eugen rusu

colecția cristal

CUM GÎNDIM ȘI REZOLVĂM 200 de probleme

EDITURA ALBATROS

eugen rusu

colecţia cristal

CUM GÎNDIM ŞI REZOLVĂM 200 DE PROBLEME

INTRODUCERE

Există probleme care „seamănă" cu altele anterior rezolvate și nu facem decît să „imităm" rezolvarea cunoscută, sau care se reduc la simpla aplicare a unor formule și procedee cunoscute. Acestea sînt mai curînd exerciții *— de fixare și însușire completă a procedeelor.*

Există însă și probleme propriu-zise, adică probleme la care găsirea soluției este... problematică. Deși cunoști tot ce trebuie pentru stabilirea soluției (constați aceasta cînd ți se arată soluția), nu e sigur că o poți găsi, ca necesitînd *o anumită „inspirație“, o idee salvatoare; în fond, un efort de* creație. *Cu cît această idee este mai ascunsă, cu atît satisfacția de a o descoperi — cînd reușești — este mai mare. Este acel sentiment superior, specific uman, care constituie mobilul principal al tuturor actelor de creație. Dar și dacă nu reușești, ești curios să afli cum* ar fi trebuit *gîndit. Cînd ți se spune și* înțelegi, *ai de asemenea o satisfacție, însă, acum, umbrită de regretul că nu ai descoperit singur. În orice caz, faptul de a nu fi găsit singur soluția nu trebuie să te descurajeze — știind că i se poate întîmpla* oricui *și mai ales dacă nu se întîmplă la toate problemele.*

Dintre aceste probleme, unele rămîn simple jocuri — utile ca antrenament; altele însă sînt importante și prin conținut, prin faptul că deschid orizontul spre probleme mari ale științei. (Pe acestea le-am grupat în secțiunea IV — Orizont.) *Granița între aceste două categorii nu este precisă; istoric, unele probleme păreau a fi de simplu joc și abia ulterior și-au dovedit și importanța științifică.*

Important este ca rezolvitorul să gîndească nu numai strict matematic, ci și asupra procesului de gîndire: *să se întrebe dacă o problemă dată este de simplă aplicare sau de gîndire creatoare, dacă ea e frumoasă sau urîtă și de ce, dacă felul cum a gîndit era* natural, *dacă ideea rezolvării era în adevăr ascunsă, din ce cauză a eșuat în găsirea soluției sau, invers, prin ce complex de împrejurări a avut succes etc. Pînă la urmă, el va constata că gîndirea creatoare nu înseamnă, cum părea, numai inspirație* capricioasă — *ceea ce în argou școlăresc se traduce prin expresia „ți-a căzut fisa“ — că ea* se educă, *crește în putere chiar dacă nu ajunge la siguranță deplină, și se educă tocmai prin atenția ce se dă analizei procesului de gîndire.*

Pentru a da impuls unei astfel de preocupări, culegerea de față nu are numai două părți, ci, în general, patru: 1. Enunțuri, 2. Cum gîndim, 3. Ideea, 4. Soluția. *Pe fiecare pagină stă scris despre care din aceste patru părți este vorba.*

În fața enunțului, rezolvitorul încearcă singur; *dacă nu reușește, caută niște indicații la rubrica* Cum gîndim *(la numărul respectiv al problemei) și încearcă din nou; dacă nici acum nu reușește, caută la rubrica* Ideea *și, în fine, consultă rubrica* Soluția.

(Nu în toate problemele este nevoie de toate cele patru trepte; unde ideea este naturală, se trece direct la expunerea soluției.)

După conținut, problemele sînt împărțite în patru capitole, intitulate: I. Perspicacitate, *II.* Logică, *III.* Inventivitate, *IV.* Orizont. *Împărțirea e făcută după caracterul dominant și e oarecum relativă (de exemplu, în toate este nevoie, evident, de logică, nu în toate caracterul inventiv este la fel de accentuat). Partea a V-a cuprinde* Alte probleme.

Cunoștințele necesare rezolvării le are orice elev ajuns în clasa a X-a; pentru multe probleme, și unul din clasele mai mici. Dar, cum spuneam, cunoștințele nu sînt suficiente...

În general, problemele sînt așezate în ordinea de dificultate crescîndă.

Nu am indicat sursa sau autorul problemei, deoarece nu le cunoșteam la toate; multe din probleme le-am aflat din întrebările pe care ni le-au pus diferiți elevi, care la rîndul lor le aflaseră de la colegi, astfel încît enunțurile circulau ca un fel de „folclor matematic“, cu autor anonim.

Ca și într-o antologie de literatură, selectarea din multele mii de probleme existente a unui număr restrîns e chestiune de „gust"; m-am ghidat în principal de gustul elevilor cu care am venit în contact, al acelor elevi animați de plăcerea de a gîndi.

Prezenta culegere nu e alcătuită în vederea pregătirii unui examen; deci nu e necesar să fie parcursă într-un timp dat, cu o anumită febrilitate; am spune mai curînd că este vorba aici de matematică distractivă, dar nu ne însușim acest adjectiv, căci întreaga matematică este și *distractivă. Cititorul trebuie s-o parcurgă numai în măsura în care aceasta îi face plăcere. Îl avertizăm că această plăcere se micșorează pînă aproape de dispariție dacă de la enunț sare direct, grăbit, la citirea soluției. Plăcerea este strîns legată de încercările personale. Rubricile cu indicații sau soluții constituie numai un stimulent sau un fel de discuție pe marginea acestui efort personal.*

1

ENUNȚURI

I. Perspicacitate

1. Calculați din minte numărul:

$$N = \frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

2. Priviți ceasornicul; înregistrați cît timp vă trebuie:
a) pentru a pune semnul $<$ sau $>$ între fracțiile:

$$\frac{112}{449} \qquad \frac{127}{507}$$

b) pentru a spune care din numerele:

7 13 29 41 59 67 73

divide numărul 3599

c) pentru a memora numărul:

1 339 117 351

d) pentru a afla viteza medie a unui mobil care parcurge distanța București-Ploiești cu 20 km/oră, apoi fără să se oprească, distanța Ploiești-București cu 30 km/oră.

3. Uniți punctul H cu punctul de intersecție al dreptelor d, d', care se află în afara figurii (fig. 1).

4. Liniile a și b (fig. 2) au fost trasate cu o cretă al cărei „vîrf" era un segment de 1 cm, ținut tot timpul paralel cu marginile verticale ale tablei.

Apreciați din ochi care are „suprafața" mai mare.

5. Trenurile T_1 și T_2, la 300 km unul de altul, pornesc unul spre celălalt mergînd cu 50 km/oră. În același moment, de pe T_1 pleacă o muscă ce merge cu 70 km/oră. Musca merge pînă se izbește de T_2. Cîți km a mers pînă în acest moment? Apoi ricoșează mergînd spre T_1 pînă îl întîlnește, apoi ricoșează spre T_2 ș.a.m.d. pînă ce trenurile se ciocnesc și musca este strivită.

Ce distanță a parcurs, în total, musca?

6. Apa care se transformă în gheață își mărește volumul cu 9%. Dar dacă gheața se topește, cu cît la sută își micșorează volumul?

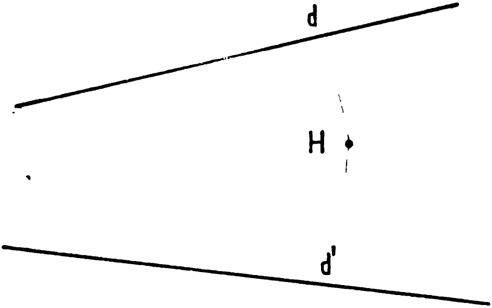


Fig. 1

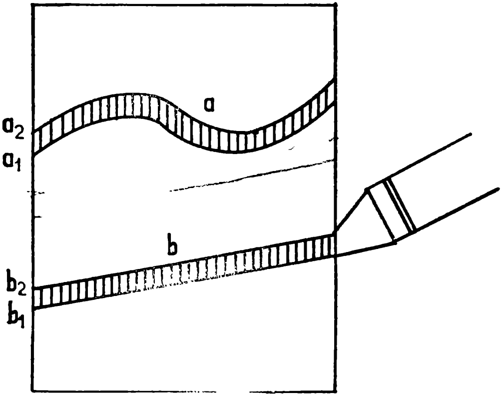


Fig. 2

Fig. 3

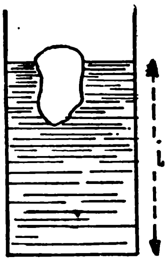


Fig. 4

7. Într-un vas cilindric cu diametrul 3 dm este apă pînă la nivelul $i = 3$ dm; pe apă plutește o bucată de gheață cu masa 1,30 kg.

Să se afle nivelul apei după ce se va topi gheața.

8. Un inspector sosește zilnic în gara G la ora 8. În același moment ajunge în gară mașina care îl duce de la gară la șantier.

Într-o zi, luînd alt tren, a ajuns în gară la ora 7 și a plecat pe jos; pe drum, în punctul I, a întîlnit mașina care venea să-l ia, s-a suit în ea și a ajuns la șantier cu 20 minute mai devreme decît de obicei. Se știe că mașina merge cu viteză constantă, iar inspectorul, pe jos, cu 6 km/oră.

Se întreabă: a) distanţa parcursă de inspector pe jos, b) viteza maşinii, c) distanţa gară — şantier.

9. Un om vîsleşte împotriva curentului rîului. La un moment dat cade în apă o lădiţă, dar el observă acest lucru abia după 10 minute. Se întoarce şi găseşte lădiţa într-un loc situat cu 1 km mai la vale faţă de locul unde a pierdut-o. Să se afle viteza apei din rîu. Se presupune că atît la dus cît şi la întors omul pune vîslele în apă la fel de des şi efortul cu care acţionează asupra lor este acelaşi.

10. Vasul A conţine apă, iar B alcool pur. Se toarnă în A un pahar plin de alcool pur din B, apoi se scoate din A un pahar de amestec care se toarnă în B. Ce relaţie există între cantitatea de alcool din A şi cantitatea de apă din B?

11. Să se arate că pentru n impar

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n}$$

12. Să se arate că ecuaţia

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$$

nu are soluţii întregi pozitive.

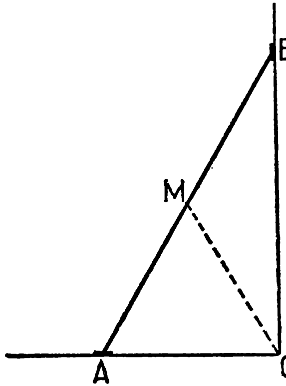


Fig. 5

13. o scară este rezemată de perete și podea, ca dreapta AB (fig. 5). Pentru a-i asigura stabilitatea (a o împiedeca să lunece) cineva leagă cu o sîrmă treapta din mijlocul M al scării, de un cîrlig fix ce se află în O.

A procedat bine?

14. Suma unghiurilor unui patrulater strîmb (cele patru vîrfuri nu sînt în același plan) este mai mică decît 360°.

15. Șase puncte în spațiu. Fiecare din segmentele obținute prin unirea a două din aceste puncte se colorează sau cu negru sau cu alb. Să se arate că va exista cel puțin un triunghi cu vîrfurile în trei din cele șase puncte avînd laturile de aceeași culoare.

II. Logică

16. Pe trei borcane de compot, unul de cireșe, altul de vișine, altul cu amestec cireșe și vișine, toate etichetele au fost puse greșit.

Scoțînd o singură fructă din un singur borcan, să se determine conținutul tuturor.

17. La un concurs se prezintă șase orașe O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 reprezentate fiecare de cîte una din persoanele A, B, C, D, E, F.

Știm că

(1) A și reprezentantul lui O_1 sînt medici,
E și reprezentantul lui O_2 sînt profesori,
C și reprezentantul lui O_3 sînt ingineri.

(2) Grupele: a) B, O_3, O_5; b) A, O_4, O_5; c) D, O_5. O_6 reprezintă fiecare un medic, un profesor, un inginer.

Să se afle din ce oraș este fiecare din cele 6 persoane.

18. Trei oameni: O_1, O_2, O_3. Li se arată pe masă trei discuri albe și două negre și li se spune că li se va lipi pe spate cîte un disc. După ce se face aceasta, ei sînt așezați în șir, astfel că O_1 privește în spatele lui O_2 și O_3; O_2 în spatele lui O_3; iar O_3 nu vede nimic. Ce fel de disc ai pe spate? O_1 răspunde: „Nu știu"; apoi O_2 răspunde „Nu știu"; apoi O_3 răspunde „Știu".

Ce disc avea O_3 și cum a raționat?

(Se presupune că cei trei știu să raționeze perfect.)

19. Aceeași problemă cînd sînt 7 oameni, 10 discuri albe și 6 negre, primii patru răspund succesiv „Nu știu", iar al cincilea răspunde „știu".

Generalizare.

20. Călătoresc împreună cu tovarășul meu P. Ajung la o răscruce de unde se deschid două drumuri, unul bun și unul înfundat. În regiune sînt numai două categorii de oameni: 1) acei care spun totdeauna adevărul; 2) acei care spun totdeauna minciuni.

La răscruce se află un om O, despre care nu știu dacă e sincer sau mincinos.

Ce întrebări să-i adresăm pentru a afla cu siguranță drumul bun?

21. O conversație:

A — Am trei copii.

B — Ce vîrste au?

A — Produsul vîrstelor lor (în ani, numere întregi) este 36

B — Această informație nu e suficientă pentru a afla cele trei numere.

A — Suma vîrstelor este egală cu numărul de etaje al blocului pe care îl ai în față.

B (după ce numără etajele) — Tot nu se poate afla.

A — Cel mai mare are ochi albaștri.

B — Acum pot afla.

Să se afle vîrstele celor trei copii și numărul de etaje despre care a vorbit *A* cu *B*.

22. La o serată studențească au fost 74 persoane (băieți și fete). Ajunse la cămin fetele au făcut o clasificare și au constatat: Florica a dansat numai cu un băiat, Ana cu 3 băieți, apoi: Ema cu 9 băieți, Ioana cu 10, Maria cu 11 ș.a.m.d., fiecare a avut un dansator mai mult decît precedenta pînă la ultima, Sofia, care a dansat cu toți băieții aflați la serată.

Cîte fete și cîți băieți au fost?

23. Se consideră n^2 numere, printre care nu există două egale, așezate într-un tablou patratic cu n linii și n coloane.

Se alege cel mai mic număr a de pe fiecare rînd; fie A cel mai mare din aceste n numere. Se alege cel mai mare număr b de pe fiecare coloană; fie B cel mai mic din aceste n numere.

Să se arate că $A \leqslant B$. Să se arate un exemplu în care $A = B$.

24. Aflați distanțele de la vîrfurile triunghiului la punctele de contact cu cercurile înscris și exînscris, în funcție de laturi, folosind judecata cea mai directă.

25. Un triunghi dreptunghic. Cele două cercuri exînscrise corespunzătoare catetelor.

Suma razelor lor este egală cu ipotenuza.

26. Notăm cu **L** mulțimea punctelor M din plan cu proprietatea $MA = MB$. Notăm cu **F** mulțimea punctelor mediatoarei segmentului AB.

Demonstrăm teorema: orice punct de pe mediatoare este la egală distanță de A și B. Prin ce relație între mulțimile **L** și **F** se traduce enunțul ei?

Demonstrăm teorema: orice punct la egală distanță de A și B se află pe mediatoare. Transcrieți-o ca relație între **L** și **F**.

Demonstrăm ambele teoreme. Care este relația între **L** și **F**?

27. Dacă două triunghiuri au un unghi egal cuprins între laturi proporționale, ele sînt asemenea.

Cuvîntul *cuprins* este esențial?

28. Să se demonstreze că dacă triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sînt ascuțit-unghice și dacă

$$\hat{A} = \hat{A}'; \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

ele sînt asemenea.

29. Într-un triunghi dreptunghic ABC $(A = 90°)$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Reciproca este adevărată?

III. Inventivitate

30. O cameră are dimensiunile 10 m și 7 m.

În cele 4 colțuri este cîte o sobă, fiecare ocupînd 1 m^2. Pentru pardosire se folosesc 22 plăci cu dimensiunile 3 m $\times$ 1 m.

Să se arate că nu pot fi lăsate toate plăcile netăiate.

31. Pe o latură AB a patratului $ABCD$ ca bază se construiește spre interior un triunghi isoscel MAB cu unghiurile de la bază de cîte 15°. Să se arate că triunghiul MCD este echilateral.

32. Trei cercuri egale au un punct comun. Cercul care trece prin celelalte trei puncte în care cercurile se intersectează două cîte două este egal cu cercurile date.

