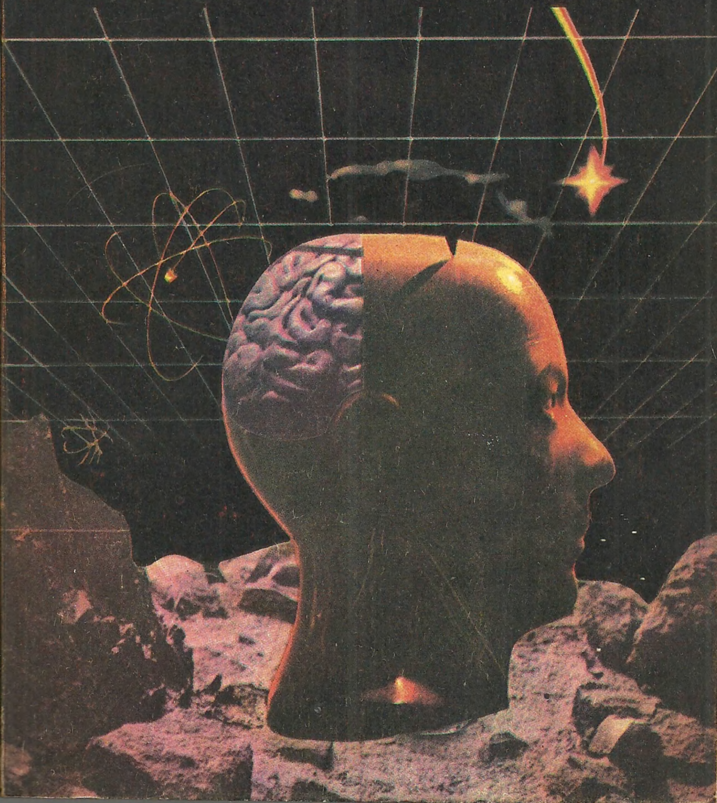
FLORICA T. CÂMPAN

povestiri despre probleme celebre



Coperta de: MIHAI PIENESCU

FLORICA T. CÂMPAN

POVESTIRI DESPRE PROBLEME CELEBRE

(CONVORBIRI DESPRE MATEMATICĂ)

EDITURA ALBATROS
BUCUREȘTI
1987

Lui

TEODOR,

prietenul gîndurilor mele

MATEMATICA PRIVITĂ CA UN SISTEM CULTURAL

Acum cîteva zile m-am pomenit cu Nucu, nepotul neuitatului meu prieten Teodor Solonar. Avea o carte în mînă şi cu faţa luminată de un zîmbet mi-a spus :

— Tare aş vrea să discut cu mata cîteva lucruri din cartea aceasta, cum se întîmpla odinioară, cînd era unchiul meu. V-am ascultat de atîtea ori pe cînd eram student şi apoi, mai tîrziu, după ce am terminat şi, uneori, mi-e dor de zilele acelea... Îmi închipui cu cîtă curiozitate ar fi citit Bădia cartea aceasta şi cu ce plăcere v-ar fi provocat la vorbă !

— Curiozitate ai zis ? Cuprinde ea chiar ceva atît de deosebit de problemele, pe care le discutam odinioară ?

— Desigur. Puteţi judeca după titlu. Se cheamă *Matematica privită ca un sistem cultural,* e scrisă de Raymond Wilder şi a apărut în 1981.

— Da, titlul sună oleacă altfel decît acela al cărţilor cu care ne delectăm noi, Dar, îţi spun drept că nu m-aş încumeta să o deschid pînă ce nu stabilim, în mod clar, ce se înţelege prin sistem ?

— Nimic mai uşor. Ştiu unde-i locul *Dicţionarului de Filosofie,* al aceluia din 1978, adică ediţia a II-a. La pagina 638 scrie că prin *sistem* se înţelege : „Mulţime de elemente şi mulţime de relaţii între aceste elemente, relaţii relativ invariabile faţă de anumite reguli ale transformărilor care formează *structura* acestor mulţimi. Totalitatea de elemente care constituie sistemul nu poate fi redusă la elementele sale sau definită prin ele. . . Nefiind reductibile la elementele care le compun, sistemele posedă proprietatea *integralităţii,* au caracter integral..."

— Prea bine. În această definiţie se poate integra şi matematica, însă. . .

— Ştiu, mata vrei ceva mai mult. Iată şi completarea : „Ştiinţele particulare pun în evidenţă existenţa sistemelor integrale. . .în cunoaştere (de exemplu, sistemul axiomelor geometriei euclidiene)". Şi mai departe : „Într-un sistem integral, dată fiind legătura dialectică dintre *întreg* şi *parte*, ansamblul este condiţionat de către componente, iar acestea din urmă sînt supuse unei acţiuni integratoare din partea sistemului. Orice sistem este alcătuit din *subsisteme*, care reprezintă, fiecare în parte, alte sisteme, cărora le sînt subordonate ansambluri de elemente".

— Ei, acum mai merge! Şi fiindcă tot ai dicţionarul în mînă, aruncă un ochi şi la cele ce scrie despre *cultură*.

— S-a făcut! Iată ce se spune la pagina 168: „*Cultură*, totalitate a produselor materiale şi spirituale ale muncii omeneşti, rezultate ale activităţii oamenilor de transformare conştientă a mediului lor natural şi social, ale dezvoltării şi perfecţionării omului". Şi mai departe: „În gîndirea modernă conceptul de cultură a devenit unul dintre cele mai complexe şi mai controversate. Ca înţeles fundamental, legat şi de sensul originar menţionat mai sus, cultura ia naştere şi se defineşte în opoziţie cu *natura*... Cultura cuprinde ansamblul fenomenelor social-umane care apar ca produse cumulative ale cunoaşterii şi, totodată, ca valori sintetice". De ajuns?

— Deocamdată poate că da. Aşa că putem deschide cartea şi să vedem ce spune.

— Autorul consideră că matematica poate fi privită ca un *sistem cultural* creat de om, atît în vederea adaptării, cît şi pentru propriile lui satisfacţii intelectuale.

— Dar, după cîte văd, o consideră şi ca o substructură a *culturii generale*! În privinţa asta sînt de acord cu el, fiindcă e bine cunoscut că asupra matematicii acţionează anumite forţe culturale şi, astfel, îi stabileşte evoluţia.

— Desigur, în prezent acesta este modul în care trebuie privită matematica, spre deosebire de acela legat de trecutul îndepărtat, cînd matematica s-a manifestat doar ca un *element cultural*.

— Dacă te referi la Babilon sau la Egipt, ai dreptate. Atunci geometria exista doar ca un capitol al aritmeticii în care se învăţa cum se calculează lungimile, ariile sau volumul anumitor figuri geometrice. Şi dacă mă vei întreba de ce s-a dat prioritate aritmeticii şi nu geometriei, am să-ţi răspund că ideea de număr a fost mai aproape de spiritul omenesc decît aceea de spaţiu. Aşa că, deşi babilonienii cunoşteau teorema lui Pitagora cu vreo mie de ani mai înainte de a se fi născut Pitagora, totuşi, pentru ei, această teoremă nu exista ca un *adevăr geometric*, ci ca *unul aritmetic*. Astăzi putem spune că ea reprezintă problema numerelor pitagoreice din teoria numerelor, adică ale acelor triplete de numere întregi pentru care $n^2=n_1^2+n_2^2$.

— M-a încîntat observația autorului legată de „copacul matematic“ !

— Te referi la analogia care se folosea odinioară între dezvoltarea matematicii și aceea a unui copac ? *Copacul matematic*, ale cărui rădăcini sînt *Fundamentele matematicii*, iar din trunchiul lui se dezvoltă ramurile principale : aritmetica, geometria, algebra, topologia, fiecare dintre aceste ramuri purtînd vlăstare noi, ca, de pildă, teoria grafurilor care se desface din ramura topologiei, ș.a.m.d. ?

— Da, căci această imagine nu mai rezistă ! Cum să reprezinți *Geometria analitică*, disciplină care cere colaborarea dintre cele două ramuri principale : ale geometriei și algebrei ? Sau algebrele booleene în care alături de ramura algebrei trebuie să se manifeste și contribuția rădăcinii ?

— Și totuși, această imagine a copacului matematic avea farmecul ei. De multe ori ne odihneam privindu-l, deși observasem și noi anumite nepotriviri !

— Am găsit aici o altă reprezentare grafică a matematicii, potrivită concepției de sistem cultural, introdusă de antropologul L. A. White, în 1975. Matematica apare ca un *sistem de vectori*, fiecare dintre vectori, corespunzînd unui anumit capitol : *aritmetica*, *geometria*, *algebra*, *logica matematică*, *fundamentele matematicii* etc., avînd o direcție, sens și mărime legată de problema urmărită. Acești vectori se întîlnesc sau se pot întîlni între ei ca să formeze anumite noi domenii de cercetare, astfel că evoluția matematicii să apară ca o urmare firească ale acestor compuneri vectoriale, petrecută în decursul timpurilor.

— O asemenea schemă vectorială fixează, în adevăr, diferitele aspecte ale evoluției matematice printr-un șir de sisteme vectoriale, spune autorul, observînd că mărimea vectorilor sau direcția lor se schimbă ; anume, într-o epocă *vectorul geometriei* crește repede, în timp ce alți vectori rămîn oarecum pe loc, iar în alta, *vectorul analiză* are o creștere accelerată, ori, ca în epoca modernă, vectorul *teoriei* mulțimii s-a desprins din domeniul analizei ș.a.m.d.

— Și ca o consecință a acestui fapt, văd că spune mai departe, tot el : „aceste schimbări care s-au produs fie în timp, fie cerute de modelul unei anumite culturi, ne face să stabilim o deosebire între *istoria* și *evoluția* culturii matematice. *Istoria* este o *descriere* a evenimentelor trecute, așezate în ordine cronologică, împreună cu unele discuții asupra

Grigore C. Moisil

relațiilor (de pildă cauzale) ale acestor evenimente, pe cînd *evoluția* este *procesul de schimbare*, un proces în care diferitele forme sau structuri se transformă în forme sau structuri îmbunătățite, motivate, în general, de anumite forțe a căror natură depinde de tipurile, de formele sau de structurile implicate. *Istoria culturală* stabilește evenimentele culturale particulare, pe cînd *evoluția culturală* arată schimbările pe care le suferă formele acestei culturi.

— Cu alte cuvinte, după cîte văd, autorul pune accentul, în primul rînd, pe *evoluția culturală* și trece *istoria culturală* pe planul al doilea ! În discuțiile pe care le purtam noi odinioară, unchiul tău cu mine, ne străduiam să privim evoluția unei anumite probleme din matematică din punct de vedere istoric.

— Da, dumneavoastră ați tratat evoluția culturii matematice în sine, din punct de vedere istoric, lăsînd deoparte acțiunile diferitelor forțe sau împrejurări care și-au spus și ele cuvîntul în decursul acelei dezvoltări, cu toate că aceste aspecte se influențau reciproc! Ca să fim mai concreți, ar fi bine să ne referim la un exemplu particular.

— Bine, dacă alegem conceptul modern de *funcție*, constatăm că el a trecut prin diferite etape, unele rezultate din argumentele aduse de diferitele școli, iar altele cerute de necesitatea de a generaliza această noțiune astfel ca ea să satisfacă la anumite cerințe.

— Știu că mata ai cartea matematicianului Gr. C. Moisil, *Știință și umanism,* în care au fost adunate multe dintre sclipitoarele lui gîndiri. N-ai vrea să citim de acolo despre *funcțiile recurente ?*

— Cu dragă inimă ! Uite cartea.

— Am găsit ceea ce căutam, la pagina 197 : „O anumită atitudine în filosofia matematicilor, numită *intuiționism,* a îndemnat pe matematicieni să studieze din ce în ce mai mult actul de numărare, trecerea de la 1 la 2, de la 2 la 3 ș.a.m.d. — scurt, ceea ce se numește raționament prin recurență. Teoria *funcțiilor recurente* este un nou capitol al matematicii. Marele matematician și gînditor sovietic A. A. Markov a privit altfel problema. Atunci cînd construiesc un obiect, trebuie să am o rețetă, un proiect de construcție. Această observație însă este valabilă și cînd construiesc un obiect matematic ; trebuie să-mi dau un algoritm de construcție. Și A. A. Markov, pentru a satisface cerințele sale filosofice *„constructiviste“* a creat o Teorie a algoritmului. Un algoritm este un șir de reguli fixe. O *funcție recursivă* e ceva care ne face să trecem de la 1 la 2, de la 2 la 3 ș.a.m.d. Că în fond, ele sînt același lucru, aceasta e o teoremă. Că ele dau modelul unei mecanizări, deci că ele se apropie de munca pe care o. face calculatorul, iată un lucru pe care începem să-l înțelegem“.

— A venit foarte la timp intervenția ta. Ea a pus mai clar în evidență rațiunea de a fi ale acelor schimbări care stabilesc *evoluția* noțiunii de funcție. Procesul *istoric* însă se leagă de relatarea evenimentelor care au apărut în timpul evoluției noțiunii de funcție. De pildă, discuțiile lui d'Alembert cu Euler și Johann Bernoulli în legătură cu problema coardei vibrante, sau acelea care s-au ivit o dată cu lucrările lui Fourier despre seriile trigonometrice și, mai ales, contribuțiile lui Dirichlet, Riemann, Weierstrass, etc. la precizarea noțiunii de funcție !

— Da, am putea considera că faptele istorice ilustrează și descoperă totodată modelele culturale și forțele care au cauzat un anumit proces cultural.

— Cred că istoria logicii ar putea ilustra cît se poate de bine aceasta !

— Să încercăm. Descoperită de filosofii greci, logica a pătruns în matematica greacă și prin ea s-a dezvoltat *metoda axiomatică.* Elementele lui Euclid cuprind primul exemplu, de deduceri logice. Atît în filosofie, cît și în matematică, Logica a trecut prin fazele sale medievale ca apoi, datorită lui De Morgan şi Boole, să se dezvolte *logica simbolică*, devenind astfel, în secolul al XX-lea un domeniu independent al matematicii sub numele de *Logica matematică*. Logica matematică s-a difuzat repede, atît în *Fundamentele matematicii*, cît şi în *Programarea matematică*. Fără această răspîndire a metodelor şi conceptelor matematice nu ar fi putut exista cultura tehnologică actuală şi nici dezvoltarea modernă a matematicii care şi-a găsit aici modele noi pentru diferite alte teorii matematice.

— Aş propune să ascultăm, din nou, părerile matematicianului Gr. C. Moisil, specialist în acest domeniu : „De vreo sută de ani logica a intrat pe făgaşul matematizării. Progresele ei ca logică matematică au fost mari. S-au creat capitole noi, cum e logica relaţiilor ; s-au dezvoltat capitole abia abordate înainte, cum e logica propoziţiilor ; s-au introdus idei adînci, cum e teoria tipurilor ; s-au valorificat nuanţe ; s-au dovedit rezultate tulburătoare, cum e teorema de incompletitudine a lui Gödel (care afirmă că faţă de orice formalizare propusă pentru aritmetică, există propoziţii aritmetice adevărate, care nu pot fi obţinute în cadrul formalizării considerate. Adică nici o formalizare nu poate cuprinde întreaga Aritmetică), imposibilitatea caracterizării complete a numerelor naturale, dovedită de Skolem, independenţa teoremei alegerii, demonstrată de Cohen (axioma alegerii afirmă că, fiind dată o familie de mulţimi disjuncte nevide, există o mulţime care conţine cîte un element şi numai unul din fiecare mulţime a familiei ; independenţa axiomei alegerii constă în faptul că nici ea, nici negaţia ei, nu vin în contradicţie cu celelalte axiome ale teoriei mulţimilor)". Mai departe (p. 195) el completează cele spuse : „Logica matematică schimbă orizontul disciplinelor axiomatizate. Se sperase că o dată formalizată şi axiomatizată, despre o disciplină deductivă se va putea spune că nu poate duce la contradicţie. Paradoxul lui Gödel arată că o astfel de speranţă nu poate fi simplist realizată Se credea că numărul natural, adică numerele 1, 2, 3, 4, ... nu ridică nici o dificultate. Paradoxul lui Skolem arată că aceste numere naturale nu sînt aşa de simple cum par".

— Să privim acum şi celălalt punct de vedere, acela că matematica este o *substructură a culturii generale*. În acest caz, ca şi în alte substructuri, matematica a trebuit să fie supusă, în decursul dezvoltării ei, la diferite influenţe impuse de necesităţile sociale.

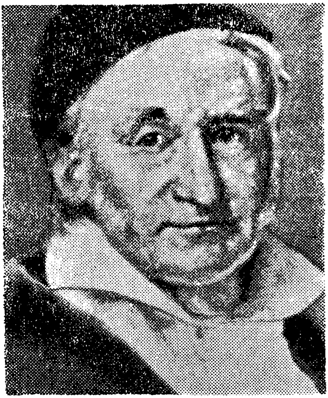
— Aceasta se vădeşte prin multe exemple. Unul ar fi chiar numele de *geometrie*, care în greceşte înseamnă *măsurarea pămîntului*, pe care grecii au dat-o, traducîndu-i înţelesul ce-l avea la egipteni, acelei ştiinţe pe care ei au creat-o şi, care, nici pomeneală nu-i să se mai ocupe cu asemenea măsurători ! Ei au făcut din geometrie o ştiinţă teoretică şi logică.

— Da, sau dacă ne apropiem de epoca modernă, constatăm că matematica a fost constrînsă, datorită cercetărilor din domeniul fizicii, făcute de Galileu şi alţi fizicieni, să găsească metode pentru determinarea vitezei şi acceleraţiei unui corp în mişcare, adică să cerceteze problemele legate de fenomenele instantanee pe care nu le considerase niciodată pînă atunci. Prin *Calculul diferenţial şi integral* putem afirma că a început epoca modernă a matematicii.

— Şi studiul teoriei căldurii sau a sunetului, în secolul al XIX-lea, oferă un exemplu de influenţă a problemelor din domeniul Fizicii asupra obiectului matematicii, care a avut loc în timpul perioadei de tranziţie de la lucrările lui Newton şi Leibniz la matematica secolului al XX-lea. Tot aşa, cerinţele tehnice ale celui de-al doilea război mondial au contribuit la *inventarea calculatoarelor electronice*, au stabilit *teoria informaţiilor*, *teoria jocurilor* etc.

— O forţă dintre cele mai stabile, care acţionează în evoluţia culturală a matematicii, este aceea care conduce la procesul de *unificare* dintre două sau mai multe concepte matematice independente, ori teorii matematice, ori metode matematice independente, astfel ca să formeze o *structură nouă*, avînd un potenţial mai mare decît fiecare dintre componente în parte. Iată cîteva exemple : *Unificarea algebrei şi a geometriei* a condus la crearea *Geometriei analitice*. *Unificarea noţiunilor de proiecţie*, aşa cum erau ele folosite la facerea hărţilor, cu acelea ale *geometriei euclidiene* au format *Geometria proiectivă*. Prin legarea *algebrei* cu *logica* s-a format *Logica matematică*. *Teoriile matematice unite cu teoriile fizice* au condus la crearea *Fizicii matematice* ş.a.m.d.

— O altă consecinţă interesantă, care rezultă din faptul că descoperirile matematice sînt privite ca făcînd parte dintr-un proces cultural, este aceea că înlătură, ştergînd cu buretele — adică dîndu-le o explicaţie plauzibilă — toate controversele asupra priorităţilor în legătură cu marile descoperiri. Cum ? Foarte simplu : „Cînd un sistem cultural se dezvoltă pînă la un nivel la care un concept sau o metodă sau o teorie este pe punctul de a fi inventată, atunci se ivesc *mai mulţi*



Carl Friederich Gauss

cercetători care sînt preocupați de acea problemă şi care au toate condițiile pregătite ca să stabilească, *independent unul de altul, aceeași soluție, în același timp*. Soluția se prezintă ca o nouă combinație, sau sinteză de elemente, în curentul interactiv al culturii".

— Şi cînd te gîndești cît sînge rău și-au făcut, de-a lungul secolelor, atîția matematicieni, care cu bună-credință căutau argumentele prin care să susțină prioritatea favoritului lor contra celuilalt, care, și el de bună-credință se simțea năpăstuit degeaba ! Din mulțimea atîtor cazuri aş aminti numai celebrele dispute dintre *Newton și Leibniz* cu privire la *descoperirea Calculului diferențial* sau dintre *János Bolyai, Gauss și Lobacevski* în legătură cu *Geometriile neeuclidiene !*

— Mi s-a părut foarte interesant că R.L. Wilder menționează anumite legi care guvernează evoluția matematicii. Dar el nu conferă acestor legi un caracter de imuabilitate, ci numai unul analog legilor fizice, adică acela de a avea o mare posibilitate în a se repeta. Iată cîteva dintre ele :

„Prima demonstrație a unei teoreme importante este urmată, de obicei, de altele mai simple.

Dacă dezvoltarea unei teorii matematice depinde de unificarea anumitor concepte, atunci această unificare va avea loc.

Continua evoluție a matematicii este însoțită de o creştere a rigurozității. Fiecare generație de matematicieni consideră că este necesar să justifice, sau să arunce, presupunerile tacite, făcute de generațiile dinainte.

Un sistem matematic evoluează numai prin abstractizări mai adînci, ajutat de generalizări şi unificări etc.

În ultimele decenii, matematica are o aplicaţie tot mai largă în celelalte domenii ştiinţifice, tehnologice sau culturale. Ea este în general folosită fie ca instrument sau limbaj, fie ca o sursă a configuraţiilor conceptuale. Folosirea matematicii ca limbaj s-a dezvoltat mult, nu numai datorită calculatoarelor electronice, ci prin aplicarea rezultatelor din alte ramuri ale matematicii ca : logica matematică, matematica constructivă, teoria combinatorică etc. Rolul matematicii în dezvoltarea altor ştiinţe apare şi ca sursă a configuraţiilor conceptuale. Pentru Einstein, *Calculul* lui Ricci şi *Geometria riemanniană* aşteptau gata pregătite. Pentru un fizician matematica nu-i numai un instrument cu ajutorul căruia se pot calcula fenomenele, ci şi izvorul conceptelor şi a principiilor cu ajutorul căreia se pot crea teorii noi".

— Aceste observaţii pe care autorul le-a legiferat dovedesc că matematica face parte din adîncul fiinţei lui. Pe cînd le citeai, îmi răsăreau în minte unele observaţii pe care le făcea în mod spontan şi Teodor Solonar, atunci cînd ne prindea noaptea prin pădure, întorcîndu-ne spre casă, sau zorile, în zilele ploioase... Dar mai ales mi-am amintit de o discuţie foarte însufleţită, ce am avut-o cu el, prilejuită de un articol asupra „Istoriografiei matematicii de la Proclus la Cantor" la recenzia căreia lucra atunci.

— Mi-ar face mare plăcere să reconstituim convorbirea aceea, fiindcă şi Wilder face cîteva observaţii asupra modului în care ar trebui scrisă istoriografia matematică, ţinînd seama de faptul că matematica ar trebui privită ca un sistem cultural. El citează chiar cîteva lucrări asupra istoriei matematicii din antichitate, în care s-au şi introdus consideraţii asupra metodelor axiomatice sau ale aparatului logic. El insistă că este necesar ca, realizîndu-se statutul cultural, să se adauge noi puncte de vedere, prin care să se cerceteze rolul pe care îl joacă atît forţele de unificare sau de selecţionare, cît şi simbolismul, abstracţia etc., în evoluţia matematicii.

— Ei bine, discuţiile noastre atingeau uneori şi aceste puncte, dar nu în mod programat, ci ca nişte sclipiri momentane, cărora nu le dădeam nici o importanţă.

— Da, ştiu, şi totuşi în mine mai trăieşte atmosfera aceea de bună dispoziţie care se ivea de îndată ce ibricul cu cafea apărea pe masă... În privinţa istoriografiei matematice e adevărat că prima lucrare de acest gen a rămas de la Proclus Diadohul, care a trăit prin secolul al V-lea şi a scris printre altele un *Comentariu asupra lui Euclid*. În această carte el nu dă numai referințe istorice asupra matematicii grecești, numindu-l, de pildă, pe Tales care a adus geometria din Egipt, ci arată că prima istorie a matematicii a fost scrisă de către Eudemos din Rodos, în secolul al IV-lea î.e.n. și apoi vorbește despre o altă scrisă de Geminos din Rodos, prin secolul I e.n. Datorită lui Proclus s-au păstrat pînă acum multe fragmente din istoria matematicii scrisă de Eudemos, așa că, cu drept cuvînt el a făcut operă de istoriografie matematică.

— Cînd recenza lucrarea lui Struik, despre care ți-am vorbit, avea pe masa lui o mulțime de cărți. Eu voiam să-l las să lucreze, dar el nici nu a vrut să audă, motivînd că aceea e treaba pe care o face cînd e singur, nu cînd are cu cine sta de vorbă. Uite, ai aici — a continuat el — cea mai scumpă comoară din cîte există pe acest pămînt, căci în aceste cărți nu-s numai gîndurile celor ce le-au scris, ci sînt concentrate și gîndurile sutelor de matematicieni începînd din cele mai vechi timpuri de cînd există omenirea.

— Ei să nu exagerăm, i-am răspuns eu, doar nu vrei să-mi spui că Adam a pus bazele matematicii ?

— Nu o spun eu, ci o afirmă Iosif Flavius, care a scris istoria poporului evreu. În cartea I a acestei istorii el afirmă că descedenții lui Adam au descoperit matematica și astronomia, că ei au prezis potopul și că să Seth a săpat cunoștințele lui matematice pe două coloane...

— Cunosc eu povestea asta, numai că un alt scriitor, mai competent, a arătat că Iosif Flavius al matale s-a înșelat, fiindcă el a confundat pe Seth cu Sesostris, regele Egiptului, și e adevărat că coloanele lui Sesostris au apărut cu inscripțiile săpate pe ele după ce s-au retras apele potopului.

— Așa o fi spunînd istoria matale, dar eu am luat povestea cu Seth, nu din Flavius, ci din prima carte de geometrie pe care a scris-o celebrul matematician francez din secolul al XVI-lea, Pierre de la Romée cunoscut sub numele de Ramus, primul profesor de matematici din Paris, care a fost omorît în noaptea de Sf. Bartolomeu, în 1572 ! Dar dacă nu te emoționează această noutate, atunci să o luăm cuminte, de la cartea lui Proclus !

— Vezi, așa m-a luat atunci unchiul tău în focuri, ca apoi să-mi citească fragmentele lui Eudemos despre cuadratura lunulelor stabilite de Hipocrat, apoi despre Pitagora și școala lui matematică și să tragă concluzia că matematicienii greci erau îndrăgostiți de obiectul matematicii în sine și de aceea noțiunile matematice au jucat un rol important în sistemele lor filosofice, în special în şcoala lui Pitagora şi în aceea a lui Platon. Îmi mai amintesc de plăcerea cu care el mi-a atras atenţia asupra „Colecţiei matematice“ în 8 cărţi, dintre care însă prima s-a pierdut, iar a doua există numai în parte, scrisă, probabil prin secolul al III-lea de către Pappus din Alexandria. Îmi arăta că aceasta este foarte preţioasă nu numai pentru informaţiile pline de competenţă, despre problemele de geometrie stabilite de matematicienii greci şi pierdute, printre altele, acelea ale lui Euclid şi Apollonisus dar mai cu seamă pentru mulţimea informaţiilor legate de istoria matematicii !

— Da, şi mie mi-a vorbit odată de Pappus cu încîntare, arătîndu-mi că prin el începe epoca comentatorilor şi se sfîrşeşte aceea a producerilor originale. Matematicienii care i-au urmat s-au mărginit să-l imite pe el, comentînd lucrările înaintaşilor. Dar aş mai adăuga că tot la sfîrşitul secolului al IV-lea, probabil că sub influenţa cărţilor lui Pappus, filozoful Augustin a arătat în lucrările lui o deosebită admiraţie pentru matematică. Astfel, prin autoritatea sa, filozofii scolastici au considerat că matematica este demnă de studiat.

— Cît de departe erau ei de cele ce afirmă N. Bourbaki în *Elemente de istorie a matematicii* ! Îmi amintesc perfect că scrie : „Adevărul matematic constă în deducerea logică bazată pe anumite premise puse în mod arbitrar de axiome“.

— Nu o spune numai Bourbaki, ci toţi matematicienii, de acum !

— Bine spus „de acum“, căci au trebuit vreo trei secole ca să se înţeleagă acest lucru !

— În cele trei secole care au trecut s-au stabilit atîtea lucruri frumoase în istoria matematicii şi mă gîndesc cu jind la acelea pe care le-aţi discutat pe-ndelete cu Bădia ! Tare mi-ar fi plăcut să le fi auzit şi eu ! De pildă, zilele trecute am dat peste problema taurilor Soarelui...

— Ai dreptate. Prietenul meu şi unchiul tău avea darul să adulmece problemele pe care o dată ascultate, să nu le mai poţi uita. Printre ele a fost şi aceasta şi multe altele. Eu mi-am notat cîte ceva despre ele şi, dacă te interesează vino să le discutăm, ca şi cum ar fi şi prietenul meu cu noi. Împreună sper să facem faţă dificultăţilor. În cartea „Ultimele gînduri“, scrisă de H. Poincaré şi publicată după ce autorul nu mai era în viaţă, am găsit acest gînd : „Oamenii nu se înţeleg, pentru că nu vorbesc aceeaşi limbă şi există limbi care nu se învaţă“. Noi, din fericire, vorbim aceeaşi limbă, aşa că ne vom înţelege.

PROBLEMA DESPRE TAURII SOARELUI

Într-o vară, prietenul meu Teodor Solonar din Cîmpulung Moldovenesc m-a invitat la el. Am primit cu bucurie, gîndindu-mă la plimbările ce le vom face prin maiestuoasele păduri către munții din apropiere, cavaleri supuși ai voievodului Rarău, și care poartă pe creștet, drept coroană, Pietrele Doamnei.

Dar după cîteva zile senine vremea s-a stricat. Din cerdacul cu geamlîc priveam cum se zbate în pîclă conturul munților sau urmăream goana burhaiului[1] pe deasupra pădurilor, ca un fum dens și alb, de parcă ploaia ar fi aprins copacii. Într-o dimineață, pe cînd norii se ocărau cu înverșunare scăpărînd fulgere de mînie, prietenul meu, pasionat matematician, aduse un caiet și, punîndu-l pe masa din cerdac, îmi spuse :

— Vrei să dezlegăm problema taurilor lui Helios ?

— A taurilor lui Helios ? întreb eu nedumerit. Pare mai degrabă o problemă de mitologie decît de matematică. Știu că Homer povestește despre ei în cîntul al XII-lea din *Odiseea*. Ascultă versurile...

— Se poate, mi-a răspuns prietenul după ce m-a ascultat fără să mă întrerupă. Dacă le-ai spus bine sau rău n-am de unde s-o știu, ritmul însă l-ai păstrat perfect. Eu le cunosc din traducerea lui Murnu, pe care o am aici :

„Iar cînd scăpăram noi de stînci, de Scylla
Și de Charybda cea cumplită, iată
Ne pomenim la insula cea sfîntă
A zeului. Acolo erau boii
Cei mîndri și frumoși, oi multe grase
De-a Soarelui. . ."

— Te înșeli, i-am răspuns eu, tu mi-ai citit numai începutul, pe cînd eu ți-am recitat și versurile în care se arată că nenoro-

---

[1] Ceață (rară) care se ridică după ploaie.

cirea lui Ulise a început atunci cînd tovarășii lui, îndemnați de Evriloh, s-au ospătat cu boii cei grași ai Soarelui. Nu văd însă cum s-ar putea țese o problemă matematică din firele acestei tragedii.

— Dar nu s-a gîndit nimeni la tragedia lui Ulise. Autorul problemei se întreabă doar cîți tauri și cîte vaci păşteau atunci pe insula Siciliei ? El e curios să afle cît de mari erau turmele atotputernicului Zeus, cel care s-a putut mînia așa de cumplit pe niște bieți oameni lihniți de foame. . .

— Se vede că autorul tău n-a cunoscut *Odiseea !* Eu ştiu foarte bine cît de numeroase erau acele turme, căci i-o spunea Circe lui Ulise cînd îi prevestea nenorocirile ce-i stăteau în cale. Nu-ți aduci aminte de începutul cîntului al XII-lea ? „Vei sosi în insula Trinacria, unde pasc boii și oile Soarelui, cîte 7 cirezi de fiecare fel şi fiecare de cîte 50 de capete. Aceste vite nu fată și nici nu mor şi nici nu îmbătrînesc, iar fetele Soarelui, acele zîne cu păr de aur, pasc turmele. . "

— Așa spunea Circe, care nu-şi bătea capul cu matematica. Dar autorul problemei consideră că Helios, zeul soarelui, putea dispune de turme mai bogate decît acelea amintite de ea. Nu cred că Circe avea o noțiune prea precisă despre numere. Pe vremea ei, 50 era un număr foarte mare și mă îndoiesc că ea ar fi putut să-l intuiască.

— Dacă problema ta este destul de simplă, citește-o, să văd ce voi înțelege din ea.

— Bine, întîi ascult-o şi apoi vom sta de vorbă :

„Calculează-mi, prietene, numărul vitelor cornute ale lui Helios, dar să te gîndeşti serios, dacă ai pretenție de om de ştiință. Cîte pasc în cîmpiile Siciliei, insula cu 3 unghiuri? Ele se împart în 4 cirezi de culori diferite. Unele sînt albe ca laptele, altele de un negru strălucitor, altele roșii, iar ultimele bălțate. Fiecare cireadă are un număr mare de tauri și sînt unii față de alții în acest raport :

1. Cei albi sînt atîția cît $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{3}$ împreună din cei negri plus toți cei roșii ;

2. Cei negri sînt cît $\frac{1}{4}$ și $\frac{1}{5}$ din cei bălțați, plus toți cei roșii ;

3. Cei bălțați sînt $\frac{1}{6}$ și $\frac{1}{7}$ din taurii albi, plus numărul total al celor roşii ;

4. Vacile cele albe sînt $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ din întreaga cireadă neagră ;

5. Cele negre $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ din toată cireada bălțată, cînd vacile pasc la un loc cu taurii ;

6. Cele bălțate fac $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ din cireada vitelor roșii ;

7. Cele roșii fac cît $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ din toată turma albă.

Dacă-mi spui numărul cornutelor Soarelui, separat numărul taurilor bine hrăniți și pe cel al vacilor, și cîte din fiecare culoare, nu vei fi considerat nepriceput sau neiscusit în calcule, dar nu vei fi socotit nici printre învățați. Căci iată ce se mai știe despre aceste vite ale lui Helios :

8. Atunci cînd mulțimea taurilor albi se unește cu aceea a celor negri, ei formează împreună o figură pătrată, iar marea lor întindere umple toată suprafața insulei cu trei unghiuri.

9. În fine, dacă taurii roșii se așază pe rînduri, împreună cu cei bălțați, începînd cu unu și crescînd succesiv cu cîte unu, ei formează o figură de forma unui triunghi, fără să fie printre ei tauri de altă culoare și fără să se remarce absența acestora. Dacă vei afla și vei putea arăta care sînt aceste numere, atunci înaintează glorios și triumfător, prietene, convins fiind că ești un om desăvîrșit în această știință".

— După stil, aș zice că problema este o traducere.

— Desigur, ea a fost scrisă în versuri grecești. Cuprinde 22 de distihuri, hexametri alternînd cu pentametri.

— Am mai întîlnit în antologia greacă probleme scrise în versuri. Ele sînt numite *epigrame*. Îmi aduc aminte, de pildă, de aceea în care se cerea să se afle cît cîntărește statuia Minervei : „Eu sînt o Minervă de aur masiv. Metalul este un dar al tinerilor poeți..." Sau de aceea cu bazinul de apă, pe care-l umplea o cișmea în chip de leu : „Sînt un leu de bronz, două izvoare curg din ochii mei, altul din botul meu și altul din laba mea dreaptă. În două zile ochiul meu drept umple bazinul, ochiul meu stîng în trei. . ." și așa mai departe, întrebarea fiind în cît timp se umple bazinul cînd toate izvoarele curg împreună.

— Într-adevăr, problema taurilor este o epigramă, deși cuvîntul nu-i potrivit !

— Se prea poate, dar e o numire consacrată. Grecii au numit astfel inscripțiile, adesea în versuri, gravate pe monumente, morminte sau statui. Dar chiar din epoca alexandrină, epigramele nu se mai compuneau pentru a fi înscrise pe monumente, ci ca să fie citite în diverse ocazii, ca poezii. Însă, în culegerile care le-am cercetat eu n-am întîlnit nici una cu taurii Soarelui, deși nu exagerez dacă-ți spun că am găsit vreo 40 de probleme-epigrame.

— N-avea cum să figureze în vechile antologii grecești, pentru că aceasta a fost descoperită de-abia în 1773, de către Lessing, într-un manuscris necercetat pînă atunci.

— Lessing ? Celebrul scriitor și dramaturg ? S-a ocupat de matematici ?

— Un motiv în plus ca să te apropii și tu cu mai multă dragoste de ele !

— Totuși, nu-mi vine să cred ! Am citit *Minna von Barnhelm*, *Emilia Galotti*, *Nathan înțeleptul*, am mai citit *Scrisorile privitoare la literatura cea mai recentă*, *Laocoon* și articolele din *Dramaturgia de la Hamburg*, dar nicăieri nu am dat de vreo aluzie, din care să deduc că el ar fi scris ceva despre problema taurilor sau despre oricare altă problemă de matematici !

— Nu ai găsit-o în lucrările despre care-mi vorbești, fiindcă Lessing a publicat-o într-o culegere de texte grecești, urmate de comentarii. Manuscrisele acestor texte se aflau în biblioteca din Wolfenbüttel. El le-a găsit, le-a cercetat și publicat în 1773, pe cînd era bibliotecar acolo.

— Da, cunosc această ultimă și amară partea a vieții lui.

— Desigur că viața lui era amară din clipa cînd își termina serviciul de bibliotecar ; dar poți tăgădui oare, că acolo, în bibliotecă, nu trăia el clipe de desfătare ? Cînd răsfoia cărțile din jurul lui sau găsea vreun manuscris nedescifrat încă, uita de mizerie ! Imaginează-ți ce surprins trebuie să fi fost cînd a dat peste aceste rînduri ; „Problema pe care a propus-o Arhimede într-o scrisoare către Eratosthene din Cyrene, acelora din Alexandria care se ocupă cu asemenea lucruri !".

— Așadar, problema a fost compusă de Arhimede ? De ce nu mi-ai spus-o de la început ? Ai considerat că-i mai interesant să o învălui în mister !

— Nu o învălui eu, că era gata învăluită în mister, de îndată ce se afirma că autorul ei este Arhimede !

— Cum așa, nu-i negru pe alb ?

— O fi, dar Lessing, care știa probabil și el atîta greacă cît și tine, a pus la îndoială autenticitatea problemei. De aici s-au stîrnit o mulțime de discuții !

— Cred și eu ! Numai că, nu înțeleg cum ar putea afirma cineva, care nu cunoaște îndeaproape opera lui Arhimede, dacă o problemă e scrisă de el sau nu ?

