pot fi deplasate între două plane verticale fixe aflate la distanța de o unitate, astfel ca suma deplasărilor relative ale unei piese față de cea imediat inferioară să fie egală cu $1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/(n - 1)$. Figura astfel obținută este în echilibru. Seria armonică a cărei sumă parțială am obținut-o este divergentă, și deci deplasarea pe orizontală a piesei superioare poate fi făcută să fie oricît de mare, depinzînd de numărul de piese aflat la dispoziție. Dacă dorim ca piesa din vîrf să fie complet în exteriorul bazei, n trebuie să fie cel puțin 5, în care caz această piesă a fost deplasată cu $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5$, adică aproximativ 2,083 unități.

Dacă piesele se deplasează astfel încît diagonalele lor rămîn în același plan vertical și centrele de greutate ale diferitelor subconstrucții se află deasupra colțului piesei imediat inferioare, atunci deplasarea totală va fi de $[1^2 + (1/2)^2]^{1/2} = \sqrt{5}/2$ ori mai mare decît în primul caz studiat.

— *P.M.E.J.*, 1 (aprilie 1954), 411.

53. Dînd cu zarul

Totalul obținut după penultima aruncare a zarului poate fi 12, 11, 10, 9 sau 8. Dacă totalul este 12, suma finală poate fi, cu egală probabilitate, 13, 14, 15, 16 sau 17. La fel, dacă totalul este 11, suma finală poate fi, cu şanse egale, 13, 14, 15 sau 16. Continuînd raţionamentul şi pentru celelalte cazuri, este clar că rezultatul final cel mai probabil este 13.

— N. J. Fine, *A.M.M.*, 55 (februarie 1948), 98.

Dacă vom înlocui 12 cu $N > 3$, totalul cel mai probabil va fi $N + 1$.

54. Un sistem de ecuaţii liniare

Dacă $n \geqslant 3$, ecuaţiile sistemului nu sînt independente şi deci soluţia nu va fi unică; rezultă deci că $n < 3$. Cum noţiunea de sistem implică $n > 1$, înseamnă că $n = 2$. Dacă ecuaţiile au forma

$$ax + (a + d)y = a + 2d$$

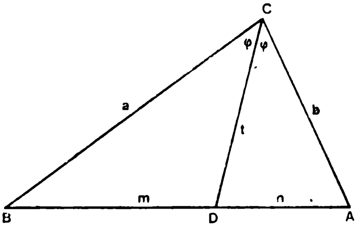
$$(a + 3d)x + (a + 4d)y = a + 5d,$$

atunci $x + y = 1$ şi deci $x = -1$, $y = 2$.

— David Rothman, *A.M.M.*, 70 (ianuarie 1963), 93.

Mai mult, orice sistem de două ecuaţii, ambele de forma
$(a + 3kd)x + [a + (3k + 1)d]y =$
$= a + (3k + 2)d$
au aceeaşi soluţie unică.

55. Teorema bisectoarei



Raportul ariilor celor două părţi în care bisectoarea unghiului $C = 2\varphi$ împarte triunghiul este $\Delta BCD/\Delta DCA = \frac{1}{2}\, at \sin \varphi / \frac{1}{2}\, bt \sin \varphi = a/b$. Triunghiurile avînd înălţimea comună, rezultă că ariile lor sînt proporţionale cu lungimile bazelor respective şi deci $\Delta BCD/\Delta CDA = m/n = a/b$.

— Robert P. Goldberg, *M.M.*, 34 (noiembrie 1961), 435.

56. Probabilitatea divizibilităţii

Să observăm că numărul format de ultimele două cifre este 76 şi deci divizibil prin 4. Să mai observăm că diferenţa dintre suma cifrelor de rang par (73) şi suma cifrelor de rang impar (17+45) este divizibilă prin 11, indiferent de ordinea în care am înlocuit spaţiile goale. Suma tuturor cifrelor (90+45) este divizibilă prin 9. Folosind criteriile de divizibilitate prin 4, 11 şi

9, rezultă că numărul nostru este divizibil prin $4 \cdot 11 \cdot 9 = 396$. Prin urmare, probabilitatea este 1.

— Prasert Na Nagara, *A.M.M.*, (decembrie 1961), 435.

57. O ecuație fără soluții întregi

Orice număr întreg x este de forma $3n$ sau $3n \pm 1$. Dacă substituim aceste forme în ecuația $x^2 - 3y^2 = 17$, rezultatul se poate scrie respectiv $3(3n^2 - y^2) = 17$ și $3(3n^2 \pm 2n - y^2) = 16$. Deoarece 3 nu divide nici pe 17 și nici pe 16, aceste ecuații nu pot să admită soluții întregi.

— E. P. Starke, *A.M.M.*, 52 (decembrie 1915), 580.

58. Fiul profesorului de matematică

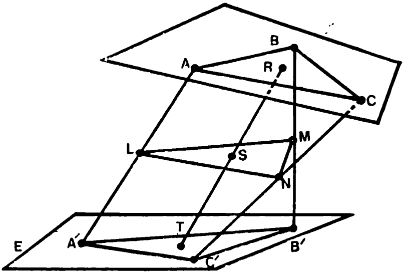
Deoarece $f(O) = P$,

$$f(x) = x \cdot q(x) + P \text{ și } f(A) = A \cdot q(A) + P = A.$$

Prin urmare A divide pe P, dar $P > A$ este prim, deci $A = 1$ an. Unul din infinitatea de polinoame pe care profesorul putea să o scrie este $x^3 - 3x^2 + 3$.

59. Un loc geometric în spațiu

Să considerăm punctele A, B, C și A', B', C' ca puncte materiale avînd masa egală cu uni-



tatea. Fie R centrul de greutate al particulelor A, B, C și T centrul de greutate al particulelor A', B', C'. Dar S poate fi considerat atît ca centrul de greutate a trei particule de masă 2 situate în L, M și N, cît și ca centrul de greutate a două particule de masă 3, situate în R și T. Astfel S este mijlocul lui RT, și fiindcă R este fix și T variabil, locul geometric al lui S este un plan paralel cu E.

— Daniel Pedoe, *A.M.M.*, 71 (iunie 1964), 670.

60. Observații meteorologice

Au fost $\frac{1}{2}(6+7-9)$ zile cînd nu a plouat nici înainte de masă și nici după-amiază și deci perioada care a fost studiată este de $9+2=11$ zile.

— *M.M.*, 34 (martie, 1961), 244.

61. Teorema lui Steiner-Lehmus

Vom folosi o formulă cunoscută care exprimă lungimea bisectoarei în funcție de laturi:

$$\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2} = t_a^2 = t_b^2 =$$

$$= \frac{ac(a+b+c)(c+a-b)}{(a+c)^2}.$$

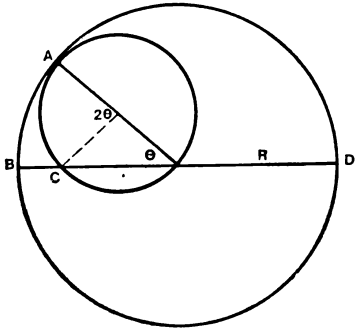
Simplificînd, obținem

$$c(a+b+c)(a-b)[(a+b)(c^2+ab)+3abc+$$
$$+c^3]=0.$$

Toți factorii cu excepția lui $(a-b)$ sînt strict pozitivi și prin urmare expresia se anulează doar pentru $a=b$.

Această soluție este atribuită lui Jacob Steiner, care a dat-o în jurul anului 1844.

62. Dansul Hula-Hoop



Mişcarea este relativă şi deci ne putem permite să considerăm cercul fix şi pe sărmana fată rotindu-se în interiorul lui. Punctul iniţial de contact dintre fată şi cerc descrie de două ori diametrul cercului mare, ceea ce reprezintă chiar lungimea căutată.

— Leo Moser, *A.M.M.*, 66 (decembrie, 1959), 918.

Dacă fata se învîrteşte, punctul iniţial de contact C de pe talia ei descrie diametrul BD, deoarece

$$\text{arc } AB = R\theta = (R/2)(2\theta) = \text{arc } AC.$$

63. Împărţirea cercului în opt părţi egale

Să aplicăm ecuaţiei date formulele de rotaţie

$$x = X\cos 45° - Y\sin 45° = (X - Y)/\sqrt{2}$$

$$y = X\sin 45° + Y\cos 45° = (X + Y)/\sqrt{2}$$

obţinem:

$$X + kX^3Y - 6X^2Y^2 - kXY^3 + Y^4 = 0.$$

Rezultă deci că această curbă este invariantă la o rotaţie de 45° şi prin urmare cercul va fi tăiat în 360°/45° = 8 părţi egale*.

— Norman Anning, *M.M.*, 32 (mai 1959), 285.

---

* Demonstraţia ar putea fi completată cu precizarea că această curbă taie cercul cel puţin într-un punct. Atunci, din demonstraţie şi din considerente referitoare la gradele ecuaţiilor, ar rezulta că o taie exact în opt puncte *(N.T.)*.

Ecuația poate fi pusă sub forma:

$$(x + ay)[(a + 1)x +$$
$$+ (a - 1)y](ax - y)[(a - 1)x - (a + 1)y] = 0,$$

unde

$$k = (a^4 - 6a^2 + 1)/a(a^2 - 1)^*.$$

64. O progresie aritmetică specială

Progresia 2, 6, 10,...$(4k+2)$,... îndeplinește condițiile specificate în enunț. Vom remarca faptul că orice putere a unui număr impar este impară și orice putere (diferită de 1) a unui număr par este divizibilă cu 4.

— Azriel Rosenfeld, *A.M.M.*, 62 (martie 1955), 185.

(Mai există și următoarea soluție banală: primul termen al progresiei să nu fie o putere perfectă, iar rația progresiei să fie egală cu zero.)

65. Aria unui poligon

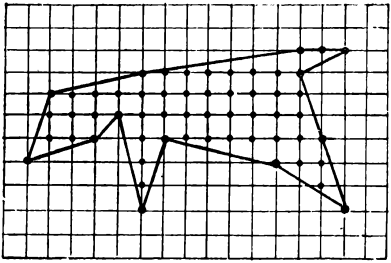
Vom folosi teorema lui Pick, care se enunță astfel: aria oricărui poligon ale cărui vîrfuri sînt situate în nodurile unei rețele de pătrate este dată de formula

$$b/2 + c - 1,$$

unde b reprezintă numărul de noduri situate pe laturile poligonului iar c numărul de noduri situate în interiorul poligonului.

---

* Lăsăm în seama cititorului să demonstreze că pentru orice k real există un număr real a care verifică această relație *(N.T.)*.



Astfel, aria poligonului din desenul nostru este egală cu $14/2 + 42 - 1 = 48$.

66. O ecuație cu factoriale

Avem $n!(n-1)! = n[(n-1)!]^2 = m!$. Evident $1!\ 0! = 1!$ și $2!1!$ sînt soluții. Pentru orice întreg $m>10$ există întotdeauna cel puțin două numere prime p și q mai mari decît $m/2$ și mai mici sau cel mult egale cu m. Atunci

$$p \cdot q \geqslant \left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m+1}{2}+2\right)=\frac{m^2}{4}+\frac{3m}{2}+$$
$$+\frac{5}{4}>m>n.$$

Să presupunem că ecuația dată admite o soluție pentru $m>10$. Să observăm că produsul pq nu poate să dividă pătratul perfect și că prin urmare pq divide pe n. Pe de altă parte, $pq>n$. Rezultă că nu există soluții cu $m>10$. Pentru $m\leqslant 10$, există soluția $7!\ 6! = 10!$

67. Două triunghiuri corelate

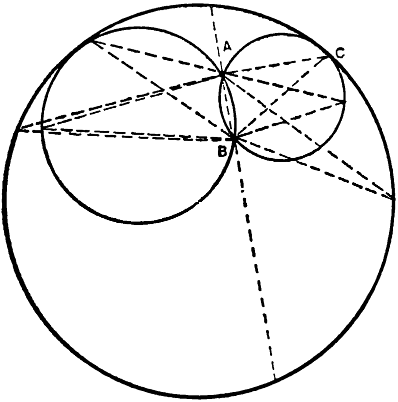
Deoarece $|\sqrt{b} - \sqrt{c}|(\sqrt{b} + \sqrt{c}) = |b - c| <$

$< (\sqrt{a})^2 < (b + c) < (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$, avem

$$|\sqrt{b} - \sqrt{c}| < \sqrt{a} < (\sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

— Chih-Yi Wang, *A.M.M.*, 67 (ianuarie 1960), 82.

68. Unghi maxim în cerc



Unghiul maxim este determinat de punctele de contact cu cercul mare ale celor două cercuri care trec prin A și B și sînt tangente interior la cercul mare. Orice alt punct de pe cercul mare este situat în afara celor două cercuri mai mici și deci va determina un unghi mai mic.

— Alan Sutcliffe, *M.M.*, 38 (martie 1965), 124.

69. Determinantul unui pătrat magic

Fie pătratul magic

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

şi fie

$$N = (a + e + i) + (d + e + f) + (g + e + c) -$$

$$- (a + d + g) - (c + f + i) = 3e.$$

Sumele din paranteze sînt egale între ele; prin urmare suma elementelor de pe aceeaşi linie, coloană sau diagonală a pătratului magic este egală cu $3e$ şi deci $S = 9e$. Adunînd linii şi coloane obţinem

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3e & 3e & 3e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 3e \\ d & e & 3e \\ 3e & 3e & 9e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & e \\ d & e & e \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} S$$

— R. J. Walker, *A.M.M.*, 56 (ianuarie 1949), 33.

70. Un număr cu cinci cifre care nu este pătrat perfect

Există doar două mulţimi de cîte cinci cifre distincte şi congruente modulo 2, acestea fiind

0, 2, 4, 6, 8 și 1, 3, 5, 7, 9. Suma cifrelor oricărui pătrat perfect trebuie să fie congruentă modulo 9 cu 0, 1, 4 sau 7. Suma cifrelor primei mulțimi este însă congruentă cu 2 modulo 9. În plus, dacă ultima cifră a unui pătrat perfect este impară, penultima cifră trebuie să fie pară. Rezultă deci că nici o permutare a uneia din cele două mulțimi nu poate fi un pătrat perfect.

— *A.M.M.*, 44 (aprilie 1937), 248.

71. Divizarea unei sfere

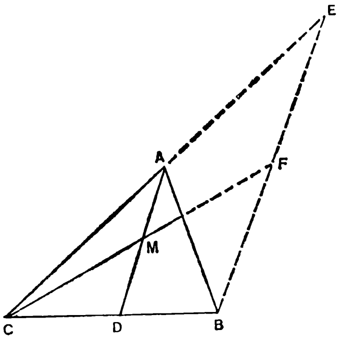
Să înscriem în sferă un dodecaedru regulat sau un icosaedru regulat și să coborîm perpendiculare din centru pe fiecare față. Se vor forma astfel 60 de triunghiuri isoscele care au drept vîrfuri picioarele perpendicularelor coborîte și drept baze muchiile fețelor respective. Proiectînd central aceste triunghiuri pe suprafața sferei, obținem o împărțire a ei în 60 de triunghiuri sferice isoscele.

— W. R. Ransom, *A.M.M.*, 40 (februarie 1933), 144.

72. Trisectoarea laturii unui triunghi

Paralela dusă prin B la mediana AD întîlnește prelungirea laturii CA în E. Fie M mijlocul segmentului AD și F intersecția dreptei CM cu BE.

Atunci A este mijlocul segmentului CE și F mijlocul lui BE și deci AB și CF sînt mediane



în triunghiul CBE; aplicînd teorema medianei, rezultă că ele se împart reciproc în raportul 1:2.

— Aaron Buchman, *S.S.M.*, 50 (decembrie 1950), 757.

73. O descompunere în factori

Avem:

$$a^{15} + 1 = (a^3 + 1)(a^{12} - a^9 + a^6 - a^3 + 1) =$$
$$= (a + 1)(a^2 - a + 1)(a^{12} - a^9 + a^6 -$$
$$- a^3 + 1) = (a^5 + 1)(a^{10} - a^5 + 1) =$$
$$= (a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)(a^{10} -$$
$$- a^5 + 1).$$

Prin încercări constatăm că $a^2 - a+1$ nu divide $a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$, deci acest polinom trebuie să dividă $a^{10} - a^5 + 1$.
Vom scrie deci $a^{10} - a^5 + 1 = (a^{10} - a^9 + a^8)+$

$$+ (a^9 - a^8 + a^7) - (a^7 - a^6 + a^5) - (a^6 - a^5 +$$

$$+ a^4) - (a^5 - a^4 + a^3) + (a^3 - a^2 + a) +$$

$$+ (a^2 - a + 1).$$

Rezultă că

$$a^{15} + 1 = (a + 1) (a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$$

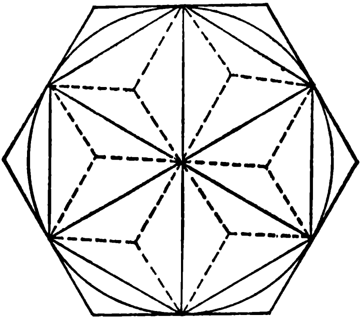
$$(a^2 - a + 1) (a^8 + a^7 - a^5 - a^4 - a^3 + a + 1).$$

— *M.M.*, 27 (mai 1954), 287.

74. Un număr curios

Dacă $(N/5)(N/7) = N$, atunci $N(N-35) = 0$ şi deci $N=35$. Altă cale: dacă, în loc să înmulţim 1/5 din numărul dat cu 1/7 din el însuşi, înmulţim numărul dat cu el însuşi, rezultatul va fi de 35 de ori mai mare decît cel din prima metodă, şi prin urmare numărul este 35. În general, dacă un număr N este egal cu $\Pi N/a_i$, numărul este Πa_i.

75. Două hexagoane regulate



Să considerăm un hexagon regulat înscris, cu vîrfurile situate la mijloacele laturilor hexagonului circumscris. Ducînd diagonalele mari ale hexagonului înscris și apoi unind centrele de greutate ale celor șase triunghiuri echilaterale, astfel formate, cu vîrfurile triunghiurilor respective, configurația este divizată în 24 de triunghiuri egale. Optsprezece din acestea se află în hexagonul înscris, deci ariile hexagoanelor înscrise și circumscrise se află în raportul 18:24 sau 3:4.

— *M.M.*, 35 (martie 1962), 70.

76. Termenii generali ai unor șiruri

Dîndu-se un număr finit de termeni cu care începe un șir, șirul poate fi continuat în mod arbitrar. Prin urmare se pot găsi pentru ambele șiruri o infinitate de formule care să dea termenul lor general. Două din acestea, cum se observă ușor, sînt:

(a) $0, 3, 26, 255, 3124, \ldots, (n^n - 1), \ldots$

(b) $1, 2, 12, 288, 34560, \ldots, [(1!\ 2! \ldots (n!)], \ldots$

77. Propagarea căldurii

Dacă suprapunem patru pătrate de tablă identice, așa încît cîte o latură încălzită la 100° să corespundă fiecărei laturi a pătratului astfel obținut, atunci temperatura medie pe fiecare muchie este de 25°. Înseamnă că temperatura din centrul pătratului este tot de 25°*.

— Leo Moser, *M.M.*, 24 (mai 1951), 273.

— Această metodă de rezolvare poate fi generalizată la cazul unui poligon regulat cu n laturi, menținute respectiv la temperaturile t_i grade, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$; în acest fel se demonstrează că temperatura în centrul poligonului este de $1/n \sum_{i=1}^{n} t_i$ grade.

78. Are sens?

Dacă 1/4 din 20 e 6, calculul a fost efectuat în baza de numerație 12. Deci 1/5 din 10 este 2 2/5, deoarece $10_{12} = 12_{10}$.

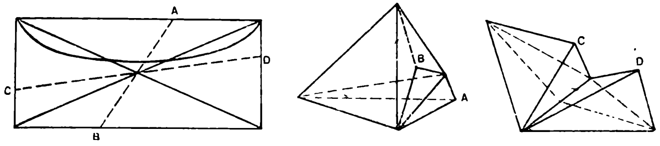
— *M.M.*, 31 (ianuarie 1958), 178.

---

* Din legile de propagare a căldurii rezultă că dacă temperatura pe frontiera unui corp omogen e constantă, ea are aceeași valoare constantă și în interiorul corpului *(N.T.)*.

79. Transformarea plicului în tetraedru

Ariile celor două tetraedre fiind egale, rezultă că plicul trebuie tăiat astfel încît cele două fragmente să aibă arii egale. Rezultă că dreapta după care tăiem plicul trebuie să treacă prin centrul dreptunghiului.



Să arătăm acum că orice tăietură astfel făcută e convenabilă. Îndoim jumătatea decupată după diagonalele dreptunghiului și după perpendiculara dusă prin centru pe latura mai lungă. Suprapunem apoi capetele tăieturii*, astfel ca îndoiturile făcute să fie muchiile unui tetraedru avînd toate fețele triunghiuri isoscele egale.

Singura excepție este cazul în care plicul este un pătrat. În acest caz, prin operația noastră rezultă două noi plicuri care au de asemenea forma unui pătrat.

80. O criptogramă

Fie $FRY = x$ și $HAM = y$, atunci

$$7(1\,000x + y) = 6(1\,000y + x)$$

$$6\,994x = 5\,993y \quad 538x = 461y$$

---

* Prin această operație cele două margini ale tăieturii care corespund celor două fețe ale plicului se îndepărtează una de alta *(N.T.)*.

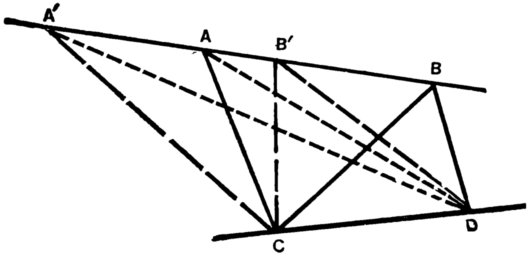
Deoarece coeficienții numerici sînt primi între ei, rezultă că $x = FRY = 461$ și $y = HAM = 538$.

81. Vînzarea oilor

Dacă x este numărul de animale, y numărul de oi și z prețul mielului, atunci avem $x^2 = 10y + z$ cu y un număr impar și $z < 10$. Penultima cifră a unui pătrat perfect este impară dacă și numai dacă ultima cifră este 6*. Deci $z = 6$ și fiul care a avut numai oi trebuie să cedeze fratelui său 2 dolari.

— Irving Kaplansky, *A.M.M.*, 51 (martie 1944), 166.

82. Un volum constant



Este suficient să demonstrăm că volumul rămîne constant dacă un segment rămîne fix și

* Vezi problema 27 *(N.T.)*.

celălalt, de exemplu AB, se deplasează într-o poziție nouă $A'B'$. Aria triunghiului variabil ABC este constantă, deoarece înălțimea și baza lui își păstrează lungimile constante. Mai mult, distanța de la D la planul ABC rămîne neschimbată. Deoarece aria bazei și înălțimea tetraedrului rămîn constante, volumul tetraedrului nu se schimbă.

— Leon Bankoff, *P.M.E.J.*, 1 (noiembrie 1952), 281.

83. Un număr zecimal periodic

Perioada lui $1/7$ este 142 857. Împărțim la 7 numărul care se obține repetînd de atîtea ori această perioadă, după virgulă, pînă cînd împărțirea se face exact. Numărul obținut e perioada lui $1/7^2$. Astfel

$$0{,}142857\ 142857\ 142857\ 142857\ 142857\ 142857 : 7 =$$

$$= 0{,}020408\ 163265\ 306122\ 448979\ 591836\ 734693\ 877551.$$

— Dewey C. Duncan, *M.M.*, 25 (martie 1952), 244.