33. Se consideră un punct M, interior triunghiului ABC, și cercurile ABM, ACM, BCM. Să se arate că cercul

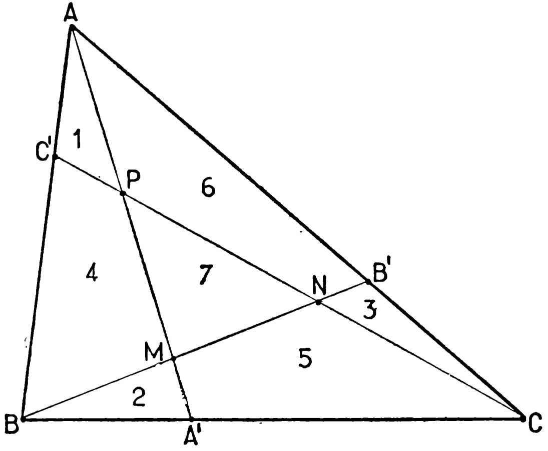


Fig. 6

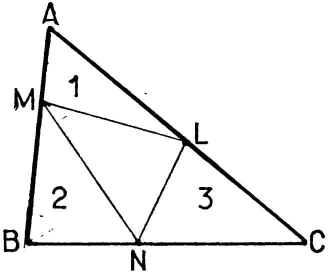


Fig. 7

ABC este mai mare ca cel mai mic dintre cele 3 cercuri și mai mic decît cel mai mare.

34. Pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC se iau punctele C', A', B', astfel că $AC' = \frac{1}{3} AB$, $BA' = \frac{1}{3} BC$, $CB' = \frac{1}{3} CA$.

Dreptele AA', BB', CC' împart triunghiul ABC în 7 părți: 3 patrulatere, 3 triunghiuri avînd cîte un vîrf comun cu ABC și un triunghi în mijloc (fig. 6).

Să se afle ariile lor în funcție de aria triunghiului dat.

35. Generalizare.

36. Oricum am alege punctele M, N, L pe laturile triunghiului ABC (fig. 7), cel puțin unul din triunghiurile 1, 2, 3 are aria $a \leqslant \frac{1}{4} S$ (S = aria ABC).

37. În problema precedentă am întîlnit relația $\frac{Aria\ AML}{Aria\ ABC} = \frac{AM \cdot AL}{AB \cdot AC}$. Care este relația corespunzătoare în spațiu?

38. Se poate extinde problema **36** în spațiu?

39. Fiind dat triunghiul ABC să se afle punctul D astfel ca patrulaterul $ABCD$ să fie: a) inscriptibil; b) circumscriptibil (să existe un cerc tangent la toate laturile lui).

40. a) Să se construiască triunghiul ABC, cunoscînd înălțimile h_a și h_b și mediana m_a.

 b) Idem, cunoscînd h_a, m_a, $\hat{A}$.

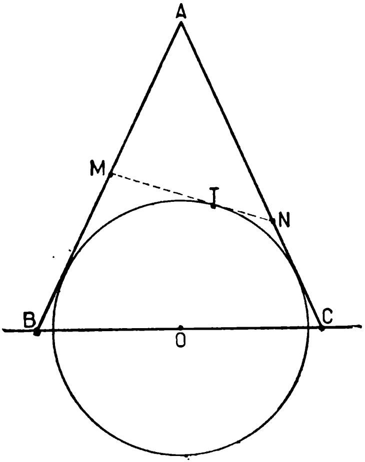


Fig. 8

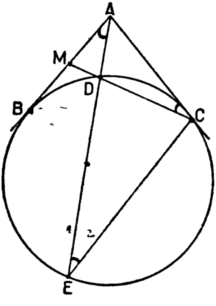


Fig. 9

41. AB și AC tangente la cerc; B și C pe diametrul perpendicular pe AO; MN o tangentă variabilă.
Să se arate că $BM \cdot CN$ = constant (fig. 8).

42. O secantă oarecare trecînd prin punctul A taie cercul în E și F, și coarda BC (care unește punctele de contact ale tangentelor din A) în D.

Să se demonstreze că $\frac{AE}{AF} = -\frac{DE}{DF}$ (punctele A și D împart segmentul EF în același raport, numai de semne contrarii; se spune că A și D sînt conjugate armonic față de E și F).

43. Figura 9. AB, AC tangente la cerc. M, mijlocul lui AB; MC mai taie cercul în D, iar AD în E. Să se arate că $EC \parallel AB$.

44. Punctul M este variabil pe segmentul AB (fig. 10). Cercurile circumscrise patratelor $AMCD$ și $BMEF$, de laturi AM și MB, se taie în M și N.
a) Să se arate că punctele A, E, N sînt colineare; de asemenea B, C și N.
b) Să se arate că dreapta MN trece printr-un punct fix.

45. Se dau două puncte fixe F, F' și o dreaptă d, pe care se mișcă punctul M. Să se afle: a) poziția lui M, așafel încît suma $MF + MF'$ să fie minimă; b) cum variază această sumă cînd M parcurge toată dreapta.

46. Fiind date două puncte fixe F și F' (numite *focare*) și un segment (a cărui lungime o notăm $2a$), locul punctelor M din plan, pentru care $MF + MF' = 2a$ este o curbă închisă numită *elipsă*. Putem desena elipsa dacă

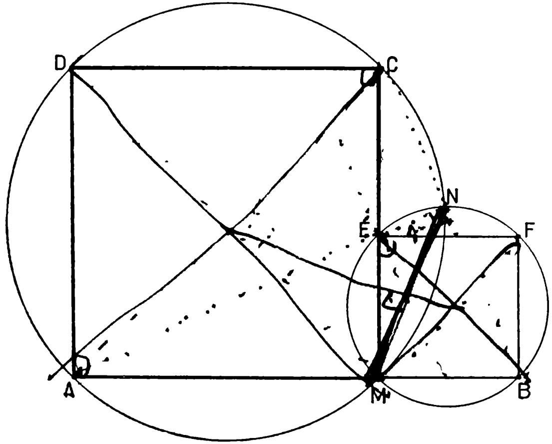
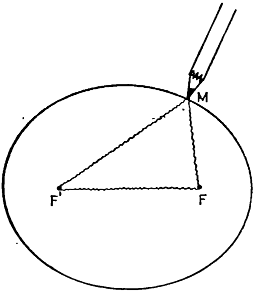


Fig. 10



fixăm capetele unei sfori de lungime $2a$ în F și F', iar cu vîrful creionului ținem sfoara întinsă, mișcîndu-l (fig. 11). Este necesar ca $FF' < 2a$.

a) Fiind date punctele F', F și segmentul de lungime $2a$, care definesc o elipsă, și o dreaptă d, fără a desena elipsa, să se afle dacă dreapta d taie elipsa;
b) M fiind un punct al elipsei, să se arate că bisectoarea exterioară a unghiului $F'MF$ este *tangenta* la elipsă.

47. Să se arate că produsul distanțelor de la două vîrfuri ale unui triunghi la bisectoarea exterioară a celui de al treilea se poate exprima în funcție de latura ce unește cele două vîrfuri și de *suma* celorlalte.

48. Să se facă o legătură între problemele **46** și **47**.

49. Să se afle unghiurile triunghiului care are ca vîrfuri: mijlocul unei laturi a unui triunghi oarecare dat și centrele patratelor construite spre exteriorul triunghiului pe celelalte două laturi.

50. Pe laturile unui patrulater $ABCD$ se construiesc în exterior patrate. Dacă O_1, O_2, O_3, O_4 sînt centrele lor, segmentele O_1O_3 și O_2O_4 sînt egale și perpendiculare.

51. Centrele triunghiurilor echilaterale construite pe laturile unui triunghi dat spre exterior sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

52. Aceeași problemă, cu ajutorul unghiurilor.

53. Se consideră pe un cerc trei arce de cîte 60° (fig. 12), între care rămîn arcele 2α, 2β, 2γ. Mijloacele coardelor

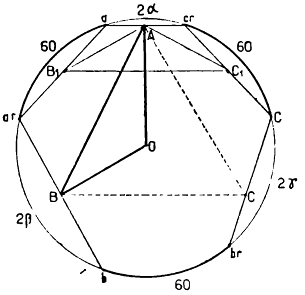


Fig. 12

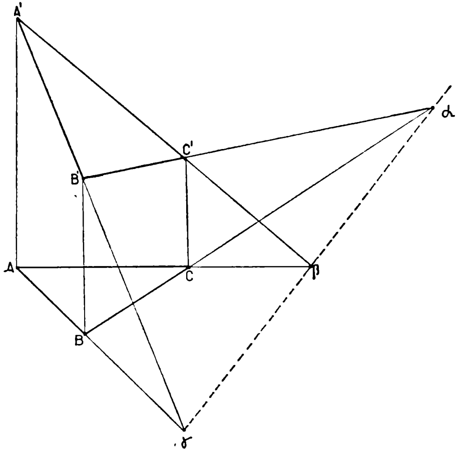


Fig. 13

ce subîntind arcele 2α, 2β, 2γ sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

54. Să se dea problemei **53** o soluție cu ajutorul numerelor complexe.

(Suma a două numere complexe corespunde cu suma vectorilor reprezentativi; produsul a două numere complexe: înmulțim modulii, adunăm argumentele.)

55. Dacă dreptele AA', BB', CC' sînt paralele, atunci punctele α $(BC \times B'C')$, β $(AC \times A'C')$, γ $(AB \times A'B')$ sînt colineare (fig. 13).

56. Dacă dreptele AA', BB', CC' sînt concurente, punctele α $(BC \times B'C')$, β $(CA \times C'A')$, γ $(AB \times A'B')$ sînt colineare (fig. 14). (Aceasta este teorema lui *Desargues*; triunghiurile ABC, $A'B'C'$ cu proprietatea indicată se numesc *omologice*.)

57. Să se enunțe și să se demonstreze proprietatea sugerată de figura 15.

58. Să se verifice că

$$\sqrt[5]{843 + 589 \cdot \sqrt{2}} + \sqrt[5]{843 - 589 \cdot \sqrt{2}} = 6.$$

59. Să se arate că

$$1^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^k)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

60. C_{m-1}^k (combinări de $m - 1$ cîte k), unde $m = 2^n$ este, oricare ar fi k, număr impar.

61. $C_{2^n}^k$, $0 < k < 2^n$, este par, de forma $2^a \cdot i$, cu i impar. Să se determine a în funcție de k.

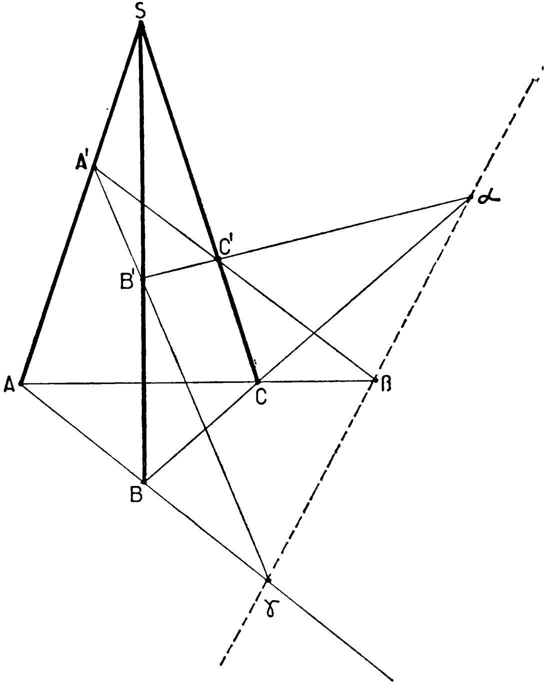


Fig. 14

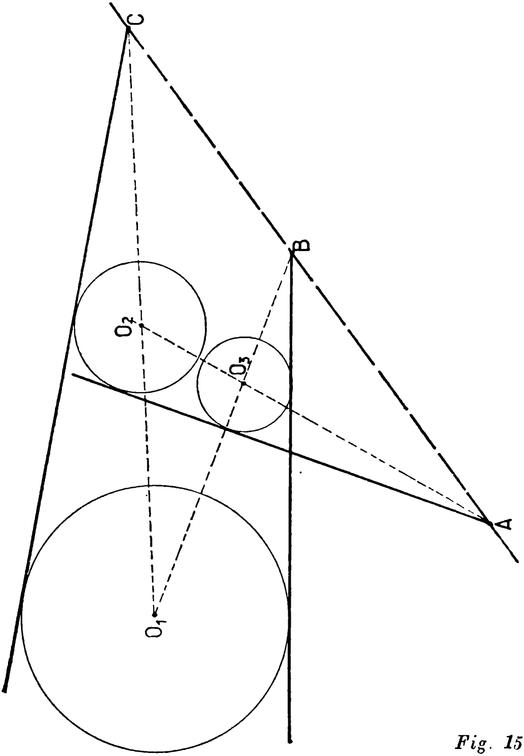


Fig. 15

62. Să se arate că două din sumele

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + \dots$$
$$S_2 = C_n^2 + C_n^5 + \dots$$
$$S_3 = C_n^0 + C_n^3 + \dots$$

sînt egale între ele, iar a treia diferă de una din acestea cu 1.

63. $C_{2^n}^{2^{n-1}} - C_{2^{n-1}}^{2^{n-2}} = 2^a \cdot i$ (i, impar)

Să se determine a.

64. Se consideră șirul $a_1 = 1$, $a_2 = 2a_1 + 2^1, \dots a_{n+1} = 2\,a_n + 2^n, \dots$

Să se demonstreze că dacă şi numai dacă n este o putere a lui 2, atunci şi a_n este o putere a lui 2.

65. Pentru orice n natural,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\dots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Interpretare. Generalizare.

66. $\lim\limits_{n\to\infty} [(n+1)^k - n^k],\ 0 < k < 1$

67. Să se determine m astfel ca

$$f(x) = \sqrt{\cos^4 x + m\ \sin^2 x} + \sqrt{\sin^4 x + m \cos^2 x}$$

să nu depindă de x.

68. Figura 16 (cercul de rază r_1 tangent la AB, la AC și la cercul înscris în triunghiul ABC; analog r_2, r_3).

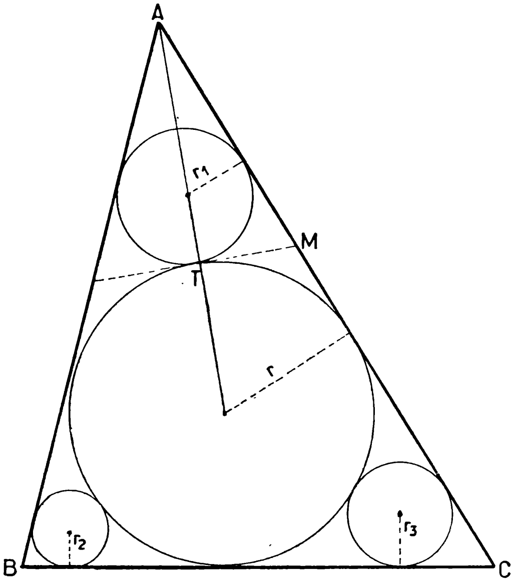


Fig. 16

Să se arate că

$$\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3} = r$$

69. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia

$$E = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

70. Să se arate că pentru orice m număr natural dacă

$$x > 0, y = (x^{m+1} + 1)^m - \frac{1}{2}[(x^m + 1)^{m+1} + (x^m - 1)^{m+1}] \geqslant 0$$

71. Ecuația

$$\frac{b_1}{x - a_1} + \frac{b_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{b_n}{x - a_n} = 0$$

unde $b_i > 0$; $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$
are $n - 1$ rădăcini, cîte una în fiecare din intervalele a_i, a_{i+1}.

72. Ce număr este mai mare, $99^n + 100^n$ sau 101^n? (n, număr natural).

73. Toate curbele exponențiale $y = a^x$ trec prin punctul (0, 1). Dacă $a > b > 1$, atunci pentru $x > 0$, $a^x > b^x$, pentru $x < 0$, $a^x < b^x$.

Considerăm dreapta d ce trece prin (0, 1) și are panta 1 ($y = x + 1$).

Să se afle intersecția acestei drepte cu $y = a^x$.

1) cînd $a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; 2) cînd $a = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$

Să se deducă de aici, printr-un proces de gîndire intuitivă, că: 1) șirul $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este crescător, iar șirul

$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$ este descrescător, limita lor comună (e) fiind acel număr a, pentru care curba $y = a^x$ are în (0, 1) panta 1.

IV. Orizont

Proiecţie conică

Fiind date un plan T — pe care îl vom numi *tablou* — şi un punct exterior lui, O, numit centru de proiecţie, numim proiecţia punctului oarecare din spaţiu M (din O pe planul T), intersecţia M' a dreptei OM cu planul T. Proiecţia unei figuri se obţine făcînd proiecţia fiecărui punct al ei. Dacă OM este paralelă cu T, spunem că proiecţia lui M este la infinit.

Dacă sîntem în casă şi privim pe fereastră, obiectele de afară (case, copaci etc.) se văd desenate pe geamul prin care privim. Acest „desen“ de pe geam este tocmai proiecţia obiectelor privite, planul T de proiecţie fiind planul geamului, iar centrul de proiecţie, ochiul. Desenul propriu-zis nu face decît să reproducă o astfel de imagine, o astfel de proiecţie pe un tablou.