— Nu greșești punînd în acest fel întrebarea, numai că atunci și chiar mai tîrziu, în tot cursul veacului al XIX-lea, matematicieni mult mai competenți ca tine și ca mine au admis părerea lui Lessing, fără să se sesizeze de faptul că el nu cunoaște îndeaproape nici viața și nici opera lui Arhimede.

— Și dacă Lessing s-a îndoit de autenticitatea ei, cum de a mai publicat-o ?

— Se vede că problema i-a plăcut ! Ba i-a plăcut așa de mult, încît a prezentat-o unui savant matematician din orașul său, rectorul Chr. Leiste, rugîndu-l să o verifice Căci nu ți-am spus că, în manuscrisul găsit de Lessing, problema se continuă cu o notă, în care se arată rezultatul.

— De ce nu-i spui *scolie,* căci acesta-i termenul consacrat în literatură, pentru *notele* care urmează după un text ?

— Fie. Această scolie cuprindea, fără a indica felul în care a fost stabilită, următoarea soluție a problemei :

„Fie A	numărul	taurilor	albi	și a	numărul	vacilor albe,
„ N	„	„	negri	„ n	„	„ negre
„ R	„	„	roșii	„ r	„	„ roșii
„ B	„	„	bălțați	„ b	„	„ bălțate

$A = 829\,318\,560 = \frac{5}{6} N + R$

în total $A + a = 1\,405\,827\,360$

$a = 576\,508\,800 = \frac{7}{12} (N + n)$

$N = 596\,841\,120 = \frac{9}{20} B + R$

în total $N + n = 988\,300\,800$

$n = 391\,459\,680 = \frac{9}{20} (B + b)$

$B = 588\,644\,800 = \frac{13}{42} A + R$

în total $B + b = 869\,910\,400$

$b = 281\,265\,600 = \frac{11}{30} (R + r)$

$R = 331\,950\,960$

în total $R + r = 767\,088\,000$

$r = 435\,137\,040 = \frac{13}{42} (A + a)$

În total $4\,031\,126\,560$

Rectorul Chr. Leiste a cercetat problema şi a stabilit că, lăsînd de o parte ultimele două condiţii, numerele arătate de scoliast o verifică. Totodată, el a găsit o altă soluţie, care are avantajul să se exprimă prin numere mai mici. Aceasta se obţine împărţind numerele arătate de scoliast prin 80.

— Oricum, straşnice numere ! Sînt curios cît timp cer asemenea calcule ?

— N-avem decît să încercăm ! După cum vezi, afară toarnă cu găleata !

— Atunci, hai la treabă ! Întîi ajută-mi să traduc în limbajul algebric şi în ordinea indicată de text cele 9 condiţii impuse de problemă. Cred că e bine să păstrăm notaţiile pe care le-ai indicat mai sus. Ce spui ?

— Desigur. Însă nu văd cum îţi pot ajuta eu, fiindcă tu ai şi început să le scrii foarte corect.

— Ei bine ! Atunci priveşte cele 9 ecuaţii, pe care le numerotez, ca în text, cu cifre romane :

$$\text{I. } A=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)N+R$$

$$\text{II. } N=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)B+R$$

$$\text{III. } B=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)A+R$$

$$\text{IV. } a=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(N+n)$$

$$\text{V. } n=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(B+b)$$

$$\text{VI. } b=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(R+r)$$

$$\text{VII. } r=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(A+a)$$

VIII. $A+N$ să fie un pătrat.

IX. $R+B$ să fie un număr triunghiular.

Nu înţeleg de ce numerele fracţionare sînt exprimate ca sumă de două fracţii cu numărătorul 1, cînd era mult mai simplu să se fi făcut adunarea lor şi să se fi scris un singur număr fracţionar ?

— Acest mod de a scrie fracțiile, m-a lămurit prietenul meu, nu-i întîmplător și nu arată neștiință, ci o influență de origine egipteană. Egiptenii priveau numerele fracționare ca pe niște numere aparte, care reprezentau o anumită parte a unității. De exemplu : o jumătate era reprezentată printr-un semn special, corespunzător în scrierea noastră notației $\frac{1}{2}$, o pătrime avea alt semn, echivalent semnului nostru $\frac{1}{4}$ ș.a.m.d. După cum vezi e vorba numai de fracții cu numărătorul 1.

— Această reprezentare a fracțiilor trebuie să fi apărut în procesul de măsurare a suprafeței unui teren, care nu cuprindea un număr întreg de unități de arie. Putea să rămînă exprimată, prin unitatea respectivă: $\frac{1}{2}$ de unitate sau $\frac{1}{4}$ sau $\frac{1}{8}$. Pentru mărimea acelei porțiuni de teren ei au stabilit atunci notații speciale, pe care le-au privit ca pe niște *noi unități de măsură.*

— E drept, dar fracțiile s-au ivit și la întocmirea calendarului. Anul a fost împărțit în 12 luni și luna în 30 de zile. Prima zi a lunii era socotită ca reprezentînd $\frac{1}{30}$ dintr-o lună, ziua a 10-a înseamnă deci $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ din lună. Tot așa s-au ivit fracțiile și în alte procese de măsurare. De aceea egiptenii au notat fracția-tip $\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3,...)$ cu un semn special.

— Mi se pare că aceste fracții au și un nume special ?

— Da, fracțiilor cu numărătorul 1 li se spune, uneori, fracții alicote.

— Egiptenii au folosit în calculele lor numai fracții alicote ?

— Se pare că da, deși tot la egipteni au apărut, mai tîrziu, alături de aceste fracții, și fracțiile de forma $\frac{2}{n}$, unde n este impar $(n=2p+1)$.

— Cred și eu că n trebuie să fie impar, căci dacă n este par, fracția se reduce, prin simplificare, la o fracție alicotă ! Pentru acestea, au inventat alte semne ?

— Nu, ci le-au redus la fracțiile alicote. În unul dintre cele mai vechi papirusuri matematice rămase de la ei, papirusul Rhind, care se află la Londra, în Biblioteca de la British Museum, se găsește o tabelă de descompunere a fracțiilor de forma $\frac{2}{n}$ începînd de la $n=4$ la $n=101$, în fracții cu numărătorul 1.

— Dar pe $\frac{2}{3}$ nu-l descompuneau ?

— Uneori da, în $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, însă de cele mai multe ori această fracție, ca și $\frac{3}{4}$, care intervenea adesea în calculele lor, era lăsată așa. Pe toate celelalte le descompuneau. De exemplu, în loc de $\frac{2}{5}$ ei scriau $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$ sau $\frac{2}{29}=$ $=\frac{1}{29}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{174}$.

— Bine, dar acest calcul pare foarte complicat. Eu nu m-aș pricepe de loc la el !

— Pentru egipteni, din contră, această reducere a fracțiilor de forma $\frac{2}{n}$ la o sumă de fracții-tip reprezintă o simplificare a problemei. Deși descompunerea ar fi putut fi făcută în moduri diferite, ea era făcută numai într-un singur fel, așa cum se arăta în tabele ; se constată aceasta din diferite manuscrise matematice care au fost descifrate. De altfel, tocmai fiindcă un calcul cu fracții era destul de greu de efectuat, problema fracțiilor a căpătat o așa de mare importanță în timpurile vechi. Descompunerea imaginată de egipteni a fost folosită și de greci și s-a menținut pînă tîrziu, în primele secole ale erei noastre. De aceea nu-i de mirare că întîlnim fracțiile din problema noastră, scrise sub această formă. Dar noi n-avem decît să le transformăm după cum dorești. Deocamdată ne limităm numai la primele trei ecuații :

I. $A=\frac{5}{6}N+R$ sau : $6A=5N+6R$

II. $N=\frac{9}{20}B+R$ sau : $20N=9B+20R$

III. $B=\frac{13}{42}A+R$ sau : $42B=13A+42R$

— Deși ecuațiile nu-mi par prea complicate, nu mă împac cu 3 ecuații și 4 necunoscute. Mi-aduc aminte că ar trebui să fie tot atîtea ecuații cîte necunoscute. Ba, dacă mă uit la întregul sistem pe care îl am în fața mea, și el îmi pare tot așa de curios, căci sînt în total 9 ecuații și numai 8 necunoscute.

— Într-adevăr, problema are 8 necunoscute, legate în prima parte a problemei prin 7 condiții ; la acestea se adaugă în partea a doua, încă două condiții. În general, ecuațiile dintr-o problemă traduc în limbaj algebric diferitele condiții la care sînt supuse mărimile necunoscute. Dacă numărul condițiilor nu egalează pe acela al mărimilor necunoscute, ci rămîne mai mic decît ele, înseamnă că sistemul de ecuații este *nedeterminat* și valoarea necunoscutelor rămîne nedeterminată. Cu alte cuvinte, problema poate avea mai multe soluții, toate la fel de acceptabile și legate între ele printr-unul sau mai mulți factori, care pot lua valori arbitrare, ca, de pildă, valorile pe care le indica scoliastul în problema taurilor și acela la care ajunge rectorul Chr. Leiste. De ce ? Pentru că scoliastul indică o soluție a problemei, în care nu se ține seamă de ultimele două condiții, acelea că „$A+R$ este un pătrat și că $T+R$ este un număr triunghiular". E vorba de un sistem nedeterminat de 7 ecuații cu 8 necunoscute.

Nici Leiste nu a considerat ultimele două condiții, rezolvînd același sistem nedeterminat de 7 ecuații cu 8 necunoscute. De aceea, din valorile obținute de el se găsesc acelea ale scoliastului, prin înmulțire cu *factorul constant* 80. Nu-i același lucru cînd numărul ecuațiilor este mai mare decît al necunoscutelor. Unei singure mărimi nu-i poți impune să satisfacă mai multe condiții diferite, căci acestea sînt în general contradictorii. Cînd se întîmplă așa, problema este considerată imposibilă și nu are soluții. Dar s-ar putea ca, deși aparent numărul ecuațiilor să fie mai mare decît numărul necunoscutelor, unele dintre ecuații să repete sub altă formă anumite condiții puse anterior și, în acest caz, numărul ecuațiilor să fie egal cu cel al necunoscutelor. Atunci problema are o soluție unică, deși aparent părea imposibilă. Cum se prezintă problema taurilor vom vedea pe parcurs ; deocamdată să rezolvăm și noi sistemul nedeterminat pe care îl avem în față. Am putea încerca să eliminăm pe N și B.

— N poate fi uşor eliminat dacă înmulţim prima ecuaţie cu 4 şi o adunăm la a doua. Avem în acest caz : $24A=9B+$ $+44R$.

— Într-adevăr, să considerăm acum sistemul

$$24A=9B+44R$$

$$42B=13A+42R$$

şi să procedăm la fel.

— Da, dar aici 9 şi 42 au ca factor comun pe 3, aşa că prima ecuaţie o voi înmulţi cu 14 şi a doua cu 3. Prin adunare se obţine :

$$297A=742R \text{ sau } A=\frac{742}{297}R$$

— Ai obţinut pe A în funcţie de R. Mai departe sper că nu mai am nevoie să intervin.

— Cred şi eu. Din primele două ecuaţii găsesc pe N şi B:

$$N=\frac{178}{99}R \text{ şi } B=\frac{1\,580}{891}R$$

— Atunci hai să rezolvăm şi celelalte patru ecuaţii care urmează.

Întîi am să le scriu sub forma :

$$\text{IV. } a=\frac{7}{12}(N+n) \qquad \text{VI. } b=\frac{11}{30}(R+r)$$

$$\text{V. } n=\frac{9}{20}(B+b) \qquad \text{VII. } r=\frac{13}{42}(A+a)$$

Cred că ar trebui să înlocuiesc pe A, B şi N şi apoi să văd ce obţin.

— Poate că ar fi prea complicat. Ai putea încerca aceeaşi metodă de mai înainte, anume să elimini pe n din ecuaţia a IV-a şi a V-a, apoi din ecuaţia pe care ai s-o găseşti şi din a VI-a pe b şi apoi, din noua ecuaţie şi a VII-a pe r. Ai să găseşti astfel o ecuaţie care conţine numai pe a şi A, B, N. Aici poţi înlocui pe A, B şi N cu valorile cunoscute şi vei obţine pe a în funcţie de R. Ca să găseşti acest rezultat deodată înmulţeşte ecuaţia a IV-a cu 4 800, a V-a cu 2 800, şi a VI-a cu 1 260, a VII-a cu 462 şi le adună.

— Într-adevăr, în acest caz avem:

$$4\,800a+2\,800n+1\,260b+462n=2\,800\ (N+n)+$$
$$+1\,260\ (B+b)+462\ (R+r)+143(A+a)$$

sau:

$$4\,657a=2\,800N+1\,260B+462R+143A$$

Înlocuind, făcînd adunările și eliminarea numitorului, rămîne

$$a=\frac{2\,402\,120}{297\times 4\,657}R.$$

Acum înlocuiesc pe a în ecuația a VII-a și-l aflu pe r, în ecuația a VI-a îl aflu pe b, iar din ecuația a V-a îl găsesc pe n.

Dar, drept să-ți spun, mă înspăimîntă atîtea calcule. Vezi că n-am avut răbdare să-l înmulțesc nici pe 297 cu 4 657.

— Nici nu era nevoie. Ba e mai convenabil să descompunem numărătorul și numitorul în *factori primi*, pentru eventuale simplificări în calculele ulterioare. Cred că-ți mai aduci aminte de numerele prime?

— Ceva în legătură cu divizorii unui număr?

— Da. Orice număr natural în afară de 1 are doi sau mai mulți divizori adică se împarte exact prin două sau mai multe numere întregi. De pildă, numărul 2 se împarte exact cu 1 și cu 2, numărul 3 cu 1 și cu 3. Același lucru îl putem spune și despre numerele 5, 7, 11, dar nu despre 6. Numărul 6 are 4 divizori pe 1, 2, 3, și 6, iar 12 are ca divizori numerele, 1, 2, 3, 4, 6 și 12. Sînt numere *prime* acelea care au numai 2 divizori (pe 1 și pe el însuși), și *neprime* celelalte. Numerele prime au fost cunoscute de către matematicienii din școala lui Pitagora.

— Atunci, hai să-l descompunem pe a. Avem:

$$a=\frac{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot23\cdot373}{3^3\cdot11\cdot4\,657}R$$

Din ecuația a VII-a urmează:

$$r=\frac{13\cdot46\cdot489}{3^2\cdot11\cdot4\,657}R.$$

Apoi din a VI-a

$$b=\frac{2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 761}{3^3 11\cdot 4\,657}\,R$$

şi, în fine, din a V-a

$$n=\frac{2\cdot 17\cdot 15\,991}{3^2 11\cdot 4\,657}\,R$$

— După cum văd, am exprimat 7 dintre necunoscute cu ajutorul lui R. Dar R poate lua orice valori?

— Desigur că nu ; numai acelea care, înmulţite cu oricare dintre fracţiile de mai sus, vor da ca rezultat un *număr întreg*. Aceasta fiindcă e vorba de *un număr de vite cornute* care pasc pe un cîmp. Rezultă dar că R trebuie să fie divizibil cu produsul $3^4\cdot 11\cdot 4\,657=4\,149\,387$.

— Aşadar, $R=3^4\cdot 11\cdot 4\,657x$, unde x este un număr întreg oarecare şi, ţinînd seama de această valoare a lui R, rezultă că cele 8 necunoscute sînt :

$$A=2\cdot 3\cdot 7\cdot 53\cdot 4\,657x=10\,366\,482x$$

$$N=2\cdot 3^2\cdot 89\cdot 4\,657x=7\,460\,514x$$

$$B=2^2\cdot 5\cdot 79\cdot 4\,657x=7\,358\,060x$$

$$(1)\qquad R=3^4\cdot 11\cdot 4\,657x=4\,149\,387x$$

$$a=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 23\cdot 373x=7\,206\,360x$$

$$n=2\cdot 3^2\cdot 17\cdot 15\,991x=4\,893\,246x$$

$$b=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 761x=3\,515\,820x$$

$$r=3^2\cdot 13\cdot 46\,489x=5\,439\,213x$$

— După cum vezi aceste valori nu coincid cu datele indicate în scolie. Acestea sînt soluţiile stabilite de Chr. Leiste. Pe celelalte le găseşti din (1) dacă faci $x=80$.

— Drept să-ţi spun - nu-mi vine să cred că după atîţia ani şi cu atîtea alte preocupări aş mai fi fost în stare să rezolv o problemă de matematici, i-am spus prietenului meu, satisfăcut şi emoţionat ca un şcolar, cînd am văzut şirul numerelor găsite de mine.

— Stai, nu te grăbi—mi-a răspuns el. Uiţi că obţinînd acest rezultat „nu vei fi considerat nepriceput sau neiscusit în calcule, dar nici nu vei fi socotit printre învăţaţi"?

— Nu uit și totuși mă întreb nedumerit cum de au stabilit grecii acest rezultat? Știu că ei nu cunoșteau sistemul pozițional ci notau numerele cu ajutorul literelor din alfabet. Cum s-au descurcat ei cu adunările, înmulțirile și împărțirile, fără să mai spun nimic despre descompunerile în factori primi ?

— Pentru ei problema a fost într-adevăr foarte complicată, dar nu nerezolvabilă. Calculele le făceau cu *abacul* adică *numărătoarea* cu care se joacă azi copiii la grădiniță sau în prima clasă elementară. Dar nici în Europa, pînă prin veacul al XVI-lea, problema calculelor n-a fost mai ușoară , căci cifrele romane sau cele slavone nu se deosebeau decît prin semne de acelea folosite de greci. Însă despre calculul lor va trebui să discutăm altă dată. Acum, hai, să ne întoarcem la celelalte două condiții impuse de problemă.

— Fie ! Condiția a VIII-a spunea că $A+N$ trebuie să fie pătrat, iar a IX-a că $R+B$ să fie un număr triunghiular. Nu cumva în aceste 9 ecuații vor fi mai multe condiții decît e necesar ?

— Să vedem. Deocamdată trebuie să avem $A+N=$ $=Z^2$. Adică considerînd valorile stabilite în (1) :

$Z^2=2\cdot 3\cdot 4\,657x\cdot(7\cdot 53+3\cdot 89)$; însă $7\cdot 53+3\cdot 89=638=$ $=2\cdot 11\cdot 29$ ceea ce dă :

$$Z^2=2^2\,.\,3\,.\,11\,.\,29\,.\,4\,657x.$$

Înseamnă că x trebuie ales astfel încît suma $A+N$ să fie un pătrat. Spune-mi, deci, cît este x ?

— Nu-i o întrebare prea grea : $x=3\cdot 11\cdot 29\cdot 4\,657$.

— Răspunsul tău mi-a dovedit că întrebarea a fost destul de grea! Ai observat bine că Z ar trebui să fie format numai din factori ridicați la pătrat, dar ai uitat să-i păstrezi toată generalitatea. Răspunsul exact ar fi trebuit să fie $x=$ $=3\cdot 11\cdot 39\cdot 4\,657t^2=4\,456\,749t^2$, t fiind un număr întreg oarecare.

— Ai dreptate! Introducînd acest factor nedeterminat t, adaug o nouă condiție, și, în felul acesta — ținînd seama de IX — rezultă că problema va avea o soluție unică! Dar, drept să-ți spun, nu știu ce înseamnă un număr triunghiular!

— Un număr triunghiular este acela care se poate descompune în produsul $\frac{n(n+1)}{2}$, n fiind un număr întreg oarecare. Prin formă, el amintește de aria unui triunghi avînd ca bază un segment de lungime n și ca înălțime un segment de lungime $(n+1)$. Condiția a IX-a spune că suma $R+B$ trebuie să se poată scrie ca un astfel de produs, adică să avem :

$$R+B=\frac{n(n+1)}{2}=4\,657\cdot 3\cdot 11.\,29t^2(2^2\cdot 5\cdot 79+3^4\cdot 11).$$

Dar $2^2 . 5 . 79+3^4 . 11=2\,471=7 . 353$. De aici rezultă

$$\frac{n\,(n+1)}{2}=3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353\cdot 4\,657^2t^2.$$

Această condiție poate fi scrisă într-o formă mai simplă notînd $2n+1$ cu u și $2\cdot 4\,657\ t$ cu v. Înmulțind cu 8 avem:

$$(2)\qquad 4n(n+1)=2n(2n+2)=(u-1)(u+1)=$$
$$=u^2-1=2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353v^2.$$

Făcînd produsul, ecuația (2) devine :

$$u^2=1+4\,729\,494v^2$$

Avem, așadar, de rezolvat, în numere întregi, o ecuație de forma $cv^2+1=u^2$, cunoscută în matematici sub numele de ecuația lui Pell.

Pe cînd prietenul meu vorbea despre ecuația lui Pell, prin fața cerdacului nostru, a trecut o pereche de tineri, cu hainele de ploaie lipite pe ei. Auzind numele Pell, tînărul a izbucnit în rîs, oprindu-se curios în fața geamului deschis. Întorcîndu-se către partenera sa, i-a spus jucăuș :

— Uite Pel și nu e Pell! Apoi ni s-a adresat nouă : Să nu vă supărați că am rîs, dar îmi pare foarte caraghios că nu mai scap de acest domn Pell nici aici, în mijlocul pădurii!

Ne-am uitat curioși la el, iar prietenul meu i-a răspuns :

— Poate faceți vreo confuzie, căci acest *domn Pell*, de care ați auzit adineauri, nu mai este de mult printre noi !

— Nu fac nici o confuzie și vă rog să mă iertați dacă v-am părut necuviincios! Dar e o coincidență așa de nostimă, că, drept să vă spun, n-am s-o uit niciodată. Mă refer la matematicianul englez de la începutul veacului al XVII-lea, al cărui nume latinizat era John Pellius. La acel domn Pell, care, pe lîngă că era un bun matematician, era și un mare savant și lingvist, dar se lăsa înșelat și furat de toți din jurul lui, încît de multe ori nu avea nici cu ce să-și cumpere cerneală și hîrtie și a murit într-o cumplită sărăcie. Sînt sigur că despre el vorbeați și dumneavoastră, nu-i așa?

— Adevărat, despre el vorbeam, a răspuns prietenul meu, din ce în ce mai mirat. Însă dacă-i vorba de el, îmi pare neînțeleasă și poate nelalocul ei expresia dumneavoastră „uite Pell și nu e Pell!“

— Se poate, dar acesta-i o glumă a noastră, care vă asigur că nu are nimic necuviincios în ea... așa o tachinez eu pe nevasta mea, care-i matematiciană, cum bănuiesc că sînteți și d-voastră.

— Dacă-i așa, a răspuns gazda, dacă sînteți prietenii domnului Pell, atunci vă rog să poftiți mai aproape, fiindcă prietenii prietenilor noștri sînt și prietenii noștri! Poftim să bem o cafea împreună, pînă ce se vor mai usca și hainele d-voastră, căci, după cum văd, nu vă temeți de ploaie! Mă bucur că sîntem din aceeași breaslă!

— Numai pe jumătate, și nu-s eu cel cu pricina, ci nevastă-mea, a răspuns rîzînd, tînărul în timp ce au intrat amîndoi în casă și ni s-au prezentat. Nevastă-mea a absolvit vara aceasta Facultatea de matematică, pe cînd eu sînt de vreo doi ani asistent la istorie. Dar, drept să vă spun această întîmplare e chiar extraordinară! Prin martie — căci noi ne-am căsătorit iarna aceasta — ea a prezentat la sesiunea științifică a studenților o lucrare în care era vorba tocmai de ecuația lui Pell. Așa că, vă închipuiți cred, de cîte ori mi-a fost dat să aud în casa mea de Pell! Și cîte am mai avut de îndurat din cauza lui! Nici tu mîncare, nici tu teatru ; la ordinea zilei era numai domnul Pell!

— După cîte înțeleg, am adăugat eu adresîndu-mă tinerei, care părea intimidată, soțului d-voastră îi cam place să vă necăjească, nu-i așa?

— O, da! Însă relativ la gluma lui cu „uite Pell și nu e Pell“, ea are un tîlc. Mă necăjește așa de cînd i-am spus că această ecuație poartă numele unui matematician care nu s-a ocupat niciodată de ea! De atunci...

— Bine , dar n-am dreptate? a întrebat-o soțul ei, plin de vervă. Cît de naivi sîntem noi, *nematematicienii*, cînd luăm de bune cele ce afirmați voi, *matematicienii*! Iată cea mai bună dovadă că nu sînteți infailibili.

— De cîte ori ți-am spus, a protestat tînăra, că aici nu-i vorba de o demonstrație, ci numai de o documentare greșită din punct de vedere istoric.

— Nu știu despre ce fel de greșeală e vorba, a intervenit prietenul meu. Dacă există vreo anecdotă cu privire la ecuația lui Pell, mi-ar face plăcere să o aflu și eu. Noi vorbeam despre ecuația lui Pell întîmplător; ajunsesem la această ecuație pornind de la o altă problemă.

— Totul e foarte simplu, a început tînăra cu vădită plăcere. Pe la mijlocul veacului al XVIII-lea, marele matematician Euler, cercetînd această ecuație, a numit-o, probabil din eroare, *ecuația lui Pell*, deşi Pell nu a publicat nimic în legătură cu ea. Dar o dată ce Euler a numit-o ecuația lui Pell, nimeni nu a mai pus la îndoială veridicitatea informației lui şi toți au numit-o aşa. Iar astăzi, deşi se cunoaşte adevărul şi matematicienii propun chiar să i se schimbe numele, din obişnuință i se spune tot *ecuația lui Pell*!

— Mulțumesc pentru informație, a zîmbit prietenul meu curtenitor. Acum înțeleg tîlcul vorbelor de mai înainte! Se vede că şi istoria matematicienilor are un călcîi vulnerabil. Fiind vorba de Euler, genialul matematician orb, greşeala e scuzabilă. Ultimii 17 ani din viață i-a petrecut fără să vadă de loc, iar dacă informațiile lui istorice au suferit din această cauză, infirmitatea nu l-a împiedicat să-şi continue cercetările matematice cu o amploare şi uşurință care a uimit pe contemporanii săi.

—Aveți dreptate, a aprobat noua noastră cunoştință. Contemporanii îl numeau „analistul încarnat", iar Arago a spus că Euler calcula fără nici un fel de sforțare, tot aşa de natural cum plutesc vulturii în înălțimi sau cum respiră oamenii! Cît despre ecuația pe care văd că d-voastră ați scris-o sub forma $cv^2+1=u^2$, ea a fost cunoscută însă din antichitate. Desigur că nu în forma ei generală, dar sub diferite forme particulare. O găsim, de pildă în cartea lui Diofant...

— Ce şansă!—a întrerupt-o soțul ei, cu fața plină de zîmbet! Formidabil. Să cunoşti numai o singură chestiune din toată matematica şi tocmai despre ea să ai ocazia să vorbeşti! Aşa întîmplare nici la o mie de ani o dată nu se mai întîmplă! Nu găsiți şi d-voastră că e formidabil?

— Mi se pare că sînteți cam gelos, l-am apostrofat eu, continuîndu-i jocul.

— Da, da, asta-i aşa, a mărturisit cu grabă şi tovarăşa lui de viață, roşind de plăcere.

— Dacă sînt atacat din toate părțile, mă dau bătut! Admit să ascult a 1 001-a oară această poveste!

— Atunci vă rugăm foarte mult, doamnă, să ne spuneți povestea acestei ecuații pînă la capăt.

— Vorbeam de Diofant. Nu se poate preciza în ce epocă a trăit, însă, cum arată renumitul cercetător al istoriei matematicienilor, Paul Tannery, se pare că prin a doua jumătate a secolului al III-lea e.n. În cele șase cărți de aritmetică rămase de la el se găsesc și probleme care conduc la ecuații nedeterminate de gradul al doilea, ca de pildă „să se construiască un triunghi dreptunghic în numere“, adică să se rezolve în numere întregi ecuația $x^2+y^2=a^2$.

— Bine dar aceasta-i teorema lui Pitagora!

— Da, e foarte probabil că și pitagoricienii și-au propus să rezolve asemenea ecuații. Se știe, de pildă, că Platon cunoștea soluțiile în numere întregi ale ecuațiilor $2x^2-y^2=\pm1$. Se pare că și Arhimede ar fi rezolvat în numere întregi ecuațiile $3x^2-y^2=-1$ și $3x^2-y^2=2$.

Ecuația aceasta a preocupat și pe matematicienii hinduși, O găsim în cartea scrisă de Brahmagupta în secolul al VII-lea, de data aceasta nu numai prin exemple particulare, ci chiar sub forma ei generală. Brahmagupta încearcă să găsească o metodă de a o rezolva. În acest scop, el stabilește că pentru a afla soluțiile, în numere întregi, ale unei ecuații de forma

$$cv^2+1=u^2 \tag{3}$$

unde c nu este un pătrat, trebuie folosită o ecuație ajutătoare de forma

$$ca^2+k=b^2, \tag{4}$$

unde a și b sînt numere întregi pozitive, iar k — pe care-l numește *interpolator* — trebuie să aibă una dintre valorile: ±1, ±2 sau ±4. Din această ecuație, Brahmagupta deduce apoi ecuația (3), folosindu-se de o lemă, pe care o demonstrează și îi dă numele de „principiul compunerii egalilor“. Lema redescoperită de Euler și apoi de Lagrange, se enunță astfel: „Dacă avem ecuația $ca^2+k=b^2$, în numere întregi, atunci există și ecuația

$$c(2ab)^2+k^2=(b^2+ca^2)^2 \quad (k\neq1). \tag{5}$$

E ușor de observat că ecuația (5) se reduce la ecuația lui Pell, dacă o simplificăm cu $k=\pm2$ sau cu $k=\pm4$. Dacă se poate stabili ecuația ajutătoare (4), prin ea se pun în evidență soluțiile, în numere întregi, ale ecuației (3), aplicîndu-se principiul lui Brahmagupta. Brahmagupta nu a dat însă o metodă generală de formare a ecuației (4), el a arătat numai unele metode empirice, stabilite prin încercări de la caz la caz. Abia în veacul al XI-lea, Bhaskara II a reușit să stabilească o metodă simplă și elegantă pentru a forma ecuația care are ca interpolatori ± 1, ± 2 sau ± 4. Pentru aceasta, el s-a servit de o altă ecuație ajutătoare, formată tot în mod empiric, pornind de la ecuația dată. Bhaskara II a numit procedeul său *metoda ciclică*, arătînd prin aceasta că operațiile care se efectuează pentru a ajunge la rezultat se *repetă în mod continuu, ca într-un ciclu*. El stabilește următoarea lemă :

„Dîndu-se ecuația

$$ca^2+k=b^2 \tag{4}$$

unde a, b și k sînt întregi, pozitivi sau negativi, există egalitatea :

$$c\left(\frac{am+b}{k}\right)^2+\frac{m^2-c}{k}=\left(\frac{bm+ca}{k}\right)^2, \tag{6}$$

unde m este un număr întreg arbitrar, care se alege în așa fel încît $\frac{am+b}{k}$ să fie un număr întreg și (m^2-c) să aibă cea mai mică valoare posibilă." După cum vedeți, ca formă relația (6) nu diferă de (4), însă are avantajul că $\frac{m^2-c}{k}$ este un număr întreg mai mic decît k și deci, prin aplicarea repetată a formulei (6) la ecuațiile stabilite în mod succesiv, se va ajunge la o ecuație în care interpolatorul k va avea una dintre valorile : ± 1, ± 2, sau ± 4. Acesteia i se aplică apoi lema lui Brahmagupta, și astfel se stabilesc rădăcinile ecuației (3).

Dacă vreți, vă pot arăta și un exemplu care se găsește chiar în cartea lui Bhaskara și pe care-l țin foarte bine minte, fiindcă mi-a plăcut forma poetică în care e formulată problema...

— Băgați de seamă! — a întrerupt iar tînărul cu o prefăcută seriozitate. Nu se lasă pînă nu vă va spune tot ce știe. De-abia cînd vă veți pierde răbdarea îmi veți da dreptate.

— Ba de loc, prietene. Lăsați-o în pace! Auzim lucruri extrem de interesante.

— Pentru dv. ca matematicieni or fi fiind așa, dar nu vă gîndiți și la mine?

— Ba să avem iertare — i-am replicat îndată. Află că și eu sînt istoric, ca și dumneata, iar prietenul acesta al meu mă ține în cange de la răsăritul soarelui!

— Dacă-i așa, continuă, scumpă soțioară, continuă, dar teme-te de Indra[1].

[1] Indra, zeița hindusă cu 4 mîini, este considerată ca una dintre divinitățile cele mai temute.

— Cu voia ori fără voia ta, am să citez problema din cartea lui Bhaskara. Ea e formulată astfel: „Spune-mi, prietene, dacă metoda prefacerii pătratului a cuprins mintea ta așa de complet cum cuprinde planta agățătoare un copac, care este pătratul care, fiind înmulțit cu 67 și adăugîndu-i-se unitatea la produs, dă un pătrat? „De fapt, în cartea lui Bhaskara sînt produse două ecuații dar eu v-am citat una singură. Din problemă rezultă $67x^2+1=y^2$.

— Atunci să formăm și ecuația ajutătoare. Cred că, urmînd indicațiile care ni le-ați dat, putem pune $x=1=a$ și să căutăm pentru b un număr al cărui pătrat să fie foarte apropiat de 67. Asta înseamnă 8. Rezultă deci egalitatea

$$67 \cdot 1^2-3=8^2. \tag{7}$$

După notațiile din (4) avem:

$$a=1,\ b=8,\ c=67 \text{ și } k=-3.$$

Aplicăm lema lui Bhaskara:

$$67\left(\frac{1\cdot m+8}{-3}\right)^2+\frac{m^2-67}{-3}=\left(\frac{8m+67}{-3}\right)^2 \tag{8}$$

Valoarea lui m trebuie aleasă în așa fel, încît $\frac{m+8}{-3}$ să fie un întreg iar m^2-67 să fie un număr cît mai mic posibil.

— Da. Prima condiție este îndeplinită pentru toate valorile lui m, de forma $m=-3t+1$, t fiind un număr întreg oarecare, căci, în acest caz, avem:

$$\frac{-3t+9}{-3}=t-3.$$

Pentru a doua condiție putem alege $t=-2$. Rezultă atunci $m=7$. Înlocuind în (8) pe m prin 7 se obține egalitatea:

$$67 \cdot 5^2+6=41^2 \tag{9}$$

— Acum aplicăm și egalității (9) lema de mai sus, nu-i așa?

— Desigur, continuăm prin metoda ciclică sau a prefacerii pătratului. De data aceasta, $a=5$, $b=41$, și $k=6$. Avem:

$$67\left(\frac{5n+41}{6}\right)^2+\frac{n^2-67}{6}=\left(\frac{41n+67\cdot 5}{6}\right)^2, \tag{10}$$

unde $\frac{5n+41}{6}$ trebuie să fie un număr întreg. Pentru aceasta putem considera $n=6t+5$. Rezultă:

$$\frac{30t+66}{6}=5t+11 \text{ și } \frac{n^2-67}{6}=\frac{36t^2+60t-42}{6}.$$

Cea mai mică valoare a fracției se obține pentru $t=0$, ceea ce conduce la $n=5$.

În acest caz, ecuația (10) se scrie astfel :

$$(11) \qquad 67 \cdot 11^2-7=90^2$$

— Și acum ce mai facem ?

— Aplicăm iar metoda ciclică și deducem din (11) noua ecuație :

$$(12) \qquad 67\left(\frac{11p+90}{-7}\right)^2+\frac{p^2-67}{7}=\left(\frac{90p+67\cdot 11}{-7}\right)^2.$$

— Condițiile le știm : $\frac{11p+90}{7}$ să fie întreg, așadar $p=-7t+2$ și $\frac{p^2-67}{-7}$ sau $\frac{49t^2-28t-63}{-7}$ să fie cel mai mic întreg. Deci rezultă $t=-1$. Înlocuind această valoare a lui t în formula care dă p, avem $p=9$, iar (12) devine :

$$-67 \cdot 27^2-2=221.$$

— În fine, dacă am ajuns să avem ca interpolator pe -2 s-a isprăvit cu metoda ciclică. Folosim acum lema lui Brahmagupta, nu-i așa?

— Desigur : $c=67$, $a=27$, și $b=221$. Înlocuind în (5) obținem :

$$67\cdot(2\cdot 27\cdot 221)^2+4=(221^2+67\cdot 27^2)^2 \text{ sau}$$

$$67\cdot(2\cdot 5\,967)^2+4=97684^2 \text{ și, împărțind cu } 4:$$

$$67\cdot(5967)^2\ 1=(48\,842)^2.$$

Ultima egalitate conține soluția ecuației. Ea ne arată că $x=5\,967$ și $y=48\,842$.

— E foarte ingenioasă metoda și vă mulțumim pentru ajutorul dv. Cînd au cunoscut europenii aceste cercetări ale matematicienilor hinduși? Îmi închipui că destul de tîrziu?

— De-abia în veacul al XIX-lea ele au fost traduse din limba sanscrită în limba engleză. Între timp, europenii descoperiseră, pe altă cale, o metodă asemănătoare.

— Interesantă povestea aceasta a redescoperirilor unui același adevăr, de oameni din țări și timpuri diferite, cu mentalități și puncte de vedere diferite... a murmurat prietenul meu ca pentru sine. Crezi că tu ai descoperit ceva pentru prima oară, și cînd colo, altundeva, departe în timp și spațiu, altcineva a gîndit ca și tine la aceeași problemă, și a tresărit cu aceeași emoție ca și tine cînd a întrezărit soluția! În istoria matematicilor se cunosc destule cazuri. Putem aminti, de pildă, calculul integral, fundamentat de Newton și Leibniz în secolul al XVII-lea și totodată de Arhimede, prin secolul al III-lea î.e.n.

— Iar în ce privește rezolvarea acestei ecuații de către europeni, a replicat matematiciana, povestea are un început... cum să vă spun? aventuros, cu provocări la un fel de dueluri matematice...

— Atunci totul devine pasionant, am intervenit eu, și vă rugăm...

— Vă rog, vă rog, n-o mai rugați nimic, am și eu un cuvînt de spus. Hai, nevastă, la cășile noastre, că-i tîrziu!

— Da, ai dreptate, trebuie să ne ducem la gospodăria noastră! Să nu crezi că am uitat că-s gospodină!

— Dacă-i așa, nu insistăm, însă vă rugăm să ne permiteți să mai veniți să ne dați o mînă de ajutor, a spus prietenul meu.

— Cu mare plăcere, numai că, după cum v-a spus soțul meu, eu nu știu prea multe și ce am avut de spus, v-am cam spus!

— Cum se poate asta? — s-a mirat prietenul meu. A rămas doar chestia duelului și apoi tare aș mai vrea să vă cooptăm la problema noastră, adică mai bine zis a taurilor Soarelui...

— Cum ați spus? Taurii Soarelui? a întrebat, izbucnind într-un rîs copilăresc matematiciana. N-am auzit de o asemenea problemă și nici că mîndrul Soare ar fi fost proprietar de vite!