84. O ecuație irațională

Dacă

$$a + b + c = 0,$$

atunci

$$a^3 + b^3 + c^3 = abc,$$

astfel că

$$(6x+28)-(6x-28)-8 = 3[(6x+28)(6x-28)\cdot 8]^{1/3}$$

$$48 = 6(36x^2 - 784)^{1/3}$$

$$512 = 36x^2 - 784$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6.$$

— Frederic E. Nemmers, *S.S.M.*, 41 (martie 1941), 291.

85. Concursul cu premii

Vom număra drumurile „mergînd de-a-ndaratelea“, adică începînd cu litera N. Considerînd numai jumătatea din stînga a tabelului și coloana centrală, să observăm că pentru fiecare pas înapoi există două posibilități de alegere. Rezultă deci că această parte a tabloului conține 2^{12} drumuri. Dublînd acest număr și scăzînd drumul de pe coloana centrală, care a fost numărat de două ori, rezultă un total de $2^{13} - 1$, adică 8191 drumuri*.

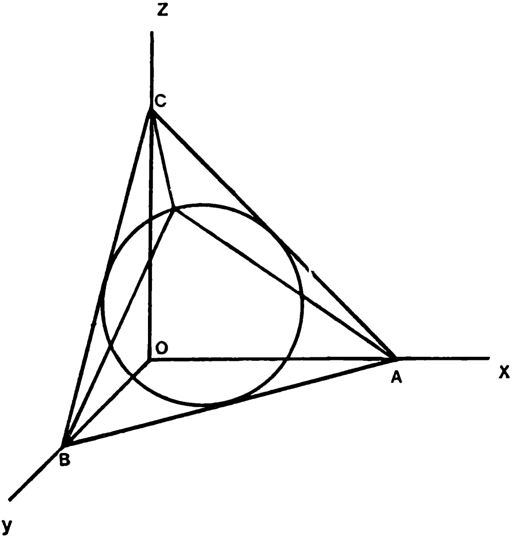
— I. F. Leetch, *A.M.M.*, 68 (martie 1961), 296.

---

* Demonstrația este valabilă fiindcă nu există nici un drum care traversează coloana centrală; aceasta se poate observa din faptul că părăsind o dată această coloană nu mai avem posibilitatea de a ne întoarce pe ea *(N.T.)*.

86. O sumă constantă

Să alegem un sistem de coordonate în spațiu astfel încît vîrfurile triunghiului să aibă coordonatele $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ și fie P de coordonate (x, y, z). Cercul înscris în triunghi este intersecția sferei $x^2+y^2+z^2=c_1$ cu planul $x+y+z=c_2$.



Prin urmare $PA^2 + PB^2 + PC^2 =$
$= (x-1)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y-1)^2 + z^2 + x^2 +$
$+ y^2 + (z-1)^2 = 3c_1 - 2c_2 + 3 =$ constant.

— Leo Moser, *A.M.M.*, 56 (martie 1949), 180.

— (Această demonstrație este valabilă pentru orice cerc concentric cu cercul înscris.)

87. Doi întregi incompatibili

În scrierea binară (adică în sistemul de numerație cu baza 2) avem $2^x + 1 = 10\ldots 001$ și $2^y - 1 = 111 \ldots 111$.

Să studiem acum împărțirea:

$$\begin{array}{r|l} 1000\ldots\ldots\ldots\ldots001 & 111\ldots111 \\ \cline{2-2} \underline{111\ldots111\qquad\qquad} & 1 \\ 100\ldots\ 001 & \\ \underline{111\ldots\ 111} & \end{array}$$

Împărțirea va fi exactă dacă și numai dacă în penultima etapă se obține un rest format din același număr de cifre 1 ca împărțitorul, care, prin ipoteză, se compune din cel puțin trei cifre de 1. Dar în resturile succesive figurează numai două cifre de 1 și un număr de zerouri intermediare, deci împărțirea nu e niciodată exactă.

— Dewey C. Duncan, *S.S.M.*, 36 (martie 1936), 321.

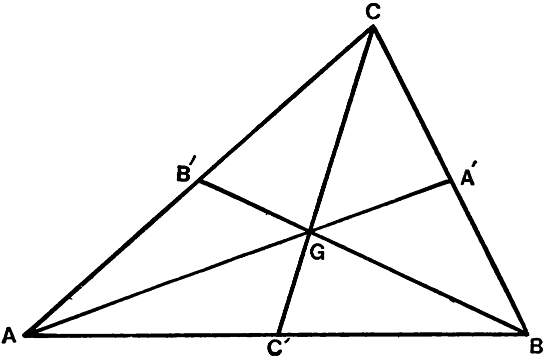
88. O problemă de alegere

Membrul drept al ecuației fiind numărul impar 41, rezultă că unul dintre termenii diferenței din membrul stîng trebuie să fie un număr impar și celălalt termen trebuie să fie par. Cum $104y$ este par, $187x$ și, prin urmare, și x, trebuie să fie impar. Așadar perechea $x=314$ și $y=565$ nu satisface ecuația dată.

— Dale Woods, *S.S.M.*, 64 (martie 1964), 242.

89. Concurența medianelor

Reciproca teoremei lui Ceva se enunță astfel: dîndu-se trei puncte situate pe cîte o latură a unui triunghi ABC, astfel ca produsul a trei segmente determinate de aceste puncte pe laturi și care nu au capete comune să fie egal cu produsul celorlalte trei segmente, dreptele care unesc cîte un punct cu vîrful opus laturii pe care se află sînt concurente.



Medianele împart laturile în segmente egale, deci $AB' \cdot CA' \cdot BC' = B'C \cdot A'B \cdot C'A$ și prin urmare medianele sînt concurente.

— *M.M.*, 24, (noiembrie 1950), 114.

(În plus, folosind un corolar al teoremei lui Ceva obținem:
$CG/GC' = CB'/B'A + CA'/A'B = 1 + 1$, deci
$CG = 2GC'$ și
$CG = 2/3CC'$. Aceasta înseamnă că medianele se intersectează într-un punct situat la distanța de 2/3 din lungimea fiecărei mediane față de vîrful corespunzător.)

90. Un surprinzător pătrat perfect

Dacă $B>1$ este baza sistemului de numerație, 11111 poate fi scris $B^4 + B^3 + B^2 + B + 1$. Avem:

$$(B^2 + B/2)^2 < B^4 + B^3 + B^2 + B + 1 <$$

$$< (B^2 + B/2 + 1)^2.$$

Dacă

$$(B^2 + B/2 + 1/2)^2 = B^4 + B^3 + B^2 + B + 1,$$

atunci

$$B^2/4 - B/2 - 3/4 = 0,$$

$$(B - 3)(B + 1) = 0$$

și prin urmare doar pentru $B = 3$ avem $11111 = 102^2$.

— V. Thebauld, *N.M.M.*, 15 (decembrie 1940), 149.

91. Poligon înscris într-o elipsă?

Dacă ar exista un astfel de poligon, cercul său circumscris ar intersecta elipsa în mai mult decît patru puncte (acestea fiind vîrfurile poligonului), ceea ce e imposibil.

— M. S. Klamkin, *M.M.*, 34 (septembrie 1960), 58.

92. Aşteptînd o convorbire telefonică cu Sinkiang

Deoarece:

$$S = 0{,}1 \;+ 0{,}02 \;+ 0{,}003 \;+ 0{,}0004 + \ldots$$

$$0{,}1\,S = 0{,}01 + 0{,}002 + 0{,}0003 + \ldots$$

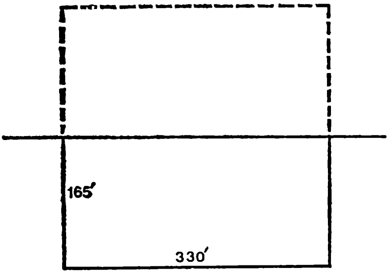
$$0{,}9\,S = 0{,}1 \;+ 0{,}01 \;+ 0{,}001 \;+ 0{,}0001 + \ldots =$$

$$= 0{,}1/(1 - 0{,}1) = 1/9.$$

Deci $S = 10/81 = 0{,}12345679012345679 0\ldots$, un număr zecimal periodic care nu conține cifra 8.

— Norman Anning, *M.M.*, 29 (noiembrie 1956), 173.

93. Îngrădirea unui țarc



Dacă fermierul ar construi un țarc de 400 m² fără a folosi stînca drept o latură, țarcul avînd forma unui pătrat ar cuprinde această suprafață şi ar avea perimetrul minim. Acest pătrat ar avea latura de 20 m. Stînca poate fi considerată ca un perete care nu costă nimic și care împarte această suprafață în două părți egale, deci prețul minim va fi realizat de un țarc cu lungimea de 20 de metri şi lăţimea de 10 m.

94. Un sistem de cinci ecuaţii liniare

Dacă adunăm cele patru ecuaţii şi împărţim rezultatul la patru, obţinem:

$$x + y + z + u + v = 3.$$

Scăzînd pe rînd din această ecuaţie fiecare ecuație inițială, ajungem la soluțiile

$$v = -2, \quad x = 2, \quad y = 1, \quad z = 3, \quad u = -1.$$

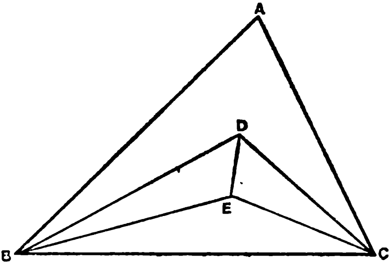
95. O teoremă aproape universală

Teorema este:

$$(n - 5)(n - 17)(n - 257) \neq 0$$

— Leo Moser, *M.M.*, 25 (septembrie 1951), 49.

96. Trisectoarele unui unghi



E se găsește la intersecția bisectoarelor triunghiului *BCD* și deci *DE* este bisectoarea unghiului *BDC*.

— C. F. Pinzka, *M.M.*, 34 (ianuarie 1961), 182.

•

97. Cifra unităților și șirul lui Fibonacci

Răspunsul este afirmativ. Șirul ai cărui termeni sînt cifrele unităților șirului lui Fibonacci se obține prin următoarea operație repetată la nesfîrșit: calculăm suma a două cifre, menținem cifra unităților și o adăugăm șirului nostru.

Să observăm că în șir se succed două cifre impare și apoi o cifră pară.

Există numai $5 \cdot 5$ perechi ordonate de cifre impare, și deci, după cel mult $3 \cdot 25$ sau 75 operații, una din aceste perechi va reapare și ciclul va fi reluat. Suma și diferența a două cifre este unică și deci prima pereche care se repetă va fi chiar prima pereche a şirului*. În cazul nostru, după 60 de operaţii începe din nou acelaşi ciclu de 60 de cifre şi, prin urmare, şirul este complet determinat de ciclul: *1 1* 2 3 5 8 3 1 4 5 9 4 3 7 0 7 7 4 1 5 6 1 7 8 5 3 8 1 9 0 9 9 8 7 5 2 7 9 6 5 1 6 7 3 0 3 3 6 9 5 4 9 3 2 5 7 2 9 1 0 *1 1*....

Acelaşi argument operează şi în cazul mai general cînd sistemul de numeraţie este arbitrar şi formula de recurenţă a şirului de la care plecăm este

$$A_{n+k} = A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+k-1}.$$

98. Două ecuaţii corelate

Deoarece coeficientul lui x^2 este 0, rezultă că $a+b+c=0$ şi prin urmare

$$b+c=-a, \quad c+a=-b, \quad a+b=-c,$$

deci ecuaţia căutată va avea rădăcinile:

$$-1/a, \quad -1/b, \quad -1/c.$$

Pentru a o obţine nu trebuie decît să scriem coeficienţii în ordine inversă şi să schimbăm sem-

---

* Să observăm că orice termen al şirului este unic determinat de cei doi termeni care îl succed. Să presupunem că prima pereche care se repetă nu este prima pereche a şirului. Dacă refacem însă primii termeni ai şirului mergînd în sens invers, o dată de la prima pereche care se repetă şi o dată de la repetarea ei, rezultă că în interiorul primului ciclu va apărea şi prima pereche a şirului *(N.T.)*.

nul coeficienților puterilor pare ale lui x; vom obține:

$$rx^3 - qx^2 - 1 = 0$$

— Alan Wayne, *S.S.M.*, 48 (iunie 1948), 492.

99. Scheletul unui produs

Cei trei factori ai produsului vor avea cifra unităților diferită de zero. $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$ și $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$. Avem:

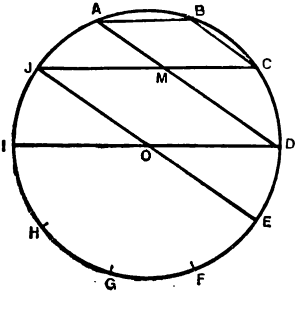
$$4{,}4 < 87^{1/3} < 88^{1/3} < 4{,}5.$$

Vom obține:

$$442 \cdot 444 \cdot 446 = 87\,526\,608.$$

— *M.M.*, 37 (noiembrie 1964), 360.

100. Decagoane înscrise în cerc



Diametrele ID și JE sînt paralele respectiv cu laturile AB și BC ale decagonului regulat şi cu laturile JC şi AD ale decagonului stelat; prin urmare $ABCM$ şi $JMDO$ sînt romburi şi $AD - BC = AD - AM = MD = JO =$ raza cercului.

101. Cei care-şi dau mîna

Să numim „persoană pară“ orice persoană care a strîns un număr par de mîini şi „persoană impară“ orice persoană care a strîns un număr impar de mîini. Înainte de a fi apărut obiceiul de a da mîna, numărul persoanelor impare era, evident, zero. Prima strîngere de mîini va produce două persoane impare. Începînd de atunci, fiecare strîngere de mîini se va produce între două persoane pare, două persoane impare sau între o persoană pară şi una impară. În primul caz, numărul persoanelor impare creşte cu doi, în al doilea caz numărul persoanelor impare scade cu doi şi în al treilea caz, persoana pară devine impară şi persoana impară devine pară, deci numărul persoanelor impare rămîne neschimbat. Rezultă că nici o strîngere de mînă nu schimbă paritatea numărului de persoane impare şi, cum s-a plecat de la 2, el rămîne întotdeauna par.

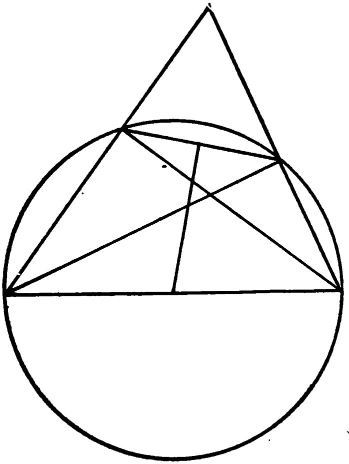
— Gerald K. Schoenfeld, în *2-nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions* de Martin Gardner, New York, 1961, p. 60.

102. O operație cu cărți de joc

Nu ne interesează decît ordinea în care sînt scoase cărțile. Numărul de permutări care pot fi efectuate cu cinci numere este 5! și deci probabilitatea este 1/120.

— J. R. Ziegler, *M.M.*, 23 (mai 1950), 278.

103. Mediatoarea



Să remarcăm că picioarele celor două înălțimi și vîrfurile corespunzătoare ale triunghiului sînt conciclice; cea de-a treia latură este diametrul în cercul astfel determinat. Segmentul care unește picioarele înălțimilor este coardă în acest cerc şi deci mediatoarea acestui segment trece prin centrul cercului, care este mijlocul celei de-a treia laturi.

— Aaron Buchmann, *S.S.M.*, 47 (mai 1947), 490.

104. O problemă de divizibilitate

Fie $f(x) = x^2 - x + a$ şi $g(x) = x^{13} + x + 90$. Atunci $f(0) = a$, $f(1) = a$, $g(0) = 90$, $g(1) = 92$, deci a trebuie să dividă pe 2 — cel mai mare divizor comun al lui 90 şi 92. Pe de altă parte, $F(-1) = a + 2$ şi $g(-1) = 88$, deci a nu poate fi egal cu 1 sau -2,
$f(-2) = a + 6$ şi $g(-2) = -8104$, deci a este diferit de -1. Rezultă că $a = 2$ şi $(x^{13} + x + 90)(x^2 - x + 2) = x^{11} + x^{10} - x^9 - 3x^8 - x^7 + 5x^6 + 7x^5 - 3x^4 - 17x^3 - 11x^2 + 23x + 45$.

— L. E. Bush, *A.M.M.*, 71 (iunie 1964), 640.

105. Dilema achizitorului

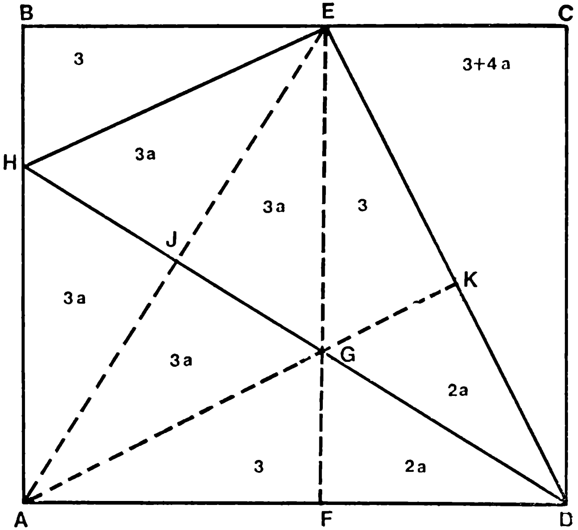
Preţul mediu pe cap de animal este de 100 de lei. Preţul unui viţel diferă de medie cu $+900$ de lei, preţul unui porc cu $+200$ de lei şi preţul unui miel cu $-$ 50 de lei, deci pentru fiecare viţel cumpărat achizitorul trebuie să cumpere 18 miei şi pentru fiecare porc trebuie să cumpere 4 miei. Deoarece $5(100+1800)+(100+400)=10\,000$, rezultă că el trebuie să cumpere 5 viţei, 1 porc şi 94 miei.

— B. E. Mitchell, *M.M.*, 26 (ianuarie 1953), 153.

106. O descompunere în factori

$$1000027 = 100^3 + 3^3 = (100 + 3)(10000 - 300 + 9) = 103 \cdot 9709 = 103 \cdot 7 \cdot 1387 = 103 \cdot 7(1460 - 73) = 103 \cdot 7 \cdot 73 \cdot 19.$$

107. Un carton îndoit



Dacă $\Delta BEH = 3$, fie $\Delta CED = 3+4a$; atunci $\Delta EHD = 3+8a$. Să ducem EF perpendiculară pe AD și intersectînd segmentul HD și G. Să ducem prin G segmentul AK și fie J intersecția lui AE cu HD. Din simetria patrulaterului $HEDA$ rezultă că dreptunghiul este acum împărțit în zece triunghiuri dreptunghice, astfel încît $\Delta EGK = \Delta AGF = \Delta BEH = 3$; $\Delta CED = \Delta EFD$, deci $\Delta GKD = \Delta GFD = 2a$ și, prin urmare, fiecare din cele trei triunghiuri din rombul $AHEG$ sînt egale cu $3a$.

Din două perechi de triunghiuri asemenea,

$$\Delta CED/\Delta BEH = DE^2/EH^2 = \Delta JED/\Delta JEH,$$

deci

$$(3 + 4a)/3 = (3 + 5a)/3a$$

$$4a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$4a = 1 + \sqrt{13}.$$

Prin urmare, aria celui mai mare triunghi, ΔEHD este $8a + 3$ sau $5 + 2\sqrt{13} \sim 12{,}2111$ cm². După cîteva calcule mai complicate, găsim, de asemenea, că $BE = 3{,}528$ cm, $EC = 2{,}708$ cm și $CD = 5{,}617$ cm.

— R. R. Rowe, *Civil Engineeiing — ASCE*, 18 (februarie 1948), 70.

108. Un pătrat perfect unic

Dacă $n(n+2)(n+4)(n+6) = m^2$, atunci $(n^2+6n+4)^2 = m^2+16$. Dar singurele pătrate de forma $a^2 - 16$ sînt 0 și 9 și, deoarece m^2 este impar, rezultă că pătratul căutat este $9 = (-3)(-1)\cdot 1\cdot 3$.

— David L. Silverman, *M.M.*, 38 (ianuarie 1965), 60.

109. O inegalitate strictă

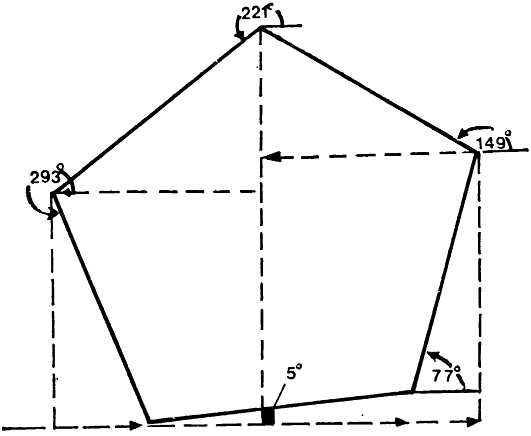
Media aritmetică a unei mulțimi de numere pozitive, nu toate egale între ele, este strict mai mare decît media lor geometrică, deci

$$n = \frac{n^2}{n} = \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)}{n} >$$

$$> [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n - 1)]^{1/n}.$$

— Frederic E. Nemmers, *S.S.M.*, 40 (iunie 1940), 586.

110. O sumă de cosinusuri



Considerînd laturile unui poligon ca vectori, se știe că suma proiecțiilor acestor vectori pe orice dreaptă din acelaşi plan este egală cu zero. Unghiurile exterioare ale unui pentagon regulat sînt de 72°; de aici rezultă că termenii din suma de cosinusuri reprezintă proiecţiile laturilor egale cu unitatea ale unui pentagon regulat pe o dreaptă care formează cu una din laturi un unghi de 5°. Prin urmare,

$$\cos 5° + \cos 77° + \cos 149° + \cos 221° +$$
$$+ \cos 293° = 0.$$

111. Cantitate divizibilă cu 9

Putem scrie

$$f(x) = \frac{x^{12} - 1}{x^2 - 1},$$

deci

$$f(2i) = \frac{(2i)^{12} - 1}{-4-1} = \frac{4096 - 1}{-4-1} = -819 = -9 \cdot 91.$$

— *M.M.*, 26 (mai 1953), 287.

112. Numere triangulare în sistemul de numeraţie cu baza 9

Numerele triangulare sînt de forma $n(n+1)/2$ şi deci 1 este număr triangular în orice sistem de numeraţie. Fiecare termen al şirului se obţine înmulţind termenul anterior cu baza şi adăugînd

1. Pentru sistemul de numerație cu baza 9 obținem (scrierea se face totuși în sistemul zecimal):

$$9n(n + 1)/2 + 1 = (3n + 1)(3n + 2)/2,$$

deci tot un număr triangular.

— Helen A. Merrill, *A.M.M.*, 39 (martie 1932), 179.