74. 1) Să se arate că proiecţia unei drepte este (în general) o dreaptă. 2) Să se studieze proiecţia a două drepte concurente sau paralele. 3) Problema inversă: cînd proiecţiile a două drepte sînt a) concurente, b) paralele. 4) Proiecţiile a două drepte nesituate în acelaşi plan.

75. Se consideră o piramidă avînd ca bază un patrulater oarecare. Să se găsească un plan care o taie după un paralelogram.

Amintim că suma vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (fig. 17) este vectorul obținut prin construcția din figură (definiția este valabilă și atunci cînd vectorii sînt așezați pe o dreaptă). Suma este asociativă și comutativă.

Proiecția unui vector pe o dreaptă este tot un vector. Reamintiți-vă (sau, dacă nu ați cunoscut-o, stabiliți acum) teorema:

Proiecția sumei vectorilor = suma proiecțiilor vectorilor.

Dacă dreapta pe care proiectăm este axă algebrică, fiecărui vector de pe axă îi corespunde un număr real (pozitiv sau negativ), iar sumei vectorilor îi corespunde suma numerelor respective. Reciproc, unui număr, îi corespunde un vector pe axă. De aceea, în unele expresii, prin proiecția vectorului pe axă înțelegem numărul real corespunzător; de exemplu: cosinusul unghiului orientat AOA_1 cu laturi egale cu 1, este„proiecția“ vectorului OA_1 pe *axa* OA; aici, prin „proiecția“ înțelegem numărul real corespunzător *vectorului* obținut prin proiecție.

76. Se consideră poligonul regulat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de centru O și vectorii $OA_1, OA_2, \ldots$ Ce aplicații trigonometrice putem obține prin aplicarea teoremei de mai sus?

77. Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt vîrfurile unui poligon regulat și P un punct pe cercul circumscris, suma

$$PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2$$

nu depinde de P.

78. Se poate extinde problema precedentă în spațiu?

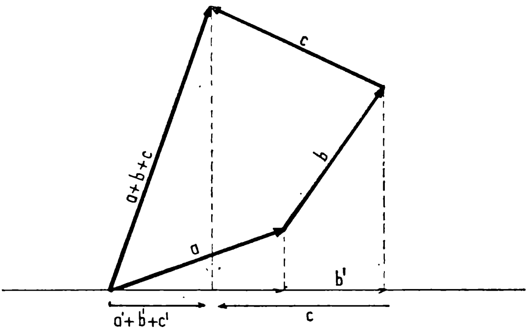


Fig. 17

79. Fiind date n puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$, există un punct G (numai unul), astfel încît $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \overrightarrow{GA_n} = 0$ (1)

Dacă M este un punct oarecare,

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = n\overrightarrow{MG} \qquad (2)$$

80. Considerăm tetraedrul $ABCD$. În cîte moduri se poate determina punctul G (din prob. 79)? Consecințe.

81. Pe semidreptele BA și CA se iau punctele M și N, astfel încît $BM = CN = h$. Să se afle locul geometric al punctului P, mijlocul segmentului MN.

Produs scalar

Numim produs scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, și îl notăm $\vec{a} \cdot \vec{b}$ numărul real $a\, b \cos \theta$, unde a și b sînt mărimile vectorilor dați și θ unghiul lor. Avem $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot$ proiecția lui b pe a (înțelegînd prin această proiecție numărul real corespunzător, cu $+$ dacă ea e în sensul lui a, cu $-$ dacă e în sens contrar).

Dacă vectorii au mărimi nenule, produsul lor scalar este nul, dacă și numai dacă ei sînt ortogonali ($\theta = 90°$); $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$.

Produsul scalar este evident comutativ.

El este și distributiv:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \tag{1}$$

În adevăr, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot pr\, (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot (pr \cdot \vec{b} + pr \cdot \vec{c}) = a \cdot pr \cdot \vec{b} + a \cdot pr \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (toate proiecțiile pe suportul lui a).

Relația (1) se generalizează imediat, pentru o sumă de mai mulți vectori, pentru produsul a două sume.

Exemple:

1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d}$.

2) $(\vec{a} + \vec{a}')(\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{a}') \cdot \vec{b} + (a + a') \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a}' \cdot \vec{c}$, formule identice ca formă cu cele din calculul algebric cu numere.

82. Să se demonstreze teorema lui Pitagora, cu ajutorul produsului scalar.

83. Unghiul AOB se proiectează ortogonal pe un plan în $A'O'B'$. Să se arate că două din condițiile: 1) $\widehat{AOB} = 90°$; 2) $\widehat{A'O'B'} = 90°$; 3) o latură a unghiului AOB este paralelă cu planul, o implică pe a treia.

84. Să se demonstreze relația

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Să se demonstreze, pe baza ei, concurența înălțimilor unui triunghi.

85. Dacă un tetraedru are două perechi de muchii neconcurente perpendiculare, atunci și muchiile din a treia pereche sînt perpendiculare.

86. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt constante reale și $f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x)$ atunci din $f(x_1) = f(x_2) = 0$ rezultă $x_1 - x_2 = n\pi$, n întreg.

Probleme de maxim și minim

87. Media geometrică a n numere pozitive este mai mică, cel mult egală cu media lor aritmetică, adică

$$\sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 \ldots + a_n}{n}$$

88. Dacă $a + b = k$ (constant), suma $a^2 + b^2$ este minimă cînd numerele sînt egale.

1. Demonstrați. 2. Scrieți enunțul sub forma unei inegalități. 3. Generalizați în două sensuri.

89. Dacă $x + y = k$ (constant), produsul $x^3\ y^2$ este maxim atunci cînd $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}\left(= \frac{k}{5}\right)$.

Generalizare.

Aplicație. Dintr-un buștean cilindric de diametru d se ciopleşte o grindă paralelipiped. Știind că rezistența este $R = kx^2y$ unde x este dimensiunea verticală și y cea orizontală, să se afle x și y, astfel carezistența să fie maximă.

90. Dintre toate triunghiurile cu același perimetru, care are aria cea mai mare?

91. Să se demonstreze că dacă $a_i > 0$

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geqslant 9.$$

92. Să se demonstreze că (pentru a, b, $c > 0$)

$$(a + b)\ (b + c)\ (c + a) \geqslant 8\ abc.$$

93. Generalizare.

94. Generalizați problema precedentă.

95. Dacă $a_i > 0$,

$$(1 + a_1)\ (1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant (1 + \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n})^n$$

96. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ sînt numere pozitive și s este suma lor,

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \ldots + \frac{a_n}{s - a_n} \geqslant \frac{n}{n - 1}.$$

97. Cineva dă problemei precedente soluția: „Prin inducția completă. Pentru $n = 3$, s-a verificat. Dacă

$$E(n) = \sum_{1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} - \frac{n}{n-1}, \text{atunci} E(n-1) = \sum_{1}^{n-1} \frac{a_i}{s - a_i} - \frac{n-1}{n-2}. \text{ Deci}$$

$$E(n) = E\ (n-1) + \frac{a_n}{s - a_n} + \frac{1}{(n-2)\ (n-1)}$$

Presupunînd $E(n-1) \geqslant 0$, rezultă și $E(n) \geqslant 0$".
Este corectă această soluție?

98. Dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi,

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$$

99. Dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi, pentru $A = B = C$,

1) $\sin A + \sin B + \sin C$ este maxim;
2) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ este minim;
3) $\cos A + \cos B + \cos C$ este maxim;
4) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$ este minim;
5) $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$ este minim.

100. În orice triunghi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4 \cdot \sqrt{3} \cdot S$$

Demonstrați prin cît *mai multe metode.*

101. Să se afle drumul cel mai scurt între două vîrfuri nesituate pe aceeași față ale unui paralelipiped dreptunghic de dimensiuni date, cu condiția ca drumul să fie în întregime pe suprafață.

102. Aceeași problemă pentru punctele A și B situate respectiv pe cercurile celor două baze ale unui cilindru.

103. Aceeași problemă pentru punctele A și B situate pe o sferă.

Aritmetică utilă în calculul probabilităților

104. În mulțimea U_1 sînt n_1 elemente: a_1, a_2, ... a_{n_1}; în U_2, n_2 elemente: b_1, b_2, ..., b_{n_2}. Se formează toate perechile (a_i, b_j). Cîte perechi se pot forma?

Generalizare pentru k mulțimi.

Concretizări.

105. Urna U conține n obiecte (bile) $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Se extrage o bilă oarecare a_i. *Din cele rămase* se extrage o bilă și se pune lîngă prima a_i a_j. Din cele rămase se extrage a 3-a bilă și se pune lîngă grupa deja formată: a_i a_j a_m etc. În total se fac k extrageri ($k \leqslant n$). Cîte grupe se pot forma?

106. În tabloul A_n^k considerăm două grupe cu aceleași obiecte (deci care diferă între ele numai prin ordinea obiectelor) echivalente și așezăm în aceeași clasă toate grupele echivalente între ele. Cîte clase se pot forma?

107. Să se demonstreze că $C_n^k = C_n^{n-k}$

108. Împărțim grupele tabloului C_n^k în două clase: 1) acelea care nu conțin obiectul a_n; 2) acelea care conțin pe a_n. Cîte grupe sînt în fiecare clasă?

109. Considerăm două obiecte a_1, a_2. Să se împartă mulțimea grupelor din tabloul C_n^k în clase cu ajutorul acestor obiecte și să se arate cîte grupe sînt în fiecare clasă.

110. Calculăm direct C_4^k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) și le scriem pe un rînd. Folosind formula din prob. 108, să se arate un procedeu simplu de a scrie C_5^k.

Generalizare.

111. În scrierea tabloului C_n^k (ca și al A_n^k) *fiecare obiect joacă același rol*, deci apare scris în tablou de același număr de ori. Să se regăsească formula lui C_n^k pe baza acestei observații.

112. Considerăm drumuri formate din semidrepte paralele cu Ox și Oy cu coordonate întregi (fig. 18); a) Cîte drumuri conduc din O într-un punct dat A de coordonate $x = m$, $y = n$? (mergînd numai spre dreapta și în sus); b) Pentru a ajunge în A trebuie să ajungem întîi sau în A_1 sau în A_2. Ce relație putem deduce de aici?

113. Fiind date m bile între care a albe și b negre ($m = a + b$), se formează combinările cîte n; numărul grupelor este $k = C_m^n$; fiecare grupă conține un număr i de bile albe (i poate lua și valoarea 0 dacă $n \leqslant b$, și valoarea n dacă $n \leqslant a$).

Să se afle media aritmetică a celor k numere i.

114. Aceeași problemă, printr-o metodă mai simplă.

115. Considerăm n urne U_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Urna U_i are a_i bile albe și b_i bile negre. Se extrage în toate modurile prima bilă din U_1, a doua din U_2, ..., a n^a din U_n (obținîndu-se un șir de n bile).

Cîte feluri de grupe obținem după coloritul lor? (Numim colorit o anumită succesiune de alb-negru.)

Cîte grupe în fiecare colorit?

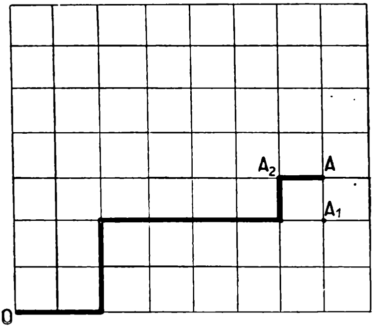


Fig. 18

116. Considerăm cele

$$N = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\dots(a_n + b_n)$$

grupe formate în problema precedentă. Fiecare are un număr i de bile albe. Să se afle media numerelor i.

117. Considerăm n urne identice $U[a + b]$. Se formează grupele din problema **115.** Să se afle cîte grupe conțin i bile albe ($i = 0, 1, \dots, n$), indiferent de locul pe care îl ocupă ele într-o grupă de n.

Să se afle media numerelor i.

118. Din n urne identice se formează
$N = (a + b)^n = b^n + C_n^1 b^{n-1} a + \dots + C_n^i b^{n-i} a^i + \dots + a^n$
grupe din problema precedentă; există $t_i = C_n^i\, b^{n-i}\, a^i$ grupe cu i bile albe.

Să se afle valoarea lui i pentru care t_i este maxim.

119. Fie N numere, $a_1, a_2, \ldots, a_N$, $m = \frac{a_1 + \ldots + a_N}{N}$, media lor aritmetică, $m'' = \frac{a_1^2 + \ldots + a_N^2}{N}$ media pătratelor lor. Să se calculeze, în funcţie de m şi m'', media patratelor abaterilor faţă de medie:

$$M = \frac{(a_1 - m)^2 + (a_2 - m)^2 + \ldots + (a_N - m)^2}{N}.$$

120. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sînt numerele de bile albe din cele $N = (a + b)^n$ grupe formate din n urne identice (considerate în pr. **117**), să se afle valorile lui m şi M din problema precedentă.

121. Fie $R_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $R_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h\}$ şi fie R mulţimea avînd ca elemente toate sumele $a_i + \alpha_j$. Notăm cu m_1 media numerelor din R_1, cu m_2 a celor din R_2, cu m a celor din R. Notăm cu M_1 media patratelor abaterilor faţă de medie în R_1

$$M_1 = \frac{(a_1 - m_1)^2 + \ldots + (a_k - m_1)^2}{k}$$

cu M_2 şi M expresiile analoage în R_2 şi R.

Să se afle m în funcţie de m_1, m_2 şi M în funcţie de M_1, M_2.

121 b. Generalizare.

122. Să se rezolve problema **119,** folosind rezultatele de la problema **121.**

123. Să se afle media bipatratelor abaterilor faţă de medie la cele N numere din problema **117.**

124. Se consideră numerele $\alpha_i = \frac{a_i}{n}$, unde a_i sînt numerele de bile albe în grupele din n urne identice (prob. **117**). Cele N numere α_i iau valorile O, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ..., 1; ele ne arată „frecvenţa" bilelor albe în grupele de cîte n bile.

Să se afle media numerelor α_i şi media patratelor abaterilor faţă de medie.

Să se interpreteze faptul că aceasta tinde la O cînd n tinde la ∞.

125. Să se îmbunătăţească evaluările din problema 124, folosind $m^{(4)}(n)$.

Probabilităţi

Dacă o urnă conţine 10 bile dintre care 3 sînt albe, dacă bilele sînt identice şi scoatem una la întîmplare, probabilitatea ca bila scoasă să fie albă este $\frac{3}{10}$. În general dacă urna are $a + b$ bile, (a albe), probabilitatea de a scoate o bilă albă este $p = \frac{a}{a+b}$. Ea arată mărimea „şansei" de a scoate alb. Astfel, dacă din 10 bile, nu 3 ci 4 sînt albe, probabilitatea (şansa) de a scoate alb va fi mai mare.

Alte fenomene în care intervine hazardul se asimilează cu acesta. Probabilitatea de a trage un as dintr-un pachet de joc de 52 de cărţi este $\frac{4}{52}$ (căci sînt 4 aşi). Probabilitatea de a scoate o figură este $\frac{12}{52}$ (sînt 12 figuri). Pachetul de cărţi poate fi asimilat cu o urnă avînd 52 de bile, dintre care cîte sînt albe (pe care mizăm) spune problema (4 dacă e vorba de a scoate un as, 12 dacă e vorba de a scoate o figură).

Important este ca fiecare bilă să aibă aceeaşi şansă de a fi scoasă, apariţia fiecărei bile să fie egal de probabilă.

Sînt însă situaţii mai complexe decît o urnă cu conţinut cunoscut, situaţii care — pentru a fi aduse la modelul „o urnă“ — necesită anumite numărători, calcule.

Exemplu: Dintr-o urnă cu 30 de bilete numerotate de la 1 la 30, tragem 2 bilete la întîmplare. Care este probabilitatea ca printre acestea două să existe biletul nr. 1?

Cîte grupe de 2 bilete putem trage? C_{30}^{2} $(= 15 \cdot 29)$. Evident, fiecare grupă este egal de probabilă.

Pe care din ele mizăm? Pe acelea care au biletul 1. Cîte sînt din acestea? 29 (lîngă biletul 1 putem avea unul din celelalte bilete : 2—30).

Asimilăm situaţia cu o urnă avînd $15 \cdot 29$ „bile“ (aici grupe) dintre care 29 „albe“. Probabilitatea va fi $\frac{29}{15 \cdot 29} = \frac{1}{15}$.

Tocmai acest fel de situaţii constituie propriu-zis *probleme* de probabilităţi.

Cazurile pe care mizăm (mai sus numite „bila“ albă) sînt indicate de enunţul problemei după cuvintele probabilitatea de a... Ele se numesc cazuri *favorabile.*

Definiţie. Probabilitatea de a se ivi un caz favorabil este raportul între numărul cazurilor favorabile şi numărul tuturor cazurilor posibile — dacă toate cazurile au aceeaşi şansă de a se ivi (sînt egal probabile).