— Ei iată că a venit și vremea să-mi dați dreptate, a intervenit soțul. V-am spus că nu știe nimic în afară de Pell, Pell și iar Pell. Habar nu are de mitologia greacă! Credeți că și-a bătut capul cu *Odiseea*? Nu știe decît că a scris-o Homer!

— Atunci îți dai tu singur un vot de blam. Cînd te-am cunoscut, vorbeai cu atîta căldură de *Iliada* și *Odiseea* că te ascultam tot așa de fericită ca atunci cînd eram mică și bunicul meu îmi spunea povești. Cu această încredere sufletească m-am apropiat de tine, și tu? Te văd în stare să negi clipele acelea! Şi, mă rog, dacă povestea lor se află în *Odiseea*, de ce nu mi-ai vorbit despte taurii Soarelui?

— Mă dau bătut, a răspuns cel apostrofat, Ca să ne împăcăm îţi voi spune pe drum tot cîntul al XII-lea. Dar şi Euripide aminteşte despre ei în *Troienile*, ori matale mi-ai spus că ai terminat de citit piesa lui Euripide. Cum se face că n-ai remarcat acesta? — a întors răspunsul tînărul, triumfător.

— Ai dreptate, — m-am amestecat eu —, de asta am uitat! Mi se pare că aceea care aminteşte despre ei este Casandra, cînd e luată ca roabă de Ulise, nu?

— Da, am citit tragedia şi-mi amintesc versurile, deşi atunci mi-a scăpat sensul lor. Aflînd că va fi roaba lui Ulise, la despărţirea de mama ei, Hecuba, Casandra o încurajează, provocînd atunci nenorocirile care se vor abate pe capul lui Ulise :

„Şi va cunoaşte naufragii
Pe marea cea sărată, va cunoaşte
Al lotusului dor, şi boii sacri
Ai Soarelui, care în carnea lor
Vor prinde grai şi-i vor trimite-amare
Voci lui Ulise..."

În timp ce tînăra recita cu avînt aceste versuri, mă uitam la prietenul meu. Peste durerea care, de un timp încoace îi modelase chipul, se aşternuse un zîmbet de caldă încîntare. Cu sinceritatea şi vioiciunea lor, tinerii aceştia ne-au cuprins în vraja farmecului lor şi amîndoi am insistat să ne viziteze iar :

— Aşadar, dacă plouă şi mîine, contabilizăm împreună cirezile lui Helios?

— Dacă-i vorba să mai rătăcim şi prin cîmpiile Siciliei, unde-şi ţinea Helios turmele, mă prind şi eu bucuros la taifas, — a spus tînărul înainte de despărţire, adăugînd : — Oricum, mîine dimineaţă va fi umed prin pădure, iar dacă înspre amiază se va lumina, vă vom ruga noi pe dv. să ne ţineţi tovărăşie pe drumul Măgurii, ca să dăm bună ziua Rarăului!

A doua zi dimineaţa cerul rămăsese închis. Noi n-am mai continuat problema, aşteptînd venirea tinerilor noştri prieteni. De altfel n-au întîrziat mult şi, după ce am golit cu toţii ceştile cu cafea puse înaintea noastră, i-a venit rîndul şi ecuaţiei lui Pell.

Pierre de Fermat

— În Europa, a spus prietena noastră, problemele din teoria numerelor au căpătat o largă dezvoltare pe la începutul veacului al XVII-lea, datorită genialului matematician francez Fermat.

— De fapt, Fermat era un diletant în matematici, de profesiune fiind judecător la Toulouse, a adăugat prietenul meu, continuînd : Ca să fac plăcere celor doi domni nematematicieni din preajma mea, aflați că era și un erudit lingvist!

— Iar pe Homer îl cunoștea tot așa de bine cum îl cunoaștea și soțul meu... De altfel a compus și versuri nu numai în limba lui natală, ci și în latinește și în limba spaniolă, pe atunci foarte la modă în Franța. Însă Fermat era un om modest, dovadă că nu a publicat și nici nu a pregătit pentru publicare vreuna din genialele lui descoperiri matematice. O parte din ele au fost cunoscute din corespondența pe care a purtat-o cu unii dintre matematicienii de atunci, cealaltă parte însă a fost găsită abia după moarte, de fiul său, Samuel. Fermat a murit în 1665. Peste 4 ani apărea volumul intitulat *Varia Opera*, tipărit de fiul lui. În anul următor, tot Samuel Fermat publica o nouă ediție a cărților lui Diofant...

— Dacă nu mă înșel — a întrerupt-o prietenul meu — prima ediție a lui Diofant a fost publicată de către Bachet de Mézirac, în 1621, textul fiind tipărit atît în limba greacă, cît și în traducerea latinească. Știu că Fermat citea cu pasiune această carte și a notat pe marginea filelor ei multe dintre frumoasele lui teoreme, printre care și teorema celebră, rămasă nedemonstrată pînă azi.

— Mi se pare că acum s-a demonstrat și această faimoasă teoremă. Nu știu precis, fiindcă lucrarea n-a apărut încă, dar am auzit vorbindu-se despre acest eveniment la noi, la Seminarul matematic din Iași!

— Da? De către cine a fost demonstrată?

— Tot de către un matematician francez, dar fiindcă nu cunosc alte amănunte, prefer să ne întoarcem la problema noastră. Samuel Fermat a publicat, la începutul cărții lui Diofant, teoremele stabilite de tată său, anume tocmai acelea găsite pe marginea paginilor cărții de care vorbeați dv., precum și altele, aflate în scrisorile adresate unui prieten.

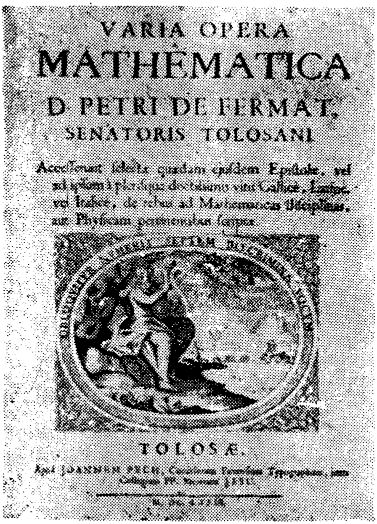
— Știu că moda scrisorilor cu conținut matematic, filozofic, sau literar era în toi prin veacurile al XVII-lea și al XVIII-lea. Acele scrisori treceau din mînă în mînă, erau copiate, comentate și chiar trimise altor specialiști, care se ocupau de probleme înrudite, a adăugat tînărul. Deși personale, scrisorile aveau un caracter public și multe dintre ele, ale căror originale s-au pierdut, se cunosc azi numai fiindcă s-au păstrat în còpii.

— Așa e cazul și cu scrisoarea adresată de Fermat lui Frénicle de Bessy, în care vorbește de ecuația lui Pell—a reluat voioasă vorbitoarea. Lui Bernard Frénicle de Bessy, consilier la Curtea Monetăriei, îi plăcea să-și petreacă timpul liber rezolvînd probleme din teoria numerelor. El purta o largă corespondență matematică cu Fermat, fiind apreciat nu numai de acesta, ci și de alți matematicieni. Scrisoarea trimisă de Fermat lui Frénicle, în februarie 1657, a fost îndată copiată de un alt pasionat dezlegător de probleme din teoria numerelor, Claude Mylon, jurisconsult la Paris. La rîndul lui, acesta, fiind în corespondență cu marele matematician Chr. Huygens, îi trimite și lui, în 2 martie, problema propusă de Fermat, iar la rîndul lui, Huygens o expediază, în 9 martie, profesorului său Schooten. Azi scrisoarea lui Fermat se cunoaște numai datorită *acestei ultime copii.* Am adus cu mine notele lucrării despre care soțul meu a avut grijă să vă informeze. O redactez, fiindcă în toamnă va trebui să o public, așa că am să vă citesc copia acelei scrisori :

„Orice număr care nu-i un pătrat, are proprietatea că se pot găsi o infinitate de pătrate prin care, înmulțind numărul dat și adăugînd 1 la produs, să se obțină un pătrat. De exemplu: 3 nu-i un pătrat, înmulțit cu 1, care e pătrat, fac 3 și, adăugîndu-i-se 1, fac 4, care este un pătrat. La fel 3×16, care nu e pătrat, fac $48+1=49=7^2$. Există infinite numere cu care înmulțind pe 3 și adăugîndu-i 1 fac un pătrat. Vă cer o regulă generală care să stabilească, fiind dat un număr care nu-i pătrat, cum se găsesc pătratele care, înmulțite cu numărul considerat și adăugînd unitatea, să formeze numere pătrate. Care este, de exemplu, cel mai mic pătrat cu care înmulțind pe 61 și adăugîndu-i unitatea, să formeze un pătrat? La fel, care este cel mai mic pătrat cu care, înmulțind pe 109 și luînd unitatea, să facă un pătrat?

Dacă nu-mi trimiteți soluția generală, trimiteți-mi-o în particular, pentru aceste două numere, pe care le-am ales printre cele mai mici, ca să nu vă dea prea multă osteneală. După ce voi primi răspunsul dv., vă voi propune altceva. Pare, fără a vă spune, că propoziția mea e numai pentru numere întregi care să satisfacă problema, căci, în cazul celor fracționare, cel mai slab aritmetician ajunge la capăt".

— Dar după cîte înțeleg, e vorba chiar de o ecuație la fel cu aceea pe care am discutat-o! Așadar, Fermat este acela care propune pentru prima oară în Europa rezolvarea acestui gen de ecuații? Drept ar fi fost ca ecuația aceasta să poarte numele lui Fermat!


VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.
TOLOSÆ.

Pagină de titlu din Opera matematică a lui Pierre de Fermat

— Desigur, și propunerea a fost formulată în multe cărți, deşi chiar acei autori care fac propunerea continuă să-i zică tot ca mai înainte!

— Totuși, mi se pare destul de curioasă această confuzie a lui Euler, ținînd seama că Fermat era francez, pe cînd Pell era englez!

— Nu-i chiar așa. În această istorie sînt amestecați și englezi! Fermat, care nu a avut răbdare să aştepte răspunsul lui Frénicle, a mai trimis aceeași problemă, în chip de provocare, și la doi dintre cei mai renumiți matematicieni englezi : John Wallis, și lord W. Brouncker. De fapt problema se prezenta ca a doua provocare din partea lui Fermat. Prima fusese trimisă cu vreo 2 luni mai înainte, ca urmare a unui schimb de păreri în legătură cu cartea publicată de John Wallis în 1655 : *Arithmetica Infinitorum*. Fermat căpătase cartea în vara anului 1656 de la Kenelm Digby — probabil un prieten —, cînd acesta venise la Toulouse. Citind-o, el a observat că unele dintre rezultatele expuse de Wallis fuseseră stabilite mai înainte de către Torricelli, și i-a scris lui Digby. Acesta a transmis cele comunicate de Fermat lui Wallis.

— Și acestuia numai plăcere nu a putut să-i facă!

— Întocmai. La rîndul lui, se supără și Fermat și ca urmare trimite a doua provocare, tot prin intermediul lui Digby. Am să vă citesc o parte din această scrisoare a lui Fermat, fiindcă știu bine că vă va interesa.

„Rar se propun chestiuni aritmetice și puțini știu să le rezolve. Oare din cauză că aritmetica a fost tratată pînă în prezent mai mult cu ajutorul geometriei decît prin ea însăși? E tendința care apare în cele mai multe lucrări, atît vechi cît și moderne și chiar în Diofant... Totuși, aritmetica are un domeniu care îi e propriu ; teoria numerelor întregi ; această teorie a fost ușor schițată de Euclid și nu a fost îndeajuns cultivată de succesorii lui (decît dacă lucrările n-au fost incluse în cărțile lui Diofant care s-au pierdut). Aritmeticienii au deci sarcina să o dezvolte sau să o reînnoiască. Ca să le lumineze calea, le propun să demonstreze ca teoremă, sau să rezolve ca problemă, următorul enunț : dacă vor ajunge, vor recunoaște cel puțin că probleme de acest fel nu sînt inferioare nici ca subtilitate, nici ca dificultate, nici ca mod de demonstrare celor mai celebre din geometrie.“

După această introducere, urmează problema pe care v-am citit-o.

— Într-adevăr, e interesantă această introducere, în care vibrează pasiunea lui Fermat pentru teoria numerelor!

— Şi, ca să vedeţi cît interes prezentau atunci aceste scrisori, am să vă mai spun, cu titlu de curiozitate, că lordul W. Brouncker primeşte scrisoarea la Londra în 14 martie şi o trimite chiar a doua zi la Oxford, lui Wallis. Amîndoi rezolvă problema, dar ca să rîdă de Fermat trimit răspunsul în englezeşte, şi nu în latineşte cum îl aştepta Fermat, care nu cunoştea limba engleză! Găsind un englez, venit atunci la Toulouse care ştia franţuzeşte, dar habar n-avea de matematici, din traducerea acestuia Fermat nu şi-a putut da seama dacă Wallis şi Brouncker au găsit sau nu metoda cerută. În 15 august 1657, Fermat îi scrie lui Digby, arătîndu-şi nemulţumirea : „În legătură cu problema despre numere, îndrăznesc să vă zic, cu respect şi fără să reduc nimic din înalta părere pe care o am despre naţiunea dv., că cele două scrisori ale Mylordului Brouncker, deşi obscure şi rău traduse, nu conţin după părerea mea, nici o soluţie. Nu înseamnă că eu aş vrea să reîncep luptele şi vechile lovituri de lance pe care le-au dat altă dată englezii francezilor, dar, fără să ieşim din metaforă, îndrăznesc să susţin în faţa voastră, domnule, care excelaţi mai mult ca alţii în ambele meşteşuguri, că hazardul şi fericirea se amestecă uneori în luptele ştiinţifice, tot aşa ca şi în altele..."

— Am citit undeva — a întrerupt prietenul meu, că Descartes ar fi spus despre Fermat, cu care a avut şi el de luptat: „Domnul Fermat este gascon, eu nu!" Mi se pare mie că avea dreptate.

— Ştiu eu? Istoricii îl consideră pe Fermat drept un om paşnic. Dar e greu de ştiut ce zace în sufletul omului. Pînă la urmă, acest duel franco-englez s-a soldat prin împăcare şi recunoaşterea reciprocă a meritelor acestor mari matematicieni! Se pot citi toate fazele acestei lupte în colecţia de scrisori, publicată un an mai tîrziu, în 1658, de către Wallis, intitulată : *Commercium Epistolicum* şi avînd ca subtitlu : *Corespondenţă recent schimbată asupra unor-chestiuni matematice între prea nobilii: Lord William Viconte Brouëncker, englez, Sir Kenelm Digby, cavaler englez, domnul Fermat, consilier în Parlamentul din Toulouse, dl. Frénicle, gentilom din Paris, şi Sir John Wallis, profesor de geometrie la Oxford, Dl. Frans von Schooten, profesor de matematică la Leyda şi alţii.* Aceste scrisori, care încep cu provocarea d-lui Fermat faţă de dl. Wallis, sînt dedicate : *Prea ilustrului şi prea nobilului Sir Kenelm Digby, cavaler în Anglia, prin intermediul căruia a fost purtată această corespondenţă matematică între anii 1656 şi 1658.*

— Acum apare clar şi cauza greşelii lui Euler, a remarcat tînărul care ascultase cu interes scrisorile citite de soţia sa. Foarte probabil că Euler cunoştea ceva în legătură cu aceste scrisori şi tot el a atribuit soluţia problemei lui Pell, care se ocupase de alte probleme, studiate şi de Euler. Vezi — s-a adresat soţiei sale, acum aş putea să te acuz şi eu pe tine, cum m-ai acuzat şi tu cu *Odiseea*, că nu mi-ai spus niciodată nimic despre aceste scrisori! Cred că ar fi cazul să mă supăr că ai lăsat să plutească în mister această ecuaţie a lui Pell!

— Nu-i caz de supărare — a intervenit prietenul meu. Această ecuaţie a fost un episod care ne-a purtat mult noroc. Prin ea v-am făcut cunoştinţa.

— Deşi mă asociez la părerea prietenului meu, aş vrea să-i atrag atenţia tînărului meu coleg asupra pericolului acestei mărturisiri. Ciocolata care a apărut în dimineaţa aceasta pe masa noastră este încă o dovadă că gazda are intenţia să fure locul blîndului domn Pell!

— Asta-i răsplata că ţi-am ajutat să rezolvi sistemul celor 9 ecuaţii nedeterminate? — m-a întrebat Teodor Solonar.

— Care? Acelea ce au rezultat din problema taurilor Soarelui? — a intervenit cu cochetărie, eroina, în discuţie. Sînt curioasă să cunosc această problemă şi vă rog să mi-o spuneţi!

— Foarte bucuroşi de propunere. Dar ca să nu dau loc la bănuieli şi totodată ca să văd ce a înţeles din explicaţia mea acest nepreţuit prieten, îl rog să v-o explice chiar el. Cred că astfel îl vom atrage în discuţie şi pe soţul dv., ca pe un îndrăgostit de chestiunile legate de antichitate.

Nu mi-a fost greu să prezint problema şi să ajung la primul grup al celor 7 ecuaţii. Explicaţiile mele s-au adresat mai mult noului prieten, căci tovarăşa lui nu avea nevoie de ele. Ea m-a ajutat şi chiar a condus discuţiile ce au intervenit cu privire la ultimele două condiţii, care au dus la ecuaţia cu pricina.

— Acum ar trebui să aplicăm metoda hindusă, pe care ne-ai arătat-o tu ieri — a tras concluzia soţul.

— Ba de loc — i-am spus eu. Renunţ la calculul a cine ştie cîte ecuaţii intermediare prin care ar trebui să aflăm interpolatorul cerut. Nu, nu! Am calculat eu destul pînă aţi venit dumneavoastră!

Pe cînd protestam, prietenul meu a început să rîdă cu hohote. Ne-am uitat curioşi şi el ne-a spus:

— Nici nu se poate pune problema să facem aceste calcule, căci pentru asta ne-ar trebui o mașină de calculat și încă una electronică! Aflați că cea mai mică soluție a problemei este formată din numere care au fiecare cîte 206 545 de cifre. Vă puteți imagina un asemenea număr? Uite am aici o tablă de logaritmi. Are formatul obișnuit al unei cărți. Să numărăm cîte cifre cuprinde o pagină. Vedeți? Sînt 2 500 de cifre. Să împărțim acum 206 545 la 2 500. Rezultă că sînt necesare vreo 83 de pagini ca să se scrie numai unul singur dintre numerele care arată cîte vite cornute de o singură culoare și gen avea Domnul Soare în Sicilia !

— Atunci, dacă înmulțim 83 cu 9, ca să vedem pe cîte pagini trebuie imprimate cele 8 numere care arată mulțimea fiecărui fel dintre cornute și totalul lor, rezultă că s-ar forma o carte de vreo 750 de pagini !

— Iată de ce, a reluat prietenul meu, în 1 773, atunci cînd Lessing a propus această problemă, rectorului Chr. Leiste, ea i s-a părut destul de încîlcită și nu a putut ține seama decît de primele 7 ecuații. Soluția completă depindea de o ecuație Pell-Fermat, care, pe atunci nu fusese adusă la o formă ușor de mînuit.

— Dar ne-am luat cu vorba și am uitat să adaug — a intervenit tînăra matematiciană, că în cartea de algebră pe care a publicat-o Wallis în anul 1685, la vreo 20 de ani după ce murise Fermat, el da o demonstrație faptului că ecuația $cv^2+1=u^2$ se poate rezolva totdeauna prin numere întregi. Însă el a comis o eroare de raționament, băgată de seamă abia peste vreo 80 de ani de către doi mari matematicieni, unul francez, Lagrange, și celălalt german Gauss. Prin acești doi matematicieni ecuația apărea din nou pe scenă și atrăgea atenția matematicianului Leonhard Euler. El este acela care a publicat o metodă generală de rezolvare a ei și totodată i-a dat numele cu bucluc. Lagrange reia metoda propusă de Euler și modifică, cu ajutorul ei, propria sa metodă. Astfel ajunge la rezultate care amintesc pe acelea stabilite cu șase secole mai înainte de către hinduși. Aceste rezultate au fost expuse într-o formă deosebit de clară și de simplă de un alt matematician francez, Legendre, într-o lucrare rămasă celebră : *Încercare asupra teoriei numerelor*, apărută în 1797. Aveați deci dreptate afirmînd că rectorul Chr. Leiste nu putea să cunoască aceste rezultate, dat fiind că Legendre avea să publice cartea sa cu 24 de ani mai tîrziu!

— Leiste nu a atacat problema sub forma ei generală, ci s-a mărginit să considere numai cazul primelor 7 condiții.

Dar această soluție nu a satisfăcut curiozitatea și interesul matematicienilor pentru problema expusă de Lessing și ea a continuat să-i preocupe. Mai întîi s-a observat că nici numerele indicate de scoliast, nici acelea obținute de Chr. Leiste prin împărțirea cu 80 nu corespund dimensiunilor insulei Sicilia. S-au găsit calculatori pasionați, care au stabilit că suprafața insulei ar putea adăposti turma taurilor albi și negri, dar în nici un caz cirezile întregi de tauri și vaci. Din această pricină, unii matematicieni s-au și îndoit de autenticitatea problemei.

— Dacă-i așa, atunci problema mă interesează și pe mine și v-aș ruga să discutăm pe îndelete despre autenticitatea ei. Pe ce temeiuri s-a sprijinit oare Lessing atunci cînd și-a exprimat îndoiala că Arhimede ar fi autorul? El era un adînc cunoscător al limbii și literaturii grecești și, pe deasupra, el însuși creator de opere literare. Nu-mi închipui că a putut face această afirmație, fără de vreun temei!

— Nu sînt de părerea ta, dragul meu soț. Lessing nu era matematician și nici nu cunoștea istoria matematicilor din antichitate. Și știi de ce? Pentru că pe vremea lui nu se întocmise încă o istorie a matematicilor bine documentată.

— E adevărat că prima lucrare de acest gen fusese scrisă în anul 1758 de Jean Etienne Montucla — a completat prietenul meu. Avea două volume și se tipărise la Paris, dar deabia în 1799, cînd apare ediția a 2-a a acestei lucrări, refăcută și cuprinzînd patru volume, acesta a avut o mai largă circulație. Lessing a murit însă în 1781 și nu cred că a cunoscut prima ediție a cărții lui Montucla. Ba, chiar dacă ar fi cunoscut-o tot nu s-ar fi putut informa de acolo asupra întregii opere a lui Arhimede, fiindcă ea a fost studiată mult mai tîrziu. Foarte probabil că afirmațiile lui Lessing se referă mai mult la forma problemei, și nu la fondul ei. Poate că el nu-și putea închipui că Arhimede, genialul Arhimede, ar fi putut să-și oprească gîndurile în loc, ca să caute cuvintele potrivite să exprime prin ritmul lor, datele unei probleme ce putea fi enunțată și în proză! E adevărat că versurile pe care le-am citit adineauri nu au nimic deosebit. Ele sînt dintre acelea care se scriau în mod obișnuit pe la sfîrșitul evului mediu și chiar mai tîrziu. Însă din aceasta nu rezultă că ele n-ar fi putut proveni și din antichitate Eu am întîlnit în antologia greacă destule probleme în versuri.

— Exact același lucru l-am afirmat și eu cînd prietenul meu mi-a citat acestă problemă și găsesc cu cale să-i stabilim originea.

— Nimic mai simplu. Am să vă spun tot ce știu și rog să întrerupeți pe orator ori de cîte ori veți crede că trebuie lămurit sau pus ceva la punct. Mai întîi, cine s-a mai ocupat de această problemă? La început, aproape o jumătate de veac după tipărirea ei de către Lessing, nimeni n-a remarcat-o. O explicație ar fi: a fost dată la lumină într-o epocă de frămîntări sociale accentuate, 16 ani mai tîrziu se va declanșa marea revoluție franceză...

— Pe care Lessing nu a apucat-o.

— A murit cu 8 ani înainte.

— În aceste împrejurări nu se putea afla tihna trebuitoare pentru a aborda o problemă oarecum minoră și care avea de la început o faimă dubioasă — am spus eu.

— Poate — a adăugat cu îndoială tînăra doamnă. Deși nici problemele sociale și nici revoluția franceză nu au fost un impediment pentru progresul matematicilor, ci din contră. N-am decît să amintesc de lucrările lui Monge, Fourier sau ale lui Lagrange, pe care tocmai revoluția l-a scos din starea de apatie în care căzuse cu puțin înainte și l-a făcut să fie cel mai activ și entuziast profesor de la Școala Normală Superioară, atunci înființată... S-ar putea să fie numai o simplă întîmplare faptul că nimeni nu s-a mai ocupat de această problemă, timp de 50 de ani.

— Cred că aveți dreptate. Ați pomenit de Lagrange. Eu am citit undeva povestea acestei apatii. La un moment dat i s-a părut, după cum o spunea chiar el, că a ajuns la capătul puterilor și nu mai găsea nici o plăcere în studiul matematicilor. Mecanica analitică, lucrare care l-a făcut celebru a stat doi ani pe biroul său, fără să o deschidă măcar. Cînd a izbucnit revoluția, a fost îndemnat de prietenii lui din aristocrație și chiar de unii oameni de știință să se refugieze la Berlin, unde stătuse mulți ani înainte de revoluție. El a refuzat, spunînd că preferă să asiste *la experiență* pînă la capăt. În 1795, cînd s-a creat Școala Normală, el a funcționat acolo ca profesor și doi ani după aceea a organizat cursurile Școlii Politehnice din Paris, fiindu-i primul profesor. El, cel mai mare matematician al epocii, „cea mai înaltă piramidă a științelor matematice“, cum îl numea Napoleon, îndruma acolo cu drag tineretul, pregătind primii ingineri militari ai Franței. Pentru ei a scris atunci tratatele rămase celebre, nu numai prin problemele matematice expuse, cît și prin forma clară și ușor de asimilat în care le-a prezentat.

— Pe lîngă aceasta aş mai adăuga că cea mai importantă contribuţie a sa din timpul revoluţiei rămîne perfecţionarea pe care a adus-o la sistemul de măsuri şi greutăţi. Dar, vă rog să reveniţi la problema noastră.

— În 1821, reia Teodor Solonar, apărea o broşură intitulată *o veche epigramă grecească, cu conţinut matematic, publicată pentru prima oară de Lessing. Editată din nou şi tratată din punct de vedere matematic şi critic de dr J. Struve, directorul gimnaziului din Altona, şi de dr. K. L. Struve, directorul gimnaziului din Königsberg, tată şi fiu. Altona 1821.* Broşura are 47 de pagini şi cuprinde textul original al epigramei, urmat de o traducere a ei în limba germană, vers cu vers. Calculele sînt refăcute de Struve-tatăl, pentru primele 7 condiţii, ultimele două fiind considerate de el ca adăugate posterior. El îşi exprimă părerea că numele lui Arhimede este o invenţie şi chiar se distrează pe această temă, afirmînd că problema trebuie să fi fost scrisă de vreun matematician necunoscut, care s-a inspirat din *Odiseea.* Formulînd problema în hexametri şi pentametri greceşti, dîndu-i numele de *epigramă* şi atribuind-o lui Arhimede, spune Struve, acel matematician rîdea pe înfundate la gîndul că amăgeşte lumea, care se va chinui să dezlege o problemă imposibilă, compusă de el şi pe care nici el n-a putut-o dezlega!

Observaţiile critice sînt formulate de Struve-fiul. El arată că nu înţelege nimic din versurile 35 şi 36, în care se stabileşte condiţia a 8-a a problemei căci cuvîntul grec pe care Leiste l-a tradus prin *pătrat* poate avea şi înţeles de dreptunghi, deoarece se ştie că grecii aveau diferite numiri pentru produsele de doi, trei sau mai mulţi factori, după natura acelor factori. De pildă, dacă cei doi factori erau egali produsul se presupunea că reprezintă aria unui pătrat dar dacă factorii erau diferiţi, produsul determina aria unui dreptunghi, etc.

—Avea dreptate Struve-fiul, a întrerupt tînăra. Grecii reprezentau numerele fie prin segmente geometrice, fie prin suma punctelor legate de un anumit poligon. Acestea sînt numerele pe care le numim *figurate.* Astfel, un număr care se putea descompune în doi factori era numit număr *plan,* fiecare dintre cei doi factori fiind interpretat ca fiind lungimea unui segment dintr-un pătrat sau dreptunghi. Dacă factorii erau egali, numărul se numea *pătrat* şi dacă erau diferiţi numărul se numea *dreptunghi.* Aşadar, cînd se vorbea despre un număr plan, el putea fi pătrat sau dreptunghi

Dacă își imaginau numărul ca o sumă de puncte, atunci vorbeau despre numere triunghiulare, dacă acele puncte prin așezarea lor formau un triunghi, sau pentagonale, ș.a.m.d.

— Am impresia că lucrarea *celor doi Struve* nu a adus nici o contribuție reală la lămurirea misterului, căci afirmația lor cu privire la autor nu se bazează pe nici un document. Eu unul deși nu-s de specialitate, nu pot fi de părerea lui Struve-tatăl. Din contră, aş afirma că problema a fost făcută de către Arhimede, chiar dacă nu în versuri. Şi am să vă dovedesc aceasta cu fapte, nu cu vorbe goale — a intervenit atunci tînărul asistent.

— Tu ? Știi că mă surprinde! Habar n-aveam eu de problemă, dar tu? De unde vrei să scoți argumente bazate pe fapte? Crezi că metoda „uite Pell și nu e Pell" se aplică peste tot?

— De loc! Ascultînd atent cele spuse acum, mi-am adus aminte că am găsit, într-o scolie, despre unul din *Dialogurile lui Platon* — mi se pare că era vorba de *Harmide* — ceva în legătură cu *problema boilor* a lui Arhimede. Desigur că despre această problemă trebuie să fi fost vorba acolo, căci boi, tauri, asta n-are importanță!

— Da, domnule! Chiar așa-i a strigat, aplaudîndu-l fericit Teodor Solonar! Peste 7 ani, în 1828, problema a fost reluată de Gottfried Hermann din Leipzig. De data aceasta avem de-a face cu un studiu foarte interesant. Mai întîi, Hermann critică vehement stilul în care Struve își exprima părerea asupra neautenticității problemei, găsindu-l *nedemn de un matematician*. El susținea că problema a fost compusă de Arhimede și nu numai prima parte, ci *mai ales* ultima, singura de fapt care e mai greu de rezolvat. Și el susținea aceasta exact cu argumentul despre care ne-ai vorbit dumneata. În plus el arăta că această problemă este citată, de asemenea, într-o lucrare a lui Heron din Alexandria! El mai afirma că însuși marele Gauss s-a ocupat de această problemă și că ar fi obținut soluția ei completă.

— Mă bucură tot așa de mult această confirmare ca și cînd aș fi găsit o comoară! Acum mi-am amintit și vă pot spune chiar cum suna în grecește expresia cu pricina: „Arhimizu boicôn pròblima",

— Interesant este că lucrarea lui Hermann a fost recenzată chiar în anul următor, dar despre *argumentarea asupra autenticității problemei nu se spune nimic*! Unul dintre recenzenți J. Fr. Wurm, reia problema și o rezolvă în ipoteza că versul 36 ar putea fi interpretat așa cum arătase Struve-fiul, adică admițînd că totalitatea taurilor albi și negri ar forma un dreptunghi și nu un pătrat.

— Atunci Wurm consideră că ultimele două ecuații ar fi de forma :

$$A+N=\text{dreptunghi}\,; \tag{8}$$

$$R+B=\frac{n(n+1)}{2} \tag{9}$$

— Atenție, însă! Se pare că matematicienii ne obligă să apucăm iar creionul de coadă! Poftim o hîrtie, să nu ne prindă nepregătiți!

— De ce nu? Ați făcut destulă pauză și nu ne temem că rezultatele nu vor fi interesante! Iată, să considerăm primele 7 ecuații rezolvate și soluțiile date de sistemul (1). După cum se observă, ecuația a 8-a este îndeplinită de la sine, căci

$$A+N=2\cdot 3\cdot 4\,657\cdot(7\cdot 53+3\cdot 89)x$$

Rămîne ecuația a 9-a. Înlocuind valorile lui R și B din (1) avem:

$$\begin{aligned} R+B=\frac{n(n+1)}{2} &=4\,657\cdot x(3^4\cdot 11+2^2\cdot 5\cdot 79)= \\ &=4\,657\cdot 2\,417x=7\cdot 353\cdot 4\,657x \end{aligned} \tag{10}$$

Să observăm că n poate fi un număr pereche sau nepereche, adică de forma $n=2s$, sau $n=2s-1$. Asta înseamnă că ecuația (10) se poate scrie sub forma :

$$s(2s\pm 1)=7\cdot 353\cdot 4\,657x \tag{11}$$

Și, dat fiind că x este un număr oarecare întreg, care nu-i supus nici unui fel de restricții, Wurm are ideea ingenioasă să-l considere exprimat printr-un produs de doi factori, u și v, în așa fel ca u să fie divizibil cu s, iar v cu $(2s\pm 1)$, În acest caz, ecuația (11) conduce la următoarele sisteme de cîte două ecuații liniare, nedeterminate, sau cum se mai numesc încă, diofantice :

1) $s=u$; $2s\pm 1=7\cdot 353\cdot 4\,657v$; $2u\pm 1=7\cdot 353\cdot 4\,657v$

2) $s=7u$; $2s\pm 1=353\cdot 4\,657v$; $14u\pm 1=353\cdot 4\,657v$

3) $s=353u$; $2s\pm 1=7\cdot 4\,657v$; $706u\pm 1=7\cdot 4\,657v$

4) $s=4\,657u$; $2s\pm1=7\cdot353v$; $9314u\pm1=7\cdot353v$

5) $s=7\cdot353u$; $2s\pm1=4\,657v$

6) $s=7\cdot4\,657u$; $2s\pm1=353v$

7) $s=353\cdot4\,657u$; $2s\pm1=7v$

8) $s=7\cdot353\cdot4\,657u$; $2s\pm1=v$

Rezolvînd pe rînd aceste 16 ecuații de gradul întîi cu cîte două necunoscute și comparînd rezultatele, Wurm arată că valorile cele mai mici pentru u și v se găsesc din ecuația :

$$14u-1=357\cdot4\,567v, \text{ din care rezultă } v=1\,;$$

$$u=117\,423=3^3\cdot4\,349, \text{ ceea ce conduce la } x=u\,.\,v=$$

$$=117\,423=3^3\cdot4\,349,$$

de unde urmează

$$s=7u=821\,961\,;\ n=2s-1=1\,643\,921$$

și de aici :

$$R+B=4\,657\cdot2\,471\cdot117\,423=135\,123\,894\,081=$$

$$=\frac{1643921\cdot1643922}{2}.$$

Valoarea găsită pentru x trebuie folosită și în ecuația care dă numărul dreptunghiular $A+N$, adică :

$$A+N=2^2\cdot3\cdot11\cdot29\cdot4\,657\cdot117\,423=$$

$$=2^2\,;\,3^4\cdot4\,349\cdot11\cdot29\cdot4\,657=1\,485\,583\cdot1\,409076.$$

— Bine dar, după cîte observ, cei doi factori sînt aproape egali, adică dreptunghiul este aproape un pătrat!

— Aproape, dar nu un pătrat!

— Folosind mai departe această valoare a lui x, Wurm calculează și numărul total de cornute, găsindu-l egal cu 5916837175686.

— Ar fi interesant de văzut dacă atîtea vite ar putea încăpea pe insulă.

— De aceasta s-a interesat chiar Wurm. Raportînd acest număr la suprafața insulei, care este aproximativ egală cu 136 bilioane m² și presupunînd animalele împrăștiate uniform, stabilește că fiecare vită ar avea un spațiu de 23 m² în jurul ei

— Un rezultat foarte frumos, căci corespunde oarecum și realității geografice. Trebuie să fi plăcut mult, nu-i așa?

— Nu! Deși matematicienii nu au contestat ingeniozitatea lui Wurm, și azi această soluție e numită chiar „problema lui Wurm," rezultatul nu i-a mulțumit. Problema, în forma ei originală, a continuat să preocupe pe matematicieni, de aceea vă mai cer puțină răbdare. Sîntem în 1829 și pînă în 1880, cînd apare soluția dată de Amthor, au să mai treacă 51 de ani! Desigur, 51 de ani nu e mult, o viață de om, așa că se cuvine să facem o pauză ca să ne mai întărim, gustînd cîte ceva și bînd o cafea, și să ne mai dezmorțim cercetînd vremea care, după cîte văd, ține cu noi, cei îndrăgostiți de matematici...

— Orice s-ar mai întîmpla în cei 51 de ani următori — a reînceput tînărul istoric discuția, nu cred că se va mai putea pune la îndoială autenticitatea problemei, deși, după cum am auzit, argumentele aduse de Hermann nu au fost comentate de loc.

— Adevărul a fost stabilit destul de greu—a răspuns prietenul meu. Mai întîi G.H.N.F. Nesselmann, în cartea sa *Algebra la greci*, pe care o publică în 1842, se alătură părerii lui Struve, adăugînd încă următoarele două argumente în favoarea ipotezei lui : 1) partea a doua a problemei nu a putut fi scrisă de Arhimede, deoarece pe vremea lui nu se putea vorbi de numere triunghiulare, iar partea întîia fără cea de-a doua, singura care ar prezenta o anumită greutate, nu ar putea fi atribuită lui Arhimede ; 2) această epigramă nu poate fi datorită lui Arhimede, căci nu se găsește în colecția de epigrame întocmită în veacul al XIV-lea de Planudiu.

— Bine, dar ultimul argument nu-i valabil! E normal să nu pui în colecție un lucru pe care nu-l cunoști! Și e posibil ca această problemă să fi așteptat într-un manuscris uitat în cine știe ce bibliotecă, nedescifrat de nimeni. Cum a dat Lessing de el, altfel decît din întîmplare?

—Foarte adevărat. De altfel, nici primul argument nu-i mai breaz, a spus tînăra cu înflăcărare. Deși grecii nu aveau sistemul nostru de scriere a numerelor, ei cunoșteau foarte bine numerele triunghiulare, încă de pe vremea lui Pitagora. După cum s-a mai amintit azi aici, ei își imaginau numerele întregi ca pe niște grămezi de puncte și le numeau triunghiulare dacă ele puteau fi așezate în formă de triunghi. Așa sînt numerele de forma $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$ etc. În aritmetica lui Nicomah, scrisă în primul secol al erei noastre, găsim chiar o teorie a numerelor poligonale. Mi-ați putea obiecta că s-ar fi putut ca Nesselmann să nu fi cunoscut lucrarea lui Hermann și nici pe acelea ale recenzenților lui. Dar iată că și mai tîrziu, în 1855, găsim alt articol, al cunoscutului matematician A.J.H. Vincent, membru al Academiei Franceze, care, după ce citează părerea lui Struve, adaugă: „...Într-adevăr, această epigramă este complet străină de spiritul lucrărilor care aparțin incontestabil geometrului sicilian".

— E nemaipomenit! Nici Vincent nu a cunoscut lucrarea lui Hermann?