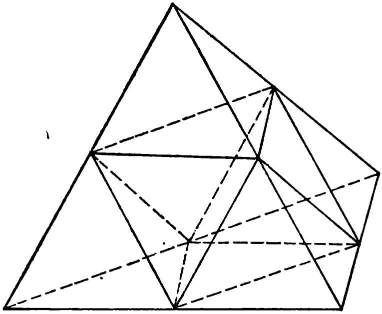
(În general, într-un sistem de numerație cu baza $(2k + 1)^2$ avem:

$$(2k + 1)^2 n(n + 1)/2 + k(k + 1)/2 =$$

$$= [(2k + 1)n + k][(2k + 1)n + k + 1]/2.$$

113. Două volume poliedrale

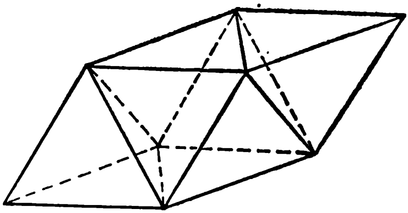
Să considerăm un plan care trece prin mijloacele a trei muchii concurente ale unui tetraedru. Acest plan va tăia din tetraedrul inițial un tetraedru mai mic, al cărui volum este egal cu $1/2^3$ din volumul tetraedrului inițial (rapoartele laturilor celor două tetraedre asemenea este de 1/2).



Dacă dintr-un tetraedru regulat tăiem în modul descris mai sus patru tetraedre mai mici corespunzătoare celor patru vîrfuri, poliedrul care rămîne are ca fețe opt triunghiuri echilaterale egale: patru situate pe fețele tetraedrului inițial și patru situate în planul celor patru secțiuni. Am obținut deci un octaedru regulat, cu muchiile egale cu muchiile tetraedrului mai mic și cu volumul egal cu 1/2 din volumul tetraedrului inițial.

În concluzie, volumele unui tetraedru regulat și a unui octaedru regulat cu laturile egale se află în raportul de 1/4. De asemenea, din modul cum am efectuat secțiunile rezultă că unghiurile diedre ale celor două poliedre sînt suplementare.

114. O acoperire a spațiului



Un cub poate fi deformat continuu astfel încît muchiile care pleacă dintr-un vîrf să formeze între ele unghiuri de 60°. Aceste muchii, împreună cu segmentele care unesc capetele lor, formează un tetraedru regulat. Similar, muchiile care pleacă din vîrful diametral opus determină și ele un tetraedru regulat. Să observăm că fiecare față a paralelipipedului obținut prin deformarea cubului are ca diagonală cîte un segment construit anterior (care unește două muchii). Aceste segmente, împreună cu cele șase muchii care au rămas, determină un octaedru regulat. Rezultă că o rețea de cuburi (care umplu tot spațiul) poate fi deformată continuu într-o îmbinare a n octaedre regulate și $2n$ tetraedre regulate.

115. O simplificare

Suma cifrelor numărătorului este 30 și deci numărătorul este divizibil prin 3. Diferența dintre suma cifrelor de rang par și suma cifrelor de rang impar ale numitorului este $32 - 21 = 11$ și deci numitorul este divizibil prin 11.

Obținem:

$$\frac{116\,690\,151}{427\,863\,887} = \frac{38\,896\,717 \cdot 3}{38\,896\,717 \cdot 11} = \frac{3}{11}$$

116. O sumă de sinusuri

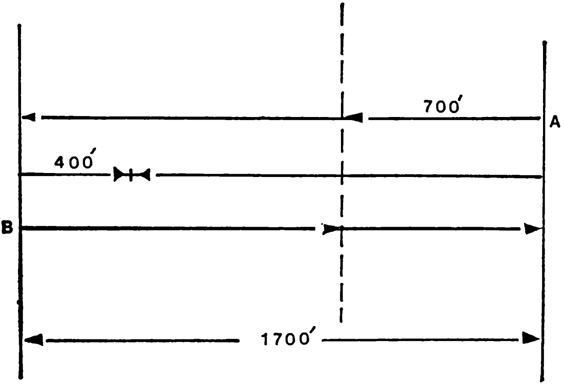
Să presupunem că suma are valoarea maximă (care evident, există) pentru două unghiuri diferite A și B. Atunci avem:

$$\sin A + \sin B + \sin[180^\circ - (A+B)] =$$
$$= 2\sin[(A+B)/2]\cos[(A-B)/2] + \sin(A+B).$$

Expresia din dreapta este evident mai mică decît în cazul în care cele două unghiuri ar fi ambele egale cu $(A+B)/2$; în acest caz, ea ar fi $2\sin[(A+B)/2]\cos 0^\circ+\sin(A+B)$. Deci valoarea maximă este atinsă cînd toate unghiurile sînt egale; ea este $3 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}/2$.

— Dave Nixon și Jim Wahab, *A.M.M.*, 71 (octombrie 1964), 916.

117. Două bacuri



Bacul A părăsește un mal, parcurge 700 m și întîlnește bacul B. În acest moment distanța totală parcursă de cele două bacuri este egală cu lățimea rîului. A traversează rîul, se întoarce 400 m și întîlnește din nou pe B. Cele două bacuri au parcurs împreună de trei ori lățimea rîului. Deoarece vitezele lor sînt constante, A a parcurs de trei ori 700 m, adică 2100 m. Lățimea rîului este cu 400 m mai mică decît distanța parcursă de A și deci este egală cu 1700 m.

— W. C. Rufus, *A.M.M.*, 47 (februarie 1940), 111.

118. La cină

Putem forma $6/2 = 3$ perechi disjuncte între care să stea Albert și deci un ciclu va cuprinde trei mese. Pentru început, folosind inițialele numelor, să așezăm familia în jurul mesei în ordine alfabetică, să spargem apoi cercul la dreapta lui Albert și să scriem ordinea astfel obținută. Să-i mutăm apoi la extremitatea din dreapta pe cei aflați în poziții pare, respectînd ordinea, și să repetăm operația încă o dată. A treia permutare de același tip ar restabili ordinea alfabetică inițială.

Am realizat următoarele succesiuni:

$$A\ B\ C\ D\ E\ F\ G$$

$$A\ C\ E\ G\ B\ D\ F$$

$$A\ E\ B\ F\ C\ G\ D$$

$$A\ B\ C\ D\ E\ F\ G$$

Să studiem acum perechile între care stă fiecare membru al familiei și să verificăm că schema utilizată verifică condițiile cerute.

$A - BG$	$B - AC$	$C - BD$	$D - CE$
CF	GD	AE	BF
ED	EF	FG	GA

$$E - DF \quad F - EG \quad G - FA$$
$$CG \qquad DA \qquad EB$$
$$AB \qquad BC \qquad CD$$

Astfel, nu numai că fiecare persoană stă lîngă fiecare din ceilalți membri ai familiei numai o dată în cadrul ciclului, dar, în plus, cele 21 de perechi obținute sînt distincte. Să observăm că $21 = C_7^2$ și deci am obținut toate perechile care pot fi formate.

119. O sumă de cifre

Să împărțim mulțimea de întregi în perechi de forma a și $(10^n - 1 - a)$, $a \geqslant 0$. Suma cifrelor oricărei perechi de acest fel este $9n$ și numărul perechilor este $10^n/2$. Suma totală va fi deci $9n(10^n/2)$.

— Leo Moser, *M.M.*, 26 (martie 1953), 225.

120. Gustarea celor trei șoferi

Cheltuielile făcute de primii doi șoferi ne dau ecuațiile:

$$4s + c + 10g = 16{,}9 \tag{1}$$

și

$$3s + c + 7g = 12{,}6 \tag{2}$$

Înmulțim prima ecuație cu 2 și a doua cu 3 și obținem:

$$8s + 2c + 20g = 33{,}80$$

$$9s + 3c + 21g = 37{,}80.$$

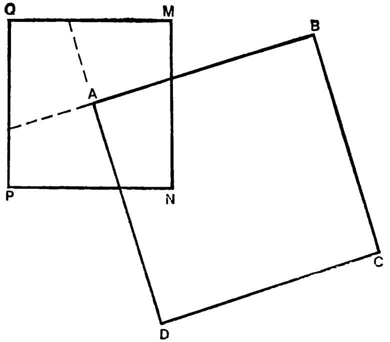
Scăzînd prima ecuație din a doua rezultă:

$$s + c + g = 4 \text{ lei},$$

adică suma plătită de cel de-al treilea șofer.

— *S.S.M.*, 66 (iunie 1966), 561.

121. Pătrate intersectate



Prelungind laturile unghiului A, obținem o împărțire a pătratului $MNPQ$ în patru patrulatere egale. Astfel, aria comună este egală cu un sfert din aria pătratului $MNPQ$. Acest rezultat este independent de raportul în care este împărțită latura MN și de mărimea pătratului $ABCD$; singura condiție necesară este $AB \geqslant MN\sqrt{2}/2$.

122. O soluție simplă

Notînd $x = y/12$, ecuația devine

$$(y-1)(y-2)(y-3)(y-4) = 120 = 2\cdot3\cdot4\cdot5.$$

Orice rădăcină întreagă va determina în membrul stîng produsul a patru întregi consecutivi. Două rădăcini de acest tip sînt $y = -1$ și $y = 6$. Aplicînd în ecuația obținută relațiile dintre rădăcini și coeficienți, deducem:

$$(-1)\cdot 6r_1r_2 = -120 + (-1)(-2)(-3)(-4)$$

deci $r_1r_2 = 16$;

$$-(-1+6+r_1+r_2) = -1-2-3-4,$$

deci

$$r_1 + r_2 = 5.$$

Aceasta înseamnă că r_1 și r_2 sînt rădăcinile ecuației $y^2 - 5y + 16 = 0$ și deci $r_{1,2} = (5 \pm i\sqrt{39})/2$. Cele patru rădăcini sînt $-1/12$, $1/2$ și $(5 \pm i\sqrt{39})/24$.

123. Problemă cu numere prime

Este necesar să găsim un număr cu trei cifre și un număr cu o singură cifră astfel încît produsul celor două numere să aibă patru cifre și în cadrul operației de înmulțire să nu folosim decît cifrele 2, 3, 5 și 7. Există numai patru soluții ale acestei probleme:

$3\cdot775 = 2325$; $5\cdot555 = 2775$; $5\cdot755 = 3775$ și

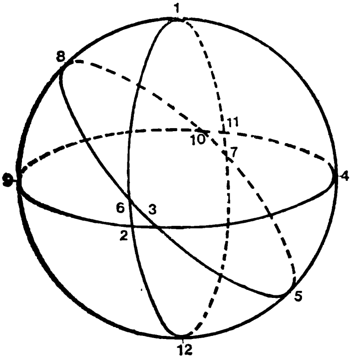
$$7\cdot325 = 2275.$$

Deoarece fiecare număr de trei cifre apare în şirul obţinut cu un singur înmulţitor, rezultă că înmulţitorul căutat va avea cele două cifre identice. Singura soluţie este

$$\begin{array}{r} 775 \\ 33 \\ \hline 2325 \\ 2325 \\ \hline 25.575 \end{array}$$

— W. E. Buker, *A.M.M.*, 43 (octombrie 1936), 499.

124. Cercuri mari care se intersectează



Să numerotăm în mod arbitrar (de exemplu, cu b) un punct de intersecţie ales la întîmplare şi să numerotăm punctul diametral opus cu „complementarul" lui b, $n(n-1)+1-b$. Să continuăm această operaţie pînă cînd toate numerele (şi deci toate punctele) au fost epuizate. Pe fiecare cerc mare se găsesc $n - 1$ perechi de puncte de intersecţie diametral opuse; suma numerelor corespunzătoare acestor puncte este $[n(n-1)+1](n-1)$.

— Leo Moser, *M.M.*, 25 (noiembrie 1951), 114.

125. Un cort

Dacă cheltuiala totală s-ar fi împărţit între un număr de oameni mai mare cu 50%, atunci suma plătită de o persoană ar fi reprezentat 2/3 din cea plătită efectiv. Prin urmare, 100 de lei reprezintă o treime şi contribuţia fiecăruia este de 300 de lei.

— *M.M.*, 32 (martie 1959), 229.

126. Coeficienţi binomiali

Pentru $y = 3$ avem $2C_n^k = C_n^{k \div 1}$ şi $3C_n^k = C_n^{k+2}$. Aceste ecuaţii se reduc la $n = 3k + 2$ şi respectiv $3(k+1)(k+2) = (n-k)(n-k-1)$. Rezolvînd acest sistem şi eliminînd rădăcina negativă obţinem $k=4$, $n=14$. Prin urmare, într-o dezvoltare binomială cu exponentul patrusprezece, al cincilea, al şaselea şi al şaptelea coeficient sînt 1001, 2002, 3003, iar al optulea coeficient este $3423 \neq 4(1001)$. Deoarece soluţia este unică pentru $y=3$, nu vor mai exista alte soluţii pentru $y>3$.

127. Numere divizibile cu 8 640

Produsul a n întregi consecutivi este divizibil cu n. Mai mult, produsul a patru întregi consecutivi este divizibil cu 2^3. Avem:

$$N = x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3 =$$

$$= [(x-2)(x-1)x][(x-1)x(x+1)][x(x+1)(x+2)] =$$

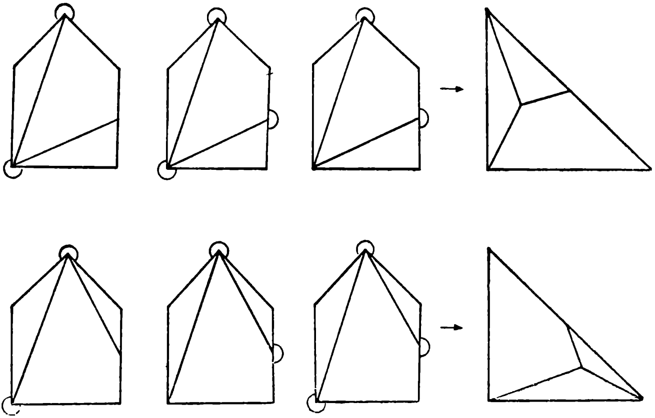
$$= [(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)][(x-1)x]\cdot[x(x+1)] =$$

$$= [(x-2)(x-1)x(x+1)][(x-1)x(x+1)\cdot(x+2)]\,x.$$

În primul mod de grupare a factorilor, cantitatea din fiecare paranteză mare este divizibilă cu trei și deci N este divizibil cu 3^3. Din a doua grupare rezultă că N este divizibil cu 5. În a treia grupare, cantitatea din fiecare paranteză mare este divizibilă cu 2^3 și deci N se divide cu 2^6. Prin urmare, N se divide cu $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 = 8\,640$ pentru orice valoare întreagă a lui x.

128. Pentagonul tăiat

Dacă considerăm latura pătratului egală cu 2 unități, aria pentagonului este egală cu 5 uni-



tăți și deci laturile egale ale triunghiului isoscel pe care îl vom obține vor avea lungimea $\sqrt{10}$. Aceasta este și lungimea diagonalelor mari ale pentagonului care pornesc din vîrful triunghiului isoscel. Dacă tăiem pentagonul de-a lungul unei diagonale mari, cele două laturi ale tăieturii vor forma laturile triunghiului final. În acest caz, vîrfurile netăiate ale pentagonului se vor uni în interiorul triunghiului final și perechile de laturi care pornesc din capetele diagonalei se vor alătura. Rezultă că a doua tăietură trebuie să pornească dintr-un capăt al diagonalei și să împartă în două părți egale latura următoare. Există două astfel de soluții, dacă neglijăm restul de soluții simetrice cu acestea două.

— W. Fitch Cheney.

129. Un produs infinit

Fie

$$N = 3^{1/3} \cdot 3^{2/9} \cdot 3^{3/27} \ldots =$$

$$= 3^{1/3+2/9+3/27+\ldots+n/3^n+\ldots} = 3^M.$$

Atunci

$$M/3 = 1/3^2 + 2/3^3 + \ldots + (n-1)/3^{n+\ldots}$$

$$(1-1/3)M = 1/3 + 1/3^2 + 1/3^3 + \ldots + 1/3^n + \ldots =$$

$$= (1/3)(1-1/3) = 1/2.$$

Prin urmare:

$$N = 3^{3/4} = \sqrt[4]{27}.$$

— J. F. Arena, *S.S.M.*, 46 (octombrie 1946), 678.

130. Nu poate fi pătrat perfect

Avem

$$(n^2+n)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2 < n^4 + 2n^3 +$$

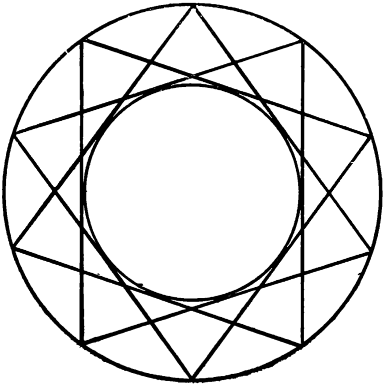
$$+ 2n^2 + 2n + 1 < n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 =$$

$$= (n^2+n+1)^2.$$

Prin urmare, numărul dat este situat între două pătrate consecutive.

— Leo Moser, *M.M.*, 37 (ianuarie 1964), 62.

131. Corzile unui cerc



Corzile obținute sînt egale și tangente la un cerc concentric cu cel inițial. Dacă printr-un punct trec mai mult de două corzi, atunci rezultă că din acel punct se pot duce mai mult decît două tangente la cerc, ceea ce este imposibil.

— Brother U. Alfred, *M.M.*, 35 (mai 1962), 193.

132. Determinanți formați cu nouă cifre

Cînd două linii ale unui determinant se schimbă între ele, atunci determinantul își schimbă semnul. Cînd liniile unui determinant de ordinul trei sînt permutate, se obțin trei determinanți pozitivi și trei negativi, egali în valoare absolută. Prin urmare, cei 9! determinanți se grupează în 9!/6 grupe, iar suma determinanților dintr-o grupă este egală cu zero.

— *M.M.*, 36 (ianuarie 1963), 77.

133. Șase puncte comune

Dacă graficele ecuațiilor de gradul doi au mai mult decît $2 \cdot 2 = 4$ puncte comune, atunci ecuațiile vor fi degenerate și vor avea un factor comun. Ecuațiile date pot fi scrise sub forma

$$(x + 2y - 3)(2x - y) = 0$$

$$(x + 2y - 3)(3x + y + 2) = 0.$$

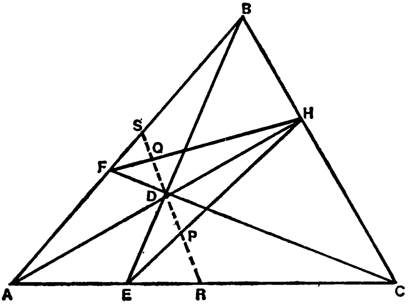
Prin urmare, toate punctele de pe dreapta $x + 2y - 3 = 0$ aparțin graficelor ambelor ecuații. De exemplu, punctele de coordonate $(-1, 2)$, $(1, 1)$, $(0, 3/2)$, $(4, -1/2)$, $(5, -1)$ satisfac ambele ecuații.

134. Pachetul de cărți

Numărul cărților roșii din primele 26 de cărți este întotdeauna egal cu numărul cărților negre din următoarele 26. Prin urmare, în virtutea legilor logicii, rezultă că deoarece ipoteza este falsă, afirmația este corectă indiferent de concluzia ei.

— Leo Moser, *M.M.*, 26 (ianuarie 1953), 167.

135. Unghiuri egale



Să ducem prin D o paralelă la BC; ea va întîlni HE, HF, AC şi AB respectiv în punctele P, Q, R, S. Atunci

$$\frac{DP}{DR}=\frac{BH}{BC},\quad \frac{DS}{DQ}=\frac{BC}{CH}\quad \text{şi}\quad \frac{DR}{DS}=\frac{CH}{BH}.$$

Înmulţind membru cu membru aceste trei egalităţi obţinem $DP = DQ$. Astfel, în triunghiul HPQ înălţimea împarte baza PQ în părţi egale, şi deci HPQ este isoscel. Rezultă că HA este bisectoare a unghiului FHE, şi deci $\widehat{AHE} = \widehat{AHF}$.

— Nathan Altshiller Court, *M.M.*, 37 (noiembrie 1964), 338.

136. Un sistem compatibil

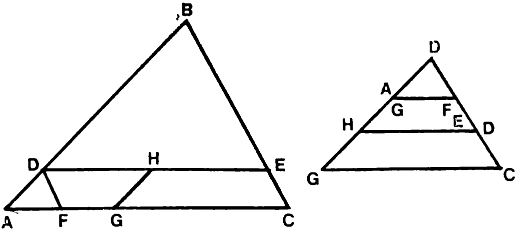
Suma ultimelor două ecuaţii este $x + y + k(x + y) = 5$. Folosind prima ecuaţie, de aici rezultă $k = 4$.

137. O ecuație diofantică

Dacă punem $x + y = a^2$ și $x - y = a$, atunci $x = a(a + 1)/2$ și $y = a(a - 1)/2$. Fiecare numărător fiind produsul dintre un număr par și unul impar, rezultă că pentru orice a întreg, x și y sînt întregi.

— L. E. Bush, *A.M.M.* (octombrie 1951), 543.

138. Împărțirea unui triunghi în două triunghiuri asemenea



Pe laturile AB, BC și CA ale triunghiului ABC luăm respectiv punctele D, E și F, astfel ca $AD/AB = CE/CB = AF/FC$. Fie G un punct pe AC, astfel ca $AG = 2AF$ și H mijlocul lui DE. Atunci segmentele DE, DF și GH reprezintă trei tăieturi. Bucata BDE este unul din triunghiurile căutate. Celelalte trei bucăți pot fi rotite în plan astfel ca să formeze cel de-al doilea triunghi.

— A. Buchman, *A.M.M.*, 58 (februarie 1951), 112.

(Într-adevăr, părțile decupate pot pivota în jurul lui F și H.)

139. Cifrele care se deplasează

Să notăm cu f fracția ordinară care, scrisă sub formă zecimală, constă din repetarea lui 15---, o perioadă a sa fiind numărul căutat. Conform condițiilor problemei, $5f = 0,\text{---}15\text{---}15\ldots$ și $100f = 15\text{---}15\text{---}15\ldots$, astfel că $95f = 15$ și deci $f = 3/19$. Efectuînd împărțirea se găsește că perioada zecimală a lui f constă din secvența de 18 cifre: 157 894 736 842 105 263. Acesta este unicul număr avînd mai puțin de 30 de cifre care satisface condițiile problemei. Dacă numărul de 30 de cifre s-ar mări la 50, atunci ar mai exista încă exact o soluție admisibilă, constînd din două perioade ale lui f, care este un număr de 36 de cifre.

— H.T.R. Aude, *A.M.M.*, 41 (aprilie 1934), 268.

140. Vîrful unui tetraedru

Dacă într-un vîrf unghiul format de două muchii este drept sau obtuz, suma celor trei unghiuri formate de muchii în acest vîrf depășește π radiani. Dacă în fiecare vîrf măcar un unghi format de muchii este drept sau obtuz, atunci suma unghiurilor formate de toate muchiile depășește 4π. Lucrul acesta este însă imposibil, fiindcă suma unghiurilor interioare a patru triunghiuri este egală exact cu 4π radiani, în care toate unghiurile formate de muchii sînt ascuțite.

— Roy Mackay, *A.M.M.*, 42 (august 1935), 453.

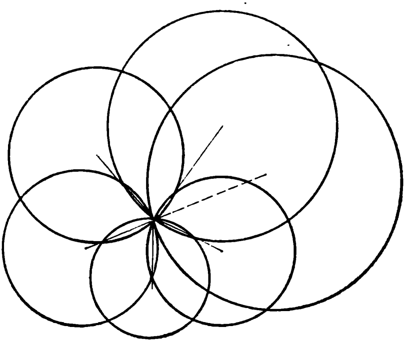
141. Deținuții norocoși

Numărul t, indicînd de cîte ori a fost răsucită cheia în broasca celulei q este egal cu numărul divizărilor lui q. Dacă $q = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, unde p_i sînt numere prime, atunci $t = (a_1 + 1)(a_2 + + 1) \ldots (a_k + 1)$. Dar dacă măcar un a_i e impar, t este par și celula corespunzătoare va rămîne închisă. Dacă toți a_i sînt pari, q este pătratul unui număr, t este impar și fericitul ocupant al acestei celule „pătratice" va constata că celula lui a rămas deschisă.