Multe din problemele din paragraful precedent (**104**—**125**) — în care s-au făcut „numărări“ de posibilităţi — servesc tocmai pentru probleme de probabilităţi.

126. O urnă cu bilete 1—30. Se scot 5 bilete. Probabilitatea ca printre ele să se afle biletele 3, 4 şi 10.

127. Dintr-o urnă cu biletele 1—10 scoatem 4. Probabilitatea ca printre ele să existe cel puţin unul din biletele 2, 5, 10.

128. Dintr-o urnă cu biletele 1 — n, scoatem pe rînd k bilete. Probabilitatea ca primele două să fie 1 şi 2 (în această ordine).

129. Într-o clasă sînt 30 de elevi. Cineva constată că există doi elevi cu aceeaşi dată a naşterii (ziua şi luna) şi exclamă surprins: Ce coincidenţă!

Fără a face nici un calcul poate că era în drept să fie surprins (365 de date posibile, numai 30 de elevi, cum să se nimerească doi cu aceeaşi dată). Dar făcînd calculul cuvenit?

130. În urnă sînt *a* bile albe şi *b* negre. Se extrage o bilă de culoare necunoscută. Apoi se extrage încă o bilă. Care este probabilitatea ca ea să fie albă?

131. Aceeaşi problemă cînd prima bilă *este cunoscută.*

132. O urnă conţine *a* bile albe şi *b* negre. Se scoate o bilă şi în locul ei se introduce în urnă o bilă de culoare contrară. Apoi se face o nouă extragere. Care este probabilitatea:
1) să obţinem acum alb (negru)
2) să obţinem aceeaşi culoare cu cea scoasă întîi (culoare contrară)?

133. Să se interpreteze problema **124,** folosind noţiunea de probabilitate.

Probabilităţi continui

De-a lungul unui gard cu lungimea de L metri se seamănă uniform seminţe de zorele. Printre ele s-a strecurat un bob de piper. Care este probabilitatea ca el să cadă pe o anumită porţiune cu lungimea l? Este $\frac{l}{L}$.

În general probabilitatea ca un punct luat la întîmplare pe segmentul AB să cadă pe segmentul CD (situat între A şi B) este $p = \frac{CD}{AB}$.

Dacă seminţele se seamănă pe o suprafaţă de S m², probabilitatea ca bobul de piper să cadă într-o anumită porţiune din ea cu aria s m² este $p = \frac{s}{S}$. În general, analog.

Dacă nu ne-am uitat de mult la ceas şi întrebăm cît e ora, probabilitatea să ni se răspundă „... şi m minute" cu $15 < m < 30$ este $\frac{1}{4}$.

134. Un funcţionar lucrează la etajul 6 şi îşi ia gustarea fie la bufetul de la etajul 8, fie la cel de la etajul 4, după cum aşteptînd liftul acesta vine urcînd sau coborînd.

La sfîrşitul lunii el constată că — deşi nu avea preferinţă pentru unul din bufete — vizitase în 18 zile bufetul de la etajul 8 şi numai în 6 zile pe cel de la etajul 4.

În lunile următoare constată rezultate apropiate de acesta.

Cîte etaje are clădirea?

135. Punctul P fiind ales la întîmplare în interiorul triunghiului ABC, să se afle probabilitatea ca cele trei distanţe de la P la laturi să poată fi laturile unui triunghi.

Teoria numerelor

Fiind dat un număr natural m — pe care îl numim *modul* — spunem că două numere naturale a și b sînt congruente modulo m, $a \equiv b$ (modulo m), dacă ele dau același rest în împărțirea cu m:
$a = m\ q + r$, $b = mq' + r$. Toate numerele de forma $mq + r$ ($q = 0, 1, 2, \ldots$) (congruente între ele) formează o clasă, pe care o numim clasa de *rest r modulo m* și o notăm $\dot{r}$. Condiția necesară și suficientă ca două numere să fie în aceeași clasă este ca diferența lor să fie multiplu al modulului.

136. 1. Să se scrie în ordine crescătoare primele 4 numere din clasa de rest 3 și din clasa de rest 4 modulo 10. Idem, modulo 7.
2. Să se demonstreze că dacă a variază fără a-și schimba clasa și b de asemenea, suma $a + b$ rămîne în aceeași clasă pe care o vom numi suma claselor în care se află a, respectiv b. Analog, produsul $a \cdot b$.
3. Exerciții: 1) modulo 10: $\dot{3} + \dot{5}$; $\dot{3} + \dot{9}$; $\dot{3} + \dot{7}$; $\dot{3} \cdot \dot{7}$; $(\dot{3})^4$; $\dot{7} \cdot (\dot{3})^2 + \dot{4} \cdot \dot{3} + \dot{8}$
2) *modulo* 7: $\dot{3} + \dot{2}$; $\dot{3} + \dot{4}$; $\dot{3} + \dot{6}$; $\dot{3} \cdot \dot{4}$; $(\dot{3})^4$; $(\dot{3})^6$; $\dot{5} \cdot (\dot{3})^2 + \dot{0} \cdot \dot{3} + \dot{1}$

137. Să se demonstreze că 1) dacă $a \equiv r$ (m), atunci $(a, m) = (r, m)$. (Prin (a, m) înțelegem *c.m.m.d.c.* al numerelor a și m).
2) Dacă $(a, m) = 1$ și $(b, m) = 1$, atunci și $(ab, m) = 1$.

138. Știind că scăderea este operația inversă adunării, ($a - b = x$, dacă $b + x = a$), să se efectueze: 1) *modulo* 10: $\dot{7} - \dot{3}; \dot{7} - \dot{9}; \dot{2} - \dot{2}$.

2) *modulo* 7: $\dot{5} - \dot{1}; \dot{5} - \dot{6}; \dot{2} - \dot{2}$.

139. Să se demonstreze că un număr este congruent cu suma cifrelor lui modulo 9.

140. Să se găsească reguli de aflare a clasei unui număr N scris în baza 10 a) modulo 4; b) modulo 8; c) modulo 11; d) modulo 7.

Idem cînd numărul este scris în baza de numerație 8, e) modulo 7; f) modulo 8; g) modulo 9; h) modulo 5.

141. Cineva scrie $7285 \times 3427 = 24\,975\,695$. Să se arate că înmulțirea este greșită — pe o cale mai rapidă decît refăcînd calculul.

142. Cineva scrie $7285 \times 3427 = 24\,065\,695$. Să se arate că înmulțirea este greșită.

143. Înmulțirea $7285 \times 3427 = 24\,965\,695$, este corectă?

144. Așezăm cifrele 1,2,2,3,4,6,6,8,9 într-o ordine oarecare și obținem un număr (în baza 10) A; le așezăm într-altă ordine și obținem un număr B. Să se arate că A nu este divizibil cu B.

145. Să se scrie primii 10 multipli ai numărului 3 și să se afle în ce clase modulo 10 sînt.

Idem pentru multiplii lui 4.

Ce se observă? Interpretare.

146. Generalizare.

147. Sintetizați rezultatele în cazul cînd modulul este un număr prim p.

148. Dacă într-o mulțime de elemente G $\{a, b, c, \ldots\}$
1) este definită o lege de compoziție internă $*$ adică la oricare pereche de elemente a, b din mulțime corespunde un element c al mulțimii, $a * b = c$,
2) dacă legea este asociativă

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

și comutativă

$$a * b = b * a$$

3) dacă ecuația $a * x = b$ are soluție oricare ar fi a și b din G

spunem că $(G, *)$, mulțimea G cu legea $*$, formează un grup, comutativ.

Să se arate că
1) $(G, \cdot)$ unde G este mulțimea claselor modulo p, din care s-a exclus clasa 0, iar $\cdot$ este înmulțirea claselor, formează grup;
2) idem cînd G este mulțimea claselor modulo m ce conțin numere prime cu m.

149. Să se arate că într-un grup comutativ oarecare există un element neutru și numai unul; că fiecare element al grupului are un invers și numai unul.

150. Considerăm un modul prim p și un număr a, $(a, p) = 1$ (adică $a \neq$ mult p). Ținînd seama de faptul că produsele $a \cdot 1$, $a \cdot 2$, ..., $a \cdot (p - 1)$ parcurg toate clasele, afară de 0, să se facă produsul acestor clase în două moduri și să se vadă ce se obține.

151. Să se arate că C_p^k, unde p este număr prim și $o < k < p$, este multiplu de p.

Se poate regăsi teorema lui Fermat (prob. **150**) pe baza acestei observații simple?

152. Problemă analogă cu prob. **150** pentru modulul m neprim, considerînd numai grupul claselor de resturi prime cu modulul.

153. Problemă analogă pentru un grup comutativ finit de ordinul n (cu n elemente) oarecare.

154. Să se alcătuiască un tablou în care să se înscrie puterile succesive ale claselor de resturi modulo 13 (fără 0).

Să se facă observații — cît mai multe — asupra acestui tablou, gîndind care din ele ar putea fi valabile și în cazul unui modul prim p oarecare, în ce fel s-ar enunța teoremele corespunzătoare și, eventual, cum s-ar putea ele demonstra. (Numai după încercări proprii, confruntați cu soluția.)

155. Se observă pe tabloul format la prob. **154** că oricare ar fi a, există un n astfel ca $a^n = 1$, puterile anterioare fiind diferite între ele (după care obținem $a^{n+1} = a$, $a^{n+2} = = a^2$ etc. — de aceea acestea nu au mai fost scrise în tablou).

Să se arate că aceasta este o proprietate valabilă pentru un grup *finit* oarecare.

156. În tabloul prob. **154** se vede că există elemente care aparţin exp. 1, 2, 3, 4, 6, 12 dar nu exp. 5, 7, ..., deci dacă a ap. exp. n, n este un divizor al lui 12.

Care este teorema în cazul general?

157. Se observă pe tabloul prob. **154** că 2 ap. exp. 12 (de asemenea 6, 7, 11). Spunem că 2 este pentru modulul 13, o rădăcină primitivă. În general, oricare ar fi p, există elemente ce aparţin exp. $p - 1$, adică rădăcini primitive. (Demonstraţia este mai lungă; cititorul curios o poate găsi în cărţile de teoria numerelor).

Să se arate că dacă avem scrise puterile unei rădăcini primitive, înmulţirea şi împărţirea claselor se poate face pe o cale simplă.

158. Avînd scrise puterile succesive ale unei rădăcini primitive, în ce mod putem forma puterile succesive pentru celelalte elemente?

Să se arate că din existenţa unei rădăcini primitive se poate deduce că există $\varphi\ (p - 1)$.

159. Observăm că — pentru $p = 13$ — ecuaţia $x^5 = a$ are soluţie (unică) oricare ar fi a. Pe cînd ecuaţia $x^3 = a$ are soluţii numai pentru 4 valori ale lui a, iar pentru o astfel de valoare are *trei* soluţii.

Să se explice şi să se generalizeze.

160. La puterea 6, în tablou apar numai elementele 1 şi 12. Care este propoziţia generală?

161. La puterea 2 apar jumătate din elemente. Se întîmplă la fel în cazul general?

162. $p - 1$ este rest patratic sau nonrest după cum $p = 4k + 1$ sau $p = 4k + 3$.

Dacă r este rest, în primul caz și $p - r$ este; în al doilea caz $p - r$ este nonrest.

163. Numerele prime de forma $4k + 1$ și 2 pot fi scrise în mod unic ca sumă de două patrate.

164. Considerăm mulțimea numerelor complexe $z = a + bi$ *cu a și b întregi.* Ea se numește inelul întregilor lui Gauss. Orice z este divizibil prin 1, -1, i, $-i$, care se numesc unitățile inelului (și prin cîturile respective: de ex. $a + bi = -i(-b + ai)$). Aceștia sînt divizori *improprii.* Un număr care nu are divizori proprii se numește *prim.*

Care sînt numerele prime în inelul lui Gauss?

165. Să se efectueze descompunerea în factori primi în inelul lui Gauss.

2

CUM GÎNDIM

1. Am fi tentați să folosim faptul că 10^2 se vede imediat. Am pierde astfel simetria față de 12.

4. Ni se pare că linia *a*, fiind mai lungă, are suprafața mai mare. În realitate, ariile acoperite sînt egale. Căutați să demonstrați.

5. Dacă T_2 merge cu 50 km/oră și M cu 70 km/oră, în momentul întîlnirii, t (ore), M a parcurs 70 t, iar T_2, 53

$50\,t$ și $70\,t + 50\,t = d$. Împărțim pe d în părți proporționale cu 70 și 50. M a parcurs $\frac{7}{12}d$ (și T_2, $\frac{5}{12}d$). Acum distanța între trenuri este $d - 2\cdot\frac{5}{12}d = \frac{1}{6}d = d'$. Musca merge acum spre T_1, problema este aceeași numai că avem d' în loc de d. Ea va parcurge pînă la întîlnirea cu T_1, $\frac{7}{12}d' = \frac{7}{12}\cdot\frac{1}{6}d$, și în acest moment distanța între trenuri a devenit $\frac{1}{6}d' = \frac{1}{6^2}d$.

Drumul total va fi

$$s = \frac{7}{12}d + \frac{7}{12}\cdot\frac{1}{6}d + \frac{7}{12}\cdot\frac{1}{6^2}d + \ldots$$

$$s = \frac{7}{12}d\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots\right) = \frac{7}{12}d\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{7}{10}d$$

Înlocuind pe d cu 300 km, obținem $s = 210$ km

Și totuși, cu o idee, răspunsul poate fi găsit într-un minut.

6. Dacă v este volumul apei, prin înghețare el devine $v + \frac{9}{100}v$.

Dacă V este volumul gheței, prin dezgheț el devine x, astfel încît

$$x + \frac{9}{100}x = V.$$

16. Fie CV, C, V cele trei etichete. Dacă din borcanul cu eticheta C scoatem o vișină, nu vom ști dacă el este CV sau V.

Să scoatem o fructă din borcanul cu eticheta CV.

17. Scriem pe o linie orașele. Nu putem atașa direct persoanele; de aceea, pe a doua linie scriem profesiile și pe urmă, cu ajutorul lor și al informațiilor din enunț, pe a treia linie persoanele. Din (1) rezultă că sînt 2 medici, 2 profesori, 2 ingineri.

$$\begin{array}{cccccc} O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & O_5 & O_6 \\ m & p & i & & & \end{array}$$

18. O_3 trebuie să-și pună ambele ipoteze (am negru, am alb) și să folosească la maxim informațiile pe care le are — numai auditive.

21. Să ne plasăm în poziția lui B căutînd să exploatăm de fiecare dată informațiile ce ni se dau.

22. În primul rînd să lăsăm la o parte cele două cazuri izolate, Florica și Ana.

Problema devine: au fost 72 persoane. Ema a dansat cu 9 băieți, Ioana cu 10, ..., Sofia cu toți.

24. Baza demonstrației o constituie faptul că tangentele din un punct la cerc sînt egale. Notînd $AB_1 = AC_1 = x$ etc., avem (fig. 19)

$$\begin{aligned} y + z &= a \\ z + x &= b \\ x + y &= c \end{aligned}$$

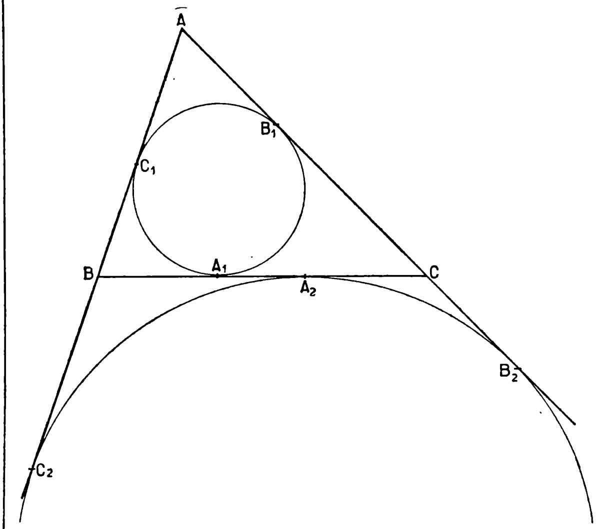


Fig. 19

Rezolvăm sistemul nu printr-o metodă aleasă oricum, ci ținînd seama de simetria lui. Deci adunăm *toate* cele trei ecuații și obținem

$$x + y + z = p$$

Scăzînd pe prima, $x = p - a$.

Analog, $y = p - b$, $z = p - c$.