— Ba da, a cunoscut-o însă nu a fost de părerea acestuia. Analizînd problema, el o reduce numai la versurile 1—16 — care cuprind enunțul primelor trei ecuații — și la versurile 27—30, care spune el, îi dau un epilog foarte convenabil. Ca soluții află numerele...

— Dar prin această trunchiere problema poate figura în orice carte de aritmetică de curs elementar și deci nu mai poate fi vorba de o problemă a lui Arhimede...

— Vincent aruncă doar de la început această ipoteză...

— Atunci nici nu mai interesează soluția lui. Preferăm să auzim alte voci!

— Fie, pe voia dv. Iată trei voci puternice, care de data aceasta se alătură la aceea a lui Hermann. Prima, în 1879, este a renumitului profesor din Copenhaga, J. L. Heiberg, în drept să decidă dacă un text ar aparține sau nu lui Arhimede, deoarece el publica în 1880 o nouă ediție a operelor lui Arhimede, însoțite de comentariile pe care le-a scris Eutocios prin veacul al VI-lea.

— Faima lui Heiberg știu că se datorește descoperirii unui nou manuscris al lui Arhimede, *Metoda*, considerat pînă atunci pierdut!

— Da. Dar acea descoperire s-a făcut în 1906. Păstrînd ordinea cronologică am de gînd să vă vorbesc mai tîrziu despre această descoperire interesantă pentru noi.

Acum, în 1879, Heiberg afirma, în teza sa de docență, că părerea lui Hermann cu privire la autorul problemei taurilor era pe deplin justificată. Bineînțeles ca fond, căci forma de *epigramă* în care găsim problema azi, o considera posterioară lui Arhimede. Același lucru îl susținea și dr. Krumbiegel, într-un documentat articol, pe care îl publica în anul următor, împreună cu dr. A. Amthor, primul autor discutînd problemele filologice și autenticitatea problemei iar ultimul stabilindu-i soluția generală.

De acord cu ei a fost și renumitul istoriograf al matematicilor grecești, Paul Tannery. El stabilea, în 1881, și sursa folosită de scoliastul lui Platon cu privire la informația în legătură cu problema lui Arhimede. Anume, arăta că problema boilor a fost menționată ca aparținînd lui Arhimede în lucrările matematicianului grec Geminus din Rodos, care a trăit în a doua jumătate a veacului I î.e.n.

În fine, în traducerea în limba engleză a operelor lui Arhimede, pe care o face T.L. Heath în 1897, a fost introdusă și problema boilor, considerată în mod definitiv ca aparținînd lui Arhimede. Și cu asta eu am terminat povestea.

— Așa? —m-am răzvrătit eu, întărîtat. Zici că ai *terminat povestea*, fără să ne fi lămurit lucrul cel mai principal, misterul ei? Matematicienii pot fi satisfăcuți prin calcule și prin această înșirare cronologică de lucrări, căci din cauza copacilor, ei nu mai văd pădurea. Dar pentru mine și colegul meu de breaslă, de-abia acum începe problema!

— Într-adevăr — a intervenit acesta. Dacă s-a stabilit că problema a fost compusă de Arhimede, ar fi de dorit să aflăm ce l-a îndemnat să o facă? Căci o problemă care conduce la asemenea calcule ca acelea pe care le-am văzut, e puțin probabil că fi fost inventată așa, de florile mărului. De ce dar a scris-o, cu ce scop?

—Cu alte cuvinte, văd că problema aceasta a reușit să vă fie simpatică, nu? Ei bine, dragii mei prieteni, chiar dacă îi mai ocărîți pe matematicieni, vă mulțumesc că ați pus această întrebare și, ca mulțumirea să nu rămînă platonică, vă fac chiar acum niște cafeluțe fierbinți ca iadul. Ne este necesară această aprovizionare, căci pentru dezlegarea misterului vom parcurge cale lungă să ne-ajungă, cu vreo 22 de veacuri înapoi, ca să-l găsim pe Arhimede și să-l întrebăm pe el. Avem noroc că în lumea matematicilor nu există granițe nici pentru spațiu și nici pentru timp.

— Ne va primi oare? Nu ne va răspunde și nouă „Nu-mi tulburați liniștea“, ca odinioară acelor soldați romani : „Nu vă atingeți de cercurile mele!—a întrebat sfios tînăra.

— A nu! Sînt sigur că nu va mai răspunde așa. Noi nu-i mai putem tulbura gîndurile care urmăreau dezlegarea unei probleme, fiindcă problemele ce și le-a pus el atunci au fost de mult rezolvate. Azi opera lui e admirată chiar și de cei ce nu o mai citesc în original. Venirea noastră îi va deștepta amintirile și ne va întîmpina cu zîmbetul cald al bunicului înconjurat de nepoții care așteaptă să le spună o poveste.

— Acum, că ne-am băut cafelele, putem porni — a început Teodor Solonar. Să lăsăm aici cerul întunecat și vremea ploioasă și să coborîm în colțul dinspre sud-estul insulei cu trei unghiuri, la Siracuza, încîntătoarea cetate, unde, sub un cer albastru strălucitor, s-a născut și a murit Arhimede. Precis nu se știe cînd s-a născut, se pare că pe la 287 î.e.n.

— În schimb, anul morții se cunoaște cu precizie. Știm cu toții că a fost ucis în anul 212, în al doilea război punic, de un soldat al lui Marcellus.

— Tradiția spune că pe atunci avea 75 de ani, de aceea se admite ca dată a nașterii aceea pe care v-am spus-o.

— Știați că în 1961, între 11 și 16 aprilie, au avut loc la Siracuza serbări în amintirea lui Arhimede?

— O, desigur! Cînd am fost ultima oară la Iași, am găsit în Biblioteca Seminarului Matematic „Alexandru Myller" cel 3 volume ale Simpozionului de geometrie diferențială care s-a ținut acolo cu ocazia acestor serbări. M-a interesat mai ales volumul I, în care s-au tipărit discursurile și conferințele generale ce s-au rostit cu acest prilej. Discursul de deschidere a fost ținut de Paul Montel, și, dacă vreți, aș putea căuta printre hîrțoagele mele ca să vă citesc cîteva din frazele care le-am însemnat acolo.

— Numai dacă nu va dura căutatul mai mult decît am avea noi răbdare să așteptăm! — l-am necăjit eu.

— În privința asta, nici o teamă. Caietul meu de însemnări e aici pe policioară! Iată ce a spus Montel despre Arhimede: „Fascinanta bogăție a facultăților lui inventive i-au permis să evolueze cu aceeași ușurință și putere creatoare în abstract, ca și în concret, în științele de bază, ca și în științele aplicate, să fie savantul care meditează și inginerul care construiește. Aceste calități, pe care le vom regăsi mai tîrziu la un Leonardo da Vinci, s-au întrunit rar în același om, iar în zilele noastre această reuniune e greu de conceput. Pentru Arhimede renumele de tehnician s-a răspîndit mai repede decît acela de savant, pentru că descoperirile lui în concret erau accesibile unui număr mai mare..." Sau, mai departe, unde spune: „Descoperirile lui sînt fructul unei imaginații și al unei intuiții care au depășit secolele și au dat germenii teoriilor care nu s-au dezvoltat deplin decît mult mai tîrziu..." Ei, vă place?

— Desigur, totdeauna îți face plăcere să asculți lucruri pe care le știi și tu, dacă sînt spuse într-o formă deosebită. Eu mi-aduc aminte cu cîtă admirație vorbea Plutarh despre Arhimede, deși numai în treacăt. El arăta că era un spirit așa de profund și de o așa de mare bogăție în teorii geometrice, încît n-a vrut să mai scrie nimic despre construcțiile mașinăriilor sale, care-i aduseseră atîta glorie! Însă, dragul meu prieten, parcă era vorba că ne ducem să-l întîlnim pe Arhimede și nu să asistăm la un congres matematic, fie el chiar în onoarea lui Arhimede și în Siracuza! Noi o pornisem către Siracuza din veacul al III-lea î.e.n., pe cînd acest oraș era un mic stat monarhic și unul dintre cele mai cosmopolite orașe din Grecia..

— Da! Aici cam ai avea dreptate — s-a scuzat Teodor Solonar. Te asigur că mergem într-acolo, dar nu într-o rachetă cosmică, fiindcă nu am putea face nici o escală! Uite însă că am ajuns unde doreai. Familia în care s-a născut Arhimede nu a fost prea bogată. Tatăl lui era astronom, îl chema Fidias și se ocupa singur de educația fiului său.

— Probabil că acesta este motivul care te face să pui la îndoială buna stare materială a părinților; oamenii înstăriți aveau obiceiul să tocmească profesori de filozofie sau literatură pentru copii lor.

— Se spune că Arhimede a fost atras de mic copil numai de studiul matematicii și al astronomiei, singura lui distracție fiind invențiile mecanice.

— Ce distracție poate întrece pe aceea de a-ți crea tu însuți jucăriile pe care alții nu-s în stare să le mînuiască cum trebuie?

— După cum se vede, în casă există cîte un exemplar din cărțile nu de mult apărute ale lui Euclid, *Elementele* și *Secțiunile conice*, cărți care cuprind destul material la care să te gîndești pe îndelete. Arhimede nu a părăsit orașul natal ca să caute învățătura aiurea decît tîrziu, după ce o rudă de-a familiei lui, Heron, a fost ales de locuitorii orașului, ca tiran, adică conducător al Siracuzei. De-abia după aceea Arhimede s-a dus la Alexandria ca să-și desăvîrșească studiile sale.

— Într-adevăr, pe atunci *Muzeul* — cuvîntul este o prescurtare pentru *Templul Muzelor* — era vestit atît prin oamenii de știință și problemele care se cercetau acolo, cît și prin biblioteca, colecțiilor de material științific sau prin grădinile sale!

— De altfel, Alexandria rivaliza cu Atena, primul centru de cultură al lumii elene, și o întrecea în ceea ce privește matematica și astronomia. În schimb, Atena era neîntrecută în domeniul literaturii și al filozofiei.

— Și întrucît Arhimede înclina către matematici, e clar că a ales drumul Alexandriei. Acolo a legat prietenie cu doi dintre cei mai mari matematicieni ai vremii : Conon și Eratostene. O știm precis din scrisorile pe care le adresa acestor doi matematicieni, după ce s-a întors în Siracuza.

— Bine, dar atunci problema lui avea o adresă foarte precisă, și nu fictivă. Drept să-ți spun, mă mir că s-a putut pune la îndoială autenticitatea problemei, dacă se cunoșteau toate acestea!—am observat eu, surprins.

— *Dacă se cunoșteau acestea*, bine spus, vorba este că atunci cînd se discuta problema, nu se cunoșteau acestea!

— Ce vrei să spui?

— Exact cele ce ai auzit. Unul dintre argumentele pe care se sprijineau cei ce îi contestau autenticitatea era tocmai acesta: dacă Arhimede a scris scrisori lui Eratostene, de ce nu s-au păstrat și altele, în afară de epigrama cu pricina, așa după cum au rămas scrisorile adresate de el lui Conon sau Dositeu ?

— Ar fi foarte interesant să cunoaștem aceste scrisori mai îndeaproape.

— Nimic mai simplu. Iată, de pildă, scrisoarea care se află ca prefață în cartea sa despre *Cuadratura parabolei* : „Arhimede îi urează sănătate lui Dositeu. Aflînd că prietenul meu Conon a murit și că tu, ca și mine, îi erai apropiat și, afară de aceasta, aflînd că ești un cunoscător al geometriei cu toată durerea care mi-a pricinuit-o pierderea unui amic și a unui excepțional matematician, am hotărît să-ți trimit scrisoarea pe care intenționam să i-o trimit lui Conon, comunicîndu-ți o teoremă de geometrie..." O altă scrisoare, tot către Dositeu, însoțea și cartea *Despre sferă și cilindru* și, în fine, o a treia se află într-o lucrare unde-i vorba despre o curbă care se numește azi „spirala lui Arhimede" ; cartea are ca titlu *Despre spirale*.

— Dați-mi voie să vă corectez : titlul acestei cărți este : *Despre elice*, și nu despre spirale, căci aceste curbe pe care noi le numim *spirale*, Arhimede le numea elice.

— Aveți dreptate. N-am folosit termenul de atunci, căci pentru noi elicea este curba șurubului, adică alta decît spirala.

— Atunci vă rog să continuați a ne citi din scrisorile lui.

— „Arhimede îi dorește sănătate lui Dositeu. Cea mai mare parte dintre teoremele pe care le-am trimis lui Conon, ale căror demonstrații mă rogi în fiecare scrisoare să ți le comunic au fost demonstrate în lucrările mele, pe care ți le-a adus Heraclit... ; și să nu te miri că am întîrziat atît de mult cu publicarea acestor demonstrații. Am vrut mai întîi să comunic aceste teoreme oamenilor care se ocupă cu matematica și care ar fi vrut să încerce să le demonstreze singuri. Foarte multe dintre aceste teoreme geometrice, care, la prima vedere, par extrem de dificile, se pot rezolva pînă la urmă cu succes. Conon a murit însă înainte de a fi putut să-și facă timp pentru a se ocupa de aceste teoreme. Dacă n-ar fi survenit moartea, el ar fi găsit cu siguranță rezolvarea tuturor problemelor... S-au scurs mulți ani de la moartea lui Conon și încă n-am auzit ca cineva să se fi apucat de rezolvarea vreuneia dintre aceste probleme. De aceea voi enumera aici, pe rînd, toate teoremele propuse de mine lui Conon, și în special două dintre ele, care m-au dus la o concluzie falsă ; fie ca această întîmplare să constituie un exemplu și un avertisment pentru oamenii care afirmă că pot soluționa orice problemă pe care o propun spre rezolvare altora, fără să o însoțească de propria lor soluție ; iar în cele din urmă sînt nevoiți să admită că au încercat să demonstreze imposibilul". În această scrisoare el arată mai departe care este enunțul și soluția corectă a celor două teoreme false.

— Curioasă de tot această atitudine a lui Arhimede!

— Da, și e bine să o reținem, căci am putea găsi aici o urmă care să ne ducă la rezolvarea misterului! Însă înainte de a vorbi despre aceasta, trebuie să vă spun că în anul 1906, adică mult după ce misterul autenticității fusese lămurit, s-au descoperit și scrisori trimise de Arhimede lui Eratostene. Una se găsește în prefața la o carte ce se considera pierdută : *Despre metoda demonstrării teoremelor cu ajutorul mecanicii*. Această scrisoare începe cu salutul obișnuit : „Arhimede îi urează sănătate lui Eratostene. Ți-am trimis mai înainte cîteva dintre teoremele găsite de mine, comunicîndu-ți numai concluziile și propunîndu-ți să găsești singur demonstrațiile..." Dacă e dovedit că Arhimede l-a cunoscut pe Eratostene, se poate trage și o concluzie asupra vîrstei pe care a avut-o cînd s-a dus la Alexandria, Se pare că Eratostene din Cirene era de-o vîrstă cu Arhimede și se știe că el a devenit astronom la curtea lui Ptolemeu al III-lea, fiind chemat în anul 245 din Atena ca profesor pentru fiul lui și moștenitorul tronului. Așadar scăzînd din 287 pe 245, rămîn 42 de ani.

— Atunci Arhimede nu a fost elevul școlii din Alexandria.

— Asta cred că nu, dar el a studiat acolo, căci oricînd, la orice vîrstă și cu orice bagaj de cunoștințe poți merge ca să studiezi într-un centru în care știi că vei găsi atît materialul științific de care ai nevoie, cît și oamenii care lucrează în aceeași direcție. Așa se explică și faptul că Arhimede a legat prietenie cu acești doi savanți și că le propunea lor spre demonstrare enunțul teoremelor pe care le stabilea. Era și atunci obiceiul matematicienilor de a-și comunica descoperirile lor prin scrisori, așa cum îl regăsim din nou în secolele al XVII-lea și al XVIII-lea.

— M-ar interesa să aflu cum s-a descoperit ultima lucrare a lui Arhimede? Nu a fost, cumva, întîmplător?

— Desigur asemenea descoperiri au de obicei acest caracter. Ceea ce-i mai nostim e că a fost găsită într-un palimpsest.

— Vrei să spui că lucrarea lui Arhimede a fost scrisă pe un pergament pe care fusese scris mai înainte un alt text și acesta a fost șters ca să fie transcrisă *Metoda*?

— Din contră! Pergamentul pe care fusese scrisă cartea lui Arhimede a fost spălat de către un călugăr grec, ca să scrie pe deasupra lui un text liturgic!

— Dar atunci cum s-a mai putut descoperi vechiul text?

— Tocmai aceasta-i nostim! Textul liturgic, scris prin veacul al XIII-lea se află în biblioteca unei mănăstiri din Constantinopol. Un savant cercetător care a întocmit catalogul manuscriselor a băgat de seamă că sub noul text se mai putea descifra destul de bine cel inițial, deoarece pergamentul fusese spălat foarte superficial. În catalog el a reprodus și un extras din textul matematic inițial, despre care nu putea spune nimic, nefiind specialist.

— Într-adevăr, foarte nostim ! Ori călugărul a fost cam leneș, ori i-a părut rău că trebuie să distrugă un text antic, pe care-l prețuia! În 1906, prof. J.L. Heiberg din Copenhaga, unul dintre cei mai serioși cercetători ai istoriei matematicilor și care, după cum am văzut, cunoștea îndeaproape opera lui Arhimede, făcînd o călătorie la Constantinopol și cercetînd acest catalog, a recunoscut imediat că textul aparține lui Arhimede. El a cerut permisiunea să-l reconstituiască și peste un an publică, aproape în întregime, textul reconstituit. S-a stabilit astfel că multe părți din text erau lucrări cunoscute, dar printre acestea a găsit și o foarte importantă operă necunoscută a lui Arhimede, *Metoda*, în care se afla și scrisoarea către Eratostene.

— Cred că printre subiectele discutate de Arhimede și Eratostene trebuie să fi fost multe din teoria numerelor. Cine n-a auzit de *ciurul lui Eratostene*, am observat eu.

— Cum cine. *Eu*, soțul unei matematiciene! O declar aici în fața dv. că habar n-am de acest ciur. Probabil că nu are legătură cu ecuația lui Pell! Totuși n-aș vrea să insinuez că ea nu ar cunoaște problema...

— Vedeți? Iar începe! Vă rog deci să mă lăsați pe mine să-i explic ce este cu ciurul lui Eratostene, căci altfel s-ar îndoi că știu despre ce e vorba! Încă de pe vremea lui Pitagora matematicienii greci au împărțit numerele în prime și neprime. Dar nu se știa cum s-ar putea stabili dinainte dacă un număr e prim sau nu, așa după cum se constată dacă un număr este par sau impar...

— Și Eratostene a construit un ciur prin care a cernut numerele?

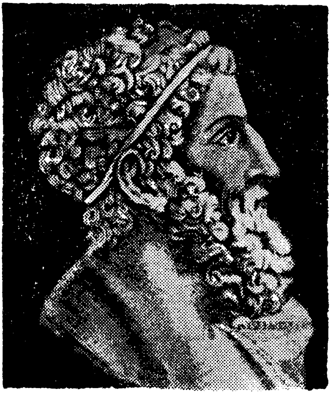
— Da, dragul meu. Probabil ca să vadă dacă n-ar putea observa vreo regularitate în distribuția lor. El a scris toate numerele, de la 1 pînă la 1 000, în șiruri regulate și unele sub altele, pe un papirus. Ca acesta să stea întins și să nu se necăjească să-l dezdoaie de cîte ori s-ar face sul, l-a fixat într-un cadru de lemn. Apoi a găurit papirusul, tăind rotocoale în locurile unde se aflau numerele neprime; cînd a terminat operația, acea tabelă părea un ciur prin care se cernuseră numerele neprime. Se vede că imaginea aceasta a plăcut foarte mult, căci de atunci și pînă azi, tabela numerelor prime de la 1 la 1 000, deși nu se mai perforează, poartă numele de *ciurul lui Eratostene*.

— Cum de n-a găsit o metodă mai expeditivă?

— Era singura metodă, pe care a putut-o folosi atunci și a rămas singura metodă care se folosește și azi ca să aflăm dacă un număr este prim sau nu. Ei, ești mulțumit, se poate continua?

— Acum da, și îl rog pe domnul Solonar să ne conducă pe urmele lui Arhimede.

— Reîntors la Siracuza, a reluat prietenul meu, Arhimede a avut condițiile necesare ca să se dedice atît problemelor de matematică teoretică, cît și acelora de aplicații practice necesare ca să-l ajute pe Heron să-și întocmească o apărare față de posibilitățile unui eventual atac din partea romanilor. Dar acele realizări nu le vom urmări acum. Ne mărginim să-l căutăm numai printre problemele legate de sistemul de numerație. După cum se știe foarte bine, la baza gîndirii matematice grecești se află noțiunea de număr


Arhimede

întreg. Pitagoreicii erau așa de încîntați de proprietățile numerelor întregi, încît au fost tentați să atribuie, unora dintre ele, chiar un sens mistic.

— Așa-i numai că mistica numerelor întregi a suferit o grea lovitură tot în școala lui Pitagora, atunci cînd tot ei au descoperit numărul irațional, care nu se mai putea exprima prin raportul dintre două numere întregi, a observat prietena noastră.

— Totuși, cu toată subtilitatea raționamentului lor, grecii n-au ajuns, așa cum au făcut-o hindușii, la un sistem de numerație care să fie comod atît pentru cercetările teoretice, cît și pentru calculul practic — a continuat Teodor Solonar.

— Poate fiindcă grecii au separat problemele teoretice de cele practice. În *Cărțile* a VII-a, a VIII-a și a IX-a din *Elemente*, în care Euclid se ocupă de aritmetică, nu găsim rezolvată nici o problemă numerică, nu se efectuează nici un calcul cu numere. Metodele de socotit formau un obiect aparte, numit logistică, și în acest scop se foloseau abacele. Euclid nu arată cum se fac operațiile numerice.

— Aveți dreptate, doamnă! Și ca să înțelegem ușor care a fost contribuția lui Arhimede la problema numerației, să vedem mai întîi cum scriau numerele vechii greci.
Ei au folosit în loc de cifre, literele alfabetului la care au mai adăugat trei litere din alfabetul fenician, 27 de semne, fiind destule pentru notarea numerelor de la 1 pînă la 999 ; primele 9 litere reprezentau cifrele numerelor de la 1 pînă la 9, următoarele 9 reprezentau zecile, iar ultimele 9 sutele.

De pildă : numărul 529 se scria astfel: $\varphi k\theta$, fiindcă $\varphi=500$, $k=20$ și $\theta=9$. După cum se vede, deși sistemul lor de numerație era zecimal, scrierea numerelor se deosebea fundamental de a noastră, fiindcă grecii nu foloseau aceleași semne pentru notarea unităților, zecilor sau a sutelor. Cu sistemul pozițional, noi putem scrie un număr oricît de mare numai cu 10 semne, pe cînd ei, cu 27 de semne, nu puteau scrie decît un număr pînă la 999. Sistemul lor de juxtapunere cerea mereu semne noi și cu cît numărul era mai mare cu atît aveau nevoie de mai multe semne ca să-l poată scrie.

— Aceasta nu-i cu putință și, chiar de-ar fi, puțini oameni ar putea să-l folosească!

— Tocmai din cauza aceasta, semnele sistemului lor de numerație s-au oprit la 999. Pentru mii nu au mai introdus semne noi, ci au folosit aceleași litere ca pentru unități, la care le-au adăugat o virgulă înainte. Așadar, β reprezenta numărul 2, dar cu o virgulă înainte : $,\beta=2\,000$.

— Se menționează în literatură că pe vremea lui Homer grecii numărau numai pînă la 1 000. Cuvîntul miriadă, în grecește *mirioi*, însemna atunci un număr nedefinit de mare, am adăugat eu.

— Exact! Mult mai tîrziu au definit ei *miriada* ca avînd 10 000 de unități. Pe aceasta au notat-o cu inițiala cuvîntului *M*, pe care au așezat-o fie înaintea literelor care arăta numărul, fie sub ele.

Astfel,

$$\overset{\gamma}{M},\delta\rho\nu\gamma=34\,153, \text{ fiindcă } \overset{\gamma}{M}=30\,000\ ;$$

$$,\delta=4\,000\ ;\ \rho=100\ ,\ \nu=50 \text{ și } \gamma=3$$

Cu acest semn grecii au putut scrie orice număr *pînă la* 99 999 999, o miriadă de miriade, sau, cum spunemnoi, o sută de milioane, număr pe care însă nu-l puteau scrie, deși îl pronunțau. Aceasta era situația în care se afla problema numerației pe vremea lu Arhimede. Se caula o posibilitate de a scrie și citi numerele mari. Arhimede a dat o soluție în cartea pe care a numit-o *Psammit* sau *Numărarea firelor de nisip*. Dar cred că ar fi mai bine să-l lăsăm pe el însuși să ne vorbească și nouă, așa cum i-a vorbit lui Gelon, regele Siracuzei și urmașului său Heron, în cartea despre care am amintit : „Există oameni, o, rege Gelon, care cred că numărul firelor de nisip este nesfîrșit de mare. Nu mă refer la nisipul care este în jurul Siracuzei și e răspîndit în Sicilia întreagă, ci chiar la acel care se află nu numai în ținuturile locuite, ci și în acelea nelocuite. Alții cred că numărul firelor de nisip nu-i infinit de mare dar că-i imposibil să-ți imaginezi un nu-număr mai mare. Dacă acei ce gîndesc așa și-ar închipui un volum de nisip care ar fi egal cu acela al pămîntului, care ar umple toate golurile sale și adînciturile mărilor și care s-ar ridica pînă în vîrful celor mai înalți munți, e evident că ar fi și mai puțin dispuși să creadă că ar putea exista un număr care să depășească pe acela al firelor de nisip. Cît despre mine, voi arăta prin demonstrații geometrice, pe care tu nu vei putea să nu le accepți, că printre numerele numite de noi în cărțile pe care le-am adresat lui Zeuxippe, există unele care întrec numărul firelor dintr-un volum de nisip egal nu numai cu acela al volumului pămîntului, ci încă cu al Universului."

— Cum așa? Pe vremea lui Arhimede oamenii credeau că nu există un număr mai mare?—a întrebat asistentul de la istorie.

— Da. Erau unii care credeau așa, iar alții că este imposibil să treci o *anumită* limită, de pildă aceea a numărului firelor de nisip de pe țărmul mării.

— De fapt, era normal să fie așa, o dată ce nu existau nici numiri și nici semne pentru scrierea numerelor mai mari de 10^8, adică o miriadă de miriade!—a întărit musafira noastră.

— 10^8 este o notație și o numire modernă — a precizat Teodor Solonar — căci grecii nu aveau notația exponențială pentru puterile unui număr și nu cunoșteau regulile de operații cu exponenți. Acestea le-a decoperit Arhimede. Ascultați cît de limpede o spune el însuși, după ce, în cartea despre care v-am vorbit, arată procedeul prin care poate determina atît volumul sferei ce ar cuprinde universul conceput de el, cît și pe acela al unui fir de nisip. „Acum cred că-i necesar să vorbesc despre numirile numerelor. Dacă n-aș spune nimic în această carte, mă tem să nu-i încurc pe acei ce nu au citit cartea pe care am adresat-o lui Zeuxippe. S-au dat nume numerelor pînă la o miriadă și dincolo de miriadă; numele ce s-au dat numerelor sînt destul de cunoscute, căci nu se face alta decît se repetă o miriadă pînă la zece mii de miriade. Numerele despre care vom vorbi și care merg pînă la o miriadă de miriade să le numim *primele numere* și să considerăm *o miriadă de miriade de unități ale primelor numere ca unități de numere secunde*; să numărăm cu aceste unități și cu zecile, sutele miile și miriadele acestor unități pînă la o miriadă de miriade. Să spunem că *o miriadă de miriade de numere secunde este o unitate a numerelor terțe*; să numărăm cu aceste unități, cu zecile, sutele, miile și miriadele acestor noi unități pînă la o miriadă de miriade: *o miriadă de miriade de numere terțe să se numească unitate de ordinul al patrulea* și să continuăm să dăm nume la numerele următoare pînă la o miriadă de miriade de numere compuse dintr-o miriadă de miriade de numere..."

— Te rog să te oprești! — am spus, simțind parcă deodată o amețeală. Ție, care ai citit aceste lucrări de mai multe ori și le-ai copiat pe hîrtie, îți par foarte clare. Desigur că și dumneavoastră, doamnă dar mie nu! Cred că același lucru îl va afirma și colegul meu. Aș vrea să traducem acum cele spuse de Arhimede în limbajul nostru și, abia după ce voi înțelege despre ce-i vorba, poți trece mai departe!

— Bine, să facem — a oftat cu încîntare prietenul Teodor. O miriadă $= 10\,000$ sau 10^4; o miriadă de miriade $= 10\,000^2 = 10^8$. Aceasta este o *octantă*, cum va spune Arhimede mai departe. Ea formează unitatea numerelor secunde. Cu această unitate el numără pînă la 10^8. Înseamnă că ajunge pînă la $10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}$ (adică $10^{2 \cdot 8}$) care se consideră ca unitate a numerelor terțe sau, cum le-am spune noi, a numerelor de ordinul al treilea. În general, deci $10^{m \cdot 8}$ va reprezenta unitatea numerelor de ordinul $(m+1)$.

— Bine, dar mi-ai spus că Arhimede nu cunoștea notația exponențială. Atunci cum a numit o miriadă de miriade o *octantă*?

— Habar n-am! Știu atît cît spune el, restul ia-l de bun așa cum îl auzi!

— Slab răspuns! Nu-mi rămîne decît să văd cum aș scrie ultima unitate, aceea a ordinului miriadelor de miriade! Trebuie să aibe forma $10^{8 \cdot 10^8 - 1}$, iar numărul ce urmează ultimului număr din această clasă se va scrie $10^{8 \cdot 10^8}$. Fantastic! Un număr pe care-l poți scrie, dar nu și imagina! Totuși lucrurile s-au mai limpezit și poți continua!

— Mulțumesc de îngăduință. Iată, dar, cum urmează Arhimede: „Cu toate că acest mare număr de numere cunoscute ar fi cu siguranță mai mult decît suficient, se poate totuși merge mai departe. Într-adevăr, să numim numerele despre care am vorbit *numere din prima perioadă*, iar ultimul număr din perioadă să-l numim *unitatea numerelor prime* din perioada a doua. Tot așa, o miriadă de miriade a primelor numere din perioada a doua să o numim unitate de ordinul al doilea din a doua perioadă... și să continuăm a da nume numerelor următoare pînă la numărul din a doua perioadă care ar fi egal cu o miriadă de miriade de numere compuse din miriade de miriade".

— Oprește-te, să socotim!

— Lasă-mă că dacă mă vei întrerupe așa după fiecare perioadă pe care o propunea Arhimede, vor trebui cîteva vieți pentru calculele tale. Să termin întîi, că nu mai am mult, și apoi ai să te lămurești. Dv. sînteți de acord cu mine, sau vă asociați cu rebelul meu prieten?

— Și noi și dumnealui vă rugăm să continuați.

— „Mai mult, ultimul număr din perioada a doua să fie numit unitatea primelor numere din perioada a treia și să continuăm a da nume tuturor numerelor pînă la o miriadă de miriade, care fac parte din perioada formată dintr-un miriad de miriade de numere de miriade de miriade". Ne oprim căci aici se termină și prezentarea sistemului de numerație propus de Arhimede, deși de aici înainte urmează partea cea mai interesantă a cărții.

— Cred. Dar ne consolează faptul că în lumea asta sînt foarte multe lucruri extraordinar de interesante, numai că bietul om nu le poate cuprinde pe toate nici măcar în gînd. Urmînd de unde am rămas, înseamnă că numerele din perioada a doua încep cu $10^{8\cdot 10^8}$ cele din perioada a treia cu $10^{2\cdot 8\cdot 10^8}$. iar ultimul număr în fața căruia se oprește Arhimede este acela din ultima perioadă a miriadelor de miriade, care se va scrie $10^{8\cdot 10^8\cdot 10^8} = 10^{8\cdot 10^{16}}$ adică 1 urmat de optzeci de cuatralioane de zerouri!

— Număr pe care nici măcar nu ți-l poți imagina, fiindcă mi-ai spus că nu-ți poți imagina nici pe $10^{8\cdot 10^8}$. E. Kolman a calculat însă lungimea acestui număr, dacă cifrele sale ar fi scrise unele lîngă altele așa de strîns ca fiecare zero să aibă numai lățimea de un milimetru! În această ipoteză a arătat că pentru a-l scrie ar trebui o întindere care să depășească de 500 de ori distanța Pămînt-Soare!

— Dar numărul firelor de nisip? A calculat într-adevăr Arhimede cît e de mare?—am întrebat eu curios.

— A, da, el se află printre numerele din prima perioadă și anume, după cum spune Arhimede, „este mai mic decît o mie de miriade de unități a numerelor de ordinul al 8-lea", adică este mai mic decît $10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{7\cdot 8} = 10^{63}$.

— Așadar, iată încă un argument care pledează pentru teza autenticității problemei taurilor, domnule Solonar:

Arhimede își crease numerele cu care să jongleze în această problemă! Întrebarea este dacă se mai găsea cineva — nu îndrăznesc să mă gîndesc că ar fi putut exista prea mulți — care să poată mînui numerele mari, fiindcă altfel problema risca să rămînă fără răspuns!

— Fără răspuns a rămas ea atunci oricum, dar de găsit se mai găseau și alții atinși de delirul numerelor mari. Mai întîi de toate era Apolloniu din Perga, savant renumit care se impusese lumii matematice prin cele opt cărți asupra secțiunilor conice; se pare că a trăit între 260 și 200 î.e.n. El a stat multă vreme în Alexandria și, după cum o spune singur în prefața la *Cartea* I a secțiunilor conice, a cunoscut corespondența lui Conon. Din Alexandria, Apolloniu a fost chemat la curtea regelui Attalos din Perga. Acolo a petrecut vreme îndelungată în tovărășia altor matematicieni. Dar între Arhimede și Apolloniu, mai tînăr decît Arhimede cu vreo 20 de ani, nu au existat, pare-se, raporturi de prietenie, ci tocmai contrare Vrajba s-a încins, așa cum se întîmplă de multe ori, ațîțată de zelul prietenilor, atunci cînd au apărut cărțile lui Apolloniu despre *Secțiunile conice*. Arhimede scrisese și el despre secțiunile conice înaintea lui Apolloniu și, cînd a apărut lucrarea lui Apolloniu, aceștia l-au acuzat că l-a plagiat pe Arhimede. Injuria era neîntemeiată, căci Apolloniu a declarat în prefața cărților sale că el nu a urmărit alta decît să sistematizeze și să generalizeze toate descoperirile făcute anterior. Se pare că Apolloniu nu a uitat această jignire și nici nu a iertat-o. De aceea, atunci cînd au apărut cărțile lui Arhimede *Despre măsurarea cercului* și *Despre denumirea numerelor*, Apolloniu le-a răspuns printr-o lucrare intitulată batjocoritor *Okitókion* (Nașteri rapide). Lucrarea aceasta este astăzi pierdută. Ea e cunoscută doar din comentariile lui Eutocius asupra operelor lui Arhimede. Eutocius observa că Appoloniu stabilea și un mijloc mai precis decît al lui Arhimede pentru calcularea valorii aproximative a numărului π cu patru și nu cu două zecimale exacte, iar în legătură cu problema numerației Apolloniu opune metodei octantelor, imaginată de Arhimede, un sistem de numerație mai comod cu miriade. Acest nou sistem nu se deosebește de al nostru decît prin aceea că în fiecare clasă sînt patru ordine (unități, zeci, sute și mii), în loc de trei. Aici zecile de mii sînt unitățile de ordinul întîi din clasa imediat următoare, pe cînd în sistemul actual miile sînt unitățile clasei superioare. În acest sistem, miriada de miriade, adică octanta lui Arhimede, este numită miriadă dublă, iar $10\,000^3$ — miriadă triplă ș.a.m.d.

— Extraordinar! Acum bănuiesc care-i dezlegarea misterului problemei taurilor! —am exclamat fără să vreau.

— Într-adevăr, aveți dreptate — mi-a răspuns tînărul prieten, încercînd o mină de om necăjit. Dumnealor discută acum numai între ei, de parcă noi am fi cu totul străini de problemă!

La această observație am rîs satisfăcut, iar mucalitul meu prieten a adăugat:

— Totuși, să știți că nu vă las ultimul cuvînt! Așa că vă mai citesc ceva. Iată ce viu și plastic și-l imaginează S.I. Lurie, în cartea pe care a scris-o despre Arhimede, pe autorul problemei taurilor cînd i-a trimis problema lui Eratostene, ca o provocare față de Apolloniu: „Credeai că ai să mă întreci în arta numerației? Ceea ce ai făcut în *Okitókion* nu reprezintă adevărata înțelepciune! Încearcă să rezolvi problema propusă de mine și atunci voi recunoaște că ești învingător!"

Replica ne-a plăcut mult și toți trei ne-am arătat satisfăcuți prin mulțumirile adresate prietenului meu, ceea ce l-a pus în încurcătură.

— Priviți, deasupra Runcului cerul s-a înseninat, a spus, fericit că a găsit un divertisment.

— Era și natural—l-a ajutat colega lui. Minunîndu-se de sîrguința noastră, norii au vrut să ne aplaude, dar, cînd au încercat să o facă, s-au risipit!

— Ce-ar fi să o luăm într-acolo?—a propus prietenul Teodor. V-aș arăta eu pe unde alergam după veverițe, cînd m-a adus tata aici la liceu.

— Încaltea să ne spui și cum te-a urechiat profesorul tău de latină din cauza lor!

— Nu era ora de latină, ci cea de greacă. Și, după cum vezi, plătesc acum ceea ce i-am rămas dator atunci, cînd din cauza unei veverițe cu ochișorii sperioși și cu coada zbîrlită, nu-mi învățasem paradigmele!

PROBLEMA NUMERELOR PRIETENE ȘI ALE ALTOR ȘIRURI DE NUMERE ÎNTREGI

Cînd am primit scrisoarea pe care mi-a trimis-o prietenul meu Teodor Solonar, am înțeles că-i bolnav și am plecat imediat la Cîmpulung. Slăbise mult, avea o paloare care nu mi-a plăcut, dar nu-și pierduse prospețimea sufletească și nici buna lui dispoziție.

— Bine, măi Toa, i-am spus după ce ne-am băut cafelele, de ce nu mai zăbovești și tu în pat, așa cum îi plăcea lui Descartes să o facă? De ce umbli, fără noimă, de ici pînă colo, dacă vezi că nu ți-e bine?

— Poate fiindcă nu vreau să mor în pat!

— Las' că încă nu ți-e nasul de moarte!

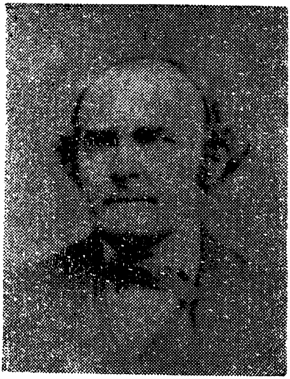
— Asta n-o știe nimeni, da' oricum, aruncă omul și cîte o vorbuliță mai anapoda atunci cînd îi sîcîit de cel mai bun prieten al lui.