— *P.M.E.J.*, 1 (aprilie 1953), 330.

142. O intersecție vidă

Presupunem, prin absurd, că discurile circulare au un punct comun. Considerăm cele șase segmente care unesc acest punct cu fiecare centru. Cel puțin o pereche de segmente formează un unghi care nu depăşeşte 60°. Centrul corespunzător segmentului mai scurt (sau de lungime egală) din această pereche este situat



în interiorul discului circular al cărui centru corespunde celuilalt segment. Aceasta contrazice ipoteza care afirmă că nici un disc nu conţine centrul altui disc.

— E. L. Magnuson, *A.M.M.*, 70 (mai 1963), 569.

143. O înmulţire mintală

Aplicînd identitatea $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, avem:

$$96 \cdot 104 = (100 - 4)(100 + 4) = 10\,000 - 16 = 9984.$$

144. Un triplet unic

Se cere să se găsească soluțiile întregi și distincte ale sistemului de ecuații $x + y = mz$, $y + z = nx$, $z + x = py$, unde m, n, p sînt numere întregi pozitive. Condiția ca acest sistem de ecuații omogene să admită o soluție netrivială este:

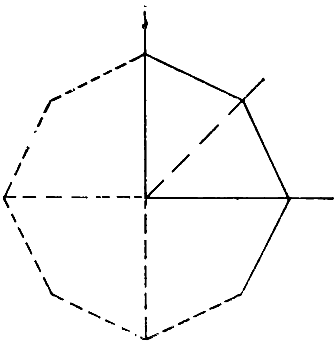
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -m \\ -n & 1 & 1 \\ 1 & -p & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aceasta înseamnă că $mnp = m + n + p + 2$. Evident că (2, 2, 2) satisface această ecuație. Pentru orice altă soluție o variabilă este egală cu 1. Prin urmare $mn = m + n + 3$. Evident (3, 3) satisface această ultimă ecuație. Orice altă soluție trebuie să aibă o variabilă mai mică ca trei. Astfel, unica soluție care mai există este (5, 2). Prin urmare există numai trei triplete de numere întregi pozitive (2, 2, 2), (1, 3, 3) și (1, 2, 5) care satisfac ecuația cu trei necunoscute scrisă mai sus.

Fiecăreia dintre aceste trei triplete îi corespunde un sistem de soluții ale sistemului de ecuații în x, y, z. Soluțiile acestui sistem sînt respectiv (k, k, k), $(k, k, 2k)$ și $(2k, k, 3k)$. Prin urmare, singurul triplet cu elemente distincte satisfăcînd condițiile problemei este (1, 2, 3).

— *S.S.M.*, 49 (octombrie 1949), 590.

145. Colțul înconjurat



Suprafața de pardoseală căutată este un patrulater avînd un unghi drept astfel încît cele două laturi care formează unghiul opus unghiului drept să fie egale. Patru patrulatere de această formă pot fi totdeauna aranjate ca să formeze un octogon echilateral. Pentru o lungime a laturii dată, octogonul echilateral cu arie maximă este octogonul regulat. Deci o pătrime din acest octogon va fi patrulaterul de arie maximă egală cu $8(\sqrt{2}+1)$ unități pătrate. Prin urmare, paravanele trebuie astfel plasate ca fiecare din ele să formeze cu peretele și cu bisectoarea unghiului drept din colțul încăperii un triunghi isoscel, a cărui bază este paravanul.

— F. Hawthorne, *N.M.M.*, 19 (martie 1945), 322.

146. Numere întregi prime între ele

Dacă $1/a + 1/b = 1/c$, atunci $a + b = ab/c$. Fiindcă a și b sînt întregi, c este produsul a doi factori, să spunem $c = qr$, dintre care un factor este comun cu a și celălalt cu b. Astfel punem $a = mq$ și $b = pr$. Atunci $mq + pr = mqpr/qr = mp$. Fiindcă a, b, c nu au toate trei nici un factor comun diferit de 1, m trebuie să fie prim cu r, prin urmare trebuie să-l dividă pe p, iar p trebuie să fie prim cu q, prin urmare el trebuie să-l dividă pe m. Astfel, $m = p$ și deci

$p(q + r) = p^2$ și $q + r = p$. De aici rezultă:

$$a + b = pq + pr = p(q + r) = p^2,$$

$$a - c = pq - qr = q(p - r) = q^2,$$

și

$$b - c = pr - qr = r(p - q) = r^2.$$

— *S.S.M.*, 73 (octombrie 1963), 604.

147. Un sistem diofantic

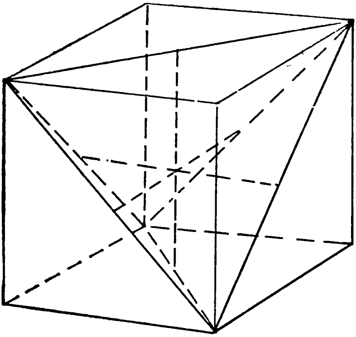
Prima ecuație poate fi scrisă:

$$(a - b - c)[a^2 + (b - c)^2 + ab + bc + ca] = 0.$$

Deoarece al doilea factor nu poate să se anuleze pentru a, b, c pozitivi, trebuie să avem $a = (b + c) = a^2/2$, de unde rezultă că $a = 2$, $b = c = 1$ este singura soluție în numere întregi pozitive.

— E. W. Marchand, *A.M.M.*, 65 (ianuarie 1958), 43.

148. Bimedianele unui tetraedru



Un tetraedru regulat poate fi înscris într-un cub astfel ca fiecare pereche de muchii opuse ale tetraedrului să coincidă cu diagonalele neparalele ale fețelor opuse ale cubului. Mijloacele laturilor tetraedrului sînt centrele fețelor cubului. Deci segmentul care unește mijloacele a două muchii opuse ale tetraedrului trece prin centrul cubului, este perpendicular pe două fețe opuse ale cubului și paralel cu patru muchii ale sale. Din cauză că trei muchii ale cubului trecînd prin același vîrf sînt două cîte două perpendiculare, cele trei segmente care unesc mijloacele laturilor opuse ale tetraedrului regulat sînt perpendiculare două cîte două și concurente.

149. Un produs amestecat

Fie $n = abc$ și N produsul căutat. Dacă $c = 1$, atunci pentru cel mai mare n posibil și anume

$n = 981$, se obține $N = 159\,080\,922$, adică o valoare prea mică. Prin urmare $987 \geqslant n \geqslant 982$. Suma cifrelor lui N este $35 = 2 \pmod 3$, astfel că n și numerele obținute prin permutarea cifrelor sale sînt congruente cu 2 mod 3. Rezultă că n este 986 sau 983, dar numai pentru ultimul produsul cifrelor se termină cu 6. Prin urmare

$$983 \cdot 839 \cdot 398 = 328\,245\,326.$$

— W. R. Talbot, *A.M.M.*, 66 (octombrie 1959), 726.

150. Un număr special

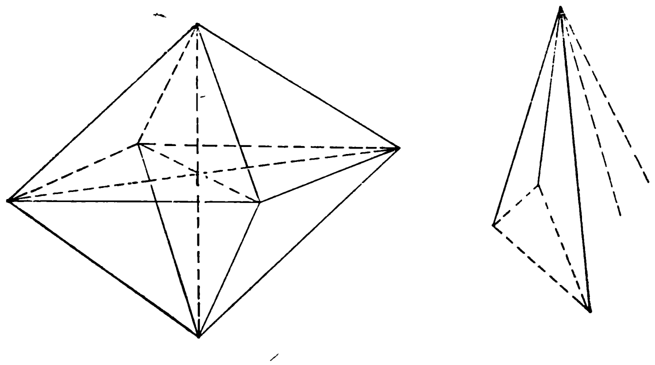
Rezultatul comun trebuie să se dividă cu 7 și 11, deci numărul este $7 + 11$, adică 18. Metoda este generală, deoarece soluția ecuației

$$(x - k)\,k = (x - m)\,m \quad \text{este} \quad x = k + m.$$

— *M.M.*, 33 (septembrie 1959), 58.

151. Trei la fel

Se subînțelege că relația dintre două persoane de a se cunoaște sau de a fi străine una de alta este reciprocă. Dacă cele șase persoane se identifică cu cele șase vîrfuri ale poliedrului format din două piramide patrulatere cu bazele egale și lipite, atunci se obține următoarea problemă echivalentă. *Dacă muchiile și diagonalele acestui poliedru se colorează în roșu și verde, atunci cel puțin un triunghi format din aceste segmente au toate laturile de aceeași culoare.*



Orice vîrf e unit cu toate celelalte vîrfuri. Dintre cele cinci segmente care pornesc dintr-un vîrf există trei de aceeași culoare. Dacă extremitățile oricăror două segmente de acest fel sînt unite printr-o linie de aceeași culoare, atunci ar exista un triunghi cu laturile avînd culoarea respectivă. Dacă capetele oricăror două dintre aceste trei segmente ar fi unite printr-o linie de cealaltă culoare, atunci aceste segmente ar forma un triunghi cu laturile de aceeași culoare.

152. O problemă de simplificare

Amplificînd fracția cu $2^{3/2}$ se obține:

$$\frac{(8+2\sqrt{15})^{3/2}+(5-2\sqrt{15}+3)^{3/2}}{(12+2\sqrt{35})^{3/2}-(7-2\sqrt{35}+5)^{3/2}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^3-(\sqrt{7}-\sqrt{5})^3}=$$

$$=\frac{2(5\sqrt{5}+9\sqrt{5})}{2(21\sqrt{5}+5\sqrt{5})}=\frac{7}{13}.$$

— *S.S.M.*, 55, (octombrie 1955), 567.

153. Produsul a trei numere prime

Fie $N = pqr$. Atunci $p^2 + q^2 + r^2 = 2331$, astfel că nici unul dintre numerele prime nu poate fi mai mare decît $(2331)^{1/2} < 49$, și toate numerele prime sînt impare.

Suma divizorilor lui N este $(1 + p) \cdot (1 + q) \cdot \cdot (1 + r) = 10\,560 = 11 \cdot 960$. Unicul multiplu la lui 11 care e mai mic decît 49 și care se obține adunînd o unitate la un număr prim este 44, astfel că $r = 43$. Prin urmare $p^2 + q^2 = 482$ și nici unul dintre aceste numere nu depășește $(482)^{1/2} < 22$. Dar pătratele numerelor impare se termină cu cifrele 1, 5 sau 9, așa că atît p^2 cît și q^2 se termină cu cifra 1. Deci $p = 11$, $q = 19$ și $N = 11 \cdot 19 \cdot 43 = 8987$.

154. Reprezentarea numerelor raționale

Fie a/b un număr rațional. Atunci $a/b = 1/b + 1/b + \ldots + 1/b$, adică suma dintre un termen al seriei armonice cu $a - 1$ duplicate ale sale. Descompunînd pe rînd cu ajutorul formulei $1/n = 1/(n+1) + 1/n(n+1)$ toate duplicatele care apar, se realizează pînă la urmă ca toți termenii să fie distincți.

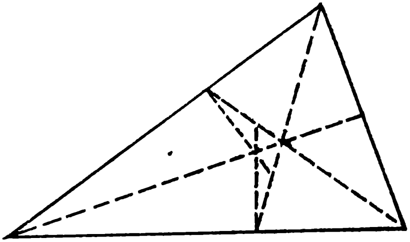
— G. S. Cunningham, *A.M.M.*, 69 (mai 1962), 435.

De exemplu: $3/7 = 1/7 + 1/7 + 1/7 = 1/7 + 1/8 + 1/56 + 1/8 + 1/56 = 1/7 + 1/8 + 1/56 + 1/9 + 1/72 + 1/57 + 1/3192$.

155. O condiție ca un triunghi să fie isoscel

Bisectoarea interioară a unui triunghi împarte latura opusă în două segmente proporționale cu laturile adiacente. Dacă se coboară dintr-un punct perpendiculare pe laturile unui triunghi, atunci cele două sume care se obțin luînd alternativ pătratele segmentelor determinate pe laturi sînt egale. Prin urmare, dacă într-un triunghi cu laturile a, b, c, perpendicularele ridicate pe laturile triunghiului din picioarele bisectoarelor interioare sînt concurente, atunci:

$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{ca}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2.$$



Dacă combinăm termenii avînd același numitor, obținem

$$a^2(b - c)/(b + c) + b^2(c - a)/(c + a) +$$
$$+ c^2(a - b)/(a + b) = 0$$

și apoi:

$$(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c)^2 = 0$$

Înseamnă că cel puțin unul dintre primii trei factori trebuie să se anuleze, triunghiul fiind prin urmare isoscel.

— *A.M.M.*, 46 (octombrie 1939), 513.

156. Întregii clasificați

Dacă numerele sînt dispuse într-un pătrat precum se arată în tabelul următor

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

fiecare linie este o progresie aritmetică cu rația comună 1 și fiecare coloană este de asemenea o progresie aritmetică cu rația $d = 4$. Prin urmare, suma oricăror două numere de pe diagonalele mari poate fi obținută ca suma a cel puțin uneia dintre perechile de numere care nu se află pe diagonale. Astfel, cele două clase sînt:

A:	1	4	6	7	10	11	13	16
B:	2	3	5	8	9	12	14	15

— Wm. H. Benson.

Cele 28 de sume de perechi de numere din fiecare clasă sînt 5, 7, 8, 10, 11 (2), 12, 13, 14 (2), 15, 16, 17 (4), 18, 19, 20 (2), 21, 22, 23 (2), 24, 27, 29. Se va observa că suma perechilor de termeni egal depărtați de capetele acestui șir este o constantă, $34 = 2(1 + 16)$. Acest rezultat a fost obținut într-un alt mod în *P.M.E.J.*, 3 (primăvara 1961), 182.

157. Buletine de vot economice

La prima vedere s-ar spune că ar fi necesar $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ buletine de vot diferite. Însă, dacă se adaugă două nume fictive la grupul de trei nume și un nume fictiv la grupul de patru, atunci vor fi necesare numai cinci buletine de vot diferite. Această metodă nu numai că reduce cheltuielile de tipografie, dar ea va da și o statistică indicînd dacă membrii societății votează în funcție de ordinea relativă de pe buletine sau de persoana candidatului.

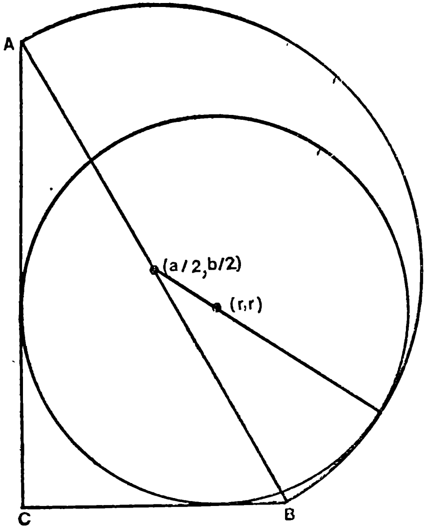
— M. S. Klamkin, *M.M.*, 30 (noiembrie 1956), 110.

158. Compararea rapoartelor

Avem:

$$(x^2 - y^2)/(x - y) = x + y >$$
$$> x + y - 2xy/(x + y) = (x^2 + y^2)/(x + y)$$

159. Un triunghi curbiliniu



În sistemul de coordonate avînd axele de-a lungul catetelor triunghiului dat, centrele cercului înscris și semicercului dat sînt situate respectiv în punctele de coordonate (r, r) și $(a/2, b/2)$, unde r este raza căutată. Prin urmare distanța dintre centre este egală cu diferența razelor. Aceasta înseamnă că $(r - a/2)^2 + (r - b/2)^2 = (c/2 - r)^2$. Avînd în vedere că $a^2 + b^2 = c^2$, obținem $r = a + b + c$, deci raza căutată este egală cu diametrul cercului înscris în triunghiul dreptunghic.

— M. A. Kirchberg, *A.M.M.*, 62 (iunie 1955), 444.

160. Un pătrat antimagic

Însumînd liniile, coloanele și diagonalele unui astfel de pătrat, fiecare număr întreg va figura în patru sume. Suma tuturor acestor sume va fi prin urmare $4[n^2(n^2+1)/2]$ adică $2n^2(n^2+1)$. Dacă cea mai mică dintre aceste sume este k, atunci ele formează numerele consecutive de la k la $4k+4n-1$, astfel că suma totală va fi $2n(2k+4n-1)$ Egalînd cele două expresii, simplificînd obținem $n(n^2+1)=2k+$ $+4n-1$. Dar membrul stîng este totdeauna un număr par, iar cel drept totdeauna unul impar. Înseamnă că k nu există, și nu există nici un astfel de n încît cele $4n$ sume să fie numere consecutive.

— D. C. B. Marsh, *A.M.M.*, 62 (ianuarie 1955), 42.

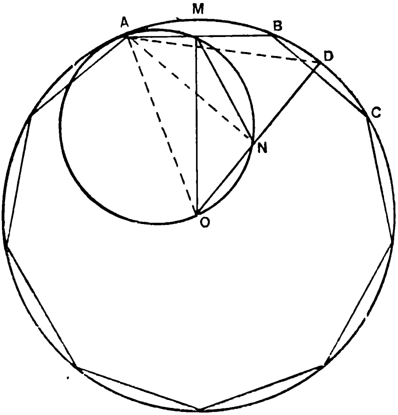
161. Un multiplu al lui 2^{m+1}

Considerăm expresia $I=(\sqrt{3}+1)^{2m}+(\sqrt{3}-$ $-1)^{2m}$. Ea este evident un număr întreg și fiindcă $(\sqrt{3}-1)^{2m}$ este mai mic ca unu, I este cel mai mic întreg, mai mare ca $(\sqrt{3}+1)^{2m}$. Prin urmare:

$$I=(4+2\sqrt{3})^m+(4-2\sqrt{3})^m=2^m[(2+$$
$$+\sqrt{3})^m+(2-\sqrt{3})^m]=2^{m+1}[2^m+2^{m-2}\cdot 3m(m-$$
$$-1)/2+\ldots].$$

— Cecil B. Read, *S.M.M.*, 62 (noiembrie 1962), 622.

162. Într-un poligon cu nouă laturi



Arcul $AB = 40°$, deci arcul $AD = 60°$, astfel că triunghiul AOD este echilateral și AM este perpendicular pe OD. Prin urmare punctele A, M, N, O se află pe un cerc cu diametrul AO. Prin urmare $\widehat{OMN} = \widehat{OAN} = 30°$, ca unghiuri care subîntind același arc.

— Howard Eves, *A.M.M.*, 63 (iunie 1956), 423.

163. Banii de buzunar

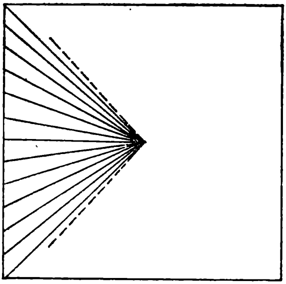
În total sînt distribuiți de 24 ori cîte 10 lei. $24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Dintre aceste descompuneri alegem două astfel ca $q_1c_1 = q_2c_2$ și $q + 1 = q_2$ iar $c_1 = c_2 + 2$. Deci, pînă la urmă se duc în excursie opt copii.

— *M.M.*, 31 (ianuarie 1958), 217.

164. Sumarea unei serii

$$\begin{aligned} \text{Fie: } S &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \\ xS &= \phantom{1 + {}} x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots \\ \hline (1 - x)\, S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 1/(1 - x). \\ S &= 1(1 - x)^2. \end{aligned}$$

165. Îngrădirea unui teren pătratic



Împărțim terenul în formă de pătrat în triunghiuri mărginite de cîte o porțiune de 10 m din gard și de segmente radiale duse din centrul pătratului. Aceste triunghiuri au arii egale și înălțimile sînt egale cu jumătatea laturii pătratului. Fiecare triunghi are suprafața, exprimată în ari, egală cu numărul scîndurilor de la baza sa, adică cu 4. Dacă notăm cu x latura pătratului, exprimată în metri, avem $(1/2)\,(x/2)\cdot 10 = 4\cdot 100$, de unde rezultă că latura pătratului este de 160 m.

Mai mult, dacă terenul ar fi un poligon regulat oarecare (sau un cerc), iar scîndurile de 10 m ar fi îndoite în dreptul colţurilor (curbate după arce), aria ar fi $(1/2)\cdot$(perimetrul)$\cdot$(raza cercului înscris), astfel că $4p/10 = (1/2)\cdot(p\cdot r/100)$, deci $2r = 160$.

— R. R. Rowe, in „*Civil Engineering, A.S.C.E.*", 11 (ianuarie 1941), 70.

166. Numere triangulare şi pătrate impare

Avem $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1 = 8k+1$, fiindcă dintre două numere întregi consecutive, unul este par. Înlăturarea ultimei cifre este echivalentă cu împărţirea diferenţei dintre numărul dat şi ultima cifră, deci a lui $4n(n+1)$, cu baza, adică cu opt, ceea ce dă $n(n+1)/2$, prin urmare un număr triangular.

— G. W. Wishard, *M.M.*, 10 (mai 1936), 313.

167. Cercuri înscrise

Răspunsul este: nici unul.

Raza cercului înscris într-un triunghi este dată de formula:

$$r = [(p-a)(p-b)(p-c)/p]^{1/2}$$

unde

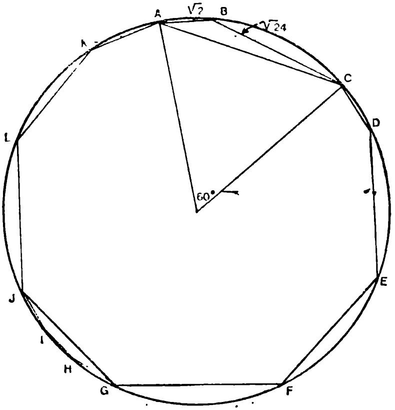
$$2p = a+b+c$$

Pentru fiecare triunghi din problemă se găsește că raza este egală cu 6.

Un caz rar de pereche de triunghiuri obtuzunghice de acest fel sînt triunghiurile avînd respectiv laturile 97, 169, 122 și 97, 169, 228; fiecare avînd raza cercului înscris egală cu 30.

— Bancrof H. Brown, *M.M.* (mai 1956), 275—276.

168. Un dodecagon înscris



Fie AB și BC o pereche de laturi adiacente neegale. Atunci arc AB + arc BC = arc AC = $= 360°/6 = 60°$, astfel că $AC = r$. Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul ABC, în care $\widehat{ABC} = 150°$, se obţine:

$$AC^2 = (\sqrt{2})^2 + (24)^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{24}\,(-\sqrt{3}/2) = 38.$$

Deci:

$$r = \sqrt{38}.$$

— Norman Anning, *M.M.*, 28 (noiembrie 1954), 113.

169. O soluţie a unei ecuaţii diofantice

Fiindcă $2^{24} + 2^{24} = 2^{25}$, avem $(2^8)^3 + (2^6)^4 = (2^5)^5$,

deci: $a = 256$, $b = 64$, $c = 32$.

— Leo Moser, *M.M.*, 26 (septembrie 1952), 53.