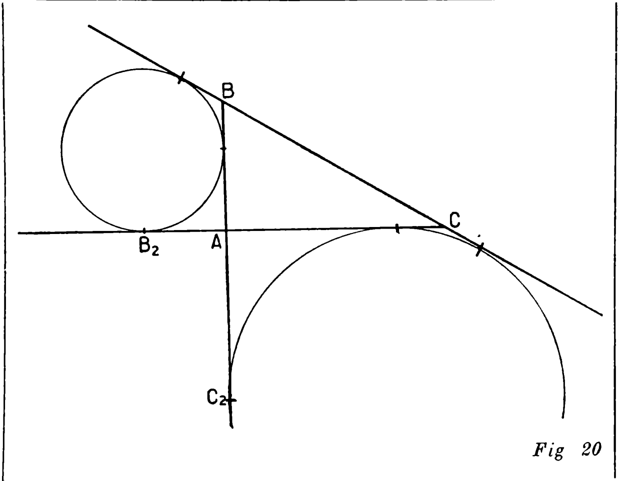


Fig 20

Pentru cercul exînscris, cu notații analoge,

$$\begin{aligned} Y + Z &= a \\ X - Z &= b \\ X - Y &= c \end{aligned}$$

deci $X\ (= AC_2 = AB_2) = p,\ \ Y = p - c$

$$Z = p - b.$$

E posibil mai direct, fără algebră, gîndind aritmetic?

25. Folosim prob. precedentă (fig. 20).

27. Propoziția enunțată se înțelege astfel: dacă în legătură cu triunghiurile ABC, $A'B'C'$ știm că

$$\hat{A} = \hat{A}', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \left(\text{sau } \frac{AB}{A'C'} = \frac{AC}{A'B'}\right)$$

putem afirma că triunghiurile sînt asemenea (se demonstrează).

Condiția ca unghiul să fie *cuprins* între laturile proporționale NU ar fi esențială dacă am putea renunța la ea, adică dacă am putea demonstra că „din

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

rezultă cu necesitate asemănarea triunghiurilor."

Este adevărată această propoziție? Ce înseamnă nu e adevărată? În ce mod putem arăta că nu e adevărată?

28. Ținem seama de construcția din problema precedentă (C în loc de C_1).

29. Teorema directă se demonstrează ușor. Deoarece $b^2 + c^2 = a^2$, relația de demonstrat devine $ah = bc$, ceea ce rezultă din asemănarea triunghiurilor ABC și ABD (sau calculînd aria în două moduri).

Propoziția reciprocă are enunțul: dacă în triunghiul ABC există relația

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \text{ (} h \text{ înălțimea din } A\text{)}$$

triunghiul este dreptunghic.

Pentru a arăta că ea este falsă, e suficient să construim un triunghi în care relația să fie verificată și totuși triunghiul să nu fie dreptunghic.

30. Sîntem tentați să încercăm a așeza plăcile. Nu este bine pentru că ar trebui arătat că am făcut toate încercările posibile.

34. Enunțul în sine este interesant: cele 7 arii depind numai de aria triunghiului dat; dacă acesta și-ar schimba oricum forma aria uneia din părți va fi aceeași fracție din aria totală.

Deci gîndirea noastră se îndreaptă mereu spre a evalua raporturi de arii și nu elementele fiecărui triunghi. Cel mai simplu lucru pe care îl observăm din primul moment este faptul că triunghiul ABA' are aria $\frac{1}{3}S$ (S aria tr. dat) căci baza lui este $\frac{1}{3}$ din baza triunghiului ABC, înălțimile fiind aceleași. Analog BCB' (luînd ca bază pe AC) și CAC'.

Notînd cele 7 arii ca în figură, avem:

$$(1) + (2) + (4) = \frac{1}{3} S$$

$$(2) + (3) + (5) = \frac{1}{3} S$$

$$(3) + (1) + (6) = \frac{1}{3} S$$

Însumînd:

$$(1) + (2) + (3) + S - (7) = S$$

Obținem:

$$(7) = (1) + (2) + (3)$$

Dar aceasta nu rezolvă problema; avem 3 ecuații cu *șase* necunoscute.

De unde să mai scoatem alte ecuații?

36. Dacă M și L sînt „aproape" de A, aria 1 e „foarte mică". Dacă M, N, L sînt mijloacele laturilor, se formează 4 triunghiuri egale, deci fiecare are aria $\frac{1}{4}S$. Problema este: putem așeza pe M, N, L așa fel ca *fiecare* tr. 1, 2, 3 să aibă aria $> \frac{1}{4}S$? Răspunsul este nu, dar trebuie demonstrat.

Poziția lui M pe AB se poate fixa cu ajutorul unui *număr*. Am putea alege acest număr distanța AM. Ne gîndim însă că este vorba de *rapoarte* de arii, deci preferăm să fixăm poziția lui M tot prin raport: $z = \frac{AM}{AB}$. Cînd M se mișcă de la A la B, *z crește de la* 0 *la* 1. Analog, $x = \frac{BN}{BC}$, $y = \frac{CL}{CA}$.

Avem

$$\frac{a_1}{S} = \frac{AM \cdot AL}{AB \cdot AC}$$

(dacă ai uitat această formulă, o reconstitui cu fig. 21, luînd ca baze în calculul ariilor pe AC, respectiv AL).

Din $y = \frac{CL}{CA}$ rezultă $\frac{AL}{AC} = 1 - y$. Deci $r_1 = \frac{a_1}{S} = z(1-y)$

Analog, $r_2 = \frac{a_2}{S} = x(1-z)$; $r_3 = \frac{a_3}{S} = y(1-x)$.

Problema a devenit o problemă *de aritmetică*:

Se consideră numerele

$$r_1 = z(1-y);\ r_2 = x(1-z);\ r_3 = y(1-x).$$

Dacă x, y, z variază, independent unul de altul între 0 și 1, nu putem găsi valori pentru care toate numerele r_1, r_2, r_3 să fie mai mari ca $\frac{1}{4}$.

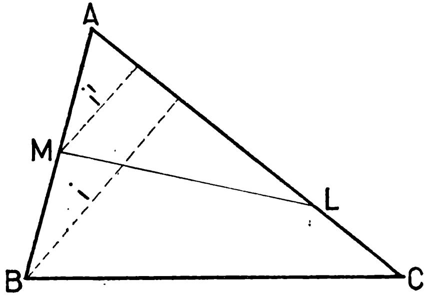


Fig. 21

Sîntem obişnuiţi să gîndim variaţia funcţiilor cu ajutorul graficelor raportate la axele Ox, Oy. Dar aici, x şi y variază ambii şi trebuie să vedem ce valori ia r_3, în special pentru ce valori ale lui x şi y (din intervalul 0, 1), $r_3 > \frac{1}{4}$.

Cu r_2 şi r_1, lucrurile par a se complica prin apariţia lui z. Sacrificăm simetria de notaţie şi punem $z = y_1$.

Aveţi acum problema: în planul xOy trasaţi arcul de curbă pe care se mişcă M (x, y) astfel ca $r_3 = \frac{1}{4}$.

Delimitaţi în ce regiune a planului este M dacă $r_3 > \frac{1}{4}$.

După aceea căutaţi valori x, y, y_1 pentru care *şi* $r_3 > \frac{1}{4}$ *şi* $r_2 > \frac{1}{4}$; stabiliţi că pentru astfel de valori nu

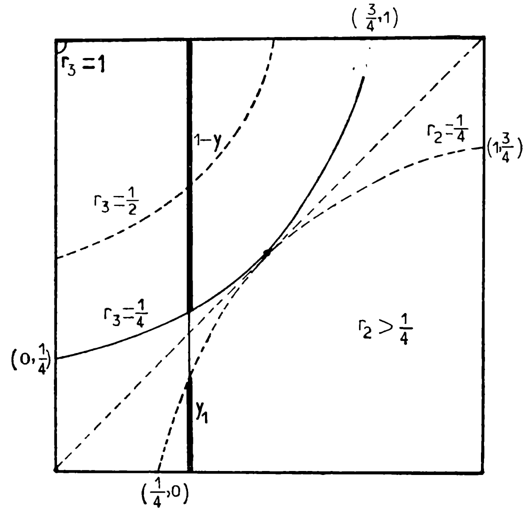

$(\frac{3}{4},1)$
$r_3=1$
$1-y$
$r_2=\frac{1}{4}$
$(1,\frac{3}{4})$
$r_3=\frac{1}{2}$
$r_3=\frac{1}{4}$
$r_2>\frac{1}{4}$
$(0,\frac{1}{4})$
y_1
$(\frac{1}{4},0)$

Fig. 22

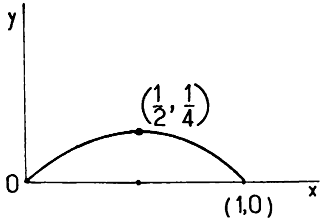

y
$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$
0
x
(1,0)

Fig. 23

putem avea *și* $r_1 > \frac{1}{4}$. *După ce încercați singuri*, confruntați cu rezultatul ce urmează.

Pentru $y(1 - x) = \frac{1}{4}$ obținem arcul din figura 22, care are concavitatea în sus (este un arc de *iperbolă echilateră*, dar nu are importanță cum se numește). Pentru $x(1 - y_1) = \frac{1}{4}$ obținem celălalt arc.

Luăm un x oarecare între $\frac{1}{4}$ și $\frac{3}{4}$ (căci numai în acest interval avem și r_2 și $r_3 > \frac{1}{4}$). Obținem y_1 (maxim) și $(1 - y)$ maxim îngroșate pe figură și trebuie să arătăm că produsul lor, r_1 este $< \frac{1}{4}$. Dacă prelungim aceste segmente pînă la bisectoare (unde $y = x$) avem $y_1 < x$ și $1 - y < 1 - x$; deci $y_1 \ (1 - y) < x \ (1 - x)$. Însă $x(1 - x) \leqslant \frac{1}{4}$ (= numai pentru $x = \frac{1}{2}$, cum se vede pe fig. 23).

Abia acum apare ideea unei soluții mai simple.

37. În loc de un triunghi considerăm un tetraedru *ABCD* și pe muchiile *AB*, *AC*, *AD* punctele B_1, C_1, D_1. Vrem să găsim raportul volumelor $V_1(AB_1C_1D_1)$ și $V(ABCD)$.

38. În loc de triunghi, un tetraedru. Șase puncte pe muchii. 4 tetraedre mai mici. Dacă punctele sînt mijloacele muchiilor, volumul unui tetraedru mic este $\frac{1}{8}V(V =$ $=$ vol. tetraedrului dat). Probabil vom putea arăta că dacă punctele sînt oarecare, nu e posibil ca toate cele 4 tetraedre mici să aibă volumele peste $\frac{1}{8}$ V.

39. Cunoaștem condiții care *caracterizează* patrulaterul inscriptibil; de ex.: e necesar și suficient ca două unghiuri opuse să fie suplimentare.

Noi vom căuta să *înscriem* un cerc în patrulaterul $ABCD$. Din acesta cunoaștem însă numai două laturi AB și AC. Să ne mulțumim deocamdată cu ele. Un cerc tangent la AB și la AC are centrul P pe bisectoarea lui A. Dar unde anume? Oriunde l-am lua, construim cercul și din B ducem a doua tangentă la el, idem din C. Vom găsi astfel un patrulater circumscris unui cerc; la fiecare poziție a centrului pe bisectoare, un alt patrulater. Care dintre ele este *și* inscriptibil?

40. Construcția triunghiului $AA'M$ (fig. 24) format de înălțimea și mediana din A, care se impune imediat, e simplă și cunoscută.

Problema propriu-zisă este: cum să găsim punctele B și C, simetrice față de M și așa fel încît distanța de la B la dreapta AC să fie dată.

Dificultatea stă în faptul că lucrăm concomitent cu două necunoscute: și punctul B și dreapta AC. Nu am putea transforma problema astfel ca să avem numai o singură necunoscută?

41. Ideea e simplă: în general, produsul a două segmente rezultă dintr-o proporție, iar aceasta dintr-o asemănare. Problema e: care sînt triunghiurile asemenea și cum stabilim asemănarea.

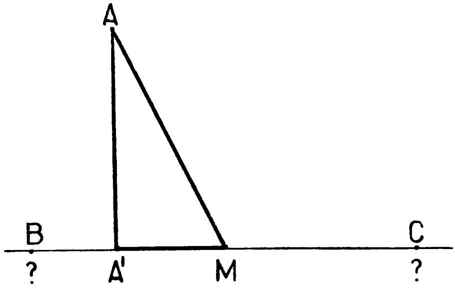


Fig. 24

42. Dacă ni se dă R, raza cercului, $d = OA$ și unghiul α format de AO cu secanta, figura e perfect determinată; deci trebuie — cu o anumită ambiție — să putem calcula segmentele AE, AF, DE, DF și să *verificăm* relația din enunț. *Ca exercițiu* de trigonometrie și de calcul algebric, ar fi util să facem și așa.

Vrem însă o demonstrație mai simplă și mai lămuritoare. În ce teoremă am mai întîlnit o relație de tipul $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$?

43. Dacă am studiat teoria fascicolelor armonice, soluția este imediată. Fascicolul cu vîrful în C, cu razele CA, CB, CD, CE este armonic. Dacă îl tăiem cu dreapta AB, obținem punctele A, B, M și conjugatul lui M' față de AB. Punctul M fiind la mijlocul lui AB, conjugatul lui este la infinit, deci CE taie pe AB la infinit, adică $CE \parallel AB$.

Să ne gîndim însă la o soluție elementară. Ar trebui arătat că $\hat{E} = \widehat{BAD}$. Însă $\hat{E} = \widehat{ACD}$ (aceeași măsură). Cum să arătăm că $\widehat{BAD} = \widehat{ACD}$? Încă nu am folosit ipoteza $AM = MB$.

44. Unim pe N cu E și *separat* pe N cu A — deoarece nu știm încă dacă NE coincide cu NA. Unim N cu B și N cu C. Va trebui să folosim măsura unghiurilor.

45. Dacă d taie segmentul FF' în punctul m *între* F și F', evident m este poziția de minim, căci $mF + mF' = FF'$, pe cînd pentru $M \neq m$, $MF + MF' > FF'$ (inegalitatea triunghiului). Cînd M se depărtează de m într-o parte sau cealaltă, suma crește (tinzînd la ∞ odată cu M) căci (fig. 25)

$$M_2F + M_2F' > M_1F + M_1F'$$

(pentru că $M_1F' + M_1N < M_2F' + M_2N$; $M_1F < M_1N + NF$)

Dar dacă d nu taie pe $F'F$ între F *și* F'?

46. Există pe dreapta d puncte M așa fel ca $MF' + MF = 2a$? Folosim problema precedentă.

47. Probabil, o soluție trigonometrică e mai ușor de găsit. Avem (fig. 26)

$$d_2 = c \cos\frac{A}{2} \qquad d_1 = b \cos\frac{A}{2}$$

$$d_1 d_2 = bc \cos^2\frac{A}{2}.$$

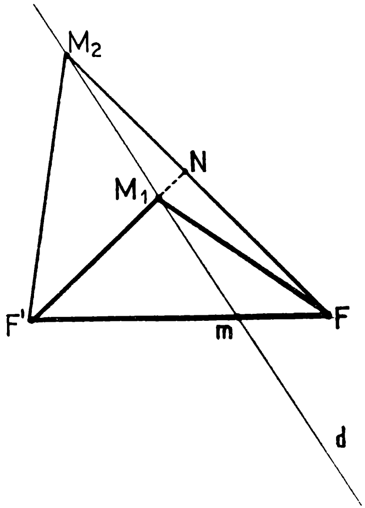


Fig 25

Dar apare produsul laturilor b, c și am vrea suma lor. Acest produs apare și în teorema lui Pitagora generalizată

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc\ cos\ A$$

Căutăm să punem în evidență suma $b + c$

$$a^2 = (b + c)^2 - 2\ bc\ (1 + cos\ A)$$

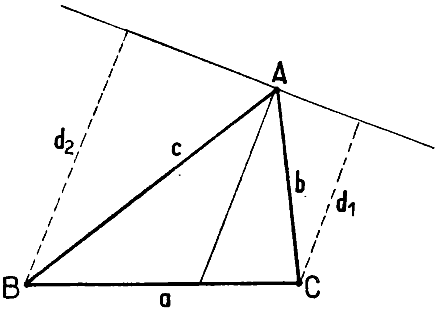


Fig. 26

Dar $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$; deci

$$a^2 = (b + c)^2 - 4\, bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$a^2 = (b + c)^2 - 4\, d_1 d_2 \qquad \text{c.c.t.d.}$$

Dar o soluție pur geometrică?

49. Să luăm în atenție ce este dat (fig. 27) : A', B', C' mijloacele laturilor; $B'O_1 \perp AC$, $B'O_1 = \frac{b}{2}$; $C'O_2 \perp AB$, $C'O_2 = \frac{c}{2}$.