— Din vorbulițele tale înțeleg că habar n-ai ce înseamnă *prietenia*, așa că te sfătuiesc să citești *De amicitia* lui Cicero!

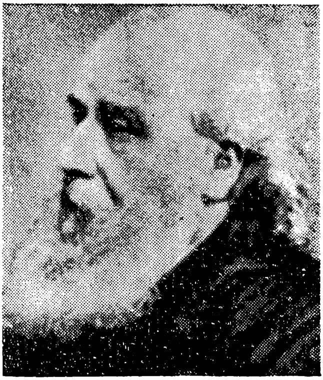
— Ba să am iertare, ca și Cicero consider că „prietenia înseamnă acordul perfect în toate problemele omenești". Așadar, mai meditează tu la Cicero și privește starea mea de acum, cu aceeași indiferență ca și mine, cu alte cuvinte fii „un alt eu", ca să folosec formula lui Pitagora.

— Eu credeam că expresia aceasta, *alter ego*, devenită proverbială de cînd a folosit-o Cicero, a inventat-o Ennius și nu Pitagora.

— Pitagora a trăit cu cel puțin trei secole înaintea lui Ennius așa că nu a putut-o lua el de la Ennius. Dar ce rost ar avea să ne certăm din această pricină cînd toți cîți au scris despre prietenie, Platon în *Lysis*, Aristotel în *Etica nicomahică*, Plutarh, Montaigne și atîția alții din timpurile noastre, oricît de meșteșugite le-au fost vorbele tot n-au mai adăugat nimic peste lapidarul *alter ego* ; de pildă, ce spune mai mult Emerson, în eseul lui *Despre prietenie*, cînd arată că : „singura cale ca să ai un prieten este ca tu însuți să fii unul"?



Arthur Cayley



James Sylvester

Drept răspuns l-am întrebat :

— Ce-ar fi dacă, urmînd cărarea pe care ai apucat-o, te-ai opri pe domeniile matale şi mi-ai prezenta *numerele prietene*? De atîtea ori mi-ai tot promis că ai să o faci!

Teodor Solonar m-a privit lung, nuanţa verzuie a ochilor lui sclipea sub sprîncenele-i castanii, stufoase. Am crezut că va încerca să amîne iar această discuţie, dar el s-a îndreptat înspre dulapul cu cărţi, a luat un caiet şi după ce l-a pus pe masă mi-a spus :

— Cicero a scris *De amicitia* fiindcă i-a cerut prietenul lui, Atticus, eu am scris *Despre numerele prietene*, chiar mai înainte de a mi-o fi cerut tu. Iată dovada.

— Nu-mi venea să cred, gestul mă răscolise, dar ca să nu se observe l-am înfruntat :

— Mare hoţoman mai eşti! Matale te-ai pregătit pe-ndelete şi eu mă minunam de cele ce-ţi ieşeau din gură ! Mă tem că dacă te lăsam să continui m-ai fi înşirat pe nerăsuflate şi cîteva perechi de prieteni celebri !

— Cred şi eu ! Ascultă! Ahile şi Patrocle, Teseu şi Piritus, Oreste şi Pilade. Asta din mitologie şi dacă ai uitat poveştile lor, sînt gata să ţi le împrospătez. Acum las la o parte alte perechi celebre ca să-ţi prezint numai o pereche de matematicieni Arthur Cayley şi James Joseph Sylvester, despre care tare mi-ar face plăcere să-ţi vorbesc odată, altădată!

— Recunoaşte deci că m-ai tras pe sfoară!

— Nici vorbă de aşa ceva. Am fost silit de împrejurări!

— Lasă gluma și spune-mi serios de ce te-ai hotărit să alegi acest subiect?

— Îţi jur că niciodată n-am vorbit mai serios ca acum! Am fost silit de împrejurări și dacă nu mă crezi, iată faptele: Acum vreo cîteva săptămîni, m-am pomenit cu un cunoscut de-al meu care a venit să mă întrebe, ce știu eu despre numărul 220? Am bănuit îndată despre ce putea fi vorba, dar eram curios să aflu cum a ajuns el, avocat de meserie, la acest număr și l-am întrebat. Drept care m-a privit pe deasupra ochelarilor, a scos o hîrtie din buzunar și mi-a spus:

— Ascultă aici ce am citit într-un roman a cărui acțiune se petrece în Evul Mediu: Ca să-și asigure protecția unui senior ce-l dușmănea, un cavaler a trimis acestuia un dar foarte curios fiindcă l-a potrivit în așa fel ca să cuprindă exact 220, de bucăți. Anume, saci de grîu, de poame uscate, vase de vin de ulei, oi, porci și la acestea a adăugat o pungă de bani, atîția la număr cît mai era nevoie ca împreună cu numărul celorlalte bunuri să ajungă la 220. Trucul i-a reușit, iar autorul romanului comentează această preferință a cavalerului, arătînd că numărul 220 era unul din perechea 220, 284, numită *numere prietene*, fiindcă fiecare dintre numere este astfel alcătuit încît părțile unuia îl formează, prin adunare, pe celălalt! După cum știi, eu n-am dus niciodată casă bună cu matematicile și am venit să-mi dai o mînă de ajutor, fiindcă ți-a mers buhul în tîrgul nostru, că nimeni nu te-ar întrece în această direcție! Te-aș ruga să mă lămurești căci mie nu-mi pare deloc logic, ca părțile unui număr — de pildă 220 — să dea prin adunare un număr mai mare decît el, adică 284 și nici că ar fi cu putință ca părțile lui 284 să micșoreze numărul, făcîndu-l egal cu 220!

— Ei, așa mai vii de-acasă — l-am întrerupt pe Teodor Solonar care se străduia să fie cît se poate de serios. Lucrarea ta îi este dedicată lui! Sînt chiar foarte curios să aflu cum l-ai ademenit pe stimatul avocat să dea tîrcoale matematicilor? Îmi pare tare rău că nu am fost și eu de față!

— Nu regreta nimic, fiindcă am să-ți redau cu fidelitate convorbirea dintre noi. Mai întîi m-am încredințat că pentru el numerele nu însemnau altceva decît un mijloc de a stabili relațiile financiare, buget, economie... A trebuit să încep a-i prezenta și o altă față a lor. I-am arătat că există *numere prime* și *numere compuse*, că, de exemplu, numerele 3 sau 5 sau 7 sînt prime fiindcă nu se împart decît cu ele însele sau cu unu, care de altfel împarte toate numerele, pe cînd 6 sau 30 sînt numere compuse, fiindcă au și alți divizori, căci 6=2 · 3 iar 30=2 · 3 · 5. I-am atras apoi atenția că aceste numere, 6, 30 şi celelalte de acest fel, se prezintă ca un produs de factori primi, că 6 are ca factori primi pe 2 și pe 3 și așa mai departe. Lucrurile păreau să meargă destul de bine și de aceea am atacat îndată miezul problemei, adică l-am pus să-l descompună pe 220 în factori primi. A făcut-o, dar cînd a constatat că ei sînt 2, 2, 5 și 11 mi s-a înfundat. Numai ce-l văd că-şi şterge ochelarii, se scarpină în cap și-mi spune:

— Bine, profesorașule, parcă era vorba să-mi dovedeşti că părțile lui 220 fac 284 și nu 2+2+5+11 adică 20!

— Pariez că, luat așa prin surprindere, ai tăcut chitic, nu-i așa? —l-am întrebat amuzat la culme de cele ce-mi povestea.

— Da, a spus Teodor Solonar. Nu înțelegeam ce l-a apucat! Schimbase și tonul și era așa de satisfăcut că m-a prins cu ocaua mică, încît dintr-odată, am înțeles că puteam dezumfla balonul cu o înțepătură de ac, mi s-a făcut milă de el, și n-am făcut-o. Mi-am cerut scuze că nu i-am atras atenția asupra deosebirii ce există între factorii primi ai unui număr și divizorii lui, care se mai numesc și *părțile lui alicote*, că divizorii unui număr nu sînt numai factorii lui primi, ci și produsele formate de aceștia. I-am arătat că la aceste părți făcea aluzie comentatorul și că tocmai într-acolo aveam de gînd să-l îndrept cînd a intervenit el cu observația aceea oarecum pripită. Reluînd calculele, am adăugat și pe unu printre factorii primi și atunci a putut constata că, într-adevăr, prin adunarea părților lui 220: 1+2+4+5+10+20+11+22+44+ +55+110, se obține exact 284.

— Cred că s-a bucurat cînd a stabilit acest rezultat, nu-i așa?

— Nu prea! Mai degrabă cred că a fost dezamăgit că nu m-a putut înfunda, fiindcă nu l-am auzit pronunțînd decît „mda". Aveam impresia că-i slăbise și elanul — făcuse probabil un prea mare efort matematic! — eu însă m-am încăpățînat să duc lucrul pînă la capăt, așa că i-am propus să descompunem şi pe 284 în factori ca să se convingă că și „inversul" este adevărat. De data aceasta s-a orientat cu ușurință, a notat pe hîrtia lui rezultatul 1+2+4+71+142=220, apoi a îndoit hîrtia, a pus-o în buzunar și s-a sculat. Mi-a întins mîna cu un zîmbet politicos, luîndu-și rămas bun: Așadar, asta a fost toată filozofia și toată taina?

Iar m-a apucat, nu știu cum, o jale de uscăciunea din sufletul omului acesta și m-am decis să picur în el un strop de desfătare. Am început să-i spun că pe aceste două numere Pitagora le-a numit *numere prietene*, și i-am arătat de ce, apoi că ele au interesat prin proprietatea care o au, pe mulți matematicieni greci și arabi din Evul Mediu și din Europa apuseană și chiar pe matematicienii din zilele noastre. Mă bucuram văzînd cum i se destinde chipul, a zîmbit, și mă pregăteam să-l opresc ca să bem o cafea și să-i arăt cît de interesante sînt problemele din teoria numerelor, că Fermat era și el jurist, cînd îl aud spunîndu-mi :

— Ca să vezi cu ce-și pot bate oamenii capul! Curat vorba bătrînească : Satul arde și baba se piaptănă! Auzi aiureală : „Numere prietene". Nu-s oamenii prieteni și au să fie numerele! După ce am închis ușa în urma lui, m-am întors la masa asta de lucru, am început să răsfoiesc cărți, și note și să-mi notez în acest caiet tot ce-am putut. În același timp, ca plăcerea să-mi fie deplină, am citit sau recitit toate cărțile despre prietenie ce mi-au căzut în mînă și mi-am notat cîteva păreri pro și contra ei. De pildă, acestea a lui Aristotel din *Etica nicomahică* : „Prietenia este o virtute sau cel puțin a fost însoțită întotdeauna de virtute. În plus, este una dintre trebuințele cele mai necesare ale vieții, nimeni nu va accepta să trăiască fără prieteni, chiar dacă ar avea toate bunurile celelalte". Și părerea amărîtului de La Rochefoucauld: „Ceea ce au numit oamenii prietenie nu este decît o asociație, o menajare reciprocă a intereselor și un schimb de servicii, în sfîrșit, nu e decît o negustorie în care amorul propriu își propune ceva de cîștigat".

— Trebuie să recunosc, dragă Toader, că nu știi niciodată de unde sare iepurele. Eram cu adevărat gelos pe acest avocat și cînd colo, numai datorită lui am să mă pot lăfăi lîngă numerele ce au fost purtate la piept, drept talisman, secole de-a rîndul de către toți ce-i ce-și doreau să rămînă prieteni pe viață. Și tot lui trebuie să-i mulțumesc că te-a făcut să apreciezi „înaltele mele calități de ascultător"! Sper că ai tras concluziile cuvenite, anume că asemenea specie de prieten este o floare rară ce trebuie cultivată cu grijă, ca să nu se veștejească!

— Așa-mi trebuie dacă n-am avut ce face și nu te-am lăsat să-ți închipui că ești mai tare ca Sherlock Holmes, așa-mi trebuie dacă am vorbit ce nu trebuia!

— Atunci repară și spune numai ce trebuie. De pildă, povestea lui Iamblic cu care amicul matale nu a fost de acord!

— Bine dar tu o cunoşti! Totuşi dacă vrei s-o mai auzi, aşteaptă să aduc, şi cafelele ce au rămas nefăcute de atunci!

— Bine zis, că nu-i pentru cine se găteşte! Eu deschid caietul pînă atunci. A, uite! văd aici că povestea se află în *Comentariile* lui Jamblic la *Aritmetica* lui Nicomah din Gherasa, care a scris această carte prin jurul anului 100 al erei noastre.

— Se spune, — a început prietenul meu povestea după ce a pus cafelele pe masă, că odată a venit cineva la Pitagora şi l-a rugat să-i arate cum ar trebui să fie doi oameni, unul faţă de altul, ca să se poată numi cu adevărat prieteni? Să se comporte ca numerele 220 şi 284, a răspuns Pitagora, fiindcă aceste numere sînt astfel că fiecare din ele este format din suma părţilor celuilalt, adică fiecare este un alt eu.

— Nu cred că a fost vreodată o mai adîncă definiţie a prieteniei! Pitagora a putut-o găsi, fiindcă pentru el, universul întreg, precum şi toate părţile lui, se abstractizau în numere. Cînd a impus condiţia ca unul dintre numere să fie suma divizorilor celuilalt, să cuprindă adică tot ce are celălalt număr mai intim în fiinţa lui, el a transpus aceeaşi condiţie la oameni: toate gîndurile, toate aspiraţiile, toate preocupările unuia să aibă sălaş în sufletul celuilalt. Or, ca să se petreacă acesta, oamenii nu pot fi luaţi la întîmplare, după cum nici numerele nu-s oarecari, ci nu mai 220 şi 284. Cînd am terminat, Teodor Solonar a luat caietul şi l-a răsfoit. Apoi mi-a spus:

— Cred că Cicero a cunoscut această definiţie a lui Pitagora şi s-a gîndit, ca şi tine, la semnificaţia ei. Uite ce scrie el în *De amicitia*: „Natura, mai mult decît necesitatea, dă naştere prieteniei, ea are la origine o chemare a inimii şi un sentiment de afecţiune şi nicidecum gîndul la foloasele pe care le-ar putea trage". Cîtă deosebire între el şi La Rochefoucauld, sau Helvetius care scria: „Nu există prietenie fără interes; ar fi un efect fără cauză".

— Constat că-ţi place să te abaţi din drum! În locul lui Helvetius îl prefer pe sirianul Iamblic, care după cîte ştiu a scris mai multe cărţi despre Pitagora.

— Da, a scris 9 cărţi, însă nu s-au păstrat decît patru. În ele se cuprind cele mai multe informaţii ce le avem despre şcoala lui Pitagora, numai că redate după vreo mie de ani!

— Şi de la Iamblic pînă acum au trecut peste 1 500 de ani. Ce înseamnă însă veacurile pentru noi? Jonglăm cu ele mai bine decît artiştii de la circ cu farfuriile sau făcliile aprinse!

— Prea prezumţioasă ţi-e afirmaţia! Mai degrabă cred că ne strecurăm printre veacurile trecute ca să savurăm farmecul și suavitatea unor probleme pe care trecerea acestor veacuri nu le-a stins, de pildă numerele prietene sau alte proprietăți ale numerelor, stabilite de pitagoreici.

— Rămîn la părerea mea, eu am senzația că jonglez cu veacurile prefăcute-n farfurii sau în torțe; pe acestea le arunc cu o anumită măiestrie în urma mea și iată-mă ascultîndu-l cu înfrigurare pe Pitagora însuși, tălmăcindu-mi legile Universului cu ajutorul numerelor... „singurele în stare să ne apropie de legile naturii, pe care numai înțelegîndu-le le putem stăpîni".

— Admir entuziasmul tău care a înfruntat și el zecile de ani și-mi pare rău că trebuie să-l mai temperez! E greu de afirmat cu certitudine ce a spus și ce a gîndit Pitagora, fiindcă el n-a scris nimic. Tot ce știm s-a păstrat numai prin tradiție, învăluit în legendă și scris de elevii din școala lui. Un fragment păstrat de la Philolaos, pitagorician de la sfîrșitul veacului V î.e.n., ar putea fi pus alături de cele ce afirmai tu mai înainte: „Tot ce se poate recunoaște are număr, căci fără de număr nu este posibil să cuprinzi ceva cu gîndul sau să recunoști".

— Admirabil! Spune-mi dacă această frază nu-i valabilă și azi, scrisă cu exact aceleași cuvinte ca și acum 2 400 de ani?

— Nu te contrazic decît numai ca să-ți atrag atenția că *înțelesul* cuvîntului *număr* nu mai este același ca pe vremea lui Pitagora. Aristoxen din Tarent, de pildă, care a trăit cu vreo sută de ani după Pitagora, afirma că Pitagora privea Aritmetica drept cea mai frumoasă și mai favorizată știință, fiindcă numai pentru ea lucrurile apar sub forma numerelor!

— Iar mi-ai dat apă la moara mea! Dacă nu mă-nșel Gauss, marele Gauss, a spus-o în plin secol al XIX-lea că „Aritmetica este regina matematicilor", adică nu a „spus", ci a repetat cele afirmate de Pitagora.

— Ai dreptate! El a făcut descoperiri de seamă în toate domeniile matematicilor, dar a îndrăgit îndeosebi *Teoria numerelor*, așa că era îndreptățit să spună că: „*Matematica* este regina științelor, iar *Aritmetica* regina matematicilor".

— Am citit odată, într-o carte, că matematicienii care fac atîta caz de logică, au o terminologie foarte puțin logică! Nu vreau să discutăm această chestie acum, dar mi-a venit în minte fiindcă te aud spunînd cînd *Teoria numerelor*, cînd *Aritmetică*. Știu bine că este o deosebire între aceste două denumiri, și de aceea aș vrea să o precizăm.

— *Teoria numerelor* este un termen mai nou, folosit din secolul al XVIII-lea pentru capitolul din *Aritmetică* ce se ocupă numai cu studiul proprietăților numerelor întregi. Cînd Gauss vorbește de *Aritmetică*, el se referă, de fapt, la *Teoria numerelor*. *Aritmetica* însă (de la *arithmos* care în grecește înseamnă *număr*) studiază proprietățile tuturor numerelor întregi, raționale și iraționale precum și metodele practice privind operațiile cu numere și, de asemenea, problemele legate de diferite sisteme de numerație. La greci însă, *Aritmetica* era știința numerelor întregi, adică exact ceea ce numim azi *Teoria numerelor*.

— Știu că Pitagora și toți matematicienii greci de după el, inclusiv Euclid, considerau ca numere numai întregii, iar fracțiile și numerele iraționale erau privite drept mărimi care exprimau o măsură, uneori prin numere întregi, dar alteori nu. Știu că operațiile elementare dintre numere erau explicate în *Logistică*, cuvîntul *logistiki* avînd chiar înțeles de „calcul numeric". Acum e clar că atunci cînd vom vorbi de *Aritmetica* grecească ne vom referi la ceea ce azi se numește *Teoria numerelor*. Nu s-ar putea spune că *numerele întregi* au exercitat o cruntă tiranie asupra matematicienilor greci ?

— Ba da, dar era o tiranie care le era pe plac ! Egiptenii, babilonienii, hindușii sau alte popoare din antichitate au privit numerele dintr-un punct de vedere mai realist, care se aseamănă cu cel de azi și numai datorită acestei concepții generale despre număr s-au putut dezvolta metodele practice de calcul și tehnica lui. În schimb, grecii au transferat problemele legate de fracții și de numerele iraționale în domeniul geometriei și eliminînd problemele practice, au putut stabili acele minunate proprietăți ale numerelor întregi, care au delectat antichitatea, pe matematicienii din Evul Mediu, din Renaștere și din Epoca modernă.

— Dacă mă gîndesc mai bine, mi se pare că înțeleg de ce grecii au crezut că numai întregii sînt numere. Deși în natură se întîlnesc ambele înfățișări distincte și opuse : *discretul* și *continuul*, *discretul* e singurul care se numără, pe cînd *continuul* se măsoară. Lucrurile vii nu se pot împărți : o jumătate de vacă nu mai rămîne vacă vie care să dea lapte un sfert de ou nu mai este un ou și din el nu va mai ieși un pui, aceste obiecte se păstrează numai ca unități indivizibile. Mulțimea lor *se numără* și rezultatul *numărării* se exprimă prin numere întregi. Teoria atomică a lui Democrit sau mulțimea stelelor de pe cer pledează pentru unitățile indivizibile. Tot stelele însă, prin mișcarea lor neîntreruptă pe bolta cerească, ca de altfel și drumul descris de un pește în apă, de o pasăre în zbor, oferă imaginea mărimilor continue. O jumătate de măsură de miere sau de lapte are sens și obiectul nu-și schimbă identitatea după cum un sfert dintr-un ogor poate fi lucrat exact ca și cum ogorul nu ar fi fost împărțit. Acestea sînt exemple de mărimi continue care nu se mai *numără* ca mărimile discrete, ci *se măsoară* ! Totul este număr, a spus Pitagora, totul curge, spune Heraclit. Grecii au separat ceea ce de fapt se împletește și nu se poate separa, dar în felul acesta au putut păstra și cea mai simplă, cea mai naivă și cea mai plastică noțiune de număr. Cîndva, cînd ai încercat să-mi spui ce se înțelege azi prin număr, m-am încrîncenat, nu era de mine. Hai să mai zăbovim în preajma lui Pitagora și să-mi arăți unele dintre proprietățile numerelor întregi pe care le-a descoperit el sau la care a cugetat.

— Mai întîi să facem o precizare. Nu e vorba de numerele întregi, ci de *numere naturale*. În mulțimea numerelor întregi se cuprinde și *zero* și *numerele negative*, care nu făceau parte din mulțimea numerelor considerate de Pitagora. În privința proprietăților numerelor naturale, cred că cea mai veche descoperire rămîne deosebirea dintre numerele *pare* și *impare*. Opoziția dintre *par* și *impar* forma chiar una dintre cele 10 categorii filozofice ale pitagoreicilor, dintre care cinci erau exprimate chiar în termeni matematici.

— Le știi și pe celelalte patru ?

— Nu, dar le am notate aici în caiet. Iată-le : *unu-multiplu, limitat-nelimitat, drept-curb, pătrat-nepătrat*. Și, ca să vezi cîtă atenție și cît de la modă era problema par-impar, uite că am notat, tot aici în caiet, un fragment din Epiharm, datînd din secolul V î.e.n.

— Da ? Trebuie să fie Epiharm din Siracuza, care a scris mai multe comedii.

— Întocmai, și de aici poți deduce că preocuparea nu aparținea numai matematicienilor, ci se răspîndise de pe atunci, în cercurile mai largi. Iată ce scria el : „Dacă cineva vrea să adauge o piatră la un număr impar sau chiar la unul par, sau să ia o piatră dintre cele care există, crezi oare că numărul are să rămînă la fel ?" Un secol mai tîrziu, Aristotel scria : „Aritmetica răspunde la întrebarea: ce este imparul, parul, un pătrat, un cub".

— Văd că în cele două citate, în primul direct, în celălalt indirect, se face aluzie la folosirea pietricelelor pentru numărare. Ştiu că de obicei erau alese pietricelele de aceeaşi mărime şi formă.

— Da, numai că numele de „calcul“ se trage de la numirea latinească a pietrei şi nu de la numirea grecească „psifi“ care avea înţeles mai degrabă de literă, ca semn.

— Poate fiindcă romanii au folosit pietrele în abacele cu care efectuau, de fapt, calculele practice, socotelile, pe cînd grecii se jucau cu ele, imaginînd figuri geometrice şi numărînd cîte pietricele le cuprind. Poate că, de multe ori grecii nici nu mai foloseau pietre adevărate, ci le înlocuiau cu puncte pe care le deseanu. În felul acesta, ei au descoperit şi au izolat şiruri întregi de numere, care se formau după anumite legi, aveau anumite proprietăţi şi se reprezentau prin aceleaşi figuri. De aici şi numele de *numere figurative* care le-au rămas pînă azi.

Probabil că la asemenea numere s-a referit Aristotel cînd a numit pătratul sau cubul ?

— Da. Uite de pildă prin *numere triunghiulare* se înţeleg acelea în care pietrele, sau punctele, se pot aşeza sub formă de triunghi dreptunghic sau isoscel :

0	0	0	0
	0 0	0 0	0 0
		0 0 0	0 0 0
			0 0 0 0 ....
1	3	6	10

Dacă te uiţi la ele, vezi că asemenea numere se formează prin adunarea succesivă a numerelor din şirul natural :

$$1,\ 1+2=3,\ 1+2+3=6,\ 1+2+3+4=10, \ldots$$

În acelaşi timp, aceste numere, fiind în progresie aritmetică cu raţia 1, ştii că suma lor, dacă numărul termenilor se notează în general cu n, este dată de formula $1+2+3+\ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$, or, această formulă are o interpretare geometrică. Ea este aria unui triunghi cu baza n şi cu înălţimea $n+1$ sau invers. Aşadar, iată numirea justificată. Cît despre *numerele pătrate* :

	0 0	0 0 0	0 0 0 0
0	0 0	0 0 0	0 0 0 0
		0 0 0	0 0 0 0 ...
			0 0 0 0
1	4	9	16

ele se obţin prin însumarea numerelor impare consecutive :

$$1,\ 1+3=4,\ 1+3+5=9,\ \ldots$$

Aplicînd aceeaşi regulă, a progresiilor aritmetice cu raţia 2, şirului format din n numere, rezultă :

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

De aceea, numerelor pătratice li s-au spus prin prescurtare *pătrate* şi azi se spune tot aşa : 25 este pătratul lui 5, iar 5 este *rădăcina pătrată* a lui 25 ! Grecii nu spuneau rădăcină pătrată, ci mai sugestiv, *„latură“* : „Pătratul 25 are ca *latură* pe 5“. Numerele pătrate se pot obţine şi prin alăturarea a cîte două numere triunghiulare egale ; în acest caz, una dintre baze se suprimă, după cum vezi uşor de pe figură. Aceasta revine la a aduna două numere triunghiulare consecutive :

$$\frac{(n-1)\,n}{2}+\frac{n\,(n+1)}{1}=\frac{n}{2}(n-1+n+1)=n^2.$$

Metoda de a deduce *numerele poligonale* din numerele triunghiulare a fost generalizată de către Hipsicle din Alexandria, care a trăit prin secolul II î.e.n. El a stabilit şi o formulă care exprimă numerele ale căror puncte se pot aşeza sub forma unui *pentagon regulat* (pentagonale), sau sub formă de hexagon (hexagonale) etc. Notînd cu p numărul laturilor poligonului respectiv, formula stabilită de el este :

$$n_p=\frac{1}{2}\,n[2+(n-1)(p-2)].$$

— Ia să vedem ce dă această formulă pentru pătrat :

$$n_4=\frac{1}{2}\,n[2+(n-1)\cdot 2].$$

Aşadar regăsesc, cum era şi de aşteptat, pe n^2.

— După cum ţi-am arătat, suma numerelor impare consecutive generează pătratele. Suma numerelor pare consecutive dă naştere la *numerele dreptunghiulare* :

	0 0 0	0 0 0 0
0 0,	0 0 0	0 0 0 0
		0 0 0 0 , ...
2	6	12

$$2,\ 2+4=6=2\cdot 3,\quad 2+4+6+=12=3\cdot 4,\ \ldots$$

$$2+4+6+\ldots 2n=n(n+1).$$

Euclid

Toate aceste feluri de numere reprezintă arii de figuri plane, de aceea se numesc, cu un cuvînt, *numere plane*. Aceasta fiindcă se pot imagina și *numere solide*, punctele lor fiind așezate în straturi succesive care să formeze o piramidă, un paralelipiped, sau un cub, iar expresia lor generală va fi un produs de trei factori, ca de pildă, în cazul paralelipipedelor, $N=n(n+1)(n+2)$ sau a cuburilor, $N=n^3$.

— Bine, să zicem că puterea a treia a unui număr este considerată de matematicianul grec drept volumul cubului de latură n, dar puterea a patra ?

— Nu știu dacă au ajuns la ea. În acest caz, desigur că au avut oleacă de bătaie de cap cu asemenea numere, dar de obicei ei evitau problemele ce nu le conveneau. Știi bine cîte dificultăți existau din cauza condiției de a rezolva problemele de geometrie folosind numai rigla și compasul. Însă metoda de a privi numerele sub forma de produse i-au făcut să descopere și numerele care nu se descompun în factori, adică *numerele prime*, numere numite de ei „rectilinii" sau „liniare". Stabilirea proprietăților acestor numere i-au preocupat mult pe greci. În cartea a VII-a a *Elementelor*, Euclid le definește astfel : „11. Număr prim este acela pe care-l măsoară numai unitatea". Spre deosebire de Euclid, dar fără să-l contrazică, Aristotel spunea că : „pe un număr prim nu-l măsoară nici un număr" !

— Înțeleg de ce ! Aristotel considera că unu nu era număr, ci *unitatea* din care se formau numerele, așa că nefiind număr, Aristotel are dreptate. Euclid credea la fel. În prima definiție din *Cartea a VII-a* găsim : „Unitatea este aceea potrivit căreia fiecare lucru se numește unu“ și definiția a doua : „Iar număr o mulțime compusă din unități“. Așadar, *unitatea* și nu numărul *unu* măsoară numărul prim !

— Ai explicat mai bine decît aș fi fost eu în stare să o fac !

— Te cred, m-ai descălit atîta cu Euclid al tău că, de multe ori, în loc să iau un roman de aventuri iau *Elementele* traduse de Victor Marian și mă uit prin ele. Mai ales că le am de la tine !

— Te rog lasă dulcegăriile de o parte ! Văd că te lauzi cu definițiile din *Cartea a VII-a,* îți mai amintești poate vreuna ?

— Desigur, trec peste acelea care stabilesc numărul *pereche,* sau *nepereche,* sau *pereche ori pereche* sau *nepereche ori nepereche* sau *pereche ori nepereche* și mă opresc la definiția 22 : „*Număr perfect* este acela care este egal cu părțile sale“. Dacă nimeni nu te-a întrebat despre numerele perfecte, uite că o fac eu, rugîndu-te să-mi explici ce-au mai găsit oamenii și la acest fel de numere ? Or, poate acest subiect nu se găsește printre filele caietului de pe masă ?

— Ba da ! Tot căutînd articole despre numerele prietene, am dat peste unul, apărut în revista americană de istoria matematicilor, pe nume „Scripta mathematica“, publicat în 1946 de către E.B. Escott, pe care te-aș ruga să-l cauți aici în caiet !

— Doar nu s-o fi intitulat „despre numerele perfecte“ !

— Nu, ci „despre numerele prietene“. După ce-l găsești, citește te rog cum începe !

— „Teoria numerelor a fost continuu studiată din timpul lui Pitagora pînă acum. Două subiecte preferate au fost „*numerele perfecte* și *numerele prietene*“. Însă, după ce dă definiția numerelor perfecte și îl amintește pe $6=1+2+3$, văd că nu se mai ocupă de ele, ci numai de cele ce sînt anunțate în titlu.

— Și ? Nu ajunge un ciomag la un car de oale ? Ori crezi că alte cărți sau reviste nu mai pomeneau de ele ? De altfel, nu știu dacă ai trecut mult dincolo de pagina cu definiții din *Cartea a VII-a* a lui Euclid sau ai preferat să rămîi la ele ca să le pătrunzi ? Mă îndoiesc că ai ajuns pînă la teorema a 36-a din cartea a IX-a a *Elementelor.*

— Da, o cunosc, este o teoremă foarte indigestă, nu numai în demonstrație, dar și ca enunț. De aceea chiar aveam de gînd să o discutăm, dar mai bine să-ți spun întîi o șaradă. Iată despre ce-i vorba : Lucian povestește că la Pitagora a venit odată un negustor care l-a rugat să-l învețe filozofia. Drept răspuns, Pitagora i-a zis : „Te voi învăța să numeri !" Deziluzionat, negustorul i-a răspuns : „Asta o știu eu foarte bine !". „Atunci numără", i-a replicat Pitagora și negustorul a început : „unu, doi, trei, patru, ..." Pitagora i-a făcut semn să tacă și i-a sus : „Te opresc aici căci ceea ce iei dumneata drept *patru* este *zece*, un număr perfect și simbolul nostru".

— Cunosc anecdota și bănuiesc eu ce te doare! Vrei să-mi arăți că Pitagora nu știa ce spune, căci 10 nu-i un număr perfect, fiindcă suma divizorilor lui : $1+2+5=8$ este mai mică decît 10, așadar un număr neperfect.

— Exact! Și cu asta sper că te-am făcut praf nu numai fiindcă ai putut constata cît de înalte sînt cunoștințele mele, dar și pentru că nu prea văd cum ai să ieși din încurcătură!

— Da, grea problemă cînd ai de-a face cu cărturari luminați. Negustorul acela trebuie să se fi minunat de răspunsul lui Pitagora și dacă nu a fost înfumurat și i-a urmat învățătura, a aflat îndată că Pitagora îi arătase numerele triunghiulare: 1, 3, 6, 10. Zece este al *patrulea număr triunghiular* și, mai mult, el este un triunghi perfect, fiindcă aria lui se exprimă prin decadă. Aici *perfect* nu este folosit cu înțelesul strîmt al unei categorii de numere, tot așa după cum mai tîrziu, prin secolul II, Theon din Smirna numea *perfect* pe numărul 3, fiindcă „el este primul număr care are început, mijloc și sfîrșit și este, totodată, liniar și plan!"

Apoi, Teodor Solonar a adus o carte cu copertă albastră și mi-a întins-o, privindu-mă șugubăț :

— Uite, la pagina 87 ai să găsești teorema care te-ar fi „surmenat" dacă ai mai fi stăruit să o dezlegi. A căpătat o formă modernă, frumoasă și ușor de înțeles. După cum vezi, cartea a fost compusă la Iași de către un colectiv condus de către binecunoscutul profesor al Universității din Iași și multă vreme rectorul ei, doctor docent Ion Creangă.

Am luat cartea pe care mi-a întins-o prietenul meu. Avea ca titlu : *Introducere în teoria numerelor* și la pagina indicată am găsit teorema cu numărul 5.3 : „Condiția necesară și suficientă ca un număr natural par n să fie perfect este ca n să fie de forma :

$$n=2^t(2^{t+1}-1)=2^t \cdot p,$$

unde t este un număr natural, iar p este un număr prim". Nu-mi venea să cred că-i aceeaşi teoremă cu ce din *Elemente* şi de aceea doream să o compar. Am găsit-o şi i-am citit-o prietenului meu : „Dacă oricîte numere începînd cu unitatea se pun pe rînd în proporţie dublă pînă ce suma tuturor devine un număr prim, şi dacă suma înmulţită cu ultimul face un număr oarecare, produsul va fi un număr perfect.

— Nu, dragă Teodor, orice ai spune tu, îmi este imposibil să înţeleg ceva din această formulare şi îţi mărturisesc recunoştinţă că mi-ai arătat că ea poate fi scrisă aşa de frumos şi simplu! Îmi place aşa de mult, încît te rog să ne oprim aici şi să facem cîteva încercări ca să stabilim, după acest criteriu, cîteva numere perfecte!

— Dar cu numerele prietene ce se mai aude, le-am pus de mămăligă?

— Lasă, nu te mai grozăvi acum şi tu, că nu ne mînă nimeni din urmă. Trebuie să vedem, mai întîi, pentru ce valori ale lui t, expresia $(2^{t+1}-1)$ este un număr prim, nu-i aşa? Încerc $t=1$: Avem : $2^2-1=3$; Aşadar, $t=1$ verifică şi rezultă $n_1=$ $=2 \cdot 3=6$. Deci 6 nu este numai un număr perfect, dar mai este şi triunghiular! Observăm că şi $t=2$ verifică : $2^3-1=7$. Prin urmare, acum apare al doilea număr perfect. Care-i oare? Parcă nu îndrăznesc să-l calculez!

— Curaj că doar, nu te aşteaptă decît o simplă înmulţire.

— Da : $n_2=4 \cdot 7=28$. Dar nu-i vorba numai de asta. Să găsesc şi divizorii lui 28 şi să verific!

— Adică, nu ai încredere în teoremă sau în tine? Ori în amîndouă?

— De ce încerci să te răzbuni? Nu vezi că eu am cedat?

— Ai dreptate, *tu* ai cedat şi văd că ai scris divizorii lui 28.

— Da, avem : $1+2+4+7+14=28$. Merg mai departe şi pun $t=3$. Am $2^4-1=15$. Ce rău îmi pare! Formula nu se mai aplică. Să fac $t=4$: $2^5-1=31$. Straşnic! 31 este un număr prim, deci am descoperit al treilea număr perfect. El este $n_3=16 \cdot 31=496$. Cam mare, totuşi lasă-mă să-i aflu divizorii şi să fac proba!

— Dacă-ţi face plăcere, de ce nu te-aş lăsa! Numai că te-aş sfătui să numerotezi, numerele nu cu indicele ce arată succesiunea lor, ci cu indice care arată valoarea lui t. Aşa că, în loc de n_3 să pui n_4. E mai sugestiv şi mai interesant, căci tot nu poţi număra toate numerele perfecte.

— Asta-i adevărat, bănuiesc că numărul lor este infinit. Avem dar $n_4 = 496$ și scriindu-i divizorii găsesc:

$1+2+4+8+31+62+124+248=496$.

Observi că aceste două numere din urmă nu mai sînt și triunghiulare?

— În schimb sînt rectangulare.

— Nu înseamnă mare lucru, fiindcă toate sînt, după formulă, produs de doi factori. Dar ia să mai vedem ce se întîmplă pentru $t=5$?

— Potolește-te și păstrează-ți elanul pentru alte probleme care așteaptă să le cinstești cu atenția ta. Ca să nu fii prea necăjit, află că de abia pentru $t=7$ ai să găsești al patrulea număr perfect care este 8 128.

— Spune-mi cîte numere perfecte au fost cunoscute în Antichitate?

— Numai acestea patru despre care am discutat noi acum. Ele se găsesc amintite în *Aritmetica* lui Nicomah din Gherasa, carte scrisă pe la începutul veacului al doilea, după cum mi se pare că ți-am mai spus. Cartea are un nivel științific cu mult inferior cărților VII—IX din *Elementele* lui Euclid, însă ea a avut un mare succes, datorită comentatorilor ei, care la rîndul lor nu au putut face nici atît cît a făcut Nicomah și s-au mărginit să o explice și să mai adauge, ici și colo, informații ce le găseau în alte lucrări.

— Consider că era normal să fie așa, fiindcă Egiptul își pierduse independența de mai bine de un secol, iar faimoasa Școală din Alexandria își închisese de mult porțile. Marea epocă de glorie a matematicienilor greci trecuse, iar romanii nu erau amatori de matematici și nici nu au încurajat studiul lor. Trebuie să fim recunoscători acestor comentatori care se străduiau să păstreze o licărire din trecut. Mi se pare că Iamblic, comentînd această lucrare a lui Nicomah, a adus la cunoștință descoperirea numerelor prietene de către pitagoreici.