170. Soluţie antigel

Un litru de soluţie veche diferă de un litru de soluţie nouă (sau amestecată) cu -24%, în timp ce un litru din soluţia pe care o adăugăm diferă de soluţia nouă cu $+48\%$. Aceasta înseamnă că la fiecare litru din soluţia adăugată revin doi litri din soluţia veche. Astfel trebuie înlocuit 1/3 din conţinutul iniţial al radiatorului, deci 7 litri.

— B. E. Mitchell, *M.M.*, 26 (ianuarie 1953), 153

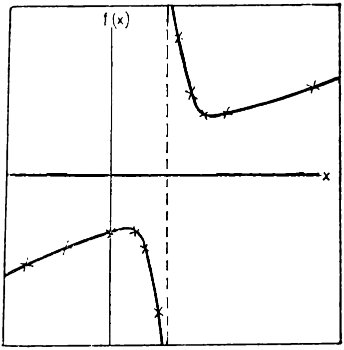
171. Maxim și minim fără derivare

Fie

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} = \frac{1}{2}\left[x - 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x - 1}\right] = \frac{x^2}{2(x-1)} - 1.$$

Cea mai mică valoare absolută a sumei dintre un număr și inversul său se obține dacă numărul este egal cu ± 1. Deci cea mai mică valoare absolută a lui $f(x)$ va fi dată pentru $x - 1 = \pm 1$, adică $x = 2$ sau 0. Din ultima formă a lui $f(x)$ se vede că $f(x)$ este continuu crescătoare pentru $x > 2$, continuu crescătoare și negativă pentru $x < 1$ și nu e definită pentru $x = 1$.



Prin urmare, $f(x)$ are în punctul $x = 2$ un minim relativ egal cu 1 și în $x = 0$ un maxim relativ egal cu -1.

172. Tangente a căror sumă e egală cu produsul lor

Avem $360° - 125° = 117° + 118°$. Aşa că

$$- \operatorname{tg} 125° = \operatorname{tg} (117° + 118°) = (\operatorname{tg} 117° + \operatorname{tg} 118°)/(1 - \operatorname{tg} 117° \cdot \operatorname{tg} 118°).$$

După efectuarea calculelor se obţine:

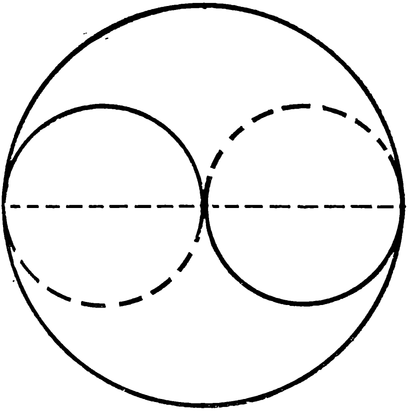
$$\operatorname{tg} 117° \ \operatorname{tg} 118° \ \operatorname{tg} 125° = \operatorname{tg} 117° + \operatorname{tg} 118° + \operatorname{tg} 125°.$$

— Norman Anning, *M.M.* 32 (noiembrie 1958), 113.
(În general suma tangentelor lui A, B şi $(360° - A - B)$ este egală cu produsul lor.)

173. Cifre şterse

Din cifrele care se pot citi rezultă că $3 + 1 = 10$ şi prin urmare calculul se face în baza patru, în care există numai trei cifre diferite de zero. O astfel de cifră, înmulţită cu împărţitorul trebuie să dea $**1$, iar o alta $3*$. Însă numai $3 \cdot 13 = 111$, $3 \cdot 23 = 201$, $3 \cdot 33 = 231$ şi $2 \cdot 13 = 32$, $1 \cdot 33 = 33$. Fiindcă $2 \cdot 13 + 1 < 100$, rezultă că, pe baza primei scăderi, împărţitorul trebuie să fie 33. Prin urmare cîtul este 1031 şi deîmpărţitul 102 003.

174. Împărţirea în două părţi cu aceeaşi arie



Să construim simetricul întregii configuraţii faţă de diametrul pe care se află centrele semicercurilor. Fiecare dintre cele două cercuri care se formează au diametrul egal cu 1/2 din diametrul cercului mare şi deci aria egală cu 1/4 din aria acestui cerc. Astfel şi celelalte două porţiuni ale cercului mare au fiecare aria egală cu 1/4 din aria cercului exterior.

— *M.M.*, 34 (noiembrie 1960), 107—108.

175. Un număr care divide simetricul său

În orice sistem de numeraţie cu baza $B \geqslant 10$,

$$2 \cdot 297 < 2 \cdot 300 = 600 < 792 < 800 = \\ = 4 \cdot 200 < 4 \cdot 297.$$

Prin urmare: $792 = 3 \cdot 297$, adică $7B^2 + 9B + 2 = 3(2B^2 + 9B + 7)$, sau $B^2 - 18B - 19 = 0$. Neglijînd rădăcina negativă a acestei ecuații, ne rămîne $B = 19$.

— D. L. Silverman, *M.M.*, 38 (martie 1965), 124.

176. O vîrstă pătratică

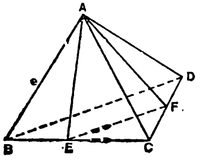
Deoarece căsătoria este legală, rămîn numai trei cazuri posibile:

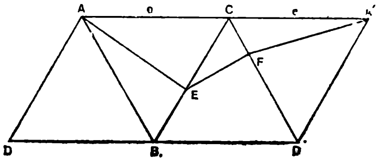
64	10	49	13	36	9
24	6	36	9	18	9

În sfîrșit, dacă luăm în considerație și vîrsta părinților în momentul nașterii copiilor, rămîne o singură posibilitate, cea scrisă mai sus la mijloc. Astfel vîrstele tatălui, mamei, fiicei și fiului sînt respectiv 49, 36, 13 și 9.

177. Un tetraedru trecut printr-un tub

Într-un paralelogram constînd dintr-o bandă de patru triunghiuri echilaterale, segmentele duse paralel cu latura mai lungă au lungimea constantă $2e$. Dacă banda e îndoită astfel ca să formeze un tetraedru regulat, rezultă că secțiunile făcute în tetraedru prin plane perpendiculare pe segmentul care unește mijloacele a două laturi opuse au perimetrul constant de $2e$.





Prin urmare, dacă bimediana coincide cu axa cilindrului, tetraedrul poate fi trecut printr-un cilindru cu pereții subțiri și flexibili cu circumferința $\pi d = 2e$. Deci $e = \pi d/2$. În practică ar fi indicat ca la capăt cilindrul să fie puțin mai larg, fiindcă altfel operația ar fi imposibil de realizat.

Dacă tetraedrul are o altă poziție față de axa cilindrului, un plan perpendicular pe axa cilindrului va trece printr-un vîrf și va intersecta latura opusă acestui vîrf. Precum se vede din suprafața desfăcută din figură, perimetrul $AEFA'$ al acestei secțiuni e mai mare ca $2e$. Prin urmare tetraedrul nu poate fi trecut prin tub în această poziție. Rezultă că cel mai mare tetraedru care poate fi trecut prin cilindru este cel care are latura $\pi d/2$.

— *M.M.*, 39 (martie 1966), 113.

178. O divizibilitate cu (a—1)²

$$f(a, n) = a^{n+1} - n(a-1) - a = a(a^n - 1) -$$

$$- n(a-1) = (a-1)\ [a(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1) - n].$$

Deoarece expresia din parantezele mari se anulează pentru $a = 1$, pe baza teoremei lui Bézout rezultă că această expresie se divide cu $a - 1$, deci $(a - 1)^2$ divide pe $f(a, n)$.

179. Determinantul triunghiului lui Pascal

Pe baza regulei de aranjare, fiecare element din tablou este egal cu suma elementului imediat superior cu a celui aflat la stînga sa. Rezultă că dacă în determinantul de ordinul n a unei matrici pătratice avînd o latură pe prima linie facem operațiile $\text{col}_i - \text{col}_{i-1}$ pentru $i = n$, $n - 1, \ldots, 2$, reducem acest determinant la minorul elementului său din colțul de stînga sus*. Dezvoltînd determinantul după elementele primei linii și continuînd acest șir de operații în determinanții obținuți, pînă la urmă se obține valoarea 1.

De exemplu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 10 & 15 & 21 \\ 10 & 20 & 35 & 56 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 10 & 15 & 21 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 15 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

---

* Acest minor e de același tip ca determinantul inițial *(N.T.)*.

Fiindcă tabloul este simetric față de diagonala principală, demonstrația se aplică și la determinanții matricelor avînd o latură pe prima coloană. În acest caz, în locul coloanelor se vor scădea liniile.

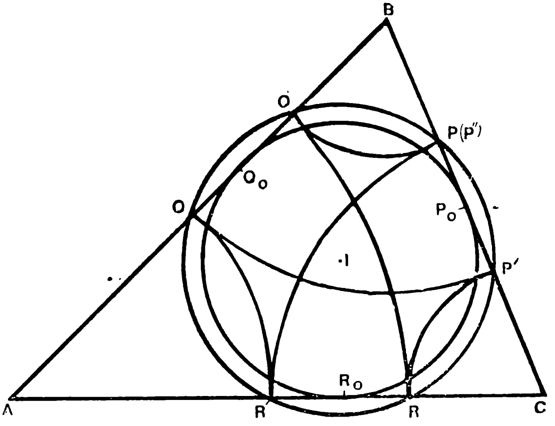
180. Coordonate raționale

Ecuația dată reprezintă o cubică; ea se compune dintr-o dreaptă și o elipsă, ceea ce se poate vedea dacă o scriem sub forma schimbată:

$$(x + y - 1)(2x^2 - 2xy + 2y^2 - x - y - 1) = 0.$$

Din cauza primului factor este evident că pentru orice valoare rațională dată lui x se poate calcula efectiv o valoare rațională a lui y și anume valoarea $y = 1 - x$, satisfăcînd ecuația dată.

181. O construcție finită



Fie P_0, O_0 şi R_0 punctele de contact ale cercului înscris. Atunci $PP_0 = OO_0 = RR_0 = P'P_0 = O'O_0 = R'R_0 = P''P_0$. Aceasta ne arată că construcţia e finită şi că P, O, R, P', O', R' se află pe un cerc concentric cu cercul înscris.

— Howard Eves, *A.M.M.*, 50 (iunie 1943), 391. Demonstraţia dată se poate generaliza pentru orice poligon cu un număr impar de laturi avînd un cerc înscris. Prin urmare, construcţia este finită pentru orice poligon cu un număr impar de laturi care se poate deforma, modificîndu-i unghiurile dar nu şi lungimea laturilor, astfel ca laturile să devină tangente unui cerc.

182. Grupuri de numere întregi impare

Al n-lea grup conţine n întregi, astfel că numărul tuturor întregilor din primele n grupe este de $n(n+1)/2$, şi numărul tuturor întregilor din primele $n-1$ grupe este $(n-1)n/2$. Cele două mulţimi de numere formează cîte o progresie aritmetică cu raţia comună egală cu 2. Prin urmare suma numerelor din al n-lea grup va fi

$$\frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)}{2}\left\{2+\left[\frac{n(n+1)}{2}-1\right]2\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(n-1)n}{2}\left\{2+\left[\frac{(n-1)n}{2}-1\right]2\right\}=$$

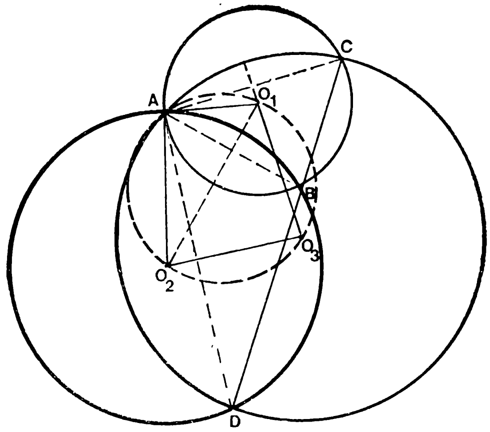
$$=n^2[(n+1)^2-(n-1)^2]/4=n^3.$$

183. Sfera celor şaisprezece puncte

Fie R raza sferei circumscrise şi r raza sferei celor şaisprezece puncte. Dacă tetraedrul este regulat, atunci $r = R/3$. Dacă muchiile dintr-un vîrf sînt perpendiculare două cîte două, atunci $r = \infty$ (centrele cercurilor circumscrise feţelor fiind coplanare) şi R este finit. Un tetraedru regulat poate fi deformat în mod continuu într-un tetraedru cu muchiile din vîrf perpendiculare două cîte două, prin urmare trebuie să existe măcar o poziţie intermediară pentru care $r = R/2$. Mai mult, raportul r/R poate lua orice valoare mai mare ca $1/3$.

— Howard Eves, *A.M.M.*, 50 (iunie 1943), 389.

184. Cercuri concurente



Fie cercurile cu centrele O_1, O_2, O_3 care trec toate prin punctul A și se mai intersectează două cîte două, respectiv (O_1) cu (O_2) în B, (O_1) cu (O_3) în C și (O_2) cu (O_3) în D. O_3O_1 și O_3O_2 sînt perpendiculare respectiv pe CA și AD, astfel că $\widehat{O_1O_3O_2} + \widehat{CAD} = 180°$. În cercul (O_1), $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}$ arc $AB = \widehat{AO_1O_2}$(fiindcă O_1O_2 e mediatoarea lui AB). În cercul (O_2), $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}$ *arc* $AB = \widehat{AO_2O_1}$. Dar punctele C, B, D sînt coliniare, așa că triunghiurile ACD și AO_2O_1 sînt asemenea și $\widehat{CAD} = \widehat{O_1AO_2}$. Prin urmare $\widehat{O_1O_3O_2} + \widehat{O_1AO_2} = 180°$, deci patrulaterul $O_1O_3O_2A$ este inscriptibil.

— *A.M.M.*, 72 (mai 1965), 547.

185. Un turneu de golf

Să considerăm patru permutări de patru litere pe care le notăm în felul următor: $P_1 = (x, y, z, w)$, $P_2 = (z, w, x, y)$, $P_3 = (w, z, y, x)$ și $P_4 = (y, x, w, z)$.

Fiecare jucător trebuie să fie repartizat odată în aceeași grupă cu fiecare dintre ceilalți 15, așa că trebuie să avem $15/3 = 5$ runde. O metodă de a împărți participanții în grupe este următoarea: la început se aranjează numele celor 16 participanți într-un tablou pătratic. Apoi se formează alte trei tablouri repetînd prima coloană și aplicînd coloanei a doua, succesiv, permutările P_4, P_3, P_2; coloanei a treia, P_2, P_4, P_3; în sfîrșit, celei de-a patra coloane P_3, P_2, P_4. Astfel se obține:

A E I M	*A F K P*	*A H J O*	*A G L N*
B F J N	*B E L O*	*B G I P*	*B H K M*
C G K O	*C H I N*	*C F L M*	*C E J P*
D H L P	*D G J M*	*D E K N*	*D F I O*

Grupurile formînd primele patru runde sînt date de liniile celor patru tablouri, iar cele formînd runda a cincea de coloanele primului tablou. Liniile ultimelor trei tablouri reprezintă termenii pozitivi din dezvoltarea determinantului primului tablou.

Termenii negativi din dezvoltarea acestui determinant se obțin aplicînd în același fel P_3, P_4, P_2 coloanei a doua, P_2, P_3, P_4 coloanei a treia și P_4, P_2, P_3 coloanei a patra din primul tablou. Astfel se obține o nouă împărțire:

A E I M	*A H K N*	*A F L O*	*A G J P*
B F J N	*B G L M*	*B E K P*	*B H I O*
C G K O	*C F I P*	*C G J M*	*C E L N*
D H L P	*D E J O*	*D H I N*	*D F K M*

186. Numere triangulare pătratice

Dacă al n-lea număr triangular $T[n] = n(n+1)/2$ este un pătrat perfect, atunci $T[4n(n+1)] =$

$= 4T[n](2n+1)^2$ este de asemenea un pătrat perfect. Fiindcă primul număr triangular este 1, deci un pătrat perfect, există o infinitate de numere triangulare care sînt pătrate perfecte.

— A. V. Sylvester, *A.M.M.*, 69 (februarie 1962), 168.

187. Un sistem cu trei necunoscute

Avînd în vedere relațiile dintre coeficienții și rădăcinile unei ecuații, x, y, z sînt, evident, rădăcinile ecuației de gradul trei:

$$a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = 0$$

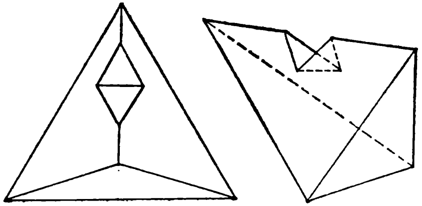
deci $(a-1)(a-2)(a-3) = 0$

$$a = 1,\ 2,\ 3.$$

Deoarece sistemul este simetric în x, y, z, cele șase sisteme de soluții vor fi permutările lui 1, 2, 3 și anume: $(x,y,z) = (1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

— D. G. Buckley, *S.S.M.*, 40 (mai 1940), 483.

188. Un poliedru aplatizat



Poliedrul poate fi un tretraedru cu o scobitură în formă de pană tetraedrică făcută într-una din muchii. Aceasta se poate vedea ușor fie desenînd din nou graful, astfel ca unul din triunghiuri să conțină toate celelalte segmente, fie privind tetraedrul scobit printr-una din fețele care au rămas triunghiuri.

— Robert Connelly, *A.M.M.*, (decembrie 1962), 1009.

189. Clasamentul echipelor de baseball

Prima operație este de a compara rezultatul $C - P$ al unei echipe cu o situație egală. Dacă $C > P$ atunci echipa se află în categoria superioară, dacă $C < P$ echipa se află în categoria inferioară. Apoi considerăm două echipe A și B. Echipa A va fi situată înaintea echipei B dacă $C_A > C_B$ și $P_A \leqslant P_B$ sau $C_A = C_B$ și $P_A < P_B$. Acum putem ordona echipele; dubii persistă numai în privința ordinii relative a perechilor de echipe însemnate cu asterisc(*).

	C	P		C	P
* Cincinnati	49	36	St. Louis	41	45
* Los Angeles	51	38	* Chicago	41	46
San Francisco	45	38	* Houston	39	45
Philadelphia	45	39	New York	29	56
* Milwaukee	42	40			
* Pittsburg	44	43			

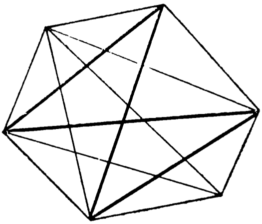
Dacă $C_A = C_B + x$ și $P_A = P_B + y$, ambele echipe fiind în categoria superioară și $x \leqslant y$, atunci A este înaintea lui B. Dacă ambele echipe sînt în categoria inferioară și $x \geqslant y$, atunci echipa A este înaintea echipei B. Astfel ordinea dată mai sus este cea corectă.

190. Cumpărături dulci

Fiindcă $216 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 9 \cdot 24$, gospodina a cumpărat 24 livre.

— *M.M.*, 33 (noiembrie 1959), 118.

191. Intersecția diagonalelor



Considerăm un poligon convex cu $n \geqslant 4$ laturi. Luînd dintre cele n vîrfuri orice combinație de cîte patru, aceste vîrfuri determină un patrulater cu două diagonale care se intersectează. Invers, oricare două diagonale ale poligonului care se intersectează determină un patrulater format din vîrfurile pe care le unesc. Prin urmare, numărul căutat al intersecțiilor diagonalelor este egal cu C_n^4. Bineînțeles, s-ar putea ca unele dintre aceste intersecții să se confunde.

— Nobert Kaufman and R. H. Koch, *A.M.M.*, 54 (iunie 1947), 344.

192. Două triplete cu suma nulă

Din ipoteză, $a+b+c=0$ și $d+e+f=0$.

Prin urmare $(a+b)^3=(-c)^3$

$$a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=3abc.$$

Analog:

$$d^3+e^3+f^3=-3de(d+e)=3def.$$

În sfîrșit:

$$(a^3+b^3+c^3)/(d^3+e^3+f^3)=abc/def.$$

— Aaron Buchman, *S.S.M.*, 38 (februarie 1938), 220.

193. O condiție de descompunere în factori

Fie:

$$f(x)=x^a+x^b+1=x^a+x^{3k}x^{-a}+1.$$

Considerăm acum rădăcinile cubice ale unității: 1, $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2$ și ω^2. Fiindcă a nu se divide cu 3, avem sau $\omega^a=\omega$ și $\omega^{-a}=\omega^2$, sau $\omega^a=\omega^2$ și $\omega^{-a}=\omega$. În ambele cazuri,

$$f(\omega)=f(\omega^2)=1+\omega+\omega^2=0$$

Prin urmare: $(x - \omega)(x - \omega^2) = x^2 + x + 1$, divide pe $x^a + x^b + 1$.

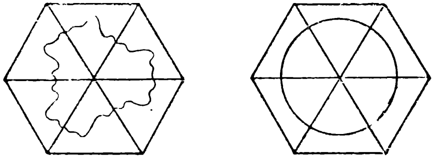
— Howard D. Grossman, *S.S.M.*, 45 (mai 1945), 486.

194. Rezistențe legate în paralel

Fiindcă x, y, z sînt numere pozitive, $x>z$ și $y>z$. Fie $x = z + u$ și $y = z + v$, $u, v > 0$. Ecuația $1/z = 1/x + 1/y$ se reduce la $z^2 = uv$. Prin urmare, pentru orice z este necesar numai să descompunem pe z^2, în toate modurile posibile, în produs de două numere întregi și pozitive u și v.

— Marian L. Caines, *N.M.M.*, 18 (noiembrie 1944), 100.

195. Curbă de lungime minimă



Dacă luăm șase copii ale triunghiului considerat, pe fiecare fiind trasată curba care împarte aria în două părți egale, și alegem convenabil un vîrf, le putem asambla astfel ca triunghiurile să formeze un hexagon, iar curbele o curbă închisă. Curba închisă împarte aria hexagonului în două părți egale astfel încît aria din interiorul ei să fie constantă. Prin urmare, dacă perimetrul ei este minim, curba este un arc cu centrul într-un vîrf al triunghiului*.

— Leo Moser.

196. Un pătrat particular

Avem

$$N^2 = a_1a_2a_3b_1b_2b_3 \cdot a_1a_2a_3 = (a_1a_2a_3)(1002001) =$$
$$= (a_1a_2a_3)7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2.$$

Prin urmare $a_1a_2a_3$ trebuie să fie pătratul unui număr prim P diferit de 7, 11 și 13. Dar $a_1 \neq 0$ și $b_1b_2b_3 < 1000$, așa că $10 < P < 23$. Prin urmare, P este 17 sau 19, $a_1a_2a_3 = 289$ sau 361 și $N^2 =$ $= 289\ 578\ 289$ sau $361\ 722\ 361$.

— P. N. Nagara, *M.M.*, 24 (noiembrie 1950), 108.

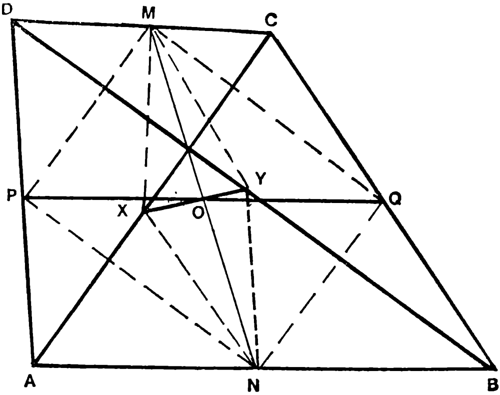
197. O serie de teste

Dacă diferența de punctaj 97 — 73, egală cu 24, este raportată la diferența mediilor 90 — 87, egală cu 3, rezultă că erau $24/3 = 8$ teste.