51. Sau arătăm că laturile triunghiului $O_1O_2O_3$ (fig. 28) sînt egale sau arătăm că unghiurile lui sînt egale.

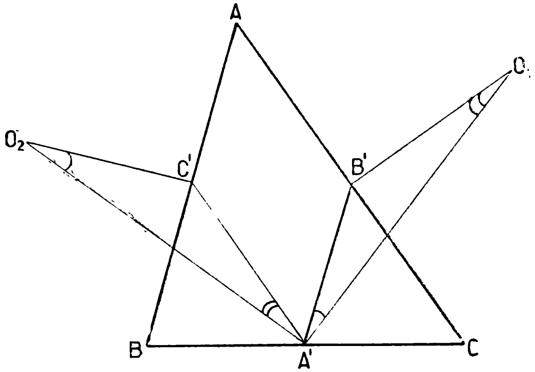


Fig. 27

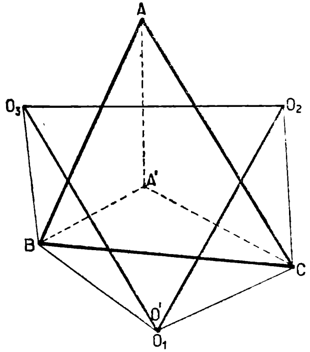


Fig. 28

Să ne fixăm atenția pe laturi. Important e să demonstrăm egalitatea a *două* laturi; pentru alte două va fi analog. Să arătăm, de exemplu, că $O_1O_2 = O_1O_3$. Dacă am găsi două triunghiuri egale în care intră aceste segmente... Nu le găsim. Atunci să *calculăm* lungimile lor în funcție de elementele triunghiului ABC, pe care le presupunem date.

53. Calculăm latura AB în funcție de elementele date. Analog pe AC (sau prin simetria notației).

55. Dacă știm teorema lui Menelau, o aplicăm:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{BB'}{CC'};\ \frac{\beta C}{\beta A} = \frac{CC'}{AA'};\ \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{AA'}{BB'},\ \text{deci}$$

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B} = +1.$$

ceea ce arată că α, β, γ sînt colineare.

Dacă nu știm teorema lui Menelau, e necesară o idee. O idee simplă, ingenioasă, dar foarte ascunsă.

56. Dacă am rezolvat problema precedentă, nu facem altceva decît să adaptăm aici aceeași metodă.

57. Trebuie să demonstrăm că punctele A, B, C unde se întîlnesc tangentele exterioare la cele trei perechi de cercuri sînt colineare. Deoarece $\frac{CO_1}{CO_2} = \frac{R_1}{R_2}$ ș.a., putem aplica teorema lui Menelau. Putem demonstra și prin „ieșirea în spațiu"?

58. Calculul direct e imposibil. Să profităm de faptul că cele două expresii de sub radicali sînt conjugate. Facem produsul lor și obținem $16\,807 = 7^5$.

Notînd cu x şi y cei doi radicali am găsit că $xy = 7$. Cum să arătăm că suma $x + y = 6$?

60. Să considerăm, ca exemplu-ghid, cazul $n = 4$, $m - 1 = 2^4 - 1 = 15$.

$C_{15}^{k} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots}$, unde la numărător sînt k factori descrescători, iar la numitor *tot* k factori crescători. Să urmărim numai factorii pari, pentru a vedea dacă 2 se simplifică. $\frac{14}{2}, \frac{12}{4}, \frac{10}{6}, \frac{8}{8}, \frac{6}{10} \ldots$ În fiecare din aceste fracţii numărătorul şi numitorul au pe 2 la aceeaşi putere, deci prin simplificarea cu el rămîn numai numere impare.

Se întîmplă la fel în cazul general?

61. Exemplu-ghid $n = 5$.

$$\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}$$

Din exerciţiul precedent ştim că 2 s-ar simplifica *în diagonală*: 30 cu 2, 28 cu 4 etc.

62. Oare care două sînt egale? Probabil că răspunsul depinde de n şi anume, de faptul dacă n este $3k$ sau $3k + 1$ sau $3k + 2$. Fie $n = 3k$ şi să scriem numai indicii superiori pînă la sfîrşit.

S_1 :		1	4	7 ...	$3k - 2$	
S_2 :		2	5	8...	$3k - 1$	
S_3 :	0	3	6	...$3k - 3$		$3k$

În acest caz S_1 şi S_2 au acelaşi număr de termeni, dar S_3 are unul în plus. Oare sînt termenii din S_1 şi S_2 egali 2 cîte 2? Ştim că $C_n^m = C_n^{n-m}$. Deci $C_n^{3k-1} = C_n^1$; $C_n^{3k-4} = C_n^4$

etc. S_1 şi S_2 *au termeni egali*, numai că scrişi în ordine inversă. Exemplu, pentru $n = 9$, obţinem coeficienţii

$$1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1$$

şi sumele

$$\begin{aligned} S_1 &= 9 + 126 + 36 \\ S_2 &= 36 + 126 + 9 \\ S_3 &= 1 + 84 + 84 + 1 \end{aligned}$$

Analog, studiem cazurile $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ şi găsim două sume *egale termen cu termen.*

Cum arătăm că a treia diferă cu 1? Exemplul $n = 9$ ne arată că nu mai poate fi vorba de o comparaţie termen cu termen. Calculul ne arată că $S_3 = 170$, în timp ce $S_2 = 171$; dar această verificare nu ne dă nici o indicaţie pentru cazul general. E necesară o altă idee.

13. Exemplu-ghid, $n = 4$.

$$E = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Simplificăm prima fracţie cu $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ (de la $16 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 10$)

$$E = \frac{2^4}{4!}(15 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7).$$

Pentru $n = 5$

$$E = \frac{32 \cdot 31 \ldots 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \ldots 8 \cdot 9 \ldots 16} - \frac{16 \ldots 9}{1 \ldots 8} = \frac{2^8}{8!}(31 \cdot 29 \ldots 17 - 1 \cdot 3 \ldots 15)$$

În cazul general vom obține fracția $\frac{2^{2^{n-2}}}{2^{n-2}!}$, iar în paranteză produsul numerelor impare de la 1 la 2^{n-1} scăzut din al celor de la 2^{n-1} la 2^n.

Se deschid două probleme: 1) să arătăm că fracția $\frac{2^{2^m}}{2^m!}$ se simplifică cu 2 la puterea 2^{m-1} (despre simplificări cu factori impari nu ne ocupăm; știm că numerele C_n^k sînt întregi și ne interesează numai cîți factori 2 conțin); 2) să găsim cînd numărul din paranteză îl scriem $2^\alpha \cdot i$, ce valoare are α.

Probabil, ambele probleme pot fi rezolvate prin inducție. Dar în ce fel trebuie conduse calculele?

66. Să calculăm primii termeni ai șirului, pentru a verifica dacă este așa. Obținem $a_2 = 2^2$; $a_3 = 2^3 + 2^2$; $a_4 = 2^5$; $a_5 = 2^6 + 2^4$; $a_6 = 2^7 + 2^6$; $a_7 = 2^8 + 2^7 + 2^6$; $a_8 = 2^{10}$; ...; $a_{16} = 2^{19}$;...

Căutăm să degajăm de aici legea: dacă $n = 2^m$, $a_n = 2^{n+m-1}$ (pentru $m = 0, 1, 2, 3, 4$ se verifică).

Urmează să aplicăm metoda inducției, să arătăm că dacă pentru $n = 2^m$, $a_n = 2^{n+m-1}$, atunci pentru $n = 2^{m+1}$ vom avea $a_n = 2^{n+m}$.

67. Să punem condiția ca $y'(x)$ să fie nul? Ar fi complicat.

Să dăm lui x două valori — pentru care putem calcula exact pe $\sin^2 x$ și $\cos^2 x$ și care să nu difere prin $2k\pi$ — să punem condiția ca să obținem valori egale pentru y, apoi ...

68. 1) Să ținem seama de simetria formulei; 2) împărțind peste tot cu r vor apare rapoartele $\frac{r_1}{r}, \frac{r_2}{r}, \frac{r_3}{r}$. Dacă le-am putea exprima în funcție numai de unghiuri, problema s-ar reduce la demonstrarea unei identități trigonometrice.

69. Aici încercări directe — grupări de termeni etc. — nu au șanse de reușită. Trebuie apelat la o idee generală, prin care să sistematizăm calculul.

70. Începem cu cazuri particulare $m = 1,2,3...$; acestea devin sugestive pentru cazul general abia de la $m = 4,5,6,7$. (Aceasta necesită multă muncă, dar dacă aflăm că problema a rezistat unor mari matematicieni... ne ambiționăm.)

Obținem

$m = 1, \quad y = 0; \; m = 2, \; y = (x - 1)^2 \, (2x + 1)$

$m = 3, \quad y = 3x^4 \, (x - 1)^2 \, (x + 1)^2$

$m = 4, \quad y = (x - 1)^2 \quad (4x^{13} + 8x^{12} + 12x^{11} + 6x^{10} + + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$

$m = 5, \quad y = 5x^6 \, (x - 1)^2 \, (x + 1)^2 \, (x^{14} + 2x^{12} + + 2x^2 + 1)$

Sugestii ce se desprind de aici: 1) pentru m par, y, are factorul $(x - 1)^2$, iar pentru m impar și pe $(x + 1)^2$. Aceasta am fi putut observa de la început; acum urmează numai să demonstrăm: atît funcția dată cît și derivata ei se anulează pentru $x = 1$, iar dacă m este impar și pentru $x = -1$.

Polinoamele din paranteze au numai semnul + (deci sînt pozitive pentru $x > 0$). Va fi la fel pentru orice m?

Ideea demonstrației va fi acum sugerată de cazurile $m = 6$, $m = 7$ (pentru a avea m par și m impar).

71. Dacă am putea construi graficul $y = f(x)$[$f(x)$ primul membru al ecuației] și arăta că el taie axa Ox în $n - 1$ puncte...

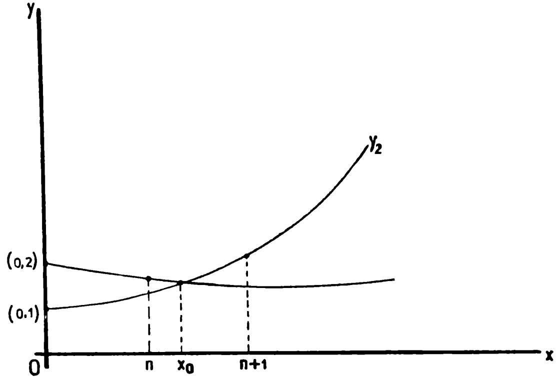


Fig. 29

În fond nu e vorba de o construcție exactă a graficului, ci numai de faptul că el taie axa Ox în puncte din intervalele menționate, nu e posibil și nu e nevoie să arătăm exact în ce puncte anume.

72. Dacă împărțim cu 100^n avem de comparat $y_1 = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^n + 1$ și $y_2 = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n$.

Pentru $n = 1, 2, 3$, se vede imediat că $y_1 > y_2$. Dar pentru valori mari ale lui n? Esențial este să observăm că atunci cînd n crește $0{,}99^n$ *scade*, pe cînd $1{,}01^n$ *crește*. Cum crește $1{,}01^n$? $1{,}01^{n+1} = 1{,}01^n \cdot 1{,}01 = 1{,}01^n +$

$+\frac{1}{100}\cdot 1{,}01^n$; deci la fiecare creștere a lui n cu 1, $1{,}01^n$ crește cu mai mult de $\frac{1}{100}$. Pentru $n = 100$ sigur va ajunge la o valoare mai mare ca 2, deci mai mare ca y_1, chiar dacă acesta nu ar fi scăzut. Un grafic (fig. 29), în care reprezentăm $y_1 = 0{,}99^x + 1$ și $1{,}01^x$, ne arată că există un x_0 pînă la care $y_1 > y_2$ și de la care mai departe, invers, $y_2 > y_1$. Pentru a răspunde la problemă trebuie să determinăm care este partea întreagă a lui x_0; să găsim cea mai mare valoare a lui n pentru care $y_1 > y_2$. E destul de greu fără o mașină de calcul dar... asta e problema.

Să dezvoltăm după binomul lui Newton

$$y_1 = 1 + 1 - C_n^1\cdot\frac{1}{100} + C_n^2\cdot\frac{1}{100^2} - C_n^3\cdot\frac{1}{100^3} + \ldots$$

$$y_2 = 1 + C_n^1\cdot\frac{1}{100} + C_n^2\cdot\frac{1}{100^2} + C_n^3\cdot\frac{1}{100^3} + \ldots$$

$$y_1 - y_2 = 1 - 2\left(C_n^1\cdot\frac{1}{100} + C_n^3\cdot\frac{1}{100^3} + \ldots\right)$$

Rămîne să determinăm cel mai mare n pentru care

$$C_n^1\cdot\frac{1}{100} + C_n^3\cdot\frac{1}{100^3} + C_n^5\cdot\frac{1}{100^5} + \ldots < \frac{1}{2}$$

sau

$$E = C_n^1 + C_n^3\cdot\frac{1}{100^2} + C_n^5\cdot\frac{1}{100^4} + \ldots < 50.$$

Vedem că termenii importanți sînt cei de la început; deși C_n^k crește cu k, numitorul se înmulțește de fiecare dată cu 100^2.

$n = 50$, evident este prea mare. Să încercăm $n = 49$.

Avem $C_{49}^1 = 49$; $C_{49}^3 = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 49 \cdot 47 \cdot 8 > 16\,000$

Deci $E > 49 + \frac{16\,000}{10\,000} > 50$.

Să încercăm $n = 48$.

$C_{48}^3 = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 47 \cdot 46$. Aici facem calculul exact:

$$C_{48}^3 = 17\,296$$

$E = 48 + 1,\ 7296 + \ldots$

Oare însumînd și termenii următori vom ajunge la 50?

$$C_{48}^5 \cdot \frac{1}{100^4} = 1,7296 \cdot \frac{45 \cdot 44}{4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{100^2} < 1,8 \cdot 99 \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{100^2} < 1,8 \cdot \frac{1}{100} = 0,018$$

$$E = 49,7476 + \ldots$$

Termenul următor $C_{48}^7 \cdot \frac{1}{100^6} = C_{48}^5 \cdot \frac{43 \cdot 42}{6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{100^6} < C_{48}^5 \cdot \frac{1}{100^4} \cdot \frac{1}{100}$

Cu fiecare termen nou adăugăm mai puțin de $\frac{1}{100}$ din termenul precedent. Chiar dacă ei ar fi în număr infinit, nu ar mai putea afecta primele două zecimale. Deci $E < 49,75$.

Răspuns: pentru $n \leqslant 48$, $y_1 > y_2$; pentru $n \geqslant 49$, $y_1 < y_2$.

75. Dacă găsim un plan care o taie după un paralelogram, prin orice plan paralel cu el secțiunea va fi tot paralelogram.

Dacă problema pare grea, să încercăm întîi una mai simplă: patrulaterul de secțiune să aibă *două* laturi opuse paralele.

76. Ca să aplicăm teorema, să găsim suma vectorilor OA.

77. Dacă n este par, demonstrația este imediată, asociind cîte doi termeni corespunzînd la două puncte diametral opuse. Dacă A_i' e diametral opus lui A_i, $PA_i^2 + PA_i'^2 = (2R)^2$. Avînd $\frac{n}{2}$ perechi, suma este $n \cdot 2R^2$. Dar dacă n este impar?

Să considerăm ca ghid cazul $n = 5$.

Va trebui să calculăm fiecare termen, PA_1, PA_2 etc. Prin Pitagora? Prin teorema catetei? Folosind sinusul sau cosinusul?

78. Analizăm demonstrația. Esențial a fost faptul că avem n vectori cu suma zero. Putem avea această situație în spațiu?

79. Relația (2) e o consecință imediată a relației (1); în adevăr, $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}$; făcînd suma, în baza lui (1), obținem (2).

Relația (1) o demonstrăm prin inducție. Pentru $n = 2$, G este mijlocul segmentului A_1A_2.

81. Dacă $h = O$, P este în O la mijlocul lui BC. Un desen exact (fig. 30) ne face să bănuim că locul este o dreaptă. Ca să dovedim aceasta, ar trebui să arătăm că PO păstrează o direcție fixă.

87. Să reflectăm întîi asupra mediei aritmetice. Ce înseamnă ea intuitiv? Să presupunem că avem 5 vase cu apă conținînd respectiv 6, 10, 15, 18, 21 litri (fig. 31) și vrem să avem tot cinci vase însă egale. Evident, facem

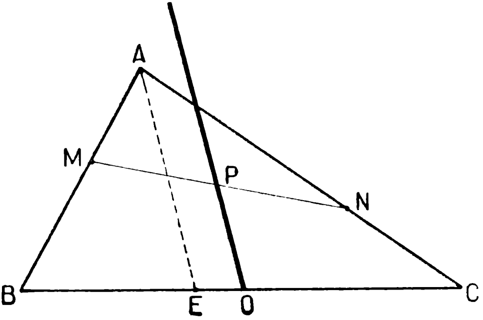


Fig. 30

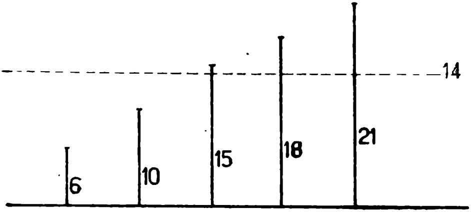


Fig. 31

suma cantităților date și o împărțim la 5. Cantitatea totală de apă era repartizată în forma

$$6 + 10 + 15 + 18 + 21$$

și e acum în forma

$$14 + 14 + 14 + 14 + 14$$

Practic, nu e nevoie să „amestecăm“ toată apa. Ce prisosește peste medie la vasele mai pline turnăm în vasele care au mai puțin decît media (fig. 31).

$$(21-14)+(18-14)+(15-14)=(14-10)+$$
$$+(14-6).$$

Aceasta se mai scrie

$$(21-14)+(18-14)+(15-14)+(10-14)+$$
$$+(6-14)=0$$

adică suma abaterilor față de medie este nulă.