— Da. Aceasta cu ocazia comentariului său asupra celor 4 numere perfecte pe care le discuta Nicomah. Și cred că are să-ți placă să afli că Nicomah se ocupa de distribuția acestora. El a observat că printre unități este un singur număr perfect: 6. Tot așa, printre zeci, numai 28 este perfect, printre sute tot un singur număr este perfect și la fel, nu nu se află decît un singur număr perfect printre cele 1 000 de numere formate din 4 cifre. De aici a dedus că deși în numă infinit numerele perfecte se îndepărtează mult unele de altele și că ele se termină fie în 6, fie în 8!

Marin Mersenne

— Cînd a fost calculat al cincilea și de către cine?

— De-abia în secolul al XV-lea de către Regiomontanus. Dar el nu se află printre zecile de mii, ci printre zecile de milioane!

— Îl ai poate notat?

— Mă mir că mai întrebi! Uite-l aici, după notația noastră el este : $n_{13}=33\,550\,336$. În secolul următor, J. Scheybel, traducătorul lui Euclid în limba germană, a mai găsit două numere perfecte : n_{17} și n_{19}, acesta din urmă avînd 12 cifre, adică fiind de ordinul bilioanelor! Peste alți 100 de ani s-a mai găsit un îndrăgostit de cifre și de perfecțiunea exprimată prin numere, care a adus la lumină al optulea număr : n_{31}, El se află în ordinul pentalioanelor, adică are o suită de 22 de cifre!

— Și care-i numele fericitului calculator?

— Dacă nu te-ar fi înfricoșat așa de tare teorema 36 din cartea a IX-a a lui Euclid, ai fi găsit singur răspunsul în nota de la pagina 249 a volumului II al *Elementelor* traduse de Victor Marian. Iată ce spune el : „Al optulea număr 2 305 843 008 139 952 128 se află la Mersenne..."

— Atunci el l-a calculat?

— Greu de spus! Foarte probabil că da, însă ar fi putut să-l fi calculat și Fermat care îi transmitea multe dintre rezultatele stabilite de el din teoria numerelor, fără să aibă nici un fel de pretenții de autor.

— După cîte ştiu eu, Marin Mersenne, călăugăr sau poate numai frate franciscan din secolul al XVII-lea, era un mare amator de matematici şi animator al matematicienilor, pe care-i stimula în descoperirile lor atît prin scrisorile ce le primea şi le trimitea, cît şi prin corespondenţa pe care o dirija între cei interesaţi de aceleaşi probleme. Se spune că revoluţia ştiinţifică din Franţa îi datorează mai mult lui decît Universităţilor ce continuau să-şi păstreze caracterul lor scolastic. Thomas Hobbes afirma că prefera chilia lui Mersenne oricărei alte şcoli de filozofie din Paris şi ori de cîte ori trecea Canalul, îl vizita pe Mersenne. În chilia lui— locul de întîlnire al savanţilor din Franţa şi din străinătate— s-a pus şi baza Academiei franceze.

— E adevărat, numai că pe Mersenne l-au interesat, în aceeaşi măsură, şi experienţele de fizică şi chimie care începuseră pe atunci să-i preocupe pe oamenii de ştiinţă. De aceea, cartea pe care a publicat-o în 1644 la Paris are ca titlu *Cogitata Physico-Mathematica.* Aici se află multe probleme din teoria numerelor printre care un loc aparte îl ocupă problema numerelor prime. După cum ai văzut însăşi existenţa numerelor perfecte este condiţionată de faptul că numărul $p=2^{t+1}-1$ să fie un număr prim. Azi aceste numere poartă numele de „Numerele prime ale lui Mersenne“, fiindcă ele au fost cercetate în această carte. De fapt, Mersenne a stabilit o metodă de a descompune numerele perfecte de această formă în factori primi, pentru diferite valori ale exponentului t. Prin aceasta s-au determinat totodată şi valorile lui t, pentru care aceste numere sînt prime. Notîndu-le : $M_t=2^t-1$, s-a stabilit că pentru $t<257$, există numai următoarele 12 valori : $t=2$, 3, 5, 7, 13, 17. 19, 31, 61, 89, 107, 127, pentru care M_t este un număr prim. De pildă pentru $t=11$, $M_{11}=2\,047=23\cdot89$. Nu este un număr prim, ci se descompune în produsul $23\cdot89$. În cartea despre care ţi-am vorbit, Mersenne discută şi despre numerele perfecte şi despre numerele prietene. Între altele, el calculează n_{31}, aşadar şi M_{31}. Însă, în 1750, Euler a mai calculat odată M_{31} şi n_{31}, neştiind că acest calcul a fost făcut cu 100 de ani mai înainte. Într-o lucrare de teoria numerelor, publicată la începutul secolului trecut, contribuţia lui Mersenne nici nu mai este amintită.

— Aşadar, mai rămîn 4 numere perfecte, ca să se termine seria despre care ai vorbit. Cînd au fost calculate?

— Al noulea, n_{61}, a fost calculat în secolul trecut, dar ultimele trei grupe au apărut deodată, în 1917. Trebuie să ştii că aceste numere sînt gigante şi au dat destul de furcă amatorilor.

— Există vreun nume pentru numerele gigante?

— Da, în 1940 Edward Kasner a propus numele de *googol* pentru 10^{100}, acest număr întrecînd se pare numărul probabil al atomilor din Univers. Cu ajutorul ordinatoarelor, începînd din anul 1958, s-au putut stabili încă 11 numere prime ale lui Mersenne şi anume, pentru următoarele valori ale lui t : t=521, 657, 1 279, 2 203, 2 281, 3 217, 4 253, 4 423, 9689, 9 941 şi 11 213.

Ultimul, descoperit în 1964 are 3 376 de cifre, adică este mai mare decît un *googol* şi, ca să fie imprimat, are nevoie de 12 pagini.

— Atunci numărul perfect care-i corespunde, oare de cîte pagini va fi avînd nevoie?

— Asta nu o mai ştiu.

— În definitiv, cu aceste informaţii putem considera problema numerelor perfecte încheiată, nu?

— Nu! Există încă probleme anexe care aşetaptă dezlegarea. De pildă :

1) Nu-i nici un motiv şi nici nu-i demonstrat că n-ar putea fi numere perfecte nepereche. Sînt, sau nu sînt?

2) Numerele perfecte pot fi obţinute numai prin formula lui Euclid?

— Nu ţi se pare că dacă s-ar găsi răspuns la prima întrebare, acesta ar răspunde şi la cea de a doua?

— Da, în parte, căci după formula lui Euclid, toate numerele perfecte trebuie să fie pare şi dacă ar exista un număr perfect impar, atunci el ar trebui să se calculeze în mod obligatoriu prin altă formulă!

— Da, ai dreptate şi de aceea, tot în mod obligatoriu propun să ridicăm şedinţa, că pe ziua de azi ne-ajunge!

A doua zi dimineaţă, prietenul meu mi-a spus zîmbind

— Să-ncepem şi ziua de azi cu : „Mai aveţi o întrebare?“

— Desigur, i-am răspuns bucuros că-l văd aşa de bine dispus. Aş avea de pus două întrebări :

1) În afară de perechea 220, 248 au mai fost găsite şi alte perechi de numere prietene? Cînd şi de către cine?

2) Dacă există, ca în cazul numerelor perfecte, vreo regulă pentru a le calcula ?

— Da, mulţumesc. Am să răspund, deocamdată parţial, la prima întrebare. Pînă în secolul al XVII-lea nu a fost cunoscută altă pereche de numere prietene. În anul 1636, Fermat a descoperit o nouă pereche, iar doi ani mai tîrziu, Descartes a calculat a treia pereche de numere prietene. La a doua întrebare vă pot informa tot parțial deocamdată că în secolul al IX-lea celebrul matematician și astronom arab, stabilit la Bagdad, pe nume Tabit ibn Korra, adică Tabit feciorul lui Korra, a găsit o formulă care arată cum se pot calcula perechile de numere prietene, însă în mod practic nu a calculat o nouă pereche. Mai mult, spre deosebire de cazul numerelor perfecte, pentru determinarea perechilor de numere prietene nu există o formulă generală care să permită calcularea lor, dar există multe formule particulare.

— Acum, pune te rog mîna pe creion ca să-mi explici cum a ajuns Tabit al matale şi feciorul nu ştiu cui, la formula sa.

— Prea multe vrei să ştii. Eu îți propun să te mulțumeşti numai cu formula, așa cum a dat-o el, fără nici un fel de explicații, cum era dealtminteri și obiceiul. Treaba lui cum a găsit-o, tu folosește-o! „Dacă se pot găsi trei numere p, q, r, toate prime şi care să fie de forma :

(1) $p=3\cdot 2^n-1$, $q=3\cdot 2^{n-1}-1$, $r=9\cdot 2^{2n-1}-1$, unde n este un număr natural, mai mare decît unu, atunci perechile (2) $A=2^n\cdot p\cdot q$ şi $B=2^n r$, sînt numere prietene".

— Bine, dar văd că formulele acestea permit să stabilești cîte perechi de numere vrei. De ce oare maestrul Tabit nu a făcut-o? Oricum, înainte de a o face eu, vreau să văd ce se întîmplă cu formulele (2) pentru cazul $n=1$, pe care văd că l-a lăsat de o parte.

Înlocuind în formulele (1) rezultă :

$p=3\,.\,2-1=5$, $q=3-1=2$, $r=9\,.\,2-1=17$, adică 3 numere prime.

Dacă le înlocuiesc în (2) obțin :

$A=2\cdot 5\cdot 2=20$ și $B=2\cdot 17=34$.

Iată o pereche de numere destul de simpatică, nu-s ele oare prietene ?

— Pune-le la încercare și ai să vezi!

— Atunci să stabilim divizorii : $20=2^2\cdot 5$ iar $34=2\cdot 17$. Așadar, $1+2+17=20$. Vezi? Suma divizorilor lui 34 este exact 20 !

— Văd, cum să nu văd, mergi mai departe!

— Iaca merg, că n-am să stau în loc : $1+2+4++5+$ $+10=22$. Deci, 34 încurcă socotelile! Pe lîngă factorii lui 20, el ar mai avea loc și pentru alții străini, în timp ce bietul 20 nu admite alți factori decît pe acei ai lui 34! Exact ca între prietenii de care trebuie să se fi lovit un La Rochefoucauld sau Helvetius sau atîția alții ca să scrie despre prietenie cu atîta năduf!

— Te-aș ruga acum să-mi explici de ce regula lui Tabit nu se aplică la cazul $n=1$. De unde provine anomalia?

— Nu-i nici o anomalie, tu singur nu ai respectat *condiția impusă de regulă* și atîta tot. Găsești că este o anomalie dacă te calcă o mașină, fiindcă nu ai respectat regulile de circulație?

— Atunci să cercetez cazul $n=2$:

$$p=3\cdot 4-1=11,\quad q=3\cdot 2-1=5,\quad r=9\cdot 2^3-1=71.$$

Toate trei sînt numere prime. Aplicînd formulele (2) găsesc: $A=4\cdot 55=220$ și $B=4\cdot 71=284$, perechea știută!

— În timp ce mocoșeai la aceste calcule eu m-am întors în urmă cu vreo mie de ani și l-am căutat pe Tabit ibn Korra. L-am găsit aplecat asupra unui medalion de aur pe care grava numărul 284. Alături de el se afla un altul cu numărul 220, frumos încadrat într-un desen. Se întuneca și fiindcă trebuia să-l termine i-a spus ucenicului să urce în turn și să pregătească instrumentele pentru cercetarea stelelor, că vine și el după ce isprăvește talismanul. I-a mai amintit că toată atenția trebuie îndreptată spre steluța aceea care a dispărut aseară așa de repede la orizont, că pe ea ar vrea să o prindă așa cum trebuie. S-ar fi urcat bucuros el singur de pe acum în turn, dar nu putea neglija treaba aceasta, care-i aducea un venit așa de bun. Talismanele erau la modă și cei bogați le plăteau bine. Cu ce cîștiga pe ele își întreținea familia, plătea ucenicii și chiar avea cu ce procura cîte un manuscris matematic, greu de găsit și scump la preț. De altfel, nu se cuvenea să se plîngă, căci îi și plăcea să încrusteze aceste două numere, împodobindu-le în fel și chip, fiindcă în timp ce lucra gîndurile lui săpau și ele în adîncuri. Așa a aflat că aceste două numere nu aveau nici o taină ci s-au legat între ele ascultînd de o lege tot așa cum ascultă și stelele de o lege cînd se rotesc zilnic în jurul pămîntului, sau cum ascultă diagonalele unui pătrat de legea ce le poruncește să se taie în părți egale. Știa că ar putea găsi și alte perechi de numere care să asculte de aceeași lege a prieteniei și chiar dorea să le calculeze poate odată, cînd va avea mai mult timp... oricum acest lucru nu-l va spune nimănui fiindcă ar putea fi acuzat de blasfemie, de ateism sau cine mai știe de ce! Unii oameni cred în puterea acestor două numere de a proteja prietenia și cu ce drept ar veni el să le tulbure credința?

Cînd a tăcut, Teodor Solonar păstra încă privirea pierdută în gol, iar ochii îi erau umezi, de-abia cînd a observat că-l privesc curios, s-a scuturat de gînduri. Atunci i-am zis :

— Da, aici ar fi o explicație a faptului că Tabit nu a mai calculat altă pereche. Dacă aceste numere au trecut din domeniul științei în acela al magiei, era natural să se fi mărginit la perechea știută !

— Asta-i sigur! mi-a răspuns prietenul meu. Uite ce scrie Oystein Ore în cartea sa *Number Theory and its History* :

„În scrierile matematice arabe, numerele prietene apar de mai multe ori. Ele au jucat un rol în magie și astrologie, în stabilirea horoscoapelor, în vrăjitorie, în amestecul poțiunilor de dragoste și în fabricarea talismanelor. Ca o ilustrare vom cita din *Historical Prolegomenon* al învățatului arab Ibn Khaldun (secolul XIV) : *„practica artei talismanelor ne-a făcut să recunoaștem minunatele virtuți ale numerelor prietene. Ele sînt 220 și 284... Autorul Ghaia-ei, alți mari maeștri declară că ei au văzut acestea confirmate de experiență*".

— Foarte nostim, mai ales că, după cîte știu eu, Ibn Khaldun, tunisian de origine, este recunoscut nu numai ca un istoric celebru, dar și ca un bun cunoscător al științelor de atunci, în seriile lui existînd multe observații științifice serioase!

— Spui că-i nostim! Ei, atunci află una și mai nostimă, rămasă de la alt arab, astronom și medic vestit, care a trăit pe la începutul veacului al XI-lea la Cordova. Se numește Abulcasis al Madjriti. El afirma că aceste două numere exercită cu adevărat o influență miraculoasă, pe care a cunoscut-o el însuși, fiindcă a dat cuiva să mănînce numărul 220 în timp ce el a mîncat numărul 284! Păcat că nu ne spune și cum le-a preparat !

— Din cele ce-mi spui, trag concluzia că faima acestor două numere a fost adusă prin scrierile matematice și nematematice arabe, căci atît Nicomah cît și Iamblic păstrează o atitudine științifică în informațiile ce le dau.

— Cred că da. În cărțile de aritmetică tipărite în Europa apuseană prin secolele XV și XVI de către Chuquet, Stiefel, Cardan, Tartaglia, și de alții, apar și aceste numere. Ele sînt date numai drept exemplu în legătură cu proprietatea divizorilor lor, dar în nici una dintre aceste cărți nu se menționează formula lui Tabit ibn Korra și nici proprietățile magice! Și Mersenne, într-o carte, tipărită mai înainte de *Cogitata*, cu titlul *Les preludes de l'Harmonie universelle*, le amintește.

Astfel se face că, citind cartea, Pierre Fermat cu pasiunea care o avea pentru problemele din teoria numerelor, nu s-a lăsat pînă ce nu a stabilit legea lor de compunere și nu a găsit încă o pereche! În 1636, la doi ani după ce apăruse cartea lui Mersenne, autorul primeşte o scrisoare de la Fermat, în care îi comunică o a doua pereche de numere prietene, anume :

$$A=2^4 \cdot 23 \cdot 47=17\,296 \quad \text{și} \quad B=2^4 \cdot 1\,151=18\,416.$$

— Exact formula lui Tabit pentru $n=4$. Ceea ce înseamnă că pentru $n=3$, p, q și r nu sînt numere prime! A arătat Fermat cum a stabilit aceste numere?

— Atunci nu , dar mai tîrziu da, și îți voi arăta îndată procedeul lui. Mai înainte însă, aş vrea să te pregătesc sufleteşte ca să nu ai deziluzii. Trebuie să știi că, pe vremea lui Fermat, și cu atît mai mult în timpul lui Tabit, nu exista formalismul cu care ești azi așa de obișnuit, încît nu-ţi închipui cum ar fi putut exista aritmetica fără de el!

— Iartă-mă dar nu înţeleg ce vrei să spui? Te referi la formulele algebrice?

— Mă refer mai ales la semnele de operaţie, $+$, $-$, $\times$ $:$, $=$ și literele puse în locul cifrelor, cu care să poți nota orice putere a unui număr sub formă exponenţială, ca de pildă, la forma în care ţi-am scris eu formulele lui Tabit. Nici el şi nici Fermat nu le-au scris şi deci nu le-au gîndit aşa. Cum a procedat Tabit, nimeni nu mai ştie, dar iată cum descrie Fermat calea pe care a urmat-o :

„Se începe cu progresia geometrică : 2, 4, 8, 16,... şi dedesubt se pun numerele triple corespunzătoare. Apoi, din fiecare se scade cîte 1 și rezultatele se scriu pe rîndul de deasupra. În fine, în rîndul de jos se scriu numerele obţinute prin produsul a două numere consecutive din rîndul trei, din care scazi 1 :

5	11	23	47	...
2	4	8	16	...
6	12	24	48	...
	71	287	1 151	...

Cînd un număr din ultimul rînd este prim, ca 71, și la fel cel de deasupra din rîndul întîi, ca 11, și la cel precedent lui, ca 5, atunci aceste numere conduc la numere prietene. De exemplu, numărul din ultimul rînd, 71 şi cele din primul rînd, 11 şi 5, sînt prime. Dacă se înmulţeşte 71 cu 4 se obţine 284 şi înmulţind 5 cu 11 şi cu 4 obţinem 220. La fel, $1\,151 . 2^4 = 18\,416$ și $23 . 47 . 2^4=17\,296$„.

— Oare ce-ar fi zis Fermat dacă i s-ar fi arătat formulele pe care le-am scris noi, aici?

— Nu cred că l-ar fi încîntat ca pe noi. Aceste formule i s-ar fi părut, poate, mai greoaie decît metoda folosită de el, fiindcă el era deprins să gîndească după tiparul lui de atunci şi ar fi avut nevoie de adaptare ca să treacă la al nostru. Ţi-am povestit cîndva cazul lui Huygens. Deşi prieten cu Leibniz, el nu s-a putut adapta la condiţiile noi ale analizei infinitezimale şi a continuat să gîndească şi să creeze, aşa cum se obişnuise, deşi concepţiile noi l-au interesat şi nu i-au rămas străine.

— Mi-ai spus că, doi ani mai tîrziu, Descartes a descoperit şi el o nouă pereche de numere prietene. Cred că cel puţin el a stabilit formulele lui Tabit, fiindcă ştiu că el a dat algebrei forma modernă şi a folosit notaţia exponenţială.

— Iată că nu! Printre scrisorile prin care-i comunică lui Mersenne numerele prietene găsite de el, se află una în care arată că-i uimit de faptul că Fermat a folosit exact acelaşi procedeu care l-a condus şi pe el la numerele
$A = 2^7 . 191 . 383 = 9\,363\,584$ şi $B = 2^7 . 73\,727 = 9\,437\,056$

În anul 1644, cînd Mersenne a publicat *Cogitata*, el a adus la cunoştinţa publicului aceste două perechi noi de numere prietene, fără a arăta cum au fost descoperite.

— Spui că Mersenne a tipărit cartea sa în 1644, dar Fermat făcuse descoperirea cu 8 ani mai devreme, iar Descartes cu 6...

— Şi ce-i cu asta? Judeci după *azi* şi nu după *atunci!* În secolul al XVII-lea, opt, zece şi chiar douăzeci de ani nu aveau lungimea celor de azi!

— Poate că ai dreptate. Îmi vin în minte diferite exemple care mă fac să nu mai insist. Revenind la problema noastră, aş vrea să observ că dacă numerele stabilite de Descartes sînt de ordinul milioanelor şi corespund la valoarea $n=7$ din formula lui Tabit, ar urma că perechea următoare se va afla undeva printre bilioane sau trilioane?

— Îmi pare rău că iar trebuie să-ţi spun *nu!* Prin această formulă nu s-au mai putut găsi alte perechi de numere prietene pentru nici o valoare a lui $n<200$!

— Atunci s-a isprăvit cu ele? Aşadar, printre numere sînt mai puţine exemple de prietenii decît printre oameni!

— S-ar putea să nu te grăbeşti? De unde ai scos tu că formula lui Tabit ar fi fiind singura cale către numerele prietene? Oare îţi închipui că Euler, despre care Arago spunea că

„el calculează aşa cum oamenii respiră şi vulturii planează în vînt" a lăsat să treacă pe lîngă el o asemenea nadă fără să se prindă în ea? Dintr-o răsuflare el a dat la iveală 30 de perechi de numere prietene!

— Asta-i prea de tot! Nu glumeşti? Chiar 30 de perechi noi-nouțe de numere prietene? Şi a arătat cum a procedat?

— Atunci, în 1747, cînd a publicat articolul intitulat *Despre numerele prietene,* s-a mărginit să amintească cele trei perechi cunoscute şi a adăugat perechile calculate de el, dintre care prima este,: $A=2^2 . 23 . 5 . 137$, $B = 2^2 . 23 \cdot 827$ iar ultima $A=3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 179$ $B = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 359$. Peste trei ani a scris o broşură cu acelaşi titlu, în care a stabilit teoria numerelor prietene, dar această lucrare a rămas în manuscris şi nu s-a găsit decît după moartea lui, atunci cînd au fost cercetate lucrările sale postume, pentru a fi publicată întreaga operă a lui Euler. Broşura a apărut în volumul I din opere complete *Commentationes Aritmeticae,* în 1915. Acolo, la pagina 86, am găsit şi am citit această lucrare a lui Euler şi am constatat atunci că Euler era cam slab la istoria matematicilor deşi ştia *Odiseea* şi *Eneida* pe de rost!

— Îmi închipui satisfacția ta. Hai povesteşte-mi ce cusur i-ai găsit marelui Euler?

— Cusur? Nu pot pronunța acest cuvînt cînd vorbesc de Euler, el rămîne pentru mine un zeu şi zeii nu au cusururi. Ei pot însă rămîne indiferenți față de datele istorici pe care oamenii de rînd o cercetează cu migală. Astfel am găsit că Euler credea că M. Stiefel era acela care a prezentat numerele prietene pentru prima oară. El scrie că perechea 220, 284 se află în *Aritmetica integra* publicată de acesta la Nürenberg în 1544. Aşadar, nici tu Pitagora, nici tu Iamblic nici tu Fermat! Singur Descartes este amintit ca autor al ultimei din cele trei perechi. Despre Tabit ibn Korra nici nu aş fi avut pretenția să-l pomenească fiindcă lucrările lui au fost cercetate şi discutate abia în secolul al XIX-lea, dar despre Pitagora şi Fermat—de! — ar fi fost cazul.

— Ei, acum după ce ți-ai vărsat năduful, aştept să-mi arăți metoda stabilită de Euler, dacă este destul de simplă ca să o pot înțelege şi eu.

— În privința asta, ca să-ți fac plăcere, te pot încredința că ai fi fost şi tu în stare să o descoperi, dacă ai fi dorit-o cu adevărat!

— Lasă ironiile şi treci la fapte!

Leonhard Euler

— Nu voi urma chiar metoda lui Euler, fiindcă atunci s-ar întîmpla ca şi cu teorema a 36-a a lui Euclid. De aceea voi folosi prelucrarea lui Escott, din articolul despre care ţi-am vorbit. El ne va călăuzi, de aici înainte, în tot ce vei afla despre numerele prietene. Acest articol l-am tradus şi se află în întregime în caietul de pe masă. Aşadar, să luăm creioane şi hîrtie şi să începem notînd cum o face Escott, cu m şi n cele două numere prietene şi cu $S(m)$ şi $S(n)$ suma tuturor divizorilor lor între care este inclus şi numărul însuşi. În acest caz, scăzînd numărul însuşi proprietatea numerelor prietene se exprimă prin formulele : (1) $S(m)-m=n$ şi $S(n)-n=m$. De aici rezultă relaţia : (2) $S(m)=S(n)$.

— Ia stai mata oleacă ! Dacă $m=n$, oare relaţia (1) nu dă tocmai condiţia ca un număr să fie perfect ?

— Da ! Faptul a fost remarcat şi de Euler, numai că practic aceasta nu poate ajuta la nimic. Problema care se pune este să exprimi numerele m şi n cu ajutorul factorilor primi din care sînt formaţi.

— Vezi, aici este ceea ce deosebeşte omul de rînd de geniu ! Probabil că Euler a găsit răspunsul cel bun.

— Sigur că da ! El a considerat că unul (sau mai mulţi) dintre factorii care formează cele două numere poate fi acelaşi şi l-a notat cu E, iar ceilalţi factori, care neapărat trebuie să fie primi şi să se deosebească în cele două numere, i-a notat cu p, q, r, s, t, ... Folosind aceste observaţii, cu notaţiile de mai sus, avem :

$$m=E\cdot p\cdot q\cdot r\cdot s\cdot \ldots \text{ iar } n=E\cdot t\cdot u\cdot v\cdot \ldots$$

— Nu observi că acest număr E apărea şi în formula lui Tabit ? Anume, în prima pereche $E=2^2$, în a doua $E=2^4$ iar în a treia $E=2^7$. Poate că Euler a observat acest lucru şi l-a generalizat ! Dar asta nu înseamnă încă nimic, nişte notaţii şi atîta tot. Vreau să înţeleg cum se poate trece de la aceste notaţii la dezlegarea problemei ? Aici e geniu !

— Euler a folosit o prea frumoasă teoremă din teoria numerelor, în care se arată că, dacă un număr natural N este compus şi are forma $N=p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdot \ldots \cdot t^f$, atunci suma divizorilor lui este dată de formula :

$$(3)\quad S(N)=\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1}\cdot\frac{r^{c+1}-1}{r-1}\cdot\ldots\cdot\frac{t^{f+1}-1}{f-1}.$$

— Exact de ceea ce avem nevoie ! Îmi dau seama că mi-ai dat cheia în mînă, dar nu văd lacătul !

— Nu te necăji, căci l-a văzut Euler, măcar că ochii lui nu-l mai ajutau. Astfel, el a ales numerele N, care să formeze perechile prietene în aşa fel ca formulele (3) să apară în forme simple, uşor de mînuit. Aceste forme le-a grupat în următoarele cinci moduri, pe care le vom nota folosind notaţiile convenite :

1. $m=E\cdot p\cdot q$; $n=E\cdot r$ sau notate împreună : E^{pq}_{r}.
2. $m=E\cdot p\cdot q$; $n=E\cdot t\cdot s$ sau notate împreună : E^{pq}_{ts}.

(T) 3. $m=E\cdot p\cdot q\cdot r$; $n=E\cdot t\cdot s$ sau notate împreună E^{pqr}_{ts}

4. $m=E\cdot p\cdot q\cdot r$; $n=E\cdot t\cdot s\cdot v$ sau notate împreunăE^{pqr}_{tsv}.
5. $m=E\cdot p\cdot q\cdot r\cdot s$; $n=E\cdot t\cdot u\cdot v$ sau notate îmreună : E^{pqrs}_{tuv}.

— Vrei să spui că trebuie să folosim formula (3) ca să punem în evidenţă suma divizorilor, în fiecare din cele 5 cazuri ?

— Exact ! Pe E îl considerăm separat, ca un produs şi ne referim la ceilalţi factori, aşadar, în primul caz, avem :

$$S(m)=S(E)\frac{p^2-1}{r-1}\cdot\frac{q^2-1}{q-1}=S(E)(p+1)(q+1) \text{ şi la fel :}$$

$$S(n)=S(E)\frac{r^2-1}{r-1}=S(E)(r+1).$$

— Aceste valori ale lui m, n, $S(m)$ şi $S(n)$ trebuie înlocuite în (1) şi (2). Făcînd reducerile se ajunge la formulele :

$$(4)\qquad S(E)(p+1)(q+1)=E(pq+r) \text{ şi}$$

(5) $$(p+1)(q+1)=r+1.$$

— Am dat peste un sistem de 2 ecuații cu trei necunoscute, care se cere rezolvat în numere întregi, prime, diferite între ele și să nu fie divizibile cu E. Am putea elimina una dintre necunoscute, de pildă pe r, $r=pq+p+q$, a cărui valoare apare ușor din (5). Înlocuind în (4) ne rămîne ecuația :

(6) $$S(E)(p+1)(q+1)=E(2pq+p+q).$$

— Interesant, numai că mă uit cu teamă la această ecuație ! Mai întîi pentru că acest $S(E)$ mă îngheață, nu alta !

— Dar el e cel mai simpatic. Ai voie să-l alegi cum vrei tu. De pildă, Euler l-a ales pe E de forma $E=2^u$ și, prin urmare, din (3) rezultă $S(E)=2^{u-1}-1$.

— Vezi, la asta nu m-am gîndit, dar acum cînd mi-ai arătat, totul pare așa de simplu ! Atunci să înlocuiesc în (6) şi să fac reducerile :

(7) $$2^{u+1}-1=pq-(2^u-1)(p+q).$$

— Ai lucrat bine, dar acum e nevoie să intervin eu, fiindcă am citit lucrarea mai înainte și nu fiindcă m-aș pricepe mai bine. Ecuația (7) se poate transforma în alta, mai ușor de rezolvat. Pentru aceasta vom opera asupra lui $2^{u+1}=2\cdot 2^u$ care sugerează că ar putea fi considerat drept termenul din mijloc al binomului (2^u-1) din membrul al doilea. E de ajuns să adunăm și să scădem pe 2^{2u}. Astfel avem :

$$2^{2u}-(2^u-1)^2=pq-(2^u-1)(p+q).$$

— Acum știu cum procedez mai departe. Trec binomul la pătrat în membrul al doilea și scot factor comun pe 2^{u-1}.

— Nu-i chiar așa de simplu, fiindcă tot acolo mai ai și produsul pq care-ți rămîne stingher, ori tu trebuie să ajungi să ai și în membrul al doilea un produs de doi factori. Numai atunci ecuația se poate descompune.

— Atunci ce să fac ?

— Treci pătratul, așa cum ai spus, în membrul al doilea, dar totodată faci și înmulțirile cu p și q, adică :

$$2^{2u}=(2^u-1)^2-(2^u-1)p-(2^u-1)q+pq.$$

— Parcă aș îndrăzni să duc calculele mai departe : se pare că, grupînd, pe de o parte, primii doi factori şi apoi ultimii doi, se alege un factor comun. Uite cum procedez :

$2^{2u} = -(2^u-1)(p-(2^u-1)) + q(p-(2^u-1))$ și pe aici:

$2^{2u} = (p-(2^u-1))(q-(2^u-1))$ și deci (7) apare ca un produs!

— E adevărat, dar ecuația aceasta trebuie să o mai pieptănăm oleacă. Punem: $2u = u-k+u+k$, de unde 2^{2u} se transformă în $2^{u-k} \cdot 2^{u+k}$ și deci, descompusă în factori, ecuația (7) se poate scrie:

(8) $2^{u-k} = p-(2^u-1)$ și $2^{u+k} = q-(2^u-1)$, iar de aici rezultă:

(9) $p = 2^{u-k} + 2^u - 1 = 2^{u-k}(2^k+1) - 1$ și

$q = 2^{u+k} + 2^u - 1 = 2^u(2^k+1) - 1.$

Deducem valoarea lui r:

$$r = 2^{2u-k}(2^k+1)^2 - 1.$$

Așadar, problema este rezolvată, cel puțin în principiu. Dacă p, q, r sînt numere prime, atunci condiția (1) din (T) conduce la numere prietene de forma:

(10) $m = 2^u \cdot p \cdot q$ iar $n = 2^u \cdot r$.

Euler a observat că, pentru $k = 1$, formulele (9) devin:

$$p = 3 \cdot 2^{u-1} - 1,\quad q = 3 \cdot 2^u - 1 \text{ și } r = 9 \cdot 2^{2u-1} - 1.$$

Dar acestea sînt tocmai formulele lui Tabit ibn Korra!

— Adevărat, însă formulele găsite de Euler sînt cu mult mai generale și din ele se pot deduce și alte perechi de numere prietene. Chiar și în acest prim caz, din (T), Euler nu s-a mărginit numai la factorul E de forma 2^u, ci a considerat și cazul $E = 2^u \cdot f$, unde $f = 2^{n+1} + e$ este un număr prim. Refăcînd calculele pe care le-am stabilit noi, el a găsit perechea: $m = 2^2 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137$ și $n = 2^2 \cdot 23 \cdot 827$ sau, într-o formă concentrată: $2^2 \cdot 23 \cdot \begin{cases} 5 \cdot 137 \\ 827 \end{cases}$ pe care am scris-o la un loc. O altă pereche, care se încadrează în aceeași formulă, a fost calculată pentru $E = 2^u(g-1)(h-1)$, ultimii doi factori fiind primi. Astfel, Euler a mai descoperit perechea: $2^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \begin{cases} 389 \cdot 509 \\ 198 \cdot 899 \end{cases}$. Acum cred că ai înțeles cum se procedează și atunci cînd ar fi de stabilit perechile de numere prietene care corespund formelor 2, 3, 4 și 5 din tabloul (T).

— De înțeles am înțeles, dar cînd mă gîndesc la ce fel de calcule trebuie să faci față ... fiindcă de fiecare dată numărul necunoscutelor se mărește cu cîte o unitate, iar ecuațiile ce rezultă trebuie să fie mult mai complicate.

— Asta-i așa, dar tocmai aici e farmecul. De altfel, mi se pare că am uitat să-ți spun că, în ultima lui lucrare, Euler a mai adăugat alte 31 de perechi de numere prietene la cele 30 calculate anterior. Dintre acestea numai 29 au fost găsite mai tîrziu valabile, așa că Euler are la activul său 59 de perechi de numere prietene. În articolul lui Escott se găsește următorul tablou, în care sînt înscrise, în ordine cronologică, numele descoperitorilor, numărul perechilor de numere prietene și, cu aproximație, anul descoperirilor pînă în 1943. Uite îl am aici și ai să vezi din el multe lucruri interesante :

Pitagora	1	(540 î.e.n.)
Fermat	1	(1636)
Descartes	1	(1638)
Euler	59	(1747—50)
Legendre	1	(1830)
B.N.I. Paganini	1	(1867)
P. Seelhoff	2	(1884)
L.E. Dickson	2	(1911)
T.E. Mason	14	(1921)
P. Poulet	65	(1929)
A. Gerardin	5	(1929)
E.B. Escott	233	(1934)
B.H. Brown	1	(1939)
Poulet și Gerardin	4	(1939)
Total	390	

— Așadar, autorul articolului a calculat 233 de perechi. Acesta zic și eu că-i record, bădie Teodor !

— Dar să nu uităm contribuția mașinilor de calcul. De altfel, Escott face și următoarea observație : pînă la începutul secolului al XX-lea au fost găsite 66 de perechi, celelalte 324 de perechi sînt calculate în secolul nostru și cele mai multe după 1921. Tot în acest articol se găsesc perechile de numere prietene, grupate după formulele care le caracterizează. Un rezultat îl ai aici în față :

După formula E_r^{pq} : 33 de perechi. Aici, alături de primele trei se află 13 perechi calculate de Euler, din care :

$$3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \begin{cases} 41 \cdot 461 \\ 19\,403 \end{cases} \quad \text{sau} \quad 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot \begin{cases} 11 \cdot 211 \\ 2\,543, \end{cases}$$

alte 10 calculate de Escott, dintre care am ales iar două : $3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 107 \cdot \begin{cases} 3\,209 \cdot 4\,492 \\ 14\,425\,739 \end{cases}$ şi $3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 271 \cdot \begin{cases} 179 \cdot 5\,419 \\ 975599 \end{cases}$, iar restul de diverşi autori, printre care am ales perechea găsită de Legendre în 1830 : $2^8 \cdot \begin{cases} 257 \cdot 33023 \\ 8\,520191 \end{cases}$, în cinstirea faptului că Teoria numerelor numără printre cărţile ei fundamentale tratatul său, publicat la Paris, în 1797, sub titlul *Essai sur la théorie des nombres.*

După formula E_s^{bqr}: 7 perechi, toate ale lui Escott. Iată una :

$$2^4 \cdot \begin{cases} 17 \cdot 167 \cdot 709 \\ 2\,147\,039 \end{cases}.$$

După formula E_{rs}^{pq} : 101 de perechi, dintre care Euler are 27. Am ales pe cele mai simple :

$$2^2 \cdot \begin{cases} 5 \cdot 131 \\ 17 \cdot 43 \end{cases} \text{ şi } 3^3 \cdot 5 \cdot \begin{cases} 7 \cdot 71 \\ 17 \cdot 31 \end{cases}.$$

Escott a calculat 35 ; iată prima şi ultima din seria lui :

$$2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot \begin{cases} 52 \cdot 1\,759 \\ 59 \cdot 1\,583 \end{cases} \text{ şi } 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 3229 \cdot \begin{cases} 53 \cdot 774\,959 \\ 179 \cdot 232\,487 \end{cases}.$$

Celelalte aparţin autorilor pe care i-ai văzut în primul tablou. *După formula* E_{st}^{pqr} : 294 de perechi. Euler a calculat 17 perechi, din care :

$$2 \cdot 5 \cdot \begin{cases} 23 \cdot 29 \cdot 673 \\ 7 \cdot 60\,659 \end{cases} \text{ sau } 3^3 \cdot 5 \cdot \begin{cases} 17 \cdot 23 \cdot 397 \\ 7 \cdot 21\,491 \end{cases}.$$

Poulet a stabilit 27 de perechi. În afară de două, în care $E=2 \cdot 7 \cdot 11$, toate celelalte au $E=2^4$. Iată, de pildă, o pereche:

$$2^4 \cdot \begin{cases} 59 \cdot 359 \cdot 683 \\ 23 \cdot 615\,599 \end{cases}.$$

Escott deţine majoritatea, cu 140 de perechi, începînd cu

$2 \cdot 5 \cdot \begin{cases} 7 \cdot 11 \cdot 11\,369 \\ 757 \cdot 1\,439 \end{cases}$ şi terminînd cu :

$$3^{10} \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 107 \cdot 3\,851 \cdot \begin{cases} 61\,559 \cdot 565 \cdot 247 \\ 359 \cdot 911 \cdot 105\,983 \end{cases}.$$

După formula E_{stu}^{pqr} : Euler a calculat o singură pereche :

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot \begin{cases} 11 \cdot 59 \cdot 179 \\ 17 \cdot 19 \cdot 359 \end{cases}$$

iar Escott 21, aşadar, în total 22 de perechi. Iată şi o pereche stabilită de Escott: $3^6 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 137 \cdot 547 \cdot 1093 \cdot \begin{cases} 19 \cdot 4643 \cdot 35\,831 \\ 29 \cdot 47 \cdot 2\,311\,163 \end{cases}$

— Frumuşele numere, ce spui mata, bădie ? Ştiu bine că nu te-ai fi încumetat să le scrii cu atîta îngrijire, dacă nu ţi-ar fi mîngîiat sufletul ! Taci şi ridici din sprînceană ! Bine, spune mai departe.