---

* În demonstrație se presupune ca un fapt cunoscut că curba de lungime minimă care delimitează o arie dată este un cerc (celebra „problemă a Didonei"). Apoi s-a subînțeles că curba căutată are capetele pe două laturi distincte ale triunghiului. Considerînd separat celelalte cazuri posibile, cînd curba nu taie nici o latură sau are capetele pe o singură latură, se poate arăta ușor că curba căutată e într-adevăr cea dată în rezolvarea problemei *(N.T.)*.

198. Puncte confundate într-un patrulater



Mijloacele laturilor oricărui patrulater formează vîrfurile unui paralelogram, iar diagonalele unui paralelogram se împart reciproc în părți egale. În patrulaterul $ABCD$, $MQNP$ este un paralelogram, astfel că segmentele PQ și MN se intersectează în punctul O aflat la mijlocul fiecărèia dintre ele. În patrulaterul concav $ACDB$, $MYNX$ este un paralelogram astfel că XY și MN se intersectează tot în 0, care e mijlocul lor comun.

— Louis R. Chase, *S.S.M.*, 31 (mai 1931), 616.

199. Fracții ireductibile

Dacă k/n este o fracție ireductibilă, atunci și $1-k/n = (n-k)/n$ este tot o fracție ireductibilă. Prin urmare fracțiile ireductibile se pot grupa în perechi, așa că numărul lor este par.

— Norman Anning, *M.M.*, 27 (mai 1954), 284.

200. Serviciul de ceai

Știm că prețul de cost e mai mic decît prețul de vînzare cu amănuntul; așadar din prețurile zaharniței și al vasului pentru frișcă rezultă evident $H=0$. Atunci:

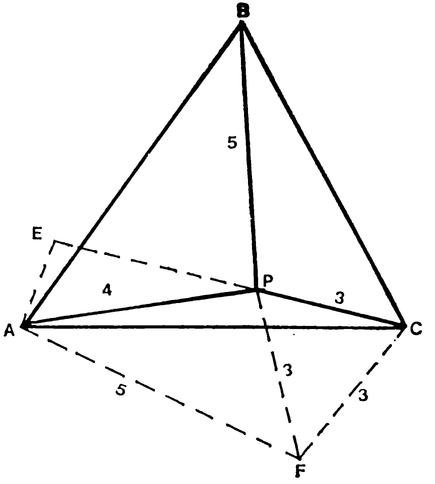
$$KOC/CKO = 672/600 = 28/25.$$

Prin urmare KO e un multiplu de 25, astfel că $K = 5$. C este par și mai mic decît K, astfel că $KOC = 504$ și $CKO = 450$. Prin urmare prețul de cost este $450/600 = 3/4$ din prețul de vînzare cu amănuntul. Rezultă că prețul de cost al tăvii este de 376,2 lei, iar al ceainicului de 683,1 lei; T trebuie să fie 9; cheia codului în care au fost scrise prețurile de cost este:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
B	L	A	C	K	S	M	I	T	H

201. Segmente care determină un triunghi echilateral

În triunghiul ABC avem $PC/3 = PA/4 = PB/5$.



Construim un triunghi echilateral PCF astfel ca P și F să fie situate de o parte și de alta a laturii AC. Unim pe A cu F și ducem perpendiculara AE pe CP. $\widehat{PCB} = 60° - \widehat{PCA} = \widehat{ACF}$, așa că triunghiurile PCB și FCA sînt egale și $AF = BP = 5$. Aceasta înseamnă că APF e un triunghi dreptunghic, astfel că $\widehat{APE} = 180° - 60° - 90° = 30°$. De aici rezultă că $AE = 2$ și $EP = 2\sqrt{3}$. Deci

$$AC = \sqrt{2^2 + (3 + 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}} \cong 6,7664.$$

— *Ș.S.M.*, 33 (aprilie 1933), 450.

202. Restul invariant

Restul fiind mereu același, împărțitorul trebuie să fie impar. Dar $1453 - 1108 = 345$; $1844 - 1453 = 391$; $2281 - 1844 = 437$. Apoi $437 - 391 = 391 - 345 = 46 = 2 \cdot 23$. Împărțitorul căutat este 23, fiindcă

$$(N_1 d + r) - (N_2 d + r) = d(N_1 - N_2).$$

Restul este 4.

— *M.M.*, 35 (ianuarie 1962), 62.

203. O permutare de nouă cifre nenule

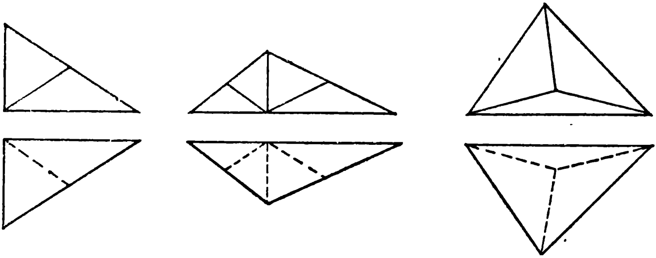
Singurele valori posibile ale lui c sînt 3 și 4. Dar $(64\,644)^2$ are zece cifre, așa că singura soluție este $(27\,273)^2 = 743\,816\,529$.

— Nick Farnum, *S.S.M.*, 63 (octombrie 1963), 602.

Această soluție este unică chiar dacă nu impunem condiția $ab = c^3$. Mai mult, $27\,273 = 3 \cdot 9091$ și 9 091 este cel mai mare factor prim al tuturor numerelor care sînt pătrate perfecte și se scriu ca o permutare a celor nouă cifre nenule.

204. Împărțire în vederea unei suprapuneri

Scopul poate fi atins dacă împărțim unul din triunghiuri în triunghiuri isoscele. Triunghiul dreptunghic va fi împărțit prin mediana corespunzătoare ipotenuzei. Un triunghi obtuzunghic



se poate împărți mai întîi în triunghiuri dreptunghice cu ajutorul înălțimii duse pe latura cea mai mare. Un triunghi ascuțitunghic va fi împărțit în trei triunghiuri isoscele de razele cercului circumscris care trec prin vîrfuri.

— Louis R. Chase, *S.S.M.* 30 (noiembrie 1930), 949.

205. În sfîrșit Umbugio va primi o lecție

Fie $b = (x - 1/x)^{1/2}$ și $a = (1 - 1/x)^{1/2}$. Atunci

$$x = a + b \qquad (1)$$

și fiindcă $x \neq 0$

$$b - a = (b^2 - a^2)/(b+a) = (x - 1)/x = 1 - 1/x \quad (2)$$

Adunînd relațiile (1) și (2) obținem:

$$2b = x - 1/x + 1 = b^2 + 1, \text{ deci } b = 1.$$

Prin urmare, $x - 1/x = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$ și $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Însă singura valoare care satisface ecuația inițială este $x = (1+\sqrt{5})/2$.

— P. M. Anselone și Sam Cook, *A.M.M.*, 62 (decembrie 1955), 728.

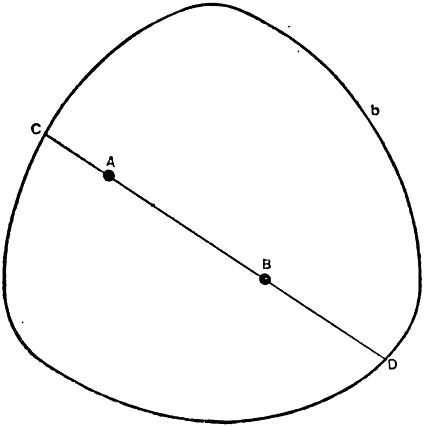
206. Bărbați cu caracteristici comune

O sută de bărbați vor avea $70+75+85+$ $+90=320$ dintre caracteristicile menționate. Dacă distribuția caracteristicilor este cea mai uniformă dintre toate distribuțiile posibile*, cel puțin douăzeci dintre ei, adică 20% vor avea toate cele patru caracteristici. În general, în cazul a n caracteristici vom avea:

$$P=\sum_{i=1}^{n} p_i - 100(n-1).$$

— *M.M.*, 38 (septembrie 1965), 211.

207. Un domeniu de lățime constantă



* Este evident că în acest caz numărul bărbaților care au patru caracteristici este minim *(N.T.)*.

Fie C și D punctele în care dreapta AB intersectează frontiera b. Domeniul fiind de lățime constantă și egală cu 1, rezultă că $CD \leqslant 1$. Fiindcă $(AC + CB) + (BD + DA) = 2CD$, una din sumele $(AC+CB)$ și $(BD+DA)$ trebuie să fie $\leqslant 1$.

— Leo Moser.

208. Compararea radicalilor

În general $n! < (n+1)^n$, fiindcă fiecare dintre cei n factori care figurează în numărul stîng este mai mic ca $n+1$. Prin urmare:

$$(n!)^n n! < (n!)^n (n+1)^n \quad \text{sau} \quad (n!)^{n+1} < [(n+1)!]^n$$

Extrăgînd radicalul de ordinul $n(n+1)$ se obține:

$$(n!)^{1/n} < [(n+1)!]^{1/(n+1)}.$$

În cazul particular considerat, $n = 8$, se obține:

$$(8!)^{1/8} < (9!)^{1/9}.$$

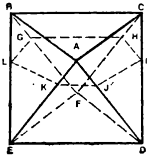
209. Tetraedrul lui Fibonacci

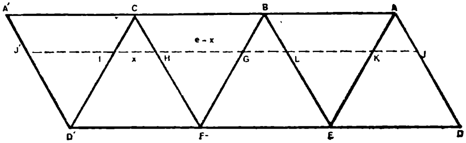
Formula de recurență care dă numerele lui Fibonacci fiind $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, înseamnă că trei numere ale lui Fibonacci consecutive satisfac ecuația $x + y = z$. Prin urmare cele patru vîrfuri ale tetraedrului fiind coplanare, volumul său este nul.

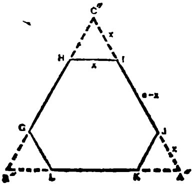
Mai mult, cele 12 coordonate nu trebuie să fie termeni consecutivi. Același rezultat rămîne valabil și în cazul cînd ordonatele fiecărui vîrf sînt numere ale lui Fibonacci consecutive.

210. Octaedrul regulat

a) Octaedrul regulat poate fi considerat o antiprismă*. Planul de secțiune taie cele șase fețe laterale ale antiprismei, care sînt triunghiuri echilaterale. Suprafața laterală, după efectuarea unei tăieturi de-a lungul unei muchii, să zicem a lui AD, poate fi desfăcută ca să formeze un paralelogram $ADD'A'$. Prin urmare perimetrul secțiunii este egal cu perimetrul triunghiului de bază și anume cu $3e$.







b) Dacă $AJ = x$, atunci secțiunea este un hexagon care se poate obține tăind cîte un triunghi echilateral de latură x din vîrfurile unui triunghi echilateral de latură $e+x$. Rezultă că laturile

---

* Prin antiprismă (triunghiulară) se înțelege poliedrul avînd drept baze două triunghiuri cu laturile necoplanare situate în două plane paralele, iar drept fețe, triunghiuri care se obțin unind în mod convenabil un vîrf al unui triunghi cu două vîrfuri ale celuilalt *(N.T.)*.

acestui hexagon sînt egale alternativ cu x și $e - x$. Aria sa este $[(e+x)^2 - 3x^2]\sqrt{3}/4$; această arie este minimă pentru $x=0$ și maximă pentru $x=e/2$. Hexagonul cu arie maximă este hexagonul regulat avînd vîrfurile situate la mijlocul muchiilor laterale ale octaedrului. Aria sa este 3/2 din aria unei fețe a octaedrului.

211. Nu poate fi un număr întreg

În succesiunea 1, 2, 3,..., n, există un termen unic θ, care conține factorul prim 2 la puterea cea mai mare. Fie $2M$ cel mai mic multiplu comun al succesiunii. Înmulțim cu M ambii membri ai ecuației $S = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$. Fiecare termen din membrul drept va fi un întreg, exceptînd termenul M/θ, care va avea numitorul 2. Deci SM nu este un întreg și prin urmare nici S nu este întreg.

212. Trei numere întregi impare consecutive

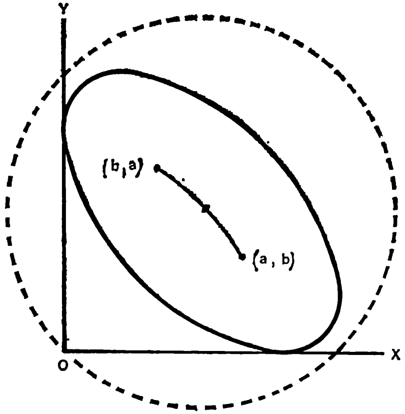
Orice întreg se poate scrie sub forma $4k$, $4k+1$, $4k+2$ sau $4k+3$. Rezultă că orice pătrat este de forma $4k$ sau $4k+1$ și suma a două pătrate poate fi de forma $4k$, $4k+1$ sau $4k+2$. Dar fiecare al doilea întreg impar este de forma $4k+3$. Așadar nu există nici măcar *două* numere întregi impare consecutive astfel ca ambele să fie suma a două pătrate perfecte.

213. O sumă vectorială nulă

Fie R rezultanta tuturor vectorilor. Rotim toată configurația în jurul centrului O cu $2\pi/n$ radiani astfel ca ea să coincidă cu poziția ei inițială. Notăm cu R' vectorul obținut prin rotirea cu $2\pi n$ a vectorului R. Este evident că $R = R'$, dar cum direcțiile celor doi vectori sînt diferite, rezultă că $R = R' = 0$.

— Richard Couchman, *M.M.*, 26 (mai 1953), 287.

214. O elipsă care alunecă



Locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ este cercul director $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Prin urmare centrul elipsei, care se mişcă rămînînd tangentă la două semidrepte perpendiculare, luate drept axe de coordonate, se află tot timpul la distanţa $(a^2+b^2)^{1/2}$ de origine. Distanţa de la centru pînă la una din semidrepte este minimă dacă el se află într-unul din punctele (a, b) sau (b, a), astfel că locul geometric este arcul mai mic determinat pe cercul $x^2+y^2=a^2+b^2$ de aceste puncte. (Lungimea acestui arc este de

$$(a^2+b^2)^{1/2} \text{ arctg } [(a^2-b^2)/2ab]).$$

— Adrian Struyk, *M.M.*, 24 (martie 1951), 231.

215. Radicali suprapuşi

Expresia care trebuie calculată fiind o sumă infinită, urmează s-o interpretăm ca limita unui şir a_n care se obţine, de exemplu, punînd zero sub al $(n+1)$-lea radical. Acest şir a_n este evident crescător.

Fie şirul b_n care se obţine dacă sub al $(n+1)$-lea radical se pune $(n+3)^3$. Din această definiţie rezultă că $b_n > a_n$. Pe de altă parte, pentru şirul b_n vom avea sub al n-lea radical $(3n+8)+$ $+(n^2+3n)(n+3)=(n+2)^3$, deci sub al $(n-1)$-lea radical $(3n+5)+(n^2+n-2)(n+2)=(n+1)^3$; continuînd acest raţionament, se obţine că sub primul radical avem $(1+2)^3$, deci b_n este şirul constant 3. Rezultă că şirul a_n este mărginit şi prin urmare convergent.

Apoi

$$a_n^{3n}=b_n^{3n}-(n+3),$$

sau

$$a_n = 3[1 - (n+3)/3^{3^n}]^{1/3n}$$

şi deci $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 3$*.

216. Un triunghi pitagoreic

În şirul lui Fibonacci, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Dacă trei numere alese din acest şir în ordine crescătoare sînt a, b, c, atunci $c \geqslant a+b$. Înseamnă că aceste numere nu pot reprezenta laturile nici unui triunghi, fiindcă într-un triunghi suma a două laturi este totdeauna mai mare decît latura a treia.

— Norman Miller, *A.M.M.*, 60 (martie 1953), 191.

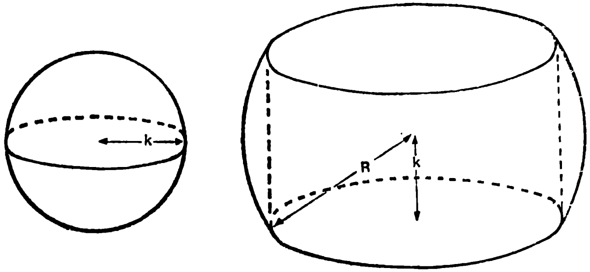
217. Un gol într-o sferă

Considerăm o sferă de rază k, a cărei suprafaţă este o membrană elastică şi inextensibilă, avînd rolul de a conţine în interior un fluid, în concordanţă cu legile tensiunii superficiale**.

---

* Soluţia de faţă corespunde variantei adaptate de noi a problemei. Ea înlocuieşte soluţia propusă de Edgar Karst, *M.M.*, 32 (noiembrie 1959), 1969, din care împrumută ideea construirii şirului b_n *(N.T.)*.

** Pe baza acestor legi suprafaţa unui fluid liber (în absenţa greutăţii) este cea mai mică suprafaţă sau poate să includă un volum dat; prin urmare este o suprafaţă sferică *(N.T.)*.



Apoi străpungem sfera de-a lungul unui diametru și introducem un tub de rază variabilă și de lungime constantă $2k$, în așa fel ca să nu se piardă nimic din fluid. Dacă tubul se lățește, tensiunea superficială va menține membrana sub forma unei suprafețe sferice de o rază mai mare R. Prin urmare volumul „verighetei" va rămîne constant. Prin dilatarea cilindrului, perimetrul interior al inelului sau sferei găurite, egal cu $2\pi\sqrt{R^2 - k^2}$ va crește, dar grosimea ei maximă, egală cu $R - \sqrt{R^2 - k^2}$ va scădea. Rezultă că volumul materialului rămas după ce într-o sferă de raza R se face un gol de lungimea $2k$ este același cu volumul sferei de rază k, adică $4\pi k^3/3$. Deci volumul rămas e independent de raza sferei. În particular $V = 4\pi \cdot 5^3/3 \cong 523{,}6$ unități cubice.

218. Navetistul

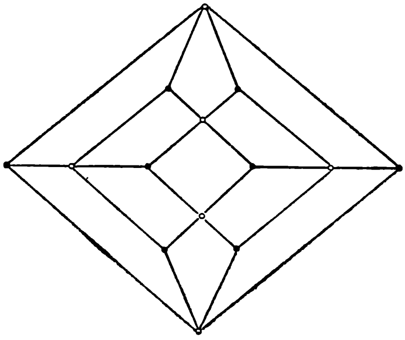
Două drumuri dus-întors efectuate în primul mod durează 3 ore, ceea ce corespunde efectuării cîte unui drum dus-întors între casă și locul de muncă, o dată parcurs pe jos și o dată cu mașina. Prin urmare un drum dus-întors efectuat pe jos durează 3 — 1/2 = 2 1/2 ore.

219. Bază de numerație impară

Orice întreg se poate reprezenta în sistemul de numerație cu baza r sub forma $a_0r^n+a_1r^{n-1}+\ldots+$ $+a_nr^0$. Un produs este par dacă are măcar un factor par, în caz contrar el fiind impar. Dar r și prin urmare r^k este impar și paritatea termenilor sumei indicate este determinată de paritatea coeficienților a_k. Suma unor numere pare e pară, la fel ca suma unui număr par de numere impare. Suma unor numere pare și a unui număr impar de numere impare este impară. Prin urmare, un număr este impar dacă și numai dacă într-un sistem de numerație cu bază impară el are un număr impar de cifre impare.

— *N.M.M.*, 12 (ianuarie 1938), 197.

220. Călătorie pe un dodecaedru



Dodecaedrul rombic are opt vîrfuri de tip T, în care se întîlnesc trei muchii, și șase vîrfuri de tip F, în care se întîlnesc patru muchii. Toate vîrfurile vecine unui vîrf de tip T sînt de tip F și toate cele vecine unuia de tip F sînt de tip T. Aceasta înseamnă că într-o călătorie vîrfurile de tip T și F trebuie să alterneze. Din cauză că sînt opt vîrfuri de tip T și șase de tip F nu există nici o succesiune alternată a tuturor vîrfurilor, indiferent dacă am vrea sau nu să ne reîntoarcem în final în punctul de plecare.

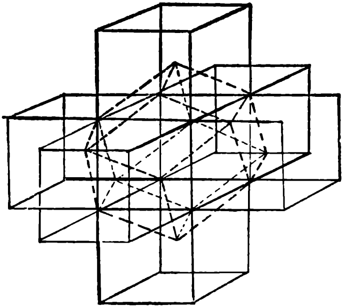
— Arthur Rosenthal, *A.M.M.*, 53 (decembrie 1946), 593.

221. Dodecaedre rombice

Într-un aranjament compact de cuburi egale (care umplu spațiul), alegem alternat cuburile* și ducem plane prin cele șase perechi de muchii opuse ale cuburilor alese. Toate aceste cuburi sînt tăiate în șase piramide congruente avînd baza un pătrat și muchiile laterale egale cu jumătate din diagonala mare a cuburilor. Fiecărui cub netăiat îi sînt acum alăturate șase piramide, astfel încît acestea, împreună cu cubul, formează un dodecaedru regulat (fiecare față corespunzînd unei muchii a cubului).

---

* Această „alegere alternată" se poate face în felul următor: colorăm un cub în alb, apoi toate cuburile care au o față comună cu el în negru și așa mai departe — fiecare cub nou cu culoarea opusă celei în care e colorat un cub avînd o față comună cu el *(N.T.)*.



Volumul tuturor cuburilor fiind utilizat în acest nou aranjament, dodecaedrele rombice umplu tot spațiul.

Rezultă imediat că volumul dodecaedrului rombic este egal cu dublul rombului unui cub avînd latura egală cu diagonala mică a unei fețe.

222. Relația de recurență a lui Fibonacci

Aplicînd în mod repetat relația de recurență, obținem:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = F_{n-2} + F_{n-3} + F_{n-3} + F_{n-4} =$$

$$= F_{n-3} + F_{n-4} + 2F_{n-4} + 2F_{n-5} + F_{n-4} =$$

$$= 5F_{n-4} + 3F_{n-5}.$$

Fiindcă $F_5 = 5$ rezultă că fiecare al cincilea număr e divizibil cu cinci.

— E. M. Sheuer, *A.M.M.*, 67 (august 1960), 694. (Avem 1, 1, 2, 3, *5*, 8, 13, 21, 34, *55*, 89, 144, 233, 337, *610*, ...).

223. O înmulțire criptică

Deoarece $188 \cdot 8 = 1\,504$, primul O trebuie să fie mai mare ca 1. Acest O particular înmulțit cu primul E al înmulțitorului este $\leqslant 8$, astfel că acest $O = 3$ și acest $E = 2$. Singurele numere de forma $3EE$ care înmulțite cu 2 dau o expresie de forma EOE sînt 306, 308, 326, 328, 346 și 348. Nici unul dintre aceste numere nu dau, dacă le înmulțim cu 4 sau 6, un produs de forma $EOEE$ și numai ultimele două, dacă le înmulțim cu 8, dau un produs de această formă. Dar $346 \cdot 28 = 9\,688$ așa încît soluția unică este:

$$\begin{array}{r} 348 \\ 28 \\ \hline 2784 \\ 696 \\ \hline 9744 \end{array}$$

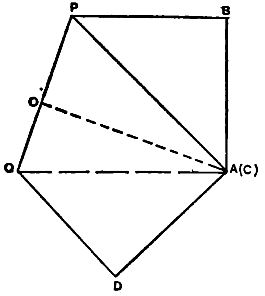
— W. Fitch Cheney.