În general, notînd cu $\frac{s}{n}$ media, avem suma s în două moduri

$$a_1+a_2+\ldots+a_n$$

$$\frac{s}{n}+\frac{s}{n}+\ldots+\frac{s}{n}$$

Unele numere a sînt sub medie, altele peste. Dar

$$\left(a_1-\frac{s}{n}\right)+\left(a_2-\frac{s}{n}\right)+\ldots+\left(a_n-\frac{s}{n}\right)=0$$

Revenim la problema dată. Evident, dacă numerele $a_1, \ldots, a_n$ sînt egale între ele — egale cu a — media lor aritmetică este a și media lor geometrică, tot a ($\sqrt[n]{a \cdot a \ldots a}=\sqrt[n]{a^n}=a$).

Trebuie să arătăm că dacă numerele a_i nu sînt egale, media lor geometrică este mai mică decît cea aritmetică. Pentru aceasta să ne imaginăm că numerele a_i se schimbă însă așa fel, ca suma lor, deci media lor aritmetică, să rămînă aceeași (figura 31: ce scoatem dintr-un vas turnăm în altul sau în altele). Oare cum se va schimba produsul (deci media geometrică) în astfel de transformări?

88. 1 și 2. În analogie cu problema 87.

3. Generalizarea 1) cu mai multe numere, 2) cu exponenți mai mari.

89. Desigur ne vine în minte propoziția studiată: dacă $x + y = k$, xy e maxim pentru $x = y$. Dar cum s-o aplicăm aici? Dacă am scrie $p = x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$, suma factorilor ar fi $3x + 2y$ ..., nu e bine. Altfel?

93. Despre ce generalizări poate fi vorba? 1) să ne ghidăm de enunț, să-i păstrăm forma, dar să mărim numărul literelor. De exemplu:

$$(1) \qquad (a + b)(b + c)(c + d)(d + a) \geqslant 16\,abcd$$

(sau cu încă o literă, în membrul II, 32 *abcde* etc.)

2) să ne ghidăm de soluție; să folosim alte sume de pătrate, pe care să le transformăm pentru a ajunge la un enunț nou.

Exemplu

$$ab(c - d)^2 + ac(b - d)^2 + ad\,(b - c)^2 + bc(a - d)^2 + \\ + bd\,(a - c)^2 + cd\,(a - b)^2 \geqslant 0$$

Dezvoltînd, ordonînd... ajungem la

$$abc\,(a + b + c) + abd\,(a + b + d) + acd\,(a + c + \\ + d) + bcd\,(b + c + d) - 12\,abcd \geqslant 0$$

pe care o punem sub o formă mai simetrică, adăugînd în fiecare paranteză litera care lipsește și obținem enunțul

$$(2) \quad (a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd) \geqslant 16\,abcd$$

Dar cum demonstrăm (1)? Cum am demonstra (2) dacă nu am ști cum s-a ajuns aici? Cum am demonstra relații analoge cu mai multe litere? Metoda din problema precedentă — a efectua calculele și a grupa termenii — ar deveni prea laborioasă sau practic neaplicabilă.

Să înlocuim calculul cu o idee. Este linia inițiată de creatorul algebrei moderne E. Galois (1811—1832).

Să revenim deci la problema precedentă și s-o rezolvăm printr-o altă metodă, o metodă care să se preteze la o generalizare naturală.

96. Pentru $n = 2$, imediat: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$. Pentru $n = 3$, calcule mai lungi.

Efectuarea calculului conduce la problema

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) \geqslant 0$$

Amintirea unor tipuri analoge ne sugerează să o transformăm în sume de patrate; ghidați de simetrie, prin tatonări, găsim că o putem scrie

$$a(a - b)^2 + a(a - c)^2 + b(b - c)^2 + b(b - a)^2 + c(c - a)^2 + c(c - b)^2 \geqslant 0.$$

Pentru $n > 3$, un astfel de procedeu devine prea laborios și, poate, ineficace.

Încercăm altă metodă. Să imităm problemele 94—95, ținînd seama că literele joacă același rol. Eșuăm. E necesară o idee. Ceea ce incomodează calculul e faptul că numitorii sînt sume și fiecare numărător, un număr. Dacă ar fi invers...

97. Dacă relația scrisă între $E(n)$ și $E(n - 1)$ ar fi justă, din $E(n - 1) \geqslant 0$ ar rezulta $E(n) > 0$ nu $\geqslant$. Or, pentru numerele a egale între ele avem evident $E(n) = 0$. Undeva este o greșeală. Unde?

98. 1) Să reducem problema la aplicarea unei teoreme cunoscute. Exprimînd în funcție de laturi, problema devine

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \leqslant \frac{1}{8}$$

Am putea-o reduce la problema 92, $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8\,abc$?

2) Să ne bazăm nu pe un fapt cunoscut, ci pe o metodă, pe un mod de a gîndi. Așa ar fi mai bine căci s-ar preta la generalizări (poate!).

100. Putem gîndi în mai multe moduri: A) să căutăm *să aplicăm* teoreme generale de maxim și minim din problemele precedente; B) să modificăm triunghiul astfel ca membrul I să se micșoreze sau, astfel, ca membrul II să se mărească, ajungînd la un triunghi particular, în care inegalitatea se demonstrează mai ușor; C) să considerăm *date* 3 elemente *care determină* triunghiul, să exprimăm mărimile din problemă în funcție de aceste trei elemente, apoi să stabilim inegalitatea.

Fiecare mod de a gîndi conduce la mai multe soluții.

101. Drumul ce pleacă din A pentru a ajunge în B (fig. 32) trebuie să fie la început situat pe una din cele 3 fețe ce se întîlnesc în A. Să presupunem că el pleacă pe fața de jos — desigur în linie dreaptă; el ajunge sau pe muchia A_2A_3, de exemplu în M, sau pe muchia A_1A_2, în N.

Cum să alegem punctul M pentru ca drumul frînt AMB să fie cît mai scurt?

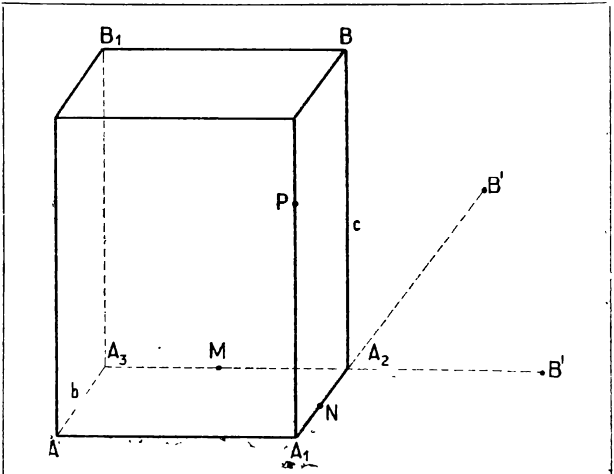


Fig. 32

102. Ideea fiind cunoscută din problema precedentă, o aplicăm şi aici: desfăşurăm cilindrul pe un plan.

103. Procedeul din problemele precedente nu mai poate fi folosit aici, pentru că sfera nu este o suprafaţă aplicabilă pe plan (nu putem aşterne suprafaţa ei pe un plan fără să o rupem sau să o şifonăm, deci „stricînd" distanţele).

Punctele *A*, *B* şi centrul sferei determină un plan care taie sfera după un cerc mare. Este oare arcul de cerc mare (acel mai mic ca 180°) cel mai scurt drum?

S-ar putea ca în mintea noastră să apară imaginea globului pămîntesc. Dacă A și B sînt pe același meridian, ni se pare natural ca drumul cel mai scurt să fie pe acest meridian. Dacă A și B sînt pe aceeași paralelă (au aceeași latitudine) ni se pare natural ca drumul să meargă pe ea. Aceasta e o falsă impresie. De unde provine ea? Poate din faptul că pe globul pămîntesc ecuatorul este fixat o dată pentru totdeauna, deci și meridianele și paralelele, pe cînd la o sferă oarecare putem lua ca ecuator — adică ca cerc de referință — orice cerc mare al sferei; soluția „a merge pe paralelă" ni se pare — pe moment — justă, numai pentru că e simplă; aplicăm, inconștient, dictonul: „drumul cel mai bun este acela care îți e mai cunoscut".

Imaginea „globul pămîntesc", aici, ne încurcă. Pe o sferă, prin două puncte trec oricîte „paralele" (cercuri mici); nu toate ar putea da „drumul cel mai scurt."

Revenim la problemă. Să arătăm întîi că arcul de cerc mare este un drum mai scurt decît acela format din două (sau mai multe arce mari), care ar uni pe A cu B (analog ca în plan: o latură $<$ suma celorlalte două).

104. Să considerăm întîi (dacă e necesar) cazuri numerice, de pildă: $n_1 = 5$, $n_2 = 3$, apoi și $n_3 = 4$ etc.

106. Fie de exemplu tabloul A_6^3. Luăm o grupă, de pildă $a_1\ a_4\ a_5$. Ea determină o clasă cu grupele (scriem numai indicii):

1 4 5; 1 5 4; 4 1 5; 4 5 1; 5 1 4; 5 4 1.

Într-o clasă sînt 6 grupe, căci am permutat cei 3 indici în toate modurile și $P_3 = 6$.

108. Exemplu: C_5^3

1) 1 2 3; 1 2 4; 1 3 4; 2 3 4;

2) 1 2 5; 1 3 5; 1 4 5; 2 3 5; 2 4 5; 3 4 5

În 1) avem tabloul C_4^3.

În 2) dacă suprimăm obiectul 5 obținem tabloul C_4^2.

109. 1) grupe care nu conțin *nici* pe a_1, *nici* pe a_2;
2) grupe care nu conțin pe a_1, dar îl conțin pe a_2;
3) grupe care nu conțin pe a_2, dar îl conțin pe a_1;
4) grupe care conțin și pe a_1 și pe a_2.

111. Să socotim în două moduri de cîte ori este scrisă o anumită literă, de exemplu a_1: 1) ca în problema **108**, 2) socotind de cîte ori este scrisă litera a (cu diverși indici) în tot tabloul și ținînd seama de observația din enunț.

112. Fie A (7, 3). Avem de parcurs 10 unități dintre care 3 verticale și 7 orizontale. Un drum este determinat dacă fixăm care anume din cele 10 unități sînt verticale (restul orizontale) de exemplu, dacă acestea sînt 3,4,9, avem drumul din figură.

113. Să socotim cîte grupe sînt cu 0 bile albe, cu 1,2,...i bile albe, să înmulțim i cu numărul grupelor cu i bile albe, să însumăm și să împărțim rezultatul la k.

115. Examinăm întîi cazurile $n = 2$ și $n = 3$ și ținem seama de problema **104** (diagrama — arbore).

117. Să examinăm, ca ghid, cazul $n = 3$. Avem

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) = a_1a_2a_3 + a_1a_2b_3 + \\ + a_1b_2a_3 + a_1b_2b_3 + b_1a_2a_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3 + b_1b_2b_3 \cdot$$

Două bile albe (și una neagră) avem în termenii $a_1a_2b_3$, $a_1b_2a_3$, $b_1a_2a_3$, adică în C_3^2 termeni. Pentru urne identice, obținem $C_3^2 \cdot a^2b$ grupe cu 2 bile albe

Obținem $N = (a + b)^3$ grupe

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

adică: a^3 grupe cu 3 bile albe, $3a^2b$ grupe cu 2 bile albe, $3\,ab^2$ grupe cu o bilă albă și b^3 grupe cu nici o bilă albă.

118. Pentru $a = b = 1$, $p = \frac{1}{2}$, obținem ca termeni coeficienții din binomul lui Newton: aceștia cresc pînă „la mijloc“, unde se află cel mai mare, apoi iau aceleași valori descrescînd, de exemplu pentru $n = 7$ și $n = 8$.

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Pentru a și b oarecari, să facem raportul a doi termeni consecutivi t_i/t_{i-1} și să examinăm cînd el este mai mare ca 1 și cînd este mai mic.

120.

$$N = (a + b)^n = b^n + C_n^1\, b^{n-1} a + \ldots + \\ + C_n^i\, b^{n-i}\, a^i + \ldots + C_n^n\, a^n \qquad (1)$$

S-au format N grupe; b^n dintre ele cu zero bile albe; $C_n^1\; b^{n-1}\, a$ dintre ele au o bilă albă, ..., $C_n^i\; b^{n-i}\; a^i$ au i bile albe..., a^n din ele au n bile albe. Deci

$$m = \frac{1}{N}(C_n^1\, b^{n-1} a + 2\, C_n^2\, b^{n-2}\, a^2 + \ldots + i\, C_n^i\, b^{n-i} a^i + \ldots + \\ + n\, C_n^n\, a^n)$$

$$m'' = \frac{1}{N}(C_n^1\, b^{n-1} a + 2^2 \cdot C_n^2\, b^{n-2} a^2 + \ldots + i^2 C_n^i\, b^{n-i} a^i + \ldots + \\ + n^2\, C_n^n\, a^n)$$

Dar cum să calculăm mai uşor aceste sume?

121. Mulţimea R are kh elemente. Este mai uşor de urmărit calculul, dacă le scriem într-un tablou dreptunghiular, astfel:

$$
\begin{array}{ll}
a_1 + \alpha_1;\ a_1 + \alpha_2; \dots ;\ a_1 + \alpha_k & k \text{ linii} \\
a_2 + \alpha_1;\ a_2 + \alpha_2; \dots ;\ a_2 + \alpha_k & h \text{ coloane} \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
a_k + \alpha_1;\ a_k + \alpha_2; \dots ;\ a_k + \alpha_k &
\end{array}
$$

121 bis. Sînt posibile două generalizări: 1) în loc de două mulţimi R_1 şi R_2, să considerăm mai multe; 2) să luăm tot două mulţimi dar să calculăm media puterilor *a* n^a a abaterilor faţă de medie.

122. Să presupunem că mulţimea R_1 este formată din numerele de bile albe din grupele formate cu n urne identice (pr. **117**) şi considerăm a $(n+1)^a$ urnă cu a bile albe şi b negre. Lîngă fiecare grupă din R_1 punem pe rînd cîte o bilă albă, de a ori, apoi cîte una neagră, de b ori. Avem schema din problema **120**, unde R_2 este format din **1,1,...1**, 0,0,...,0 (căci numărăm bilele albe).
de a ori de b ori

123. Notăm $m^{(4)}(n)$ media căutată şi gîndim ca în problema precedentă. În R_2 avem $m^{(2)} = pq$ şi

$$m^{(4)} = \frac{a(1-p)^4 + b(o-p)^4}{a+b} = pq^4 + p^4q = pq\ (p^3+q^3) =$$

$$= pq\ [(p+q)^3 - 3pq\ (p+q)] = pq\ (1-3pq)$$

 Urmează să aplicăm formula din problema **121 b.**

124. Avem

$$\mu = \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_N}{N} = \frac{\frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_N}{n}}{N} = \frac{1}{n} \cdot m =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot np = p$$

$$\mu_2 = \frac{(\alpha_1 - p)^2 + \ldots + (\alpha_N - p)^2}{N} = \frac{\left(\frac{a_1 - np}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_N - np}{n}\right)^2}{N}$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot M = \frac{1}{n^2} \cdot npq\,,\ \mu_2 = \frac{pq}{n}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \mu_2 = 0$$

Faptul că $\lim \mu_2 = 0$ arată că numărul grupelor în care frecvența este apropiată de media p este mult mai mare în raport cu numărul grupelor în care frecvența e „depărtată“ de p.

Dar, în ce mod trebuie precizate lucrurile?

În loc de expresia „apropiat“, considerăm un număr dat ε; considerăm numerele α pentru care $|\alpha - p| < \varepsilon$; fie l numărul lor și deci $N - l$ numărul grupelor pentru care $|\alpha - p| \geqslant \varepsilon$. Folosind expresia lui μ_2, va trebui să arătăm că $\frac{l}{N}$ devine oricît de apropiat de 1, pentru valori suficient de mari ale lui n.

126. Cazuri posibile: C_{30}^5.

Cazuri favorabile: cîte grupe din tabelul C_{30}^5 conțin 3 obiecte date?

127. Aici e mai ușor să numărăm cazurile *nefavorabile* (cele favorabile, restul pînă la numărul tuturor cazurilor).

Din grupele tabloului C_{10}^{1}, cîte *nu* conțin nici unul din biletele 2, 5, 10?