— Iaca spun ! *După formula* E^{pare}_{iu} : Escott singur a calculat 14 perechi, toate avînd ca factor comun pe 2^3. Iată o mostră:

$$2^3 \cdot \begin{cases} 11 \cdot 29 \cdot 79 \cdot 264\,599 \\ 37\,799 \cdot 201\,599 \end{cases}$$

După formula E^{pare}_{inv}: numai Mason a calculat două perechi, anume :

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot \begin{cases} 29 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 59 \\ 19 \cdot 131 \cdot 1\,259 \end{cases} \text{ şi } 3^3 \cdot 5^3 \cdot \begin{cases} 29 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 59 \\ 19 \cdot 131 \cdot 1\,259 \end{cases}.$$

Au mai rămas 17 perechi care nu pot fi încadrate în grupele stabilite teoretic de Euler. Printre acestea se află şi perechea pe care a găsit-o Paganini la vîrsta de 16 ani, fără a arăta metoda :

$$A=2^5 \cdot 37 \text{ ; } B=2 \cdot 5 \cdot 11^2$$

sau două perechi ale lui Euler : $A=2^3 \cdot 19 \cdot 41$; $B=2^5 \cdot 199$ şi $A=2^3 \cdot 41 \cdot 467$; $B=2^5 \cdot 19 \cdot 233$, şase perechi ale lui Escott dintre care iată o nostimă uriaşă :

$A=2^3 \cdot 13 \cdot 157 \cdot 3\,277\,869$ şi $B=2^5 \cdot 14\,051 \cdot 130\,349$. Dintre acestea mi-a plăcut, cel mai mult, această simplă şi drăguţă pereche a lui Brown : $A=3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ şi $B=3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 139$.

— Cred că prietenul matale, cel cu hîrtiuţa, ar zice revoltat : „Ca să vezi cu ce găsesc oamenii să-şi bată capul ! Eu însă mă întreb ce ar fi simţit Pitagora dacă, prin absurd, l-ar fi străfulgerat gîndul că această inspiraţie a lui, de a alege două numere ca simbol al prieteniei dintre doi oameni, se va transforma într-o problemă a cărei dezlegare va fi căutată, veacuri de-a rîndul, cu rîvnă şi entuziasm de către cei mai de seamă matematicieni, de atunci şi pînă în zilele noastre, fără a fi găsit soluţia definitivă ?

— La întrebarea ta, prietenul nostru cu hîrtiuţa cred că ar răspunde fără ezitare : — De ! — parcă degeaba spune proverbul că un nebun aruncă o piatră în apă și zece înțelepți nu pot să o scoată ? Iar la observația pe care tu spui că ar fi făcut-o, tot el, dacă ar fi fost de față, aș fi răspuns cam așa : „Istoria matematicilor cunoaşte destule probleme care au avut la început un caracter pur teoretic și nimeni nu bănuia, pe cînd le cerceta, că ar putea găsi vreo aplicație practică. Și deodată, un om cu vederi de geniu, găseşte că acea problemă teoretică, rezolvată numai dintr-o plăcere și curiozitate științifică, poate fi privită drept modelul ideal al unei probleme practice ce-și căuta, fără să găsească, soluția ! Aceste probleme teoretice sînt ca piatra, varul, fierul pe care alții le pregătesc și care aşteaptă arhitectul care să le folosească la locul și timpul potrivit. Și dacă vrei, uite, mi-a venit acum în minte un exemplu clasic, acela al secțiunilor conice studiate în antichitate din punct de vedere pur teoretic. Printre alții, Arhimede și Apollonios, — secolul III î.e.n. — le-au îndrăgit într-atîta încît, aceste două genii ale poporului grec, au ajuns să se urască unul pe altul, din gelozie că unul a descoperit şi el ceea ce găsise celălalt şi a publicat înaintea lui rezultatele ! Căci, numele lui Apollonios rămîne legat de acela al conicelor, datorită *Secțiunilor conice* care ne-au rămas de la el. Peste 19 veacuri, cam pe la începutul secolului al XVII-lea, se naşte un geniu, cu numele de Kepler, care cunoștea bine matematica greacă și o admira, dar mai cunoștea și astronomie pe care, de asemenea, o admira și deodată, așa, printr-o sclipire genială a înţeles că măsurătorile pe care le făcuse cu migală timp de ani îndelungați Tycho Brahe, se încadrează exact în ipoteza că drumul Pămîntului în jurul Soarelui are ca model o elipsă, în care Soarele se află în unul dintre focare ! Nu-i exclus deci ca, într-o bună zi, cineva să spună, dacă nu cumva a și spus, că perechea de numere prietene poate fi modelul cutărei probleme de natură practică. Atunci, acel cineva va avea gata calculat tabloul cu perechile de numere din care îi va rămîne să aleagă ce-i va conveni !

— Îmi pare bine că așa i-ai răspunde amicului cu hîrtiuța. În schimb, mi-a venit mie în gînd o întrebare, la care nu știu dacă te vei descurca cu aceeași vervă ! Permiți să ți-o pun ?

— Nu-s sperios din fire, așa că aștept.

— Asta fiindcă ai adus tu vorba despre modele și geometrie. Vezi, teoria numerelor a putut găsi un model al prieteniei, plastic și sugestiv, geometria în schimb nu prea cred că s-ar putea făli că poate face ceva asemănător, oricît ar fi ei geometrii de intuitivi !

— Spune, într-adevăr crezi aceasta ? Ei bine, află că tocmai elipsa, despre care ți-am vorbit adineauri, are și proprietatea de a fi un model pentru prietenie. Un matematician francez de la începutul secolului nostru, pe nume H. Renaud, scria cam așa : „Elipsa are două focare şi orice rază care porneşte din unul se reflectă în celălalt, imagine exactă a ceea ce se petrece între două inimi unite prin prietenie sau prin dragoste“. Ai avea, cumva, ceva de obiectat ?

PROBLEMA ABSTRACŢIEI ÎN MATEMATICĂ

— Dacă n-ar fi ploicica asta, te-aş îndemna să colinzi pădurea, măcar aşa de unul singur, mi-a spus prietenul meu, îndată după prînzişor.

— Şi nu cumva, fiindcă nu poţi face abstracţie de ploaie, te simţi obligat să-mi vorbeşti despre abstracţia în matematici ? — l-am zeflemisit, încercînd să ascund durerea pricinuită de starea sănătăţii lui.

— De data asta, ai nimerit în plin — mi-a răspuns rîzînd de-a binelea Teodor Solonar. Se vede că mi-ai captat gîndurile, prin cine ştie ce minuscul dispozitiv de radio, ascuns undeva printre circumvoluţiunile creierului tău !

— Care va să zică, matale bădie, ţi-i a vorbi în bobote ?

— Nicidecum ! Vorbesc foarte serios !

— Cum să te iau în serios ? Aristotel însuşi a afirmat că „matematica este ştiinţă abstractă *prin excelenţă*, iar matale eşti hotărît să-mi vorbeşti, taman despre *abstracţia în matematici*, nu ? Şi eu, să te iau în serios ? Ce face ea, mă rog, cît îi ziulica de mare decît să abstracţioneze ? Oare ar putea exista vreo problemă de matematici în care să nu fi intervenit şi abstracţia ?

— Ei, tocmai aici e problema ! Nu te-ai întrebat niciodată cum se face că, deşi matematica abstractizează, cît îi ziulica de mare, cum zici tu, în atîtea mii de ani, nu şi-a terminat treaba şi nu a devenit o ştiinţă moartă precum latina ? De ce pe zi ce trece, ea întinereşte şi e mereu mai proaspătă ? De pildă, pe la sfîrşitul secolului al XVIII-lea, un mare matematician ca J. L. Lagrange se plîngea, — într-o scrisoare către d'Alembert — că în curînd „mina geometriei va trebui părăsită, dacă nu se vor găsi filoane noi, iar catedrele de geometrie vor deveni tot aşa de rare ca şi acelea de limbi moarte ! Aceasta la sfîrşitul secolului al XVIII-lea, dar la începutul secolului al

Joseph Louis
Lagrange

XIX-lea geometria se înfățișa renăscută din propria ei cenușă și, de atunci, n-a mai dat nici un semn de oboseală !

— Bine, bădiță dragă, dacă mata vrei să privești procesul de abstractizare ca pe un elixir, ca pe un secret al tinereții veșnice, atunci află că de-ai străbate pămîntul în lung și în lat, n-ai să găsești un alt ascultător mai atent.

— Nu-i nevoie să-mi spui, că știu eu cu cine am de-a face ! Greu e numai pînă ce te dau pe brazdă ! Să știi că de mult doresc să cercetăm amîndoi această problemă, așa pe-ndelete, fiindcă amîndoi cunoaștem cîte o fațetă a ei și numai discutînd am putea orîndui lucrurile așa cum trebuie !

— Atunci, fiindcă-i vorbă serioasă, pot să-ți mărturisesc că și eu tînjeam după ajutorul tău, pe cînd încercam să înnod realitatea de noțiunile abstrase din ea, citind *Metafizica* sau *Analiticele* lui Aristotel. Îmi ziceam însă că tu, care pornești automat de la noțiunile abstracte ca să mergi cu ele mai departe, n-ai să mai zăbovești, să cauți cum s-a ajuns la ele !

— Iată, măi Toa, la ce m-am gîndit — am început eu discuția după cîteva sorbituri de cafea. Fiindcă nu poate exista vreun proces de gîndire logică în care să se evite abstractizarea, hai să pornim chiar de la faptul că abstracția este operația logică *ce se aplică* în orice știință și că, după spusa lui Aristotel, „a abstrage înseamnă a descoperi universalul în individual".

Jean Le Rond
D'Alembert

— E bine că ți-ai amintit și de acest aspect al procesului de abstractizare, proces care în realitate se prezintă sub forme destul de variate. Prima formă a fost aceea pe care am remarcat-o la început, *aceea de izolare* a unei calități adică, de a scoate o parte dintr-un întreg. Ea se arată ca rezultat al unei analize și de aceea este denumită *abstracție analitică* sau formală, pe cînd aceasta din urmă apare ca rezultat *al inducției*, este deci o *abstracție generalizatoare* sau *de identificare* !

— Îmi mai aduc aminte și de faptul că am citit cîndva, în *Dialectica naturii*, această observație a lui Engels : „Empiristul este așa de obișnuit să cerceteze lucrurile în mod experiemental încît și atunci cînd operează cu abstracții se crede în domeniul cunoașterii senzoriale".

— E adevărat. În orice știință intervine, într-un anumit procent, și procesul de abstractizare, dar în matematici acest procent atinge valoarea maximă, adică „sută la sută". De aici rezultă, ca o consecință logică, natura ei speculativă, întregul tezaur al matematicienilor fiind compus din raționamentele logice provenite din definirea noțiunilor supuse cîteodată și unor axiome fundamentale. Matematica modernă are însă, tot ca urmare a procesului de abstractizare, și un caracter constructiv. Mai clar decît mine, îți va explica aceasta *Micul dicționar filozofic*[1]. Uite-l în raftul al doilea. Te rog, pune-l aici pe masă și citește articolele despre abstractizare și abstracție.

---

[1] *Mic dicționar filozofic.* Ed. II, Editura Politică, București, 1973.

Am ascultat îndemnul prietenului meu şi apoi i-am zis :

— O parte din cele ce am găsit la „abstracție" îmi erau bine cunoscute din lucrările lui Aristotel şi ale altora dintre cei ce i-au urmat. De pildă acestea : „în raport cu modalitățile de abstractizare se pot întîlni diferite tipuri de abstracție în știință și în cunoaștere în general ; *abstracții empirice*, de exemplu, noțiunile empirice, produse de abstractizarea analitică (numită și conceptuală sau aristotelică), realizată prin abstragerea notelor comune, degajate prin analiza și compararea obiectelor și proceselor concrete, sau a unor alte noțiuni". Cu alte cuvinte, aceasta se face că, printr-o calitate comună și făcîndu-se abstracție de toate celelalte aspecte, pot fi reunite obiecte sau fenomene cu totul diferite între ele. Mi-amintesc iar de un exemplu, dat de Hegel și citat de Engels, în legătură cu cuvîntul abstract *fructe* : „Poți mînca mere, pere, dar niciodată fructe" !

— Așa ? Dar parcă ieri mi-am spus că te duci la piață ca să cumperi fructe ?

— Ai dreptate, dar ți-am adus mere ! Așa că nu mă tachina şi tu, tocmai cînd am ajuns la ananghie căci, urmărind mai departe articolul despre abstracție, am dat peste alt tip de abstracții, „*abstracțiile constructive* de exemplu, noțiunile teoretice, obținute prin abstractizarea constructivă sau idealizantă (combinată cu cea analitică) !"

— Și asta te-a speriat ?

— Ai ghicit, iar dacă ai să izbutești să mă faci să înțeleg ce vrea să fie abstracția asta constructivă...

— Vom încerca să facem ce-om putea ! Te fac numai atent că aici vom da peste probleme delicate asupra structurilor matematice, unde lucrurile se petrec oarecum altfel decît în capitolele care se bazează pe procedeele de abstracție cu care eram deprinși noi, în tinerețele noastre ! Acelea s-au cam învechit, după cum ai citit, acum ele poartă și un nume specific : *abstracții empirice* sau *analitice* ! Azi accentul se pune pe *abstracțiile constructive* fiindcă, așa cum le arată numele, prin ele se stabilesc construcții noi în domeniul matematicilor, bazate pe posibilitatea de a stabili relații noi, pur formale, furnizate de noua logică a relațiilor.

— Logica relațiilor zici ? Atunci încă un termen nou pentru mine și Aristotel !

— N-ai de ce te speria ! E pur și simplu denumirea capitolului din logică, în care se analizează, sub formă matematică, proprietățile formale ale relațiilor. Să numim, de exemplu, cu x şi cu y cei doi termeni caracteristici ai unei relaţii date, pe care o notăm cu litera R. Aplicînd metodele curente în teoria mulţimilor, structura logică a acestei relaţii se scrie sub forma $R(x, y)$ sau încă xRy unde x şi y păstrează ordinea stabilită de relaţie, primul termen, x, fiind *antecesorul*, iar cel de al doilea y, *succesorul*. Ca *domeniu* al relaţiei R se consideră mulţimea elementelor x, iar drept *codomeniu*, mulţimea elementelor y. Logica relaţiilor efectuează toate operaţiile ce se pot face între elementele x şi y ale acestor două mulţimi şi analizează proprietăţile ce decurg din ele !

— Aha ! Acum bănuiesc eu ce-a vrut să spună H. Bergson cînd scria că : „ştiinţa modernă se bazează pe legi, adică pe relaţii" ! În aceste cîteva cuvinte el punea în evidenţă faptul că, spre deosebire de ştiinţa antică, ce se baza pe *concepte*, ştiinţa modernă caută relaţiile ce pot fi stabilite între mărimile variabile. Dar dacă te gîndeşti mai bine, trebuie să recunoşti că nimic nu-i nou sub Soare ! Oare Platon nu a scris şi el despre relaţiile matematice, sau fizice, sau morale ?

— N-am să mă amestec eu acum în revendicările tale de prioritate cu privire la Platon şi cred că ai să renunţi şi tu la ele cînd îţi voi preciza că gîndirea contemporană însăşi este relaţionistă şi asta înseamnă altceva decît clasificare şi specificare, înseamnă ceva ce depăşeşte procesul prin care se stabilea raportul dintre individ şi specie, sau dintre specie şi gen înseamnă descoperirea relaţiilor, din ce în ce mai complexe, dintre elementele în cauză. Logica relaţiilor, adică a predicatelor, se opune logicii clasice, a subiectelor. De aceea, ceea ce se înţelege azi prin *gîndire abstractă* este altceva decît ceea ce consideram noi pe vremuri, fiindcă nu mai este gîndirea inductivă bazată pe procedeele de abstracţie empirică sau *analitică* !

— Se poate, dar nu-mi închipui că această abstracţie constructivă a căzut din cer. Sînt convins că şi aceasta s-a dezvoltat bazîndu-se pe rezultatele obţinute prin vechile procedee ! De la acelea aş vrea eu să pornim, ca să-mi arăţi cum s-au decantat noţiunile abstracte cu care, aidoma unor cărămizi, s-a zidit în timp de multe, multe milenii, clădirea aceasta minunată ce poartă numele de MATEMATICĂ.

— Doar nu-mi vei cere să stabilesc cîte observaţii ale strămoşilor, cîte constatări sau deprinderi, transmise din generaţie în generaţie prin ereditate, au contribuit ca să se ajungă la noțiunea de număr, de formă geometrică, de măsură a unei lungimi a unei arii sau a unui volum ?

— Ba da ! Dacă facem o treabă, atunci să o facem cumsecade! Coboară-mă, te rog, cu ascensorul veacurilor, pînă la treapta cea mai de jos posibil, pînă la aceea pe care a atins-o și poetul nostru drag, prin versurile :

„Îți ridicaseși capul de jos, chemat de Soare
Și începu îndată și cugetul să-ți zboare".

De acolo, vreau să urc alături de tine, *per pedes apostolorum*, atît cît mă vor ține picioarele ! Spun așa, fiindcă, după cum vezi, capul stă bine pe umeri ! Cam la ce adîncime bănuiești că am putea da peste cel ce a avut întîia oară intuiția spațiului ?

— Visezi ca un poet, întrebi ca un poet și ai pretenția să-ți răspund ca un om de știință ? Imposibil ! Un milion de ani înseamnă 10 000 de veacuri sau 1 000 de milenii, iar zilele trecute am citit că un antropolog american a descoperit în Etiopia oseminte omenești pietrificate de acum vreo trei milioane de ani. Or, *intuiția spațială*, ca și aceea de *număr* sau mai bine zis de *mulțime*, a străfulgerat mintea omului mai înainte ca el să-și fi ridicat „capul de jos, chemat de Soare", fiindcă aceste noțiuni nu le are numai omul, ci și animalul. Probabil că s-au format datorită faptului că atît omul cît și animalul se mișcau, din loc în loc, cu o anumită viteză, și așa au avut posibilitatea să distingă obiectele din jurul lor, să deosebească linia dreaptă de cea curbă și să aprecieze distanța ce separă două obiecte.

— Asta se poate fiindcă nu numai omul, dar și animalele, ce se orientează prin văz, merg în linie dreaptă. De altfel, cred că, dintre toate simțurile, vederea a fost aceea care a avut rolul principal în dezvoltarea noțiunilor matematice, ca aceea de spațiu.

— Știu eu dacă numai vederea ? Bubuitul tunetului, foșnetul frunzelor sau susurul unui izvor, adică auzul, ori pipăitul crengilor pe care trebuia să le atingă cînd le rupea, să nu fi avut nici un rol la fixarea intuiției spațiale ? În introducerea la *Cursul de geometrie proiectivă*, publicat de Federigo Enriques, în 1930, autorul insistă asupra faptului că pot fi deosebite două categorii de proprietăți geometrice și anume : *proprietăți grafice*, legate de noțiunea de dreaptă, de plan, de concurența dreptelor etc. și *proprietăți metrice*, cînd apare noțiunea de distanță sau de mărime a unghiurilor etc. Enriques presupune că aceste două categorii de proprietăți geometrice provin din două forme deosebite ale intuiției spațiale pe care omul le-a cîștigat în cursul experiențelor lui ancestrale, intuiția grafică fiind rezultatul senzațiilor vizuale, iar intuiția metrică, a senzațiilor tactile sau musculare. Tîrziu, spune el, aceste două forme distincte de intuiție geometrică s-au contopit în una singură, aceea de *intuiție spațială*.

— S-ar putea ca și *principiul necontradicției* să fi apărut tot pe atunci.

— E mai mult ca sigur că așa a fost ! Repetînd anumite acțiuni, omul a observat că ele aveau același rezultat și aceasta îi plăcea, îl mulțumea, creînd în el un anumit sentiment de siguranță față de acțiunile ce nu-i făceau vreun rău și nu se contraziceau între ele.

— După cîte văd ne apropiem de prima treaptă. Aștept să facem acest pas, spunîndu-mi cum a ajuns omul de la aceste acțiuni la noțiunile matematice de care s-a ajutat ca să-și rezolve, în mod practic, problemele ce-l preocupau : construirea locuințelor, măsurarea ogoarelor, cîntărirea ?

— Degeaba aștepți acest răspuns, căci nimeni nu-l mai poate da ! Din cele mai vechi scrieri care ne-au rămas, papirusurile egiptene și cărămizile babiloniene, se constată că omul *știa* să calculeze și arii, și volume, și de cîtă hrană ar avea nevoie o echipă de oameni plecată în armată sau ca să facă o anumită construcție, dar *în nici una dintre aceste scrieri* nu se amintește *cînd* și *cum* s-a declanșat în mintea omului *noțiunea abstractă* de măsură, *de tangenta unui unghi* sau *pantă*, cum îi mai zicem azi, noțiune cu care egiptenii jonglau, fiindu-le necesară la tăierea pietrelor cu care au acoperit piramidele într-un chip așa de perfect, că totul apărea ca o uriașă față plană ! Sau, cum au ajuns babilonienii la concepția abstractă a calculului algebric ? Enigmele acestea rămîn enigme și te rog să nu-ți faci iluzia cu urcușul din preistorie se poate face pe trepte luminate cu neon ! Să fii bucuros dacă, din cînd în cînd, vom găsi și un opaiț care să ne împiedice să lunecăm de pe o treaptă abia săpată.

— Poate că aceste probleme ar fi putut fi descurcate dacă ele ar fi preocupat pe matematicienii din antichitate în aceeași măsură în care ne preocupă pe noi. Dar, era natural ca pe aceia să-i fi interesat, mai întîi, cum să găsească soluțiile problemelor ce le aveau înainte, nu să mediteze asupra genezei noțiunilor matematice ! Și totuși, mi se pare curios că grecii, care și-au arătat măiestria de povestitori în *Iliada* și *Odiseea*, să nu fi fost tentaţi de istoria matematicilor, mai ales că această ştiinţă a fost creată, cinstită şi chiar îndrăgită de ei !

— Pe greci nu-i putem învinui, căci ei au scris, numai că scrierile lor nu s-au păstrat decît în parte. De pildă, cele mai vechi informaţii se găsesc la Herodot, aşadar din secolul al V-lea î.e.n. El arată că în Egipt, pe vremea faraonilor, pămîntul era împărţit în loturi pe care inundaţiile le mai ştirbeau. Apoi, în secolul al IV-lea î.e.n., Eudem din Rodos a scris o istorie a geometriei, dar şi din ea nu s-au mai păstrat decît fragmente copiate de către comentatorii operelor lui Aristotel sau Euclid, ca de pildă Proclus, Heron din Alexandria, Nicomah ş.a. Dar ce puteau şti pe atunci grecii de cele ce se petrecuseră cu zeci de milenii înaintea lor, atunci cînd, deşi alfabetul nu fusese inventat, multe adevăruri matematice fuseseră descoperite ? Mă întreb chiar, ce au putut şti grecii despre vremurile mai apropiate de ei, de pildă de şcolile de scribi, ce funcţionau cu cel puţin o mie sau două mii de ani înaintea lor, în Egipt, în cîmpia Mesopotamiei sau aiurea ?

— Poate că de aceea sînt mulţi care încearcă să elimine aceste întrebări, afirmînd că omul a avut întotdeauna posibilităţi naturale de a cunoaşte, bazate pe intuiţie, pe experienţă şi pe deducţie. Că prin aceste mijloace, proprii firii omeneşti, care au intervenit, fie pe rînd, fie simultan, omul a ajuns la procedeele de abstractizare şi a învăţat cum să se orienteze, cum să măsoare etc., aşa numai din necesitate şi fără nici o analiză prealabilă, exact după cum şi azi omul normal mănîncă atunci cînd îi e foame, doarme cînd îi e somn etc., aceste acţiuni petrecîndu-se spontan.

— Cu alte cuvinte ne întoarcem la domnul Jourdain, care făcea proză fără ca să ştie ? Oricum, atîta timp cît nu se poate dovedi, orice ipoteză poate fi plauzibilă. Problemele de istorie a matematicilor au devenit obiect de cercetare ştiinţifică abia de prin secolul al XVII-lea. În unul dintre cele două volume de *Istoria matematicilor*, scrisă de D. E. Smith, se aminteşte de o lucrare din secolul al XVI-lea a italianului Baldi, rămasă în manuscris şi tipărită abia la începutul secolului al XVIII-lea sub titlul *Cronică a matematicilor* şi apoi că, în a doua jumătate a secolului al XVII-lea, marele matematician englez John Wallis a scris şi a încurajat cercetarea istoriei matematicii.

În Franţa, astfel de cercetări au fost stimulate de enciclopedişti. Mi-aduc aminte cu plăcere că am răsfoit, de multe ori, în Biblioteca de la Seminarul Matematic „Alexandru

Myller“ din Iași, cele două volume de *Istorie a matematicilor*, publicate în 1808 de către Charles Bossut și mai ales cele patru volume ale lui Jean Etienne Montucla, primul tipărit în anul al VII-lea după Revoluție, iar ultimul în anul al X-lea, cînd, de data aceasta, în paranteză apare și anul 1802 ! Desigur că în aceste volume nu trebuie să crezi că ar putea exista informații asupra epocii de început, în ele sînt mai puține informații decît avem azi asupra matematicilor egiptene, babiloniene, chineze, hinduse, în schimb sînt multe și prețioase relatări asupra matematicilor și matematicienilor din epoca noastră. Dar, după, cîte văd, ne-am întins la taclale, uitînd că apucasem să urcăm o scărișoară ! Cred că ar fi vremea să te hotărăști și să-mi spui, încotro ai vrea să o luăm? Fiindcă, vezi, bădie, există două noțiuni fundamentale care, oricît ar părea de curios, deși sînt strîns legate împreună, au rămas despărțite, aceea de *număr* și aceea de *figură geometrică.*

Cercetările și rezultatele stabilite în legătură cu relațiile dintre numere au dus la crearea *Aritmeticii*, iar acelea asupra mărimii și pozițiilor relative ale figurilor geometrice au format *Geometria. Aritmetica* și *Geometria* sînt cele două izvoare principale, peste care dăm ori de cîte ori se caută începuturile matematicilor. Chiar dacă mai tîrziu apele lor s-au contopit, izvoarele și-au păstrat limpezimea și locurile neschimbate și nu putem alerga de la unul la altul ca să urmărim cursul lor, în același timp.

— La grea încercare mă mai pui. Mi-ar place să te aud vorbindu-mi despre numere și totodată rîvnesc la problema spațiului. Te-am auzit vorbind odată cu nepotul meu, Nucu, despre *spațiile abstracte*. Pe mine nici nu m-ați luat în seamă, iar mie, ascultîndu-vă, mi-a venit să rîd și să vă spun : „Măi, filozofilor, ce v-a apucat ? adică spațiul însuși nu-i o noțiune destul de abstractă ?“ Dar vă vedeam așa de serioși. . . și m-am sfiit să vă întrerup. Există în adevăr *spații abstracte* ? Uite, dacă vrei să știi, problema aceasta a spațiului nu i-a preocupat numai pe cei mai mari filozofi din lume, ci și pe mine.

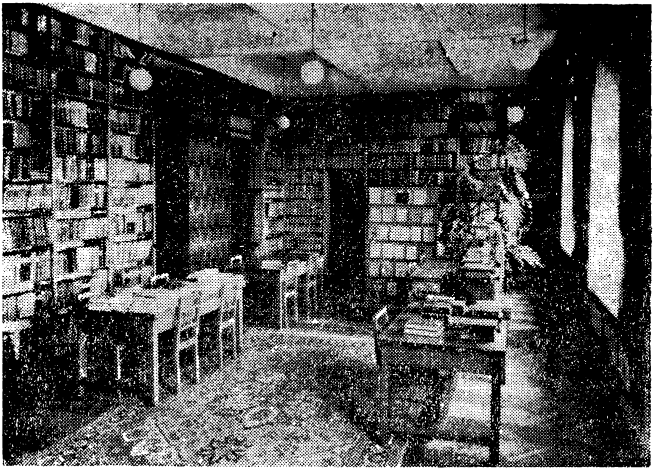
— Și, în privința *spațiului*, la ce concluzie ai ajuns ?

— Mai întîi și întîi, că însăși noțiunea asta de spațiu e tare încurcată. Deși e o noțiune abstractă, există un spațiu real, concret, acela în care trăiesc eu și despre care Immanuel Kant afirma că are proprietăți apriorice, apoi există spațiul cosmic, despre care teoria relativității are nu știu ce fel de rezerve, pe urmă există spațiul geometric cu 1, 2, 3, și mai multe dimensiuni, ba, după cîte am auzit, există și spații abstracte — ce-or mai fi și acelea ? Iată cît de neclară mi-e noțiunea de spațiu.

— Bine, bădie mata tocmai să-mi vorbești așa? Oricine știe că un termen *abstract*, prin însuși conținutul lui, este confuz. Numai un cuvînt *concret* trezește în conștiința noastră obiectul de care este asociat numele lui. Cînd spun „Palatul Culturii din Iași", matale te și vezi, fără nici un efort, dinaintea statuii lui Ștefan cel Mare, alături de care te jucai adesea pe cînd erai copil și așa mai departe !

— Dacă-i vorba de exemple, cu *așa mai departe*, atunci de ce n-ai adus de la început vorba despre Seminarul Matematic ? Văd că au început să-ți sclipească ochii numai cît am deschis eu gura ! Te-ai și văzut acolo, așteptînd să ți se coboare din raft cartea ce ai dorit-o, chiar dacă se află pe o poliță de sus, lîngă tavan ! Ba, să ți se mai aducă și încă una, ca supliment !

— Să știi că mi-a făcut plăcere această evocare a Bibliotecii mele dragi, pe care cine știe dacă voi mai vizita-o. Am revăzut-o fără să fac nici un efort, ceea ce nu s-ar fi întîmplat



Universitatea din Iași. Biblioteca Seminarului Matematic dacă ai fi pronunțat, de pildă, cuvîntul *sferă*. În acest caz, ar fi trebuit să mă gîndesc, la ce sferă te referi ?

— Îmi pare bine că de data asta te-am prins eu la strîmtoare! N-ai ales bine cuvîntul *sferă*, fiindcă el nu produce în mintea mea nici o încurcătură. O sferă, fiind locul punctelor egal depărtate de un punct fix, numit centru, îmi imaginez uşor, în orice punct din spaţiu, o sferă, aidoma unui balon de săpun, cu o rază oricît de mare sau oricît de mică, dacă vrei, chiar cu o rază zero, adică o sferă redusă la un punct !

— Înseamnă că m-ai obligat și pe mine să mă gîndesc la sfera care-ți convine ţie ! Eu însă îmi închipui o sferă cu raza egală cu 3 i !

— Asta nu se poate şi o spui numai aşa, ca să-mi faci mie în ciudă !

— De unde ai scos tu că *nu se poate* ?

— Fiindcă distanţa între centrul sferei şi un punct de pe ea trebuie să fie un număr real şi nu imaginar ! Ce înseamnă *distanță imaginară* ?

— Vom vorbi noi și despre asta, poate, mai tîrziu Acum, ca să te consolez, am să-ţi spun că de părerea ta erau toți matematicienii pînă în secolul al XIX-lea, cînd au descoperit geometriile neeuclidiene După aceea, alături de sfera ta, cu rază reală, a mai apărut şi una cu rază imaginară, însă tot așa de reală ca și sfera care ți-e în minte Numai că e oleacă altfel şi de aceea se numeşte *pseudosferă* !

— Așadar nu-i sferă, deci, te-am prins !

— Nu, fiindcă pentru mine, dacă mă situez în spațiul lui Bolyai-Lobacevski, ea este o sferă Dar pot să-ți vorbesc și de alte sfere, tot aşa de reale pentru mine : o sferă din spaţiul cu 4 dimensiuni, sau cu 5, 6, ..., *n* dimensiuni. Pe care trebuie să o aleg ? Continui să susții că imaginea pe care mi-o evocă mie cuvîntul abstract *sferă*, e tot așa de clară ca și pentru tine

— Chiar dacă nu mai susțin aceasta, susțin că am alunecat de la drumul drept. Te rog să ne întoarcem și să începi mata, frumușel, cu geometria lui Euclid, aşa după cum ne-am înțeles !

— Nimic mai simplu, uite am să-ți citesc ce-a scris Heron din Alexandria în legătură cu procesul de abstractizare în geometrie : „Geometria și-a format obiectul prin abstracție din cauză că dintre corpurile fizice care sînt tridimensionale şi au materie, geometria a separat materia din ele şi a creat corpurile geometrice, adică volumul şi prin abstracţie a ajuns la punct Ei, acum îţi place ?

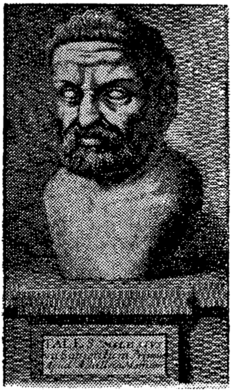
— Deloc ! M-am aşteptat să-mi spui ceva nou şi cînd colo îmi prezinţi o copie după Aristotel ! Dacă ai uitat, permite-mi să-ţi amintesc, cu destulă exactitate, cuvintele lui : „Obiectele matematice sînt generate prin intermediul abstracţiei“ sau „Ceea ce există în sine, într-o stare neseparată, este privit de matematician ca ceva separat“ Ba mai mult, Aristotel a atras atenţia asupra faptului că în noţiunea de abstracţie există două semnificaţii deosebite, prima : *operaţia de lăsare la o parte* a unor însuşiri ale obiectului considerat, a doua : prin abstracţie se poate ajunge la *concepte mai generale,* la o idealizare a obiectelor, semnificaţie pe care, de altfel, o scosese în evidenţă, insistînd asupra ei, chiar Platon

— Nu zic ba, dar asta s-a petrecut cu vreo patru sute de ani înainte de Heron ! Era, cred, timpul ca acestea să fie amintite, fiindcă, din păcate, adevărurile geometrice stabilite de oameni nu se pot transmite prin ereditate ! Heron, care era inginer de meserie şi nu filozof, s-a exprimat, cu vreo 18 secole înaintea noastră, cu rigurozitatea şi precizia de acum, accentuînd, pe de o parte, procesul de abstractizare a materiei din care este compus corpul fizic, iar, pe de alta, pe acela de abstractizare a dimensiunilor

— Vrei să spui că el *subînţelegea* faptul că de la corpurile tridimensionale se ajunge prin abstractizare la cele bidimensionale şi de la acestea la acelea cu o dimensiune sau fără nici o dimensiune cum este punctul ? Recunosc, totuşi îmi permit din nou să temporez entuziasmul tău, revenind la original adică la Platon, unde expunerea e mai limpede. Pentru Platon, obiectele matematice erau situate undeva între *idei,* considerate de el drept modele perfecte ale obiectelor reale, şi obiectele însăşi. Această poziţie intermediară arată că obiectele matematice erau privite drept nişte *forme abstracte,* sustrase materiei şi timpului ! De aceea, aceste obiecte geometrice se reprezentau prin figuri desenate cu rigla şi compasul pe hîrtie, figuri prin care se defineau proprietăţile lor caracteristice. Or, figura în sine fiind desenată pe hîrtie devenea prin ea însăşi un model de abstractizare a spaţiului cu trei dimensiuni !

— Stai, că aici nu-i chiar aşa de simplu cum încerci să prezinţi lucrurile ! Pentru Platon figura în sine era *o reprezentare concretă* a obiectului real şi prin ea demonstraţia logică devenea intuitivă. Rămîne însă adevărat că aceste

Tales

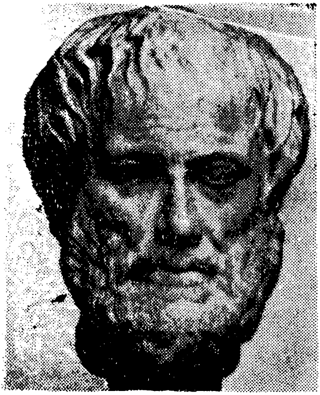


desene au contribuit îndeaproape la stabilirea modelelor abstracte ale corpurilor geometrice, forme în care se păstrează relațiile de ordonare și de dimensionare dintre corpul real și modelul său geometric.

— Iacă, și acum am să te întrerup ca să-ți amintesc de o altă observație a lui Platon pe care am găsit-o în *Republica* lui. El scria acolo că : „Geometrii folosesc figuri vizibile și judecă pe ele, dar ei nu se gîndesc la aceste figuri ci la altele cu care seamănă, dar care nu pot fi văzute decît în minte !"

— Mi-o amintesc însă mă întreb de ce te ții morțiș de Platon cînd nici lui Tales sau Pitagora nu le-a fost străin procesul de abstractizare ? Ba sînt sigur că el a fost practicat și de matematicienii egipteni, sau babilonieni sau de alții cu mult înaintea lor, fiindcă altfel nu s-ar putea explica rezultatele, adică formulele de calcul din geometrie, care datează de nu se știe cîtă vreme ! Cînd scribul egiptean socotea cît de mare era suprafața unui ogor, el nu se gîndea nici unde-i situat el nici ce calități avea pămîntul considerat nici al cui era, ci avea în vedere numai dimensiunile lui : lungimea și lățimea. De altfel, în papirusul Rhind găsești figuri geometrice desenate în mod stîngaci, desigur caracteristic unui elev, dar aidoma modelului fizic indicat de problemă. Acestor figuri nu li se aplică, oare, observația lui Platon ?

— Nu aș putea jura ! Acele desene s-ar putea interpreta și ca niște schițe topografice ale terenurilor respective nu


Aristotel

numaidecît ca modele ale unor figuri geometrice aşa cum vor fi ele considerate de matematicienii greci.

— Incontestabil că poate exista această deosebire între cele două moduri de a desena o figură geometrică. Mai mult chiar, s-ar putea afirma că egiptenii şi-au stabilit formulele altfel decît grecii, anume bazîndu-se pe un proces de inducţie, adică în urma unui şir lung de încercări şi reuşite particulare. Meritul lui Tales, şi al matematicienilor greci ce i-au urmat, constă şi în aceea că ei au înţeles deosebirea dintre un adevăr stabilit pe cale inductivă şi un altul dovedit prin raţionament. În primul caz, adevărul se prezintă ca *probabil adevărat,* siguranţa o are numai raţionamentul logic care decurge din relaţiile existente între diferitele părţi ale unei figuri. Tales şi elevii lui au formulat primele raţionamente şi prin el geometria a păşit pe o treaptă mai înaltă de abstractizare. Faptul s-a precizat în şcoala lui Pitagora, unde se insista asupra demonstrării teoremelor cît mai riguros posibil, ţinîndu-se seama de definiţiile noţiunilor abstracte, apoi a fost continuat şi discutat în şcoala lui Platon care a deschis calea către logica lui Aristotel : „ştiinţă a ideii pure adică a ideii că elementul abstract al gîndirii este gîndire a gîndirii" cum va spune Hegel, peste vreo două mii de ani ! Aristotel este acela care a contribuit, cel mai mult, la pregătirea terenului pe care se va dezvolta geometria lui Euclid !