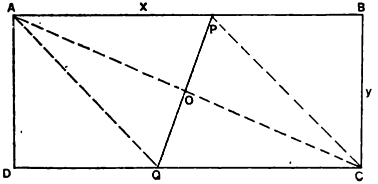
224. Dreptunghiul îndoit

Fie dreptunghiul $ABCD$ avînd lungimea $x = AB = DC$ și lățimea $y = AD = BC$, unde $x \geqslant y$. Să facem pe C să coincidă cu A și fie PQ îndoitura. Din cauza simetriei, $PC = PA = CQ$, așa că AC e perpendicular pe PQ și punctul de intersecție O al acestor segmente se află la mijlocul lui PQ. Triunghiurile AOP şi ABC fiind asemenea, avem:

$$PO/BC = AO/AB$$

şi





$$PQ = 2PO = 2AO \cdot BC/AB = (y/x) \cdot \sqrt{x^2+y^2}.$$

— Alan Wayne, *S.S.M.*, 64 (martie, 1964), 241.

225. Data naşterii

Un om care trăieşte în 1937 nu poate să fi avut 43 de ani în anul $1849 = (43)^3$. Prin urmare el a avut 44 de ani în 1936. Din condiţia dată rezultă

$$44 + m = d^2 \qquad 0 < m < 13$$

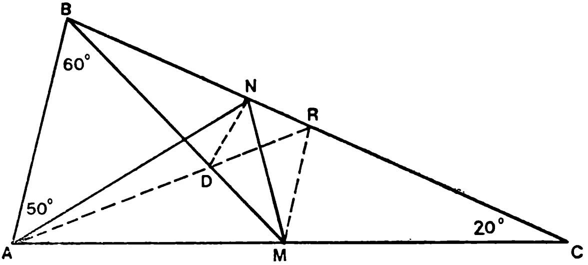
Singura soluţie întreagă e $m = 5$ şi $d = 7$. Omul s-a născut la 7 mai 1892.

— Lucille G. Mayer, *N.M.M.*, 11 (martie 1937), 282.

226. O ecuație în care intervin fracții

După o mică analiză devine evident că 0 și $a+b$ sînt rădăcini ale ecuației. Apoi, în general, dacă $m+n=1/m+1/n$, atunci $(m+n)(mn-1)=0$. Prin urmare $(x-a)/b+(x-b)/a=0$ sau $(a+b)\,x=a^2+b^2$, așa că a treia rădăcină a ecuației de gradul trei este $(a^2+b^2)/(a+b)$.

227. Un triunghi isoscel particular



Suma unghiurilor unui triunghi fiind de 180°, rezultă că $\widehat{CBA}=\widehat{CAB}=80°$, $\widehat{CBM}=20°$, deci $\widehat{BAN}=50°=\widehat{BNA}$(așa că $BN=AB$). Ducem MR paralel cu AB; AR intersectează pe BM în D. Ducem segmentul ND. Din cauza simetriei, ABD și DRM sînt isoscele și prin urmare echilaterale. Deci $BD=AB=BN$, așa că $\widehat{BDN}=\widehat{BND}=80°$ și $\widehat{NDR}=40°$. Dar $\widehat{MRC}=80°$, deci

$\widehat{NRD} = 40° = \widehat{NDR}$ și $ND = NR$. Apoi, fiindcă $DM = MR$, NM e mediatoarea segmentului DR. Prin urmare $\widehat{BMN} = 60°/2 = 30°$.

— *M.M.*, 39 (septembrie 1966), 253.

228. Frunzele copacilor

Deoarece fiecare din numerele întregi nenegative 0, 1, 2,...,(n — 1) este mai mic ca n, afirmația este evident incorectă. Dacă însă s-ar cere ca nici un copac să nu fie complet lipsit de frunze, atunci afirmația ar fi adevărată. Mulțimea de (n — 1) numere întregi și pozitive mai mici ca n fiind 1, 2,...,(n — 1), rezultă că al n-lea număr întreg și pozitiv mai mic ca n trebuie să coincidă cu unul dintre numerele din această mulțime.

229. O ecuație diofantică de gradul trei

O soluție evidentă a ecuației este $(x, y) = (-1,0)$. În plus, y^2 fiind pozitiv, x nu poate avea nici o altă valoare negativă. Apoi putem scrie:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x + 1)^2[x - 2 + 3/(x + 1)] = y^2.$$

Dar 0 și 2 sînt singurele valori întregi și pozitive ale lui x pentru care expresia $3/(x+1)$ este un număr întreg. Prin urmare toate soluțiile ecuației diferite de $(-1,0)$ sînt $(0, \pm 1)$ și $(2, \pm 3)$*.

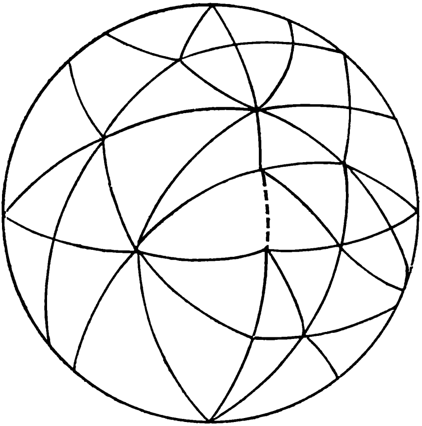
230. Domenii pe o sferă

Să presupunem că G este graful unei astfel de triangulări. Dacă linia de separație care unește cele două vîrfuri impare este eliminată (formîndu-se astfel un domeniu patrulater), atunci toate vîrfurile grafului rezultat G' sînt pare. Prin urmare domeniile grafului G' se pot colora în două culori, roșu și negru, astfel că două domenii adiacente să aibă culori diferite. Fie r și n numărul domeniilor grafului G' colorate respectiv în roșu și negru.

---

* Trebuie să remarcăm că, din faptul că y^2 se divide cu $(x+1)$ nu rezultă că el se divide și cu $(x+1)^2$. O soluție riguroasă ar fi următoarea. Fiindcă $x^2 - x + 1 = (x+1)^2 - 3x$, sau $(x+1)$ și $(x^2 - x + 1)$ sînt prime între ele, sau cel mai mare divizor comun al lor este 3. În primul caz din ecuație rezultă $x + 1 = a^2$ și $x^2 - x + 1 = b^2$, $a, b \geqslant 0$ sau $a^4 - a^2 + 1 - b^2 = 0$ deci $a^2 = (1 \pm \sqrt{4b^2 - 3})/2$. Prin urmare $4b^2 - 3$ trebuie să fie un pătrat mai mic ca $4b^2$ și deci $4b^2 - 3 \leqslant (2b-1)^2$ sau $b \leqslant 1$; singura valoare acceptabilă pentru b este 1, prin urmare a fiind întreg, rezultă $a = 1$ și deci $(x, y) = (0, \pm 1)$.

În cazul cînd cel mai mare divizor comun a lui $(x+1)$ și $(x^2 - x + 1)$ este 3, punem $x + 1 = 3k$ și ecuația devine $9k\sqrt{(3k^2 - 3k + 1)} = y^2$. Cum k și $3k^2 - 3k + 1$ sînt prime între ele rezultă că $k = a^2$ și $3k^2 - 3k + 1 = b^2$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$, deci $3a^4 - 3a^2 + 1 = b^2$ sau $a^2 = (3 \pm \sqrt{4b^2 + 5})/6$ deci $4b^2 + 5$ trebuie să fie un pătrat mai mare ca $4b^2$. Prin urmare $4b^2 + 5 \geqslant (2b+1)^2$, de unde $b \leqslant 1$ și deci $b = 1$. Rezultă $a = 1$ și $(x, y) = (2, \pm 3)$, sau $a = 0$ și $(x, y) = (-1, 0)$ *(N.T.)*.



Putem presupune că unicul domeniu patrulater e colorat în roșu. Prin urmare celelalte domenii au fiecare trei laturi și deci $n = [4 + (r - 1)3]/3$. Fiindcă acest număr nu e întreg, o triangulare de felul celei căutate nu există.

J. W. Moon, *A.M.M.*, 72 (ianuarie 1965), 81.

231. Excursia lui Henry

Călătoria a durat exact șase ore. Presupunem că ceasul este prevăzut cu un arătător suplimentar care indică ora și se deplasează invers față de sensul normal; acest arătător suplimentar face la momentul inițial un unghi de 180° cu arătătorul orar normal. Dacă în momentul plecării arătătoarele normale coincideau, atunci, după exact șase ore arătătorul orar normal și cel suplimentar își vor schimba pozițiile și minutarul se va afla din nou (după șase rotații) în poziția inițială, care coincide cu poziția arătătorului suplimentar.

Charles Salkind, *M.M.*, 28 (martie 1955), 241.

232. O serie de puteri

Avem:

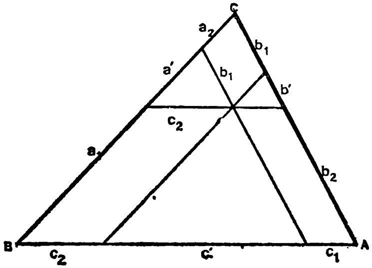
$$1/(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) = (1-x)/(1-x^{16}) = (1-x)(1+x^{16}+x^{32}+x^{48}+\ldots) =$$
$$= 1 - x + x^{16} - x^{17} + x^{32} - x^{33} + \ldots.$$

— M. S. Klamkin, *M.M.*, 29 (septembrie 1955), 53.

233. Paralele într-un triunghi

Paralelele duse împart triunghiul într-un număr de triunghiuri asemenea și de paralelograme. Folosind acest fapt obținem $a'/a = b_1/b$, $a'/a = c_2/c$, $b'/b=c_1/c$, $b'/b=a_2/a$, $c'/c=b_2/b$, $c'/c=a_1/a$. Aceste relații împreună cu identitățile $a'/a = a'/a$, $b'/b =$

$=b'/b$, $c'/c = c'/c$ formează nouă egalități pe care adunîndu-le membru cu membru obținem



$$3(a'/a + b'/b + c'/c) = (a_1 + a' +$$

$$+ a_2)/a + (b_1 + b' + b_2)/b + (c_1 + c' + c_2)/c = 3.$$

Prin urmare

$$a'/a + b'/b + c'/c = 1.$$

— *S.S.S.*, 55 (noiembrie 1955), 660.

234. O problemă de descompunere

Avem $316 = 28\cdot 11+8$ și $8=(13 - 11)\cdot 4$. Prin urmare cei doi termeni sînt $4\cdot 13=52$ și 264.

Alte descompuneri posibile sînt:

$$52 + 11 \cdot 13 = 195$$

și

$$264 - 11\cdot 13 = 121.$$

235. Prețuri convenabile

În sistemul de numerație cu baza șase avem:

$1^2 = 1,\ \ 2^2 = 4,\ \ 3^2 = 13,\ \ 4^2 = 24$ și $5^2 = 41.$

Deci $F = 1$.

La fel: $11^2 = 121$, $22^2 = 524$, $33^2=2013$, $44^2= = 3344$, $55^2 = 5401$, deci $E = 2$, prin urmare $(122)^2 = 15\,324$.

O relație interesantă asemănătoare este $(221)^2= = 53\,241$.

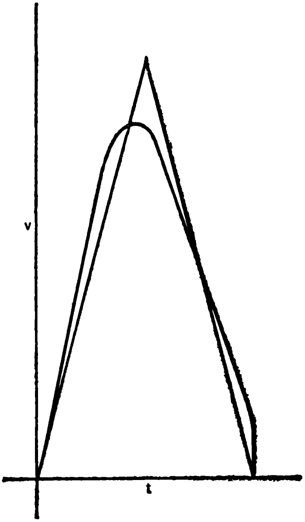
236. Ce vîrstă are Willie?

Folosind metoda încercărilor, prietenul lui Willie poate utiliza faptul că, dacă a și b sînt întregi distincți și $p(x)$ un polinom cu coeficienți întregi, $a - b$ divide pe $p(a) - p(b)$. Notînd „întregul mai mare" încercat cu N și vîrsta lui Willie cu A, obținem că $N - 7$ divide pe $85 - 77=8$, $A - 7$ divide pe 77, $A - N$ divide pe 85 și $7 < N < A$. Prin urmare N poate fi 8, 9, 11, 15 și A poate fi 14, 18, 84. Deoarece $A - N$ divide 85, al doilea întreg încercat trebuie să fi fost 9 și deci Willie are patrusprezece ani.

— D. C. B. Marsh, *A.M.M.*, 64 (octombrie 1957), 593.

Funcția polinomială trebuie să fi fost de forma: $(x - 7)(x - 9)(x - 14)Q(x) - 3x^2 + 52x - 140$.

237. O particulă accelerată



Dacă reprezentăm grafic v în funcție de t, aria determinată de curbă și de axa timpului (egală cu o unitate pătrată) este aceeași cu cea a unui triunghi isoscel avînd ca bază segmentul determinat de capetele curbei și înălțimea de două unități. Pantele celor două laturi ale triunghiului sînt ± 4. Sau curba coincide cu laturile, sau o parte a ei este în afara triunghiului. Rezultă că există un punct în care panta a a curbei este în valoare absolută 4*.

— *P.M.E.J.*, 1 (noiembrie 1952), 280.

* Aceasta rezultă din teorema lui Lagrange *(N.T.)*.

238. Timbrele

Timbrele de 1 și 2 lei pot fi grupate în loturi de 12 lei, suma cheltuită pentru cumpărarea lor trebuind să fie un multiplu de 5 lei, deci egală cu 60 de lei. Prin urmare s-au cumpărat cinci timbre de 2 lei, 50 de timbre de 1 leu și opt timbre de 5 lei.

— *M.M.*, 32 (ianuarie 1959), 171.

239. Jocul cu douăzeci de întrebări

Dacă cel care pune întrebările dorește să determine un anumit obiect dintr-o mulțime finită de obiecte, metoda cea mai eficientă este ca în fiecare etapă să întrebe dacă obiectul posedă o proprietate care caracterizează exact o jumătate din obiectele care mai intră în discuție în etapa respectivă. Indiferent de răspunsul primit, mulțimea în care este încadrat obiectul se reduce la jumătate. Prin această metodă, cel care pune întrebările poate determina prin douăzeci de întrebări orice întreg pozitiv mai mic sau egal cu 2^{20}.

Întrebarea pusă în etapa $i=1, 2,...,20$, poate fi: „Dacă numărul e scris în baza doi, este oare cifra de pe poziția *1* egală cu 1?“ Să observăm că dacă răspunsul este totdeauna „nu“, atunci numărul scris în baza doi are 21 de cifre, prima egală cu 1, iar următoarele egale cu zero. Dacă cel puțin un răspuns este „da“, atunci numărul are cel mult douăzeci de cifre complet cunoscute după epuizarea întrebărilor*.

— H. M. Gehman, *A.M.M.*, 58 (ianuarie 1951), 40.

240. Sfere înscrise

Hexaedrul se compune din două tetraedre regulate alipite. Notăm cu indicii 4, 6, 8, mărimile corespunzătoare poliedrelor regulate cu numărul respectiv de fețe. Atunci $V_4/V_8 = 1/4$ (vezi răspunsul nr. 113). Prin urmare $V_6/V_8 = 1/2$. De asemenea, suprafața hexaedrului este 6/8 din suprafața octaedrului, adică $S_6/S_8 = 3/4$. Deoarece $V_6 = r_6S_6/3$ și $V_8 = r_8S_8/3$, rezultă că $r_6/r_8 = (V_6/V_8)(S_8/S_6) = 2/3$.

— Howard Eves, *A.M.M.*, 56 (decembrie 1949), 693.

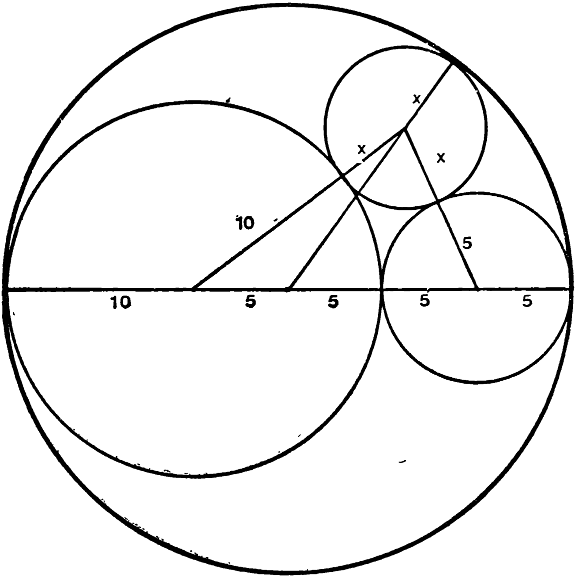
---

* Autorul soluției presupune cunoscut că metoda propusă este cea optimă, ceea ce nu este un lucru elementar. În plus, pentru a evita orice echivoc, în enunțul problemei trebuie precizat că ceea ce se cere nu este „cel mai mare număr care poate fi determinat prin douăzeci de întrebări", ci „cel mai mare număr pe care îl putem determina", odată cu toate cele mai mici decît el, *prin același sistem de 20 de întrebări*. Se observă că fără a preciza metoda nu există „un" cel mai mare număr care se poate determina prin 20 de întrebări, fiindcă pentru orice metodă dată există o altă metodă prin care putem determina eventual numere mai mari. Pentru aceasta este indicat ca prima întrebare să fie: „Este mai mare numărul considerat decît cel mai mare care se poate determina prin sistemul inițial?" În cazul răspunsului afirmativ ne mai rămîn 19 întrebări pentru a determina diferența dintre numărul căutat și cel mai mare număr care se poate determina cu ajutorul primului sistem *(N.T.)*.

241. Discuri decupate dintr-un disc

Fie ABC un triunghi și M un punct pe latura BC. Teorema lui Steward se exprimă prin următoarea egalitate:

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot MB \cdot MC.$$



Aplicînd această teoremă triunghiului determinat de centrele cercurilor decupate și luînd ca punct intermediar centrul cercului inițial, obținem, folosind notațiile din figură:

$$15(15-x)^2 = 10(10+x)^2 + 5(5+x)^2 - 15 \cdot 10 \cdot 5.$$

Ecuația se reduce la $700x = 3000$. Prin urmare, cel mai mare disc ce poate fi tăiat din restul de placaj are raza de 30/7 cm. În problemă a fost neglijată grosimea cuțitului.

— S.S.M., 59 (aprilie 1959), 326.

242. Suma pătratelor coeficienților binomiali

Să calculăm pe două căi modurile în care se pot alege n bile dintr-o urnă în care se află n bile roșii și n bile negre. Obținem prima dată C_{2n}^n, iar a doua oară

$$C_n^0C_n^1 + C_n^1C_n^{n-1} + C_n^2C_n^{n-2} + \dots + C_n^{n-1}C_n^1 + \\ + C_n^nC_n^0.$$

Dar:

$$C_n^k = C_n^{n-k};$$

Prin urmare

$$C_{2n}^n = \sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2.$$

— *M.M.*, 24 (septembrie 1950), 54. (Faptul demonstrat este echivalent cu afirmația că suma pătratelor elementelor de pe o diagonală de ordinul k al triunghiului lui Pascal este egal cu elementul de ordinul k (cel de la mijloc) de pe diagonala $2k - 1$).

243. O criptogramă de Crăciun

Folosind un tabel al pătratelor numerelor naturale se constată ușor că *ALL* poate fi 100, 144, 400 sau 900 și *TO* poate fi 36 sau 81.

Singurul pătrat cu patru cifre dintre care cifra zecilor este 1, 4 sau 9 este 7396 = *XMAS*, deci *ALL* = 900. Din cauza biunivocității corespondenței dintre litere și cifre, *TO* poate fi numai 81. Atunci *MERRY* este sau 35224 sau 34225, dintre care numai ultimul este un pătrat perfect. Astfel interpretarea numerică a felicitării este

9 34225 7396 81 900

Dacă se renunță la condiția ca suma cifrelor fiecărui cuvînt să fie un pătrat perfect, atunci mai există și soluția:

4 27556 3249 81 400.

244. Centre de greutate

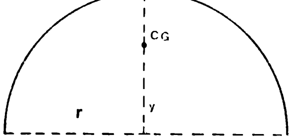
a) Evident, centrul de greutate al arcului se află pe raza perpendiculară pe diametrul care-l subîntinde la distanța y de acest diametru. Rotind arcul în jurul diametrului se generează o suprafață sferică: prima teoremă a lui Pappus* afirmă că aria suprafeței de revoluție generată prin rotirea unei curbe plane în jurul unei drepte din planul ei care nu o intersectează este egală cu produsul dintre lungimea curbei și lungimea cercului descris de centrul de greutate al curbei. Astfel:

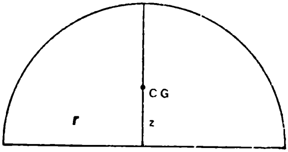
$$4\pi r^2 = \pi r \cdot 2\pi y \text{ deci}$$

$$y = 2r/\pi$$

— M. S. Klamkin, 26 (martie, 1953), 226.

* Aceste teoreme mai sînt cunoscute sub denumirea „teoremele lui Guldin" *(N.T.)*.





b) A doua teoremă a lui Pappus afirmă că volumul unui solid de revoluție obținut prin rotirea unei suprafețe plane în jurul unei drepte din planul ei care nu o intersectează este egal cu produsul dintre aria suprafeței și lungimea cercului descris de centrul de greutate al suprafeței.

Evident, centrul de greutate al suprafeței semicirculare se găsește pe raza perpendiculară pe diametrul ei, la distanța z de acest diametru. Prin rotirea suprafeței în jurul diametrului, se obține o sferă.

Astfel: $4\pi r^3/3 = (\pi r^2/2)(2\pi z)$ deci

$$z = 4r/3\pi.$$

— M. S. Klamkin, *M.M.*, 27 (martie 1954), 227.

245. Două triplete egale

Dacă $x + y + z = a + b + c$ și

$xyz = abc$, atunci

$$abc(ab + bc + ca - xy - yz - zx) =$$
$$= bc(x - a)(y - a)(z - a) = ca(x - b)(y - b)(z - b) = ab(x - c)(y - c)(z - c).$$

Dacă toți factorii ultimelor trei expresii sînt nenuli, atunci una dintre expresii are toți factorii pozitivi și alta are exact trei factori negativi. Deci egalitățile nu pot să aibă loc. Prin urmare fiecare expresie are un factor egal cu zero; există deci o ordine în care tripletele x, y, z și a, b, c, sînt egale termen cu termen.

246. O sumă irațională

Exponenții termenilor formează șirul — 1, — 4 — 8, —13, — 19, — 26,... în așa fel încît diferența a doi termeni consecutivi crește cu 1. În sistemul de numerație cu baza șase suma seriei se scrie sub forma fracției neperiodice, 0,100 1000 10000 1000001..., care este un număr irațional.

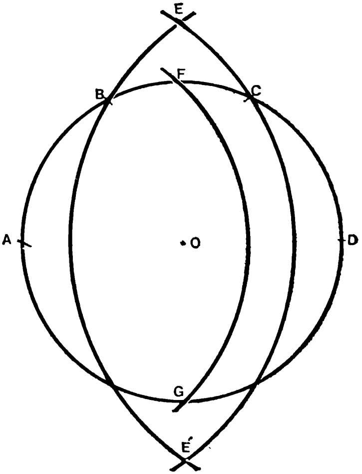
— David L. Silverman, *M.M.*, 32 (martie 1959), 229.

247. Un examen cu șase elevi

Dîndu-se n elevi, probabilitatea ca primul dintre ei care iese la tablă să nu deranjeze pe nici unul dintre colegii săi este evident $2/n$. Prin urmare probabilitatea căutată ca măcar unul dintre cei șase să trebuie să deranjeze unul sau mai mulți colegi este $1 - (2/6)(2/5)(2/4)(2/3) = 43/45$.

— Howard Eves, *A.M.M.*, 50 (martie 1943), 202.

248. O construcție numai cu compasul



Fie cercul cu centrul O și de rază r. Plimbăm cu compasul raza r pe circumferință construind arcele egale AB, BC și CD. Atunci AD e un diametru. Cu centrele în A și D și raza AC descriem două arce care se taie în E și E'. Cercul cu raza OE și centrul în A taie cercul inițial în F și G. Atunci punctele $AFDG$ formează împărțirea căutată.

— John A. Dyer, *P.M.E.Y.*, 1 (aprilie 1950), 55.

(Demonstrație:

$AC = r\sqrt{3} = AE$

$OE = \sqrt{AE^2 - r^2} = r\sqrt{2} = AF$).

249. Fondul de premii

De fapt se rețin cîte 50 de lei de la $950:50 = 19$ persoane, prin urmare fondul era de $20 \cdot 50 - 5 =$ $= 9950$ de lei.

250. Salariul matematicianului curții regale

După cum se știe*, elementele oricărui pătrat magic de ordinul trei pot fi reprezentate cu ajutorul a trei parametri esențiali, așa cum se vede în primul dintre tablourile următoare:

$$\begin{array}{ccc} e+x & e-x-y & e+y \\ e-x+y & e & e+x-y \\ e-y & e+x+y & e-x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} e-x-y & e-y & e+x-y \\ e-x & e & e+x \\ e-x+y & e+y & e+x+y \end{array}$$

Evident, aceste nouă elemente pot fi rearanjate într-un alt tablou (cel de-al doilea de mai sus), astfel ca fiecare linie să fie o progresie aritmetică cu aceeași rație și, de asemenea, fiecare coloană să fie tot o progresie aritmetică, avînd rațiile comune. Elementul central este media arit-

* Vezi, de exemplu, B. A. Kordeski, *Matematica distractivă*, Editura Tineretului, București, 1959, p. 312 *(N.T.)*.

metică a patru perechi diferite de elemente și totodată a tuturor elementelor pătratului.

Se cere să se formeze un pătrat magic de ordinul trei ale cărui elemente să aparțină mulțimii numerelor prime p_i cu proprietatea că p_i+2 este de asemenea un număr prim. În afara numerelor 3 și 5, orice element p_i din această mulțime are ultima cifră 9, 7 sau 1. Prin urmare e este un număr prim care este media a două numere ce se termină respectiv cu 9,9 sau 7,1 sau 1,1. Prin urmare, să examinăm primii termeni ai șirului de numere prime p_i cu proprietatea enunțată mai sus. Acești termeni sînt:

$$3, 5, 11, 17, 29, 41, 59, 71, 101, 107, 137, 149,$$

$$179, 191, 197, 227, 239, 269, 281, \ldots$$

Cea mai mică valoare a lui e care se termină cu 9 și care este media a cel puțin patru perechi de numere prime din acest șir se determină din relațiile:

$$2 \cdot 149 = 107 + 191 = 101 + 197 = 71 + 227 =$$

$$= 59 + 239 = 29 + 269 = 17 + 281.$$

(Pentru orice număr prim <149 și care se termină în 1 sau 7 există cel mult trei numere prime din acest șir avînd aceeași cifră finală).

Dacă perechile găsite sînt puse succesiv în linia de mijloc a pătratului format din progresii aritmetice, găsim că există o singură posibilitate de a așeza convenabil celelalte trei perechi și anume:

17	59	101
107	149	191
197	239	281

Aceasta conduce imediat la cele trei pătrate magice din problemă:

191	17	239		192	18	240		193	19	241
197	149	101		198	150	102		199	151	103
59	281	107		60	282	108		61	283	109

Salariul matematicianului este, prin urmare,

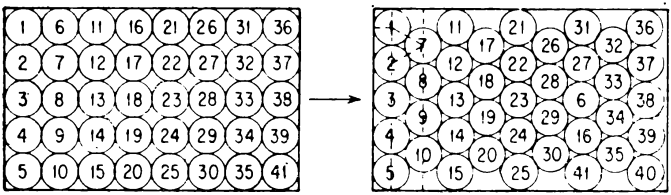
$$9e+9 = 9(149+1) = 1350 \text{ monede de argint.}$$

Acest rezultat a fost obținut pe altă cale în *A.M.M.*, 55 (septembrie 1948), 429. Cea mai mică soluție, mai mare decît cea obținută de noi, este 2088, 1392, 4809; 5442, 2730, 18; 660, 4158, 3372; rezultă un salariu de 24570 monezi.

251. Împachetarea cilindrilor

Trebuie scoși doi cilindri. Să numerotăm cilindrii în modul indicat în figură. Scoatem cilindrii 6 și 16.

Deplasăm cilindrii 7—10 către stînga și în sus, pînă ajung în noua poziție indicată. Deplasăm cilindrii 11—15 către stînga. Deplasăm cilindrii



17—20 către stînga și în sus și cilindrii 21—25 către stînga. Cilindrii rămași pot fi manevrați în diferite feluri. De exemplu: deplasăm 26, 28, 29, 30 și 31 către stînga, pe 32 pînă ajunge aproape în contact cu 31 și 37; pe 27 pînă ajunge în contact cu 28 și 32; pe 26 pînă ajunge în contact cu 21 și 22. Împingem 31 către stînga, pe 32 pînă ajunge în contact cu 36 și 37, pe 27 în sus, pînă ajunge în contact cu 31; pe 28, 29, 30 în sus și spre stînga; pe 33, 34, 35 în sus și spre dreapta. Introducem pe 6, 16 și 41 în pozițiile indicate în figură.

Dacă cilindrii sînt strînși unul lîngă altul în coloane alternante de cîte cinci și patru, distanța dintre axele coloanelor este de $\sqrt{3}/2$. Lungimea totală a pachetului de cilindri este $8(\sqrt{3}/2)+1 = 4\sqrt{3}+1 \cong 7{,}928<8$, deci cilindrii pot să se deplaseze în timpul transportului.

252. Cateta unui triunghi pitagoreic

Teorema lui Fermat afirmă că dacă p este un număr prim și m un număr întreg care nu se divide cu p, atunci $m^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. Relația $a^2 + b^2 = c^2$ se poate scrie sub forma:

$$(a^{3-1} - 1) + (b^{3-1} - 1) = c^2 - 2 =$$
$$= (c^{3-1} - 1) - 1$$

Dacă nici unul dintre numerele a și b nu se divid cu 3, fiecare termen din membrul stîng al relației este divizibil cu 3. Dar, indiferent dacă c se divide sau nu cu 3, membrul drept al relației nu se divide cu 3. Deci, pentru ca relația să poată fi adevărată, cel puțin unul dintre numerele a și b trebuie să se dividă cu 3*.

253. Puteri ale lui 2

În sistemul binar suma se scrie prin n cifre 1, urmate de un zero. Adunînd 2, acest număr se transformă în 1 urmat de $n+1$ zerouri. Prin urmare suma este egală cu $2^{n+1} - 2$.

254. Aranjarea unor pătrate colorate

Există cel puțin trei modele diferite, fiecare dintre ele avînd pătratul central diferit colorat.

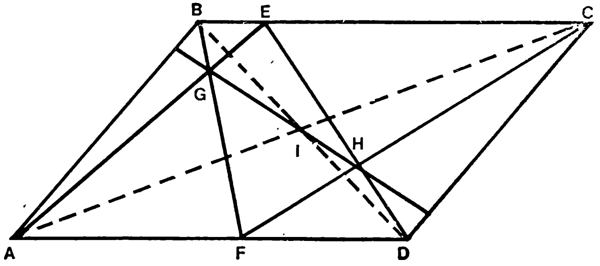
Putem alege în trei moduri diferite culoarea celulei din colțul din stînga sus. Pentru fiecare din aceste trei moduri există două posibilități

* Se mai poate da o demonstrație fără a utiliza teorema lui Fermat, observînd că dacă a nu se divide cu 3, atunci $a = 3k \pm 1$ și prin urmare $a^2 - 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3)$ *(N.T.)*.

de alegere a culorii celulei din mijloc din primul rînd și apoi două moduri de a colora celula din stînga, din rîndul din mijloc. Aceste celule fiind colorate, există o singură posibilitate de a alege culorile tuturor celulelor rămase. Rezultă că există $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ moduri de a colora modelul dat. Fiecare dintre ele poate fi rotit astfel ca să coincidă cu alte trei; așadar în total există $12/4=3$ modele de bază.

— Wm. H. Benson.

255. Paralelogramul împărțit în două



Teorema lui Pappus afirmă că dacă vîrfurile alternative ale unui hexagon sînt situate respectiv pe două drepte, atunci intersecțiile laturilor opuse sînt coliniare*. Dacă AB și DC se intersectează

* Această teoremă, cunoscută sub denumirea de „teorema lui Pascal“, are următorul enunț general: „laturile opuse ale unui hexagon înscris într-o conică se intersectează în trei puncte coliniare. Două drepte formează o conică degenerată“ *(N.T.)*.

în I, atunci laturile opuse ale hexagonului $AEDBFCA$ se intersectează în G, I și H, care, prin urmare, sînt coliniare. Orice dreaptă dusă prin punctul de intersecție I al diagonalelor unui paralelogram împarte paralelogramul în două figuri egale.

— Mannis Charosh, *M.M.*, 38 (septembrie 1965), 252.

256. Un pătrat simetric

$12345 \leqslant N^2 \leqslant 54321$ și deci $113 \leqslant N \leqslant 221$. Numărul obținut prin inversarea cifrelor lui N trebuie să satisfacă aceleași inegalități. $N^2 \equiv 0 \pmod 5$*, deci $N \equiv 0 \pmod 5$. Singurele numere de trei cifre divizibile cu cinci și care satisfac inegalitățile de mai sus sînt 113, 122, 131, 140, 145, 154, 203, 212, 221. Există în această mulțime o singură pereche de numere simetrice și prin urmare unica soluție este $221^2 = 53241$, care ne conduce la $15324 = (122)^2$.

În timpul încercărilor se descoperă că $203^2 = 42013$, deci o altă permutare de cinci cifre consecutive.

257. O sumă problematică

Fără a reduce generalitatea problemei, numerele a și b pot fi considerate relativ prime și $|a| \geqslant |b|$.

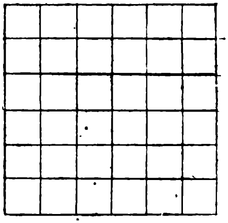
---

* În sistemul de numerație cu baza n, un număr este divizibil cu $n - 1$, dacă și numai dacă suma cifrelor sale se divide cu $n - 1$ (*N.T.*).

Dacă $a/b+b/a = k$ și k este întreg, atunci $a^2+b^2 = abk$. Prin urmare $b^2 = a(bk-a)$ și deci a divide pe b^2, ceea ce este imposibil, cu excepția cazului $a = \pm b$

258. Un pătrat nesecționat

Nu se poate obține nici un pătrat nesecționat. Să construim în pătratul cu latura de 6 cm o rețea echidistantă ducînd cîte cinci linii verticale și orizontale. Cînd acoperim această rețea cu piese de domino, pătratul va fi nesecționat dacă fiecare linie dusă intersectează cel puțin o piesă.



Fiecare linie verticală are în stînga ei un număr par de pătrate ale rețelei. Fiindcă fiecare piesă de domino netăiată de această linie ocupă două pătrate, jumătățile tuturor pieselor tăiate trebuie să ocupe un număr par de pătrate situate la stînga liniei. Prin urmare, orice linie dusă ar trebui să intersecteze cel puțin două piese de domino. Nici o piesă nu este tăiată de mai mult de o linie, deci pentru cele zece linii avem nevoie de 20 de piese; avem însă la dispoziție numai 18. Prin urmare cel puțin o linie a rețelei nu intersectează nici un domino.

— S. W. Golomb, „Scientific American", (decembrie 1960), 168.

259. Numere prime între ele

Să notăm cu (x, y) cel mai mare divizor comun al numerelor x și y.
Atunci:

$$(35,58) = (35,23) = (12,23) = (12,11) = (1,11) = 1.$$

Prin urmare 35 și 58 sînt relativ prime în orice sistem de numerație cu baza > 8.

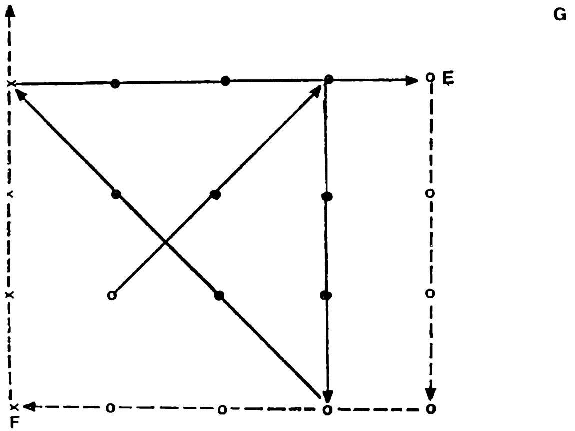
— David L. Silverman, *M.M.*, 38 (noiembrie 1965), 326.

260. Cinci numere întregi consecutive

Puterea a patra a oricărui număr par este de forma $4k$ și cea a oricărui număr impar e de forma $4k+1$. Prin urmare suma puterilor a patra a patru întregi consecutivi e de forma $4k+2$, care nu poate fi puterea a patra a unui număr.

261. Drum poligonal într-o rețea

Figura arată că în cazul $N = 3$ există un drum cu $2N - 2 = 4$ segmente (trecînd prin punctele „pline") și care are capătul în E. Încă două segmente care au capătul în F (de-a lungul liniei



punctate) sînt suficiente pentru $N = 4$; prin completarea cu încă două segmente care se termină în G obținem un drum suficient pentru $N=5$. Evident, procesul de adăugare a două segmente pentru fiecare creștere cu o unitate a lui N poate fi continuat indefinit.

— **M. S. Klamkin, *A.M.M.*, 62 (februarie 1965),** 124.

262. Rezolvare în numere întregi

Multiplicînd ecuația dată cu 4 și adunînd 1 în ambii membri obținem:

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (2y + 1)^2.$$

Pentru $x = -1$ rezultă $y = -1$ sau $y = 0$, pentru $x = 0$ rezultă $y = -1$ sau $y = 0$. Pentru

$x = 2$ rezultă $y = -6$ sau $y = 5$. Pentru $x = 1$, y este fracționar.

Acestea sînt toate soluțiile întregi ale ecuației, deoarece pentru $x < -1$ sau $x > 2$, membrul stîng al ecuației este mai mare ca $(2x^2 + x)^2$, dar mai mic decît $(2x^2 + x + 1)^2$ și deci nu poate fi egal cu numărul care figurează în membrul drept al ecuației și care este un pătrat perfect).

D. C. B. Marsh, *A.M.M.*, 73 (octombrie 1966), 895.

263. Un număr compus

$q = (p_1 + p_2)/2$ este media aritmetică a numerelor p_1 și p_2 și prin urmare $p_1 < q < p_2$. Dar p_1 și p_2 sînt numere prime consecutive și deci q e compus.

— John D. Baum, *M.M.*, 39 (mai 1966), 196.

264. Un sistem de patru ecuații liniare

Schimbînd pe x cu u și y cu v în ecuațiile (1) și (2), obținem respectiv ecuațiile (4) și (3), în care membrii din dreapta figurează cu semn schimbat. Prin urmare, $u = -x$ și $v = -y$. Făcînd aceste substituții în (1) și (2) obținem:

$$\begin{array}{r} -4x + 4y = 16 \\ 6x - 2y = -16 \\ \hline 8x = -16 \end{array}$$

Deci:

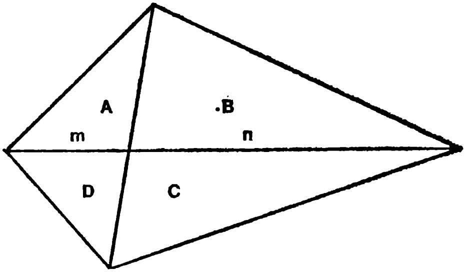
$$x = -2, \quad y = 2, \quad v = -2, \quad u = 2^*.$$

265. O relație într-un patrulater

Dacă două triunghiuri au aceeași înălțime, raportul ariilor lor este egal cu raportul bazelor, notînd ciclic cele patru triunghiuri

$$\frac{A}{A+B} = \frac{m}{m+n} = \frac{D}{C+D} =$$

$$= \frac{A+D}{A+B+C+D} = \frac{D+A}{Q}$$



Analog:

$$\frac{B}{B+C} = \frac{A+B}{Q}, \qquad \frac{C}{C+D} = \frac{B+C}{Q}$$

și

$$\frac{D}{D+A} = \frac{C+D}{Q}.$$

---

* Soluția dată revine în fond la adunarea lui (1) cu (4) și a lui (2) și (3) și introducerea necunoscutelor $\alpha = x + u$ și $\beta = y + v$ *(N.T.)*.

Înmulțind membru cu membru cele patru egalități obținem:

$$(A)(B)(C)(D) = (A+B)^2(B+C)^2(C+D)^2(D+A)^2/Q^4$$

— Leon Bankoff, *M.M.*, 38 (septembrie 1965), 248.

266. O problemă de divizibilitate

$$f(n) = \frac{n^4+n^2}{2n+1} = \frac{n^2(n^2+1)}{2n+1} =$$

$$= \frac{n^2}{4}\left[\frac{4n^2+4}{2n+1}\right] = \left(\frac{n}{2}\right)^2\left[2n-1+\frac{5}{2n+1}\right]$$

Evident n și $2n+1$ sînt relativ prime. Astfel, pentru ca $f(n)$ să fie un întreg este necesar ca $5/(2n+1)$ să fie întreg, ceea ce se întîmplă numai pentru $n=2, 0, -1, 3$. Singura valoare *pozitivă* este $n=2$, cînd $f(n)=4$.

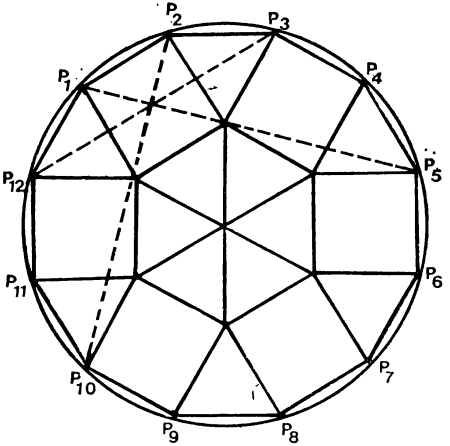
267. O ecuație dubioasă

Pentru ca afirmația să fie adevărată fără a mai introduce alte simboluri algebrice, cele două numere trebuie să fie scrise în sisteme de numerație definite, adică $342_a = 97_b$. Dacă $b=10$, atunci din cauză că $3\cdot 4^2=48$ și $3\cdot 6=108$, rezultă $a=5$. Într-adevăr, $3\cdot 5^2+4\cdot 5+2=97$.

În general dacă $3a^2 + 4a + 2 = 9b + 7$, atunci $b=(3a^2+4a-5)/9$, expresie care ia valori întregi numai dacă a este de forma $9x+5$; atunci $b=27x^2+34x+10$. Deci există un număr infinit de relații; de exemplu $342_5 = 97_{10}$, $342_{14} = 97_{71}$, etc.

268. Împărțirea unui dodecagon

a) Considerînd dodecagonul înscris într-un cerc, se observă cu ușurință că cele nouă diagonale care pleacă dintr-un vîrf împart unghiul respectiv de 150° în 10 părți egale (avînd aceeași măsură), fiecare fiind deci egal cu 15°.



Ducem porțiunile din diagonalele P_1P_6, P_2P_9, P_3P_8, P_4P_{11}, P_5P_{10}, P_7P_{12}, cuprinse între un vîrf și intersecția cu o diagonală similară plecînd dintr-un vîrf alăturat. Unghiurile $P_4P_3P_8$, $P_3P_4P_{11}$ etc. sînt de 60°, prin urmare am obținut șase triunghiuri echilaterale. Rezultă că vîrfurile acestor triunghuri sînt de asemenea vîrfurile pătratelor construite pe celelalte laturi (unghiurile $P_2P_3P_8$, $P_3P_2P_8$ etc. sînt drepte).

Laturile interioare ale pătratelor formează un hexagon regulat, care este împărțit de diagonalele sale în șase triunghiuri echilaterale. Prin urmare am obținut o împărțire a dodecagonului în 12 triunghiuri echilaterale egale și șase pătrate egale.

b) Unghiurile $P_1P_{12}P_4$ și $P_{12}P_1P_9$ au fiecare cîte 45° și deci P_1P_9 și P_4P_{12} sînt diagonale în același pătrat. P_2P_{11} este axă de simetrie în hexagonul echilateral convex format prin alipirea a două triunghiuri echilaterale și a unui pătrat; prin urmare P_2P_{11} trece prin centrul pătratului, deci este concurent în acest punct cu P_1P_9 și P_4P_{12}.

269. Fără rădăcini reale

Dacă ecuația admite o rădăcină reală, aceasta trebuie să fie negativă. Fie ea $-y$.

Dar

$$1 - y + y^2/2! - y^3/3! + \dots +$$

$$+ y^{2n}/(2n)! > e^{-y} > 0$$

Prin urmare ecuația nu are rădăcini reale.

— Joe Lipman, *A.M.M.*, 67 (aprilie 1960), 379

270. Un cub imposibil

Dacă $ar^2+ar+a=a^3$, atunci $r^2+r+1=a^2$. Orice cifră a, în sistemul de numerație în baza r, este mai mică decît r. Prin urmare ultima egalitate este imposibilă.

— Charles Mc Cracken Jr., *S.S.M.*, 52 (martie 1952), 241.

Redactor: SORIN TOMA
Tehnoredactor: CONSTANTIN IORDACHE

Bun de tipar 17.02.1975. Tiraj 40.000 ex.; Coli tipar 8,375

Tiparul executat sub comanda
nr. 1/759 la
Intreprinderea Poligrafică
„13 Decembrie 1918"
Str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97
București
Republica Socialistă România

Lei 5

în aceeaşi colecţie:

Petre Raicu, Veronica Stoian şi Măriuca Nicolescu, *Mutaţiile şi evoluţia*

Au vreun rol fundamental mutaţiile în evoluţia vieţuitoarelor? Pot fi produse soiuri noi de plante şi rase de animale prin dirijarea de către om a fenomenului mutaţional? Sînt implicate mutaţiile în producerea unor boli cum este cancerul? Iată întrebări pe care autorii le dezbat cu seriozitate.

orizonturi

57

Gr. Moisil, *Îndoieli şi certitudini*

Prin caracterul său original, prin forma de ex primare vie, spirituală, incisivă, permiţînd cititorului contactul direct — de mare valoare educativă — cu gîndirea unui savant pătruns de un profund sentiment al responsabilităţii sociale, cartea oferă o adevărată desfătare intelectuală.

orizonturi

58

Vasile Pavelcu, *Culmi şi abisuri ale personalităţii*

Eseuri psihologice, largi incursiuni în analiza unor opere literare aduc mai aproape de cititori explorări şi sondaje în adîncurile sufletului omenesc.
Titlul exprimă cutezanţa autorului de a aborda miezul condiţiei umane, imaginea omului zilei de „azi", plină cu ziua de „ieri" şi orientată spre cea de „mîine"

orizonturi

59