— Mi-ai spus odată că au fost scrise geometrii şi mai înainte de Euclid.

— Așa-i. Chiar în secolul al V-lea î.e.n. Hippocrate din Chios a scris o carte de geometrie pe care a intitulat-o, ca și Euclid, *Elemente*. Despre ea nu se cunoaște nimic în afară de titlu. Pe vreamea lui Platon s-au mai scris alte două geometrii, una de către Leon și alta de către Theodios. Aceste lucrări s-au pierdut și ele deși, după informațiile rămase, serveau drept manuale atît în Academia lui Platon, cît și în *Lyceum*-ul lui Aristotel.

— Nu-i de mirare, nu au putut ține piept colosului lui Euclid !

— Bine spus ! Servind de model, nu numai geometrilor din antichitate, ci și acelora de mai tîrziu și pînă în vremea noastră, *Elementele* lui Euclid, cu toate criticile ce i s-au adus, rămîne un colos ! La început, cred că s-au impus prin noutate ; dintr-o dată, *Geometria* se prezenta *altfel* decît ca o colecție de teoreme mai mult sau mai puțin disparate ! Ea apărea ca un *model* de știință abstractă, ca un *sistem unitar* de adevăruri ce decurg *în mod logic*, unele după altele, pe calea raționamentului deductiv, pornindu-se numai de la defiriții, postulate și axiome ! Știi, poate, care sînt cele șase principii logice, formulate de Aristotel, pe care Euclid le-a pus la baza *Elementelor* lui ?

— S-ar putea să nu le știu ? Îmi face plăcere să mi le repet, și de aceea nu le uit și nu alerg repede la caiet fac alții ! Iată-le :

(1) formularea generală a problemei sau teoremei ;

(2) desenarea figrilor corespunzătoare, așa cum apar din datele concrete ale problemei ;

(3) expunerea și analiza datelor ;

(4) construcții ajutătoare care pot conduce la rezolvarea problemei ;

(5) demonstrația propriu-zisă și

(6) concluzia, ce trebuia să apară, independentă de figurile folosite ! Ei, ce zici, bădie, credeai că mă ai în mînă și cînd colo, ți-am alunecat ca zvîrluga ! Așa că, e rîndul meu la întrebare ! De ce Euclid nu a dedus teoremele de geometrie pornind numai de la definiții, așa cum susținea Platon că este posibil și cum a procedat, de altfel, el însuși în cărțile VII, VIII și IX în care tratează aritmetica ? De ce a așezat la bazele geometriei postulatele și axiomele ?

— Prin această întrebare răscolești una dintre cele mai încurcate probleme cu care au avut să se chinuiască geometrii greci din antichitate. Problema are la origine modul în care s-au reflectat în gîndirea matematică cele două laturi contradictorii ale materiei : *continuitatea* și *discontinuitatea*. Imaginile matematice abstracte ale acestor două contrarii sînt : *numărul întreg*, expresie a unei mulțimi discrete de obiecte *distincte și indivizibile* și *întinderea geometrică*, adică *linie, suprafață, volum*, imagine a continuului neîmpărțit în părți, dar avînd calitatea să *se poate divide la nesfîrșit*.

Odată precizate noțiunile de unitate și de număr (bineînțeles *număr întreg*, egal cu o mulțime compusă din unități, căci altfel de numere nu au fost concepute de greci) și după ce s-au stabilit relațiile cel mai simple dintre numere, Euclid a putut să dezvolte aritmetica în mod genetic, constructiv, adică construind teoremele din aproape în aproape, prin generalizări succesive ale relațiilor cele mai simple stabilite în prealabil, fără să întîmpine nici o dificultate. În geometrie însă, metoda aceasta *genetică* nu avea nici o șansă de reușită, pe de o parte fiindcă *punctul* era conceput ca un indivizibil, iar *dreapta, suprafața* sau *volumul* ca mărimi continue și divizibile la infinit, și pe de altă parte fiindcă măsurarea mărimilor geometrice, linii, suprafețe, volume puneau față în față aceste contrarii : *continuu* care trebuie măsurat cu unități *discontinue, discrete* ! Era natural ca în felul acesta să se nască paradoxul ! La întrebarea ce este linia, Aristotel susținea că linia este un continuu divizibil la infinit, pe cînd Democrit susținea că, deși are aspectul de continuu, linia este formată din atomi !

— Asta-i cam așa ! De îndată ce se punea problema evaluării unei mărimi continue, lucrurile trebuiau să se burzuluiască, fiindcă o mulțime discretă de obiecte o poți număra, dar cînd trebuie să măsori o lungime și îți alegi o unitate de măsură care nu se cuprinde de un număr exact de ori în lungimea de măsurat, atunci începe operația de reconsiderare a unității de măsură. Existau astfel două posibilități :

(1) una dintre noile unități de măsură să se cuprindă exact în lungimea dată și atunci *mărimea ei* se exprima prin raportul numerelor întregi respective, raport care azi se numește număr *fracționar sau rațional*, și

(2) să nu existe o unitate comună de măsură și, în acest caz, se ajunge la noțiunea de *mărime irațională*, cunoscută de însuși Pitagora și exprimată prin exemplul clasic legat de diagonala pătratului.

— Îmi place cît de pompos te exprimi : *exemplu clasic* !

— Atunci ce epitet ai să-i atribui lui Platon care spunea că „nu merită numele de om, acela care nu știe că diagonala pătratului este incomesurabilă cu latura sa“ ? Dar te iert de răspuns dacă-mi amintești frumoasa demonstrație a acestui adevăr ! Am știut-o și poate că o mai știu, dar mi-ar face plăcere să o ascult din gura ta !

— Sînt sigur că o știi ! Dacă desenăm pătratul și-i duce diagonala (fig. 1) notînd latura pătratului cu a și diagonala cu b, teorema lui Pitagora ne dă : $a^2+a^2=b^2$ sau $2a^2=b^2$. Dacă măsor diagonala cu latura înseamnă că trebuie să calculez raportul $\frac{b}{a}$. Din relația pe care am stabilit-o avem

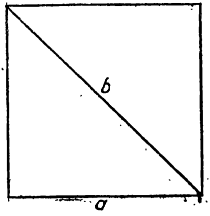


Fig. 1

$\left(\frac{b}{a}\right)^2=2$. Or, în ipoteza că a și b sînt numere întregi, această relație este imposibilă. Într-adevăr, presupunînd contrariul, înseamnă că numerele a și b sînt numere prime între ele, căci dacă ele ar avea un divizor comun, atunci în raport el s-ar fi simplificat. Dar fiindcă $\frac{b^2}{a^2}=2$ rezultă că $b^2=2a^2$, adică b^2 este un număr par. De aici rezultă că el este de forma $b^2=(2b')^2$ și înlocuind avem $4b'^2=2a^2$ sau $2b'^2=a^2$, de unde rezultă că și a este un număr par, ceea ce contrazice ipoteza că a și b sînt numere prime între ele. Rezultatul absurd la care am ajuns dovedește că a și b *nu sînt amîndouă numere întregi*, ci de altă natură, adică iraționale. Ei ? Nu ai fi putut face singur demonstrația ?

— Cred că nu. După ce aș fi scris teorema lui Pitagora, nu știam cum să pun problema măsurării, deși ar fi fost destul de simplu ! Dar pentru mine semnul de întrebare a rămas încă, anume sub forma următoare : Dacă existența mărimilor incomensurabile era admisă, despre ce paradox vorbeşti şi cum se ajungea la el ? Te referi la paradoxurile lui Zenon ?

— Şi la ele, dar nu voi insista asupra lor fiindcă le cunoşti. Mai exista unul ce punea în încurcătură atît pe susţinătorii ipotezei lui Aristotel, cît şi pe cei ce erau de partea lui Democrit. Iată-l : să considerăm un segment de dreaptă şi să-l împărţim, mai întîi în două părţi egale şi apoi pe rînd, fiecare jumătate în cîte două părţi egale şi aşa mai departe. Întrebarea este : ce se va întîmpla dacă se continuă împărţirea la nesfîrşit ? După ipoteza lui Aristotel, continuînd împărţirea se va ajunge la un segment de lungime nulă, fiindcă atîta vreme cît el nu se distruge complet, împărţirea poate continua. Procedînd acum la reconstituirea segmentului iniţial din părţile componente, constatăm că el a dispărut fiindcă o sumă, chiar infinită, de segmente de lungime nulă, reprezintă tot un segment de lungime nulă ! Dacă se admite însă ipoteza lui Democrit şi se presupune că prin împărţirea dreptei s-a ajuns la *atomi* adică la *puncte indivizibile*, aceste puncte sînt, la rîndul lor, nişte segmente extrem de mici, dar avînd totuşi o mărime finită. Încercînd reconstituirea segmentului iniţial, nu dăm nici de data aceasta peste el ; ci peste un altul, de lungime infinită, reprezentînd suma unui număr infinit de segmente de lungime finită !

— Da, acum am înţeles perfect ! Un segment de dreaptă nu se poate compune din puncte, în acelaşi mod cum se compune numărul 60 din 60 de unităţi ! Această ultimă părticică a dreptei era cu adevărat o *buturugă mică* în stare să răstoarne carul îndesat de teoreme al geometriei !

— Ca să ocolească această buturugă ce-i sta în cale, Euclid a apucat pe un alt drum, pe care el însuşi l-a deschis, spunîndu-şi că buturuga poate rămîne acolo să aştepte pînă s-ar găsi alţii, mai vrednici, să o cerceteze şi să o mute din loc.

— Nu se poate spune că n-a aşteptat destul !

— Cam vreo două mii de ani ! N-ar fi cazul oare ca şi taifasul nostru să mai aştepte ? Nu de alta, dar văd că ploaia a stat şi soarele îi cam aproape de amiază.

— Dacă spui mata, cine ar îndrăzni să te contrazică ? Numai că te rog să nu uiţi că după-amiază ai de parcurs vreo 2 200 de anişori ca să mă scoţi la lumină !

— Şi ai vrea să baţi recordul, străbătînd această distanţă astronomică numai în cîteva ceasuri ? Atunci, după mîncare e cazul să tragem şi un pui de somn !

* * *

— Prin cărțile de geometrie, cu care încep *Elementele*, șase la număr, mi-a spus Teodor Solonar cînd am reluat discuția întreruptă la vremea prînzului, Euclid a stabilit o metodă nouă și originală de a prezenta cunoștințele matematice, numită mai tîrziu *metoda axiomatică*. El a aplicat-o la geometrie, dar în epoca noastră ea a fost generalizată (tot prin abstractizare), astfel ca să cuprindă și alte sisteme matematice în afară de geometrie.

— Vrei să spui că, obligat să evite contradicțiile ce s-ar fi ivit dacă ar fi conceput linia, suprafața sau volumul compuse din puncte și ar fi aplicat metoda constructivă, Euclid a considerat aceste elemente primordiale ca obiecte date, a stabilit relațiile reciproce dintre ele prin postulate și axiome, urmînd ca teoremele să fie deduse din aceste afirmații acceptate fără nici o justificare ? Trebuie să-i fi fost dragi caii...

— Ce au caii cu axiomatica, mă rog ?

— Iaca au ! Că de la ei trebuie să-i fi venit lui Euclid în minte să le pună ochelari geometrilor ca să nu vadă decît numai înaintea ochilor, adică ceea ce le cerea el prin axiome !

— S-ar putea, mi-a răspuns rîzînd prietenul meu. Dacă niște bătăi în ușă l-au putut inspira pe Beethoven să scrie „Simfonia destinului", de ce n-ar fi posibil ca o pereche de ochelari de cai să fi declanșat în mintea lui Euclid ideea metodei axiomatice ? Euclid a realizat astfel un model perfect și durabil de știință deductivă și totodată un model abstract și unic al spațiului în care trăim.

— Mi se pare că, totuși, au fost găsite pricini de critică a acestei opere unice și perfecte ?

— Asta-i în firea lucrurilor, pete sînt și în Soare, iar fără cusur rămîne o operă numai atîta vreme cît nu a fost înfăptuită ! Cel mai mult a fost atacat postulatul paralelelor, prin care se afirmă că dintr-un punct exterior unei drepte nu se poate duce, într-un plan, decît o singură paralelă la acea dreaptă.

— Și ce meteahnă i-au găsit acestui postulat ? Se îndoau de el ?

— Nicidecum ! Erau ferm convinși de adevărul pe care-l exprima însă nu și de faptul că locul lui ar fi fost printre postulate. Părea mai puțin evident decît alte postulate și se credea că ar putea fi stabilit printr-o demonstrație, cu alte

Gheorghe Vrănceanu

cuvinte redus la o teoremă. De altfel, problema paralelelor preocupa pe geometrii greci încă mai înainte de a se fi scris *Elementele*. Este amintită şi în lucrările lui Aristotel astfel: „unii matematicieni au încercat să demonstreze paralelismul a două drepte bazîndu-se pe egalitatea unghiurilor corespondente, fără să ştie că ei se bazau tocmai pe ceea ce nu putea fi demonstrat dacă liniile nu ar fi fost paralele". De atunci şi pînă azi, mulţi matematicieni au fost de părere că însuşi autorul *Elementelor* a avut îndoieli cu privire la natura — postulat sau teoremă — a adevărului asupra paralelelor. Iată de pildă cum se exprimă geometrul român, academician profesor Gheorghe Vrănceanu[1]: „este probabil că şi Euclid să se fi gîndit la acest lucru, deoarece, cum am văzut, el utilizează axioma paralelelor după ce demonstrează o serie de teoreme care nu presupun această axiomă". Iar dacă vrei să o luăm de la început, am notat aici cele ce scria Proclus, comentatorul *Elementelor*, despre postulatul al *V-lea*. Cred că ştii că i se mai spune şi aşa sau încă şi *axioma a XI-a*?

— Da, sînt numerele cu care apare această propoziţie în diferite texte ale *Elementelor*. În unele copii, ea este trecută

---

[1] G. Vranceanu, C. Teleman: *Geometrie euclidiană. Geometrii neeuclidiene. Teoria relativităţii*. Editura tehnică, Bucureşti, 1967, p. 92.

printre postulate şi *atunci* este al V-lea, iar în altele la axiome şi atunci e numerotată drept a XI-a.

— În comentariul său, Proclus arată mai întîi că Gemino (secolul I î.e.n.) a încercat să demonstreze postulatul al V-lea şi apoi continuă aşa : „această propoziţie trebuie eliminată complet din rîndul postulatelor, căci ea este o teoremă ce prezintă dificultăţi pe care Ptolemeu şi-a propus să le elimine". Aşadar, iată trei date importante : secolul I î.e.n. Gemino, secolul II e.n. Ptolemeu şi secolul V e.n. însuşi Proclus.

O dată cu traducerea *Elementelor* în limba arabă, s-a ivit şi problema postulatului paralelelor. Începînd din secolul al VIII-lea, timp de patru secole, au fost scrise numeroase lucrări în care sînt arătate metodele ingenioase prin care se căuta — fără nici un rezultat pozitiv—să se demonstreze postulatul paralelelor. Printre acestea am să-ţi aduc la cunoştinţă că se află şi o încercare a marelui poet Omar Khayyam, despre care ştii că a fost şi mare matematician. Apoi, această pasiune s-a trezit la matematicienii europeni din timpul Renaşterii şi a continuat pînă în secolul al XIX-lea cînd, ca orice pasiune, s-a stins !

— Era şi timpul, că de peste două mii de ani obseda lumea ! Şi, drept să-ţi spun, nu înţeleg cum de au putut să existe atîtea minţi luminate, atîţia oameni, buni cunoscători ai domeniului şi nu nişte diletanţi, atîţia oameni în toată firea, care au contribuit la progresul matematicilor, care să se lase seduşi de această idee fixă, că ar putea demonstra că printr-un punct exterior unei drepte, în planul format de punct şi dreaptă, se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă ? !...

— Şi eu aş vrea să-ţi spun drept că priveşti lucrurile cam superficial şi de aceea *nu-i de mirare că te miri* ! Fiindcă, pentru un matematician adevărat, avea mare importanţă dacă postulatele, considerate ca atare, sînt sau nu independente între ele, or asta nu se putea stabili decît arătînd că unul dintre ele ar putea apărea ca o consecinţă a celorlalte. Iar dacă nu ar fi independente, urmează că tot edificiul geometriei se sprijină pe mai puţine adevăruri evidente ! Dar tocmai aici apare iluzia. De pildă, un celebru matematician, cum era John Wallis, a fost tentat să creadă că a putut stabili postulatul paralelelor admiţînd existenţa figurilor asemenea, „ca o propoziţie auxiliară", spunea el ! De fapt, el a înlocuit postulatul paralelelor cu altul echivalent lui.

— Adică, şi-a furat singur căciula de pe cap!

— Cam aşa! Se cunosc peste 200 de încercări de această natură, dar trebuie să fi fost mult mai multe, căci nu toate au fost tipărite. Pe mine m-a amuzat să notez unele dintre ele, într-un caiet. Ai rîs de el azi dimineață, dar dacă ți-ar veni vreodată gust să le cunoști, caietul te aşteaptă! Pînă atunci, am să-l folosesc eu ca să-ți prezint o atare încercare publicată pe la începutul veacului al XVIII-lea, de Girolamo Saccheri, sub titlul *Euclid curățat de orice pată.*

— Prețios titlu!

— Mai degrabă naiv, fiindcă Saccheri a avut o idee cu totul originală, ce l-ar fi putut duce la dezlegarea definitivă a problemei, dar a trecut, ca un naiv, pe lîngă ea, fără să o vadă. Ideea originală a lui Saccheri a fost să demonstreze existența postulatului al V-lea prin reducere la absurd, adică să-l înlocuiască prin altul contrar lui și să tragă concluzia din consecințe. Aşadar, în loc să admită postulatul al V-lea, a presupus:

(1) că printr-un punct, la o dreaptă se pot duce mai multe paralele, sau:

(2) că printr-un punct, la o dreaptă nu se poate duce nici o paralelă, bineînțeles, în ambele cazuri fiind vorba de planul figurii formată de dreaptă și punct. Admițînd toate celelalte postulate și axiome stabilite de Euclid, Saccheri a dedus, în ambele cazuri, rînd pe rînd, toate teoremele corespunzătoare acelora din *Elemente*, aşa cum decurgeau ele în mod logic, ținînd seama de una sau de cealaltă ipoteză asupra dreptelor paralele. Rezultatele au fost surprinzătoare, căci, în ambele cazuri, el a găsit cîte *o geometrie nouă, perfect riguroasă*, cu teoreme ce nu se contraziceau între ele deşi, comparate cu teoremele din *Elementele* lui Euclid, nu aveau nici un sens intuitiv. De pildă, reieşea, printr-o demonstrație perfect logică, în primul caz că suma unghiurilor dintr-un triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte, iar în cel de al doilea, că această sumă este mai mare decît două unghiuri drepte. „Sînt consecințe *perfect logice* ale postulatelor impuse de mine", gîndea Saccheri, „dar aceste consecințe sînt absurde și prin aceasta se dovedește, fără drept de apel, că postulatul al V-lea este independent de celelalte, adică este postulat și nu teoremă"! Dar cred că are să te distreze să-ți citez chiar cuvintele lui: „pînă la sfîrşitul primei părți din această carte mai rămîn încă 12 teoreme. Din cauză că enunțul fiecăreia în parte este prea complicat, nu le mai

arăt, ci spun că, în sfîrşit, acolo ipoteza recalcitrantă a unghiului ascuţit este demascată ca un neadevăr evident, căci ea ar trebui să admită două linii drepte care ar avea în acelaşi plan o perpendiculară comună, în acelaşi punct".

— Deşi vorbeşti pe înţeles, eu nu te pot pricepe. Despre ce unghi ascuţit este vorba ?

— Aici ai dreptate, nu ţi-am spus totul. Ca să introducă acele două postulate, opuse postulatului al V-lea, Saccheri construieşte un patrulater, ridicînd la extremităţile segmentului *TT'* două perpendiculare egale, *TC* şi *T'C'* şi unind *C* cu *C'* (fig. 2). Acest patrulater este un dreptunghi numai în cazul postulatului al V-lea, căci atunci şi unghiurile *C* şi *C'* sînt unghiuri drepte. Dacă nu se admite postulatul paralelelor, atunci, din cauza simetriei, unghiurile *C* şi *C'* sînt

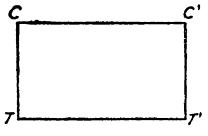


Fig. 2

numai egale şi pentru ipoteza (1) ele sînt ascuţite, iar în cazul ipotezei (2) ele sînt obtuze. Acest patrulater este cunoscut azi sub numele de patrulaterul lui Saccheri. Interesant că aceeaşi idee, a patrulaterului lui Saccheri, a avut-o, în orientul apropiat, atît Omar Khayyam, cît şi matematicianul iranian Nassireddin àl-Tusi din secolul al XIII-lea. Se pare că lucrarea lui Nassireddin a fost cunoscută de John Wallis şi de Saccheri, fiindcă ea a fost tipărită, în traducere latinească, la Roma, în secolul al XVII-lea.

— Foarte curioasă treabă ! Vezi, mă întreb adesea şi eu, cum de se împacă faptul că, deşi figurile geometrice sînt *forme pure, golite de materie*, nu mi le pot imagina altfel decît existînd şi umplînd spaţiul real în care trăiesc eu şi deşi eu ştiu azi mai multe decît putea şti Saccheri în secolul al XVIII-lea, totuşi nu pot accepta, exact ca şi el, ca patrulaterul lui să nu fie dreptunghi. Şi, îmi dau bine seama că la asta te-ai referit atunci cînd ai pomenit de naivitatea lui Saccheri, la acea *intuiţie spaţială* în care, fiindcă avea o încredere absolută, ea l-a făcut să-i scape cea mai formidabilă descoperire matematică cu care s-ar fi putut lăuda secolul al XVIII-lea, aceea a geometriilor neeuclidiene !

— Da, Saccheri era așa de puternic influențat de intuiția spațiului fizic, încît considerînd absurde consecințele logice ale teoremelor demonstrate de el, a afirmat, sigur de sine și fericit că a reușit să-l curețe pe Euclid de orice pată, că acele *absurdități* dovedesc în mod cert *justețea* postulatului al V-lea! Și totuși, Saccheri avea în felul lui dreptate căci, ca tine și ca noi toți, el avea în minte forma abstractă a spațiului în care trăim și pe care azi îl numim *euclidian*, fiindcă numai în acest spațiu sînt valabile teoremele geometriei lui Euclid. Acest *spațiu geometric* este abstract, nu cuprinde în el nici flori, nici Soare, nici Lună, nici scaune, nici cărți, nici televizoare, nimic din ce ne-ar face să ne simțim în spațiul fizic real și totuși, acest spațiu abstract cuprinde *ceva nedefinit* care ne permite să stabilim *distanțele, ordinea* și *poziția* obiectelor geometrice, unele în raport cu altele. Prin acel ceva nedefinit se ajunge la concluzia că, deși el nu există în mod obiectiv și independent de corpurile ce le conține, are trei dimensiuni, se întinde la infinit și este omogen și izotrop, adică are aceleași proprietăți în toate punctele sale și este același în orice direcție a lui. Nemaiexistînd însă alte geometrii în afară de aceea a lui Euclid, nici lui Saccheri și nici nimănui înaintea lui, sau îndată după el, nu i-a trecut prin minte că ar mai putea exista și alte spații geometrice și deci să-l numească pe acesta *spațiu euclidian* ! Pînă în secolul al XIX-lea, spațiul a fost considerat, alături de timp, ca o categorie filozofică și nu preocupa decît pe filozofi sau pe geometrii dispuși să filozofeze. Așa cred că se explică de ce, aproape la 50 de ani după ce Saccheri a publicat lucrarea sa, Immanuel Kant în *Critica rațiunii pure* afirma că spațiul este o reprezentare *necesară, apriori*, care stă la baza tuturor intuițiilor și a tuturor fenomenelor exterioare și că „geometria este o știință care determină proprietățile spațiului, în mod sintetic și totuși *apriori*". Iată că nu numai Saccheri, dar și un filozof de talia lui Kant nu a putut trece dincolo de spațiul euclidian, nu și-a putut imagina posibilitatea altuia, deși, după cum ți-am spus, despre axioma paralelelor se scria, nu glumă ! Singurul care a înțeles cum stau lucrurile și prin urmare cît de complexă este problema spațiului geometric, a fost Carl Friedrich Gauss. El a fost acela care a afirmat, pentru prima oară, că postulatul paralelelor

Friedrich Wilhelm
Bessel

nu poate fi demonstrat, că acesta este independent de toate celelalte axiome sau postulate ale geoemetriei lui Euclid și că de aici apare în mod firesc concluzia că pot exista și alte geometrii, bazate pe alte axiome decît acelea considerate de Euclid. Aceste păreri le-a comunicat, într-o scrisoare, în anul 1829 prietenului său, matematicianul F. Bessel, însă ca pe o taină pe care i-a cerut să nu o divulge, fiindcă se temea „de gălăgia boețienilor".

— Boețienilor, ai zis ? Dar acest termen îmi pare foarte de ocară căci geometria pe care a scris-o Boethius în secolul al VI-lea, pe cînd zăcea în închisoare, numai geometrie nu poate fi numită ! Se găsesc în ea cîteva cunoștințe elementare scose din geometria lui Euclid, bune să amăgească ignoranța caracteristică a matematicienilor din Evul Mediu. Aș trage de aici concluzia că marele Gauss își cam disprețuia confrații ! De altfel, să știi că nu aștept să-mi răspunzi la aceste observații ale mele, fiindcă ai și tu ciudă pe el că nu l-a încurajat pe János Bolyai și îți dau dreptate ! Dar cîți ani avea Gauss cînd a scris acea scrisoare ?

— Să vedem ! Se născuse în anul 1777, așadar, avea 52 de ani. Cu doi ani mai devreme publicase un studiu asupra suprafețelor, studiu fundamental pentru dezvoltarea ulterioară a geometriei diferențiale.

— Atunci, încă un semn de întrebare ! Era în plină maturitate și glorie și, cu toate acestea, primul din lume dintre matematicienii de atunci nu a îndrăznit să se atingă de falsul absolutism al geometriei euclidiene ! De ce? Din comoditate ?

János Bolyai

Nikolai Ivanovici Lobacevski

— Uite ce cred eu : dacă ne lăsăm antrenați de *enigma Gauss*, atunci adio spații neeuclidiene, adio spații abstracte !

— Ba nu ! adio Gauss și salve Bolyai, salve, Lobacevski !

— Și eu îi salut cu admirație pe acești doi tineri, necunoscuți pînă atunci în lumea matematicienilor, care au îndrăznit să afirme existența geometriilor neuclidiene, în ciuda neîncrederii și a batjocurii cu care a fost întîmpinată — *de boețieni* — minunata lor descoperire ! Mă închin acestor doi tineri, contemporani și înfrățiți în gîndire, care nu s-au cunoscut unul pe altul, deși au știut unul de altul : János Bolyai, născut la Cluj în 1802 și Nikolai Lobacevski născut la Nijni-Novgorod cu zece ani mai înainte. Afirmația entuziastă a lui János Bolyai din scrisoarea trimisă, în 1823, tatălui său : „am scos din neant un univers întreg“, s-a dovedit a fi cu mult mai plină de înțeles decît o crezuse însuși Bolyai cînd a recunoscut că descoperise o comoară ascunsă de veacuri celorlalți matematicieni, comoara pe care Lobacevski avea să o numească încă și *Pangeometria.*

— În grecește *pan* înseamnă *tot* sau *pretutindeni*. Cum crezi că trebuie interpretat acest titlu ?

— Cred că Lobacevski a dat cuvîntului *pan* înțelesul de *universal* și deci geometria, pe care credea că a descoperit-o numai el, voia să se numească *geometrie universală.*

— Oare nu era exagerat ?

— Din contra, a fost spusă cu tîlc, fiindcă i-a dat această denumire abia în ultima sa lucrare, „apărută în 1855, pe care a dictat-o bătrîn şi lipsit de vedere, însă păstrînd fermitatea spiritului și convingerea în dreptatea cauzei sale“, cum scrie cunoscutul matematician sovietic A. D. Alexandrov[1]. Analizîndu-i opera, el arată că Lobacevski a susținut că geometria nu este *apriorică și independentă de experiențe*, așa cum presupunea Kant, cu cîteva decenii mai înainte, ci că noțiunile ei *fundamentale* au fost obținute prin simțuri, adică sînt expresia experiențelor ancestrale ale omului, iar aceasta impune ca relația dintre geometrie și realitate să fie precizată și prin experiențe. În acest sens, Lobacevski însuși a încercat anumite experiențe astronomice, fiindcă el era convins că, dacă pentru o porțiune limitată a spațiului real postulatul al V-lea era adevărat, el ar putea să nu mai fie adevărat dacă s-ar lărgi noțiunea de spațiu și s-ar considera o geometrie a spațiului cosmic. În acest caz, pangeometria ar putea fi mai potrivită ca să reflecte proprietățile acelui spațiu, geometria euclidiană devenind un caz particular al *pangeometriei*. De altfel, un veac mai tîrziu, prevederile lui Lobacevski au fost folosite de Einstein în *Teoria relativității* !

— Bine, dar în acest caz, Bolyai și Lobacevski au nimicit dintr-odată concepția pe care am moștenit-o de la greci despre geometrie ca deținătoarea adevărurilor absolute, deoarece ele exprimă rezultatele obținute prin abstractizare din experiențele asupra spațiului... Dacă se admite că, din punct de vedere logic, poate exista și o altă geometrie, atunci, tot în mod logic, poate exista încă una, adică un număr nelimitat de geometrii deosebite de ale lui Euclid, toate fiind ştiinţe abstracte, dezvoltate pe calea raționamentului din anumite ipoteze. Ce mai rămîne adevărat despre reprezentarea intuitivă a spațiului fizic, despre figurile geometrice, aşa de precis conturate și chiar definitive ?

— Cam așa s-au întrebat și matematicienii din secolul al XIX-lea și primul răspuns la nedumeririle lor a fost dat de Bernhard Riemann, în 1854, într-o dizertație compusă la sugestia lui Gauss, avînd ca titlu : „Asupra ipotezelor ce stau la baza geometriei“. Cînd a rostit-o, prelegerea nu

---

[1] *Matematica, conținutul, metodele și importanța ei*, volumul III — Spații abstracte, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1961, pagina 123 și cont.

a fost înțeleasă decît de Gauss și de vorbitor, dar, după moartea lui Riemann, memoriul publicat în 1866 a devenit celebru. În el se arată că noțiunea despre geometrie trebuie revăzută fiindcă geometria nu reprezintă adevărul rezultat din experiențele asupra spațiului fizic înconjurător, ci adevărurile logice asupra spațiilor ce rezultă ca posibile din axiomele-ipoteze puse la bază, iar aceste adevăruri nu au nici o legătură cu reprezentarea intuitivă a spațiului în care trăim. Ca dovadă, arată Riemann, însăși axioma că linia dreaptă este infinită nu este un rezultat al experienței noastre, experiența nu ne arată altceva decît că dacă urmărim o linie dreaptă, atîta cît omenește poate fi urmărită, nu i se dă de capăt. Ea ar putea fi finită și totuși nemărginită !

— Cum zici că ar putea fi ? Finită și totuși nemărginită ?

— Da, nemărginită, adică să nu-i dai de capete, dar totuși de mărime finită. Imaginează-ți Pămîntul, ca o sferă și că tu, în loc să stai acum de vorbă cu mine, ai fi pornit la o plimbare, dar nu pe Dea nici pe Runc, ci așa, înainte spre nord, de-a lungul meridianului ce trece prin Cîmpulung și că, fără că te abați de la el, te-ai duce și te-ai duce... ai ajunge la Polul Nord, apoi, după ce vei fi străbătut Alaska, Zambia, Marea Mediterană, Bulgaria ai fi ajuns din nou aici. Atunci te-ai uita încurcat la mine și eu aș izbucni în rîs, întrebîndu-te unde-s cele două capete opuse ale dreptei și cum de ne-am întîlnit dacă dreapta ta este infinită ?

— Ai dreptate, pe o sferă, cercurile mari, așa cum sînt Ecuatorul sau meridianele, joacă rolul liniei drepte din plan, au adică proprietatea de a fi drumul cel mai scurt dintre două puncte. Iar dacă se poate vorbi despre capetele *unui arc de cerc mare*, cercul întreg se închide, nu are capete și nici nu este infinit !

— Ei, acum fiindcă te-am convins, să ne întoarcem la Riemann. El a observat că, dacă ar fi să se facă geometria pe o sferă, atunci postulatul paralelelor nu ar avea sens, fiindcă toate cercurile mari de pe sferă, adică dreptele ei, se întîlnesc în două puncte, de pildă cei doi poli în cazul meridianelor. Pentru o geometrie pe sferă, în locul postulatului al V-lea, ar trebui pus postulatul : „Printr-un punct la o dreaptă (cerc mare) de pe sferă nu se poate duce nici o paralelă". Cu acest nou postulat și cu celelalte vechi, considerate de Euclid, Riemann a stabilit o nouă geometrie neeuclidiană, care se bucura pe atunci și de avantajul de a se baza pe un model geometric intuitiv, dovedindu-se astfel a fi geometria plană pe care ar fi descoperit-o nişte fiinţe inteligente bidimensionale, ce ar fi trăit pe acea sferă şi nu ar fi avut posibilitatea să cunoască nimic dincolo de ea. Pentru fiinţele acelea, geometria stabilită de Riemann ar fi fost singura logică, absolută şi intuitivă.

— Iată un fapt cu totul surprinzător care destramă dintr-odată un mit ţesut pe îndelete de-a lungul a două milenii, afirmînd, în schimb, că axiomele geometriei euclidiene nu sînt adevăruri absolute ci relative, şi că geometria euclidiană nu este unica ce poate fi creată. Realitatea geometriilor neeuclidiene, pe de o parte, dovedeşte că evidenţa intuitivă poate duce la concluzii false şi, pe de altă parte, impune o cercetare mai profundă a axiomelor pe care se sprijină geometria euclidiană.

— Într-adevăr, aşa este ! Geometria euclidiană este singura care are avantajul, prin ipotezele ce le-a formulat, de a fi modelul abstract al spaţiului fizic din imediata noastră apropiere, ea singură are ca obiect relaţiile spaţiale ale corpurilor geometrice reale abstractizate. De aceea, demonstraţiile din această geometrie se bazează pe figurile vizibile şi intuitive ce se pot desena pe o foaie de hîrtie, adică pe un plan, cu rigla şi compasul. În celelalte cazuri, acelea ale geometriilor neeuclidiene, asemenea desene executate cu rigla şi compasul pe o foaie de hîrtie sînt lipsite de sens, căci ele contrazic intuiţia.

— Cred şi eu ! Nu văd cum aş putea desena, aşa ca să le văd, mai multe drepte paralele duse din acelaşi punct la o dreaptă şi, de asemenea, nu-mi pot închipui că nu aş putea fi în stare să trag o paralelă la o dreaptă ! Aceste lucruri le pot admite ca adevărate numai fiindcă sînt posibilităţi logice impuse prin axiome, dar fără să încerc a le reprezenta pe o foaie de hîrtie întinsă !

— Ai spus bine : *foaia de hîrtie întinsă*, fiindcă lucrurile se schimbă de îndată ce se înlocuieşte planul cu o suprafaţă sferică în cazul geometriei lui Riemann sau cu o suprafaţă pseudosferică în cazul geometriei lui Bolyai-Lobacevski.

— Prin această lucrare a sa, văd că Riemann a corectat şi greşeala pe care o făcea Saccheri, anume, el a precizat faptul că, dacă teoremele unei geometrii sînt verificate de experienţă, iar cele ale alteia par a contrazice bunul simţ, din aceasta nu rezultă că primele teoreme sînt adevărate şi că celelalte sînt false sau absurde. Geometriile neeuclidiene există deci şi conduc la o nouă abstractizare, a *noţiunii abstracte de spaţiu geometric !*

— În lucrarea lui Riemann, noţiunea de spaţiu geometric a atins o treaptă de abstractizare cu mult mai înaltă decît aceea pe care o consideri matale, bădie, fiindcă el a mai introdus o nouă noţiune caracteristică unui spaţiu geometric, aceea de *curbură a spaţiului. Bazîndu-se pe ea, el arată că geometria euclidiană este geometria spaţiului de curbură nulă, geometriile neeuclidiene sînt geometrii ale spaţiului de curbură constantă,* şi, în fine, că există alte geometrii, numite mai tîrziu *riemanniene*, ale *spaţiilor curbe* ! Dar acestea ţi le-am spus aşa, numai fiindcă m-ai tras de limbă şi ca să accentuez faptul că abstractizarea introdusă prin *noţiunea de spaţiu curb* a însemnat o lovitură la fel de puternică dată intuiţiei spaţiale ca şi aceea pe care i-a aplicat-o Fermat şi Descartes, în secolul al XVIII-lea !

— De unde ai mai născocit şi trebuşoara asta ? Te gîndeşti probabil la crearea *geometriei analitice* dar, după modesta mea părere, geometria analitică e geometrie euclidiană în toată regula, fiindcă în ea nimeni nu s-a atins de nici o axiomă sau postulat al lui Euclid ! Fermat şi Descartes nu au făcut alta decît să introducă un sistem de referinţă pentru punctele din plan, adică un sistem de coordonate, iar mai tîrziu alţii au aplicat metoda şi pentru punctele din spaţiu, care însă a rămas euclidian !

— Da, cam aşa a şi fost judecată pe atunci geometria analitică, fiindcă nimeni nu ar fi fost în stare să tulbure noţiunea cristalină de spaţiu geometric corespunzător spaţiului fizic ! Numai că, prin introducerea unui sistem de coordonate, locul unui punct din plan sau din spaţiu îl deţinea o pereche sau un triplet de numere algebrice. Continuînd procedeul, în locul dreptei din plan se furişa o ecuaţie de gradul întîi între variabilele x şi y, considerate drept coordonatele unui punct variabil de pe acea dreaptă ; în locul unei curbe apărea o ecuaţie de forma $y = f(x)$, a unei suprafeţe, altă ecuaţie $z = f(x, y)$, toate *proprietăţile geometrice* ale acestor *figuri geometrice* fiind cuprinse în expresia analitică a formulelor respective. Alte formule algebrice corespundeau distanţei dintre două puncte, atît în plan cît şi în spaţiu, ariei unui triunghi, volumului unei piramide şi aşa mai departe.

— Stai că parcă acum a început să-mi fulgere ceva prin minte. Unde vrei să ajungi ? Vrei să spui că, în geometria analitică, toate *relaţiile geometrice* dintre *figurile geometrice*