128. Numărul cazurilor posibile A_n^k.
Cîte din aceste grupe încep cu 12?

129. Recurgem la modelul urnă. Sînt posibile 365 date de naștere (urna are 365 de bilete). 30 de persoane trag fiecare cîte un bilet (fiecare din urna completă). Care este probabilitatea să existe două persoane (cel puțin) cu același număr de bilet?

Este mai ușor să calculăm întîi probabilitatea q a evenimentului contrar: să *nu* existe nici o coincidență.

132. E suficient să facem o numărătoare atentă a posibilităților.

134. Funcționarul ajunge la lift într-un moment t întîmplător. Șansa ca liftul să vie urcînd, deci în momentul t să fie între parter și etajul 6, este *de trei ori* mai mare ca el să vie coborînd — deci în momentul t să fie între etajul 6 și etajul ultim.

Să presupunem că liftul face un drum dus și întors în 120 secunde și că există 8 etaje. Dacă trece la etajul 6 urcînd la ora h, va mai trece urcînd la $h + 120\,s$, $h + 240\,s$.,... De la etajul 6 la 8 dus și întors face 30 secunde. Deci el trece coborînd pe la etajul 6 la ora $h + 30$, $h + 150$,... Dacă funcționarul ajunge la lift între h și $h + 30$, va coborî, dacă ajunge între $h + 30$ și $h + 120$ va urca.

Deci șansa de a urca este de 3 ori mai mare ca aceea de a coborî.

135. Există poziții ale lui P în care fiecare din distanțe
 este mai mică decît suma celorlalte două — deci cu ele

se poate construi un triunghi. Aceste poziții ocupă o arie. Probabilitatea cerută este raportul între această arie și aria triunghiului dat. Cum găsim aceste poziții? Aceasta e o problemă *de geometrie.*

146. Multiplii lui 4 modulo 10 nu pot fi, conform problemei **137**, decît în clase cu numere pare — deci ei nu parcurg toate clasele. Pe cînd, $(3, 10) = 1$; probabil aceasta e cauza că multiplii lui 3 parcurg toate clasele.

Enunțul pe care îl bănuim e următorul: dacă $(a, m) = 1$, primii m multipli ai lui a parcurg toate clasele modulo m.

$$\begin{array}{lcccccc} & a \cdot 1, & a \cdot 2, \ldots, & a \cdot i, \ldots, & a \cdot j, \ldots, & a \cdot (m-1), & a \cdot m \\ \text{clasa} & r_1 & r_2 & r_i & r_j & r_{m-1} & r_m = 0 \end{array}$$

În cazul general nu putem scrie clasa produsului decît pentru ultimul produs. În loc de o simplă verificare, ca în problema precedentă, trebuie făcută o demonstrație. Cum?

149. Deoarece orice ecuație $a * x = b$ are, prin definiție, soluție, și ecuația $a * x = a$ are; deci există e cu proprietatea $a * e = a$. Ecuația $a * x = e$ are soluție, deci există a', astfel ca $a * a' = e$.

Dar trebuie să arătăm că e este element neutru pentru toate elementele, adică $b * e = b$ $(b \neq a)$ și că el este unic.

151.

$$C_p^k = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} = h \text{ (număr întreg)}$$

Deoarece numitorul nu are factorul p, acesta nu se simplifică, deci $C_p^k = h = p \cdot i$.

Coeficienții C_p^k apar în

$(x + 1)^p = x^p + C_p^1 x^{p-1} + C_p^2 x^{p-2} + ... + C_p^k x^{p-k} + ... + 1$

Conform observației, $(x + 1)^p \equiv x^p + 1 \ (p)$

158. Tabloul problemei **154** ne sugerează răspunsul. Exemple: puterile lui 3: avem $3 = 2^4$, deci $3^2 = 2^8$, $3^3 = 2^{12}$; puterile lui 6: avem $6 = 2^5$, deci $6^2 = 2^{10} = 10$, $6^3 = 2^{15} = 2^3 = 8$, $6^4 = 2^{20} = 2^8 = 9$ etc. Pentru a găsi puterile lui 6, parcurgem puterile lui 2 *din 5 în 5*; scriind numai exponenții lui 2, *vom scrie multiplii lui 5*; pentru că, după exponentul 12, șirul puterilor se repetă periodic, vom lua resturile de la împărțirea acestor multiplii prin 12:

M 5 :	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Resturi prin 12:	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	0
Corespund elementele :	6	10	8	9	2	12	7	3	5	4	11	1

159. Trebuie să exprimăm elementele tot ca puteri ale lui 2. Fie ecuația $x^5 = a$; o scriem sub forma $2^{5\xi} = 2^\alpha$, unde ξ este indicele lui x, α al lui a.

163. Pentru primele numere de forma indicată, se verifică direct: $2 = 1^2 + 1^2$; $5 = 2^2 + 1^2$; $13 = 3^2 + 2^2$; $17 = 4^2 + 1^2$; $29 = 5^2 + 2^2$; $37 = 6^2 + 1^2$; $41 = 5^2 + 4^2$ etc.

Pentru $p = 4k + 1$, oarecare, problema **162** ne arată că putem găsi o sumă de două patrate care să fie Mp, $x^2 + 1 = Mp$. Vom folosi această expresie, dar trebuie să arătăm că p singur poate fi scris ca sumă de 2 patrate.

3

IDEEA

1. Să ne imaginăm numărul astfel

$$N = \frac{(12-2)^2 + (12-2)^2 + (12-1)^2 + (12+1)^2 + 12^2}{365}$$

2. Se observă că

a) $\frac{112}{448} = \frac{1}{4}$ b) $3599 = 3600 - 1$

c) există o regularitate în succesiunea cifrelor?
d) sîntem tentați, din cauza grabei, să răspundem: 25. Dacă ar fi așa, nu s-ar fi dat problema; deci trebuie procedat sistematic, chiar dacă folosim timp mai mult: ce înseamnă viteză medie, cum se calculează...

3. Să căutăm să construim un triunghi în care H să fie ortocentrul.

4. Să folosim o translație determinată de vectorul constituit de vîrful cretei.

5. Trenurile se întîlnesc după 3 ore. În acest timp musca a mers mereu cu 70 km/oră — deși schimbîndu-și alternativ direcția. În 3 ore ea a parcurs $70 \cdot 3 = 210$ km.

7. Să se țină seama de principiul lui Arhimede. Datele problemei sînt inutile.

8. Cele 20 minute, economie de timp, provin din faptul că mașina nu a mai făcut drumul IG și GI (de la punctul de întîlnire la gară și înapoi).

9. Dacă viteza în apă stătătoare *produsă de același efort* ar fi u, în rîu viteza este $u + v$ în sensul curentului și $u - v$ împotriva curentului (v — viteza curentului apei). Viteza bărcii față de lădiță este u, atît în mișcarea în sensul curentului ($u + v - v$), cît și în aceea împotrivă (în unitatea de timp ele se apropie cu $u - v + v$).

11. Oare este posibilă prima egalitate? Dacă da, pentru ce numere?

 12. Nu, cine știe ce „metode“, ci încercări directe.

13. Dacă scara ar aluneca (rămînînd rezemată), distanța OM s-ar mări? Numai în caz afirmativ, sîrma s-ar opune mișcării.

14. Triunghiurile ABC și ADC cu baza comună AC nu sînt în același plan. Dacă ar fi în același plan...

15. Să încercăm să colorăm segmentele astfel ca să *nu* existe un triunghi cu laturi de aceeași culoare. Să arătăm că *oricum s-ar proceda*, nu se poate reuși.

Să începem cu trei segmente pornind dintr-un singur punct și la fel colorate. (Există neapărat?)

20. Se aplică principiul dublei negații: nu e adevărat că A nu e alb, înseamnă că A este alb.

22. Comparăm enumerarea

Ema, Ioana, ..., Sofia

u-v

sau, cu alte denumiri,

$$F_1, F_2, \dots, F_f$$

cu:

$$9, \ 10, \dots, b$$

27. Propoziția enunțată se înțelege astfel: *în toate cazurile* dacă două laturi ale unui triunghi sînt proporționale cu două laturi ale altui triunghi și un unghi al unuia este egal cu un unghi al celuilalt, cele două triunghiuri sînt asemenea. Propoziția nu e adevărată în sensul că *nu în toate cazurile* două triunghiuri ce îndeplinesc cele două condiții ale ipotezei, o îndeplinesc și pe cea din concluzie (sînt asemenea). Pentru a arăta că nu în toate cazurile e suficient să arătăm *un* caz cînd e îndeplinită ipoteza, însă nu și concluzia. (Tot astfel, pentru a arăta că propoziția

„*toți* elevii clasei noastre au media peste 7“ nu este adevărată, e suficient să indicăm un singur elev din acea clasă care are media sub 7.)

Să găsim un astfel de caz.

30. Să colorăm toți „metrii patrați“ ai camerei prin culorile 1, 2, 3 ca în figura:

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

31. Problema fiind simplă, ați găsit desigur o soluție (sau mai multe). Dar care e cea mai simplă?

Aici, se pare că e mai ușor să începem cu reciproca: dacă triunghiul MCD este echilateral (fig. 33), unghiul din C al triunghiului isoscel CMB este $90-60 = 30°$; deci unghiurile de la baza lui au cîte 75°, deci $ABM = 15°$.

Acum trecem la *contrara* acestei teoreme reciproce: dacă MCD este isoscel, fără a fi echilateral, adică dacă M se deplasează pe mediatoarea lui CD în sus sau în jos, unghiul ABM nu mai e 15°, ceea ce este evident (el se micșorează, respectiv se mărește).

Să fim atenți la legătura logică. Am demonstrat că: dacă triunghiul isoscel MCD este echilateral, unghiul ABM este 15° și dacă MCD nu este echilateral, unghiul nu este 15°.

Cele două propoziții se exprimă concentrat în una singură: dacă — și numai dacă — MCD este echilateral, unghiul ABM este 15°.

Prin aceasta, teorema directă este demonstrată: dacă $ABM = 15°$, triunghiul MCD este echilateral (căci dacă nu ar fi, unghiul ABM nu ar fi de $15°$).

32. Triunghiul ABC are ca centru pe M (fig. 34), căci $MA = MB = MC$. Cum se obțin punctele M_1, M_2, M_3 din M?

33. Dacă două cercuri sînt secante, coarda comună este văzută din centrul celui mai mare sub un unghi mai mic decît din centrul celui mai mic (căci în tr. AO_1O_2, dacă $AO_1 < AO_2$, $\sphericalangle O_2 < \sphericalangle O_1$).

34. Dacă găsim raportul $\frac{BN}{BB'}$, vom putea afla (din tr. $BB'C$) raportul $\frac{(2) + (5)}{\frac{1}{3} S}$ și procedînd la fel **pe fiecare** latură vom avea încă 3 ecuații. Pentru a găsi raportul $\frac{BN}{BB'}$, ducem prin B' o paralelă la AB, $B'D$ (D pe CC').

36. Revenim la enunțul problemei. Esențial este să folosim relația $x\ (1 - x) \leqslant \frac{1}{4}$. Și ca s-o folosim să facem produsul $r_1 r_2 r_3$.

37. Dacă punctele B_1, C_1, D_1 sînt variabile pe muchii, V_1 depinde de mărimea acestor muchii. În ce fel? Să facem întîi să varieze numai una din muchii.

38. Ideea o avem din problema **36**, iar calculul din problema **37**.

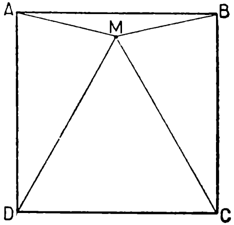
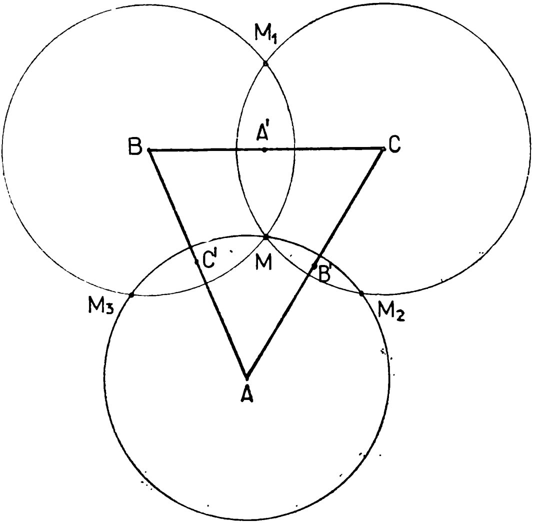


Fig. 33

Fig. 34



39. Să ținem seama acum că vrem $\widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

40. Prelungim pe AM cu o distanță egală pînă în A''; $ABA''C$ este un paralelogram. Distanța de la A'' la AC este egală cu h_b. Dar A'' e un punct cunoscut. Necunoscut a rămas acum numai AC.

42. Teorema bisectoarei: dacă D și D' sînt picioarele bisectoarelor unghiului A al triunghiului ABC,
$\frac{DB}{DC} = -\frac{c}{b}$; $\frac{D'B}{D'C} = \frac{c}{b}$ deci D și D' împart segmentul BC în același raport.

Poate fi adusă problema dată la această teoremă?

Dacă am putea arăta că ID este bisectoarea unghiului EIF și deci IA bisectoarea exterioară a lui... (fig. 35). Pentru aceasta ar trebui să măsurăm unghiurile din I. Să folosim măsura cu ajutorul arcelor de pe cercul dat, e greu. Mai bine să căutăm un patrulater inscriptibil potrivit.

43. Să arătăm că triunghiurile AMD, AMC sînt asemenea (folosind laturi căci egalitatea unghiurilor intră în concluzie).

44. Deoarece $\widehat{ANB}$ nu este înscris, unim pe M cu N.

45. Căutăm să aducem la cazul precedent. Luăm simetricul lui F' față de d, fie el F'', și ținem seama că pentru orice punct M de pe d, $MF' = MF''$ (fig. 36).

47. Prelungim pe BA cu distanța AC și considerăm figura 37. Folosim și distanțele d'_1, d'_2 de la C și B la

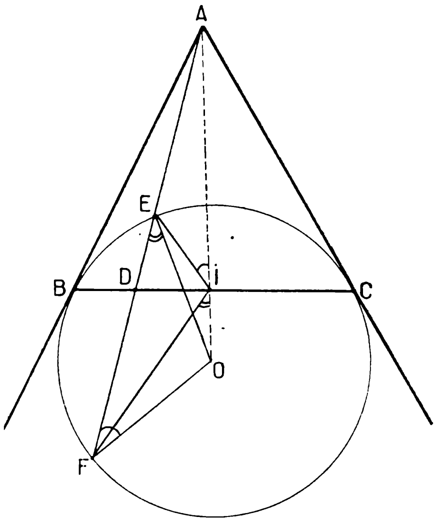


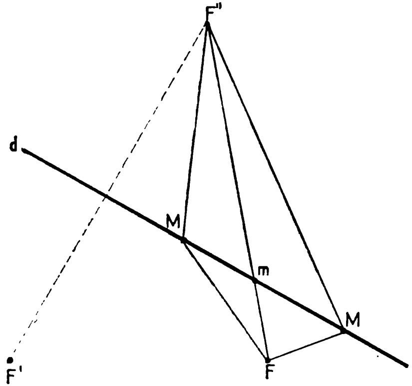
Fig. 35

bisectoarea interioară. (Poate găsim ceva analog pentru aceste distanțe.)

49. Ținem seama și de faptul că $A'B' \parallel AB$, $A'B' = \frac{c}{2}$. Analog pentru $A'C'$.

Triunghiurile $A'B'O_1$ *și* $O_2C'A'$ *sînt egale* (căci unghiul din B' este $90° + A$, idem unghiul din C' și latu-

Fig. 36



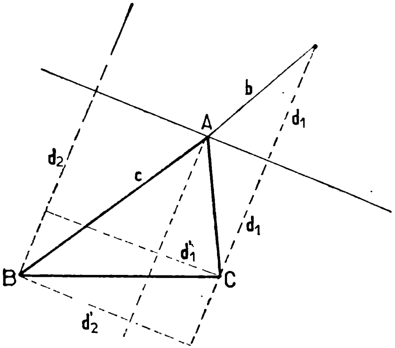


Fig. 37

rile ce mărginesc aceste unghiuri sînt respectiv egale: $\frac{c}{2}$ şi $\frac{b}{2}\Big)$. Trebuie însă fixat care sînt unghiurile omologe.

50. Să aplicăm teorema de la problema 49 în triunghiurile ABC şi ADC.

51. În triunghiul CO_1O_2 cunoaştem două laturi $CO_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $CO_2 = \frac{b}{\sqrt{3}}$ şi unghiul cuprins, $60° + C$.

52. Construim în O_2 şi O_3 unghiuri de $60°$; fie O' vîrful triunghiului echilateral construit pe O_2O_3 (fig. 28). Trebuie arătat că O' coincide cu O_1. Pentru aceasta folosim simetricele punctelor A, B, C faţă de laturile triunghiului O_1O_2O'.

55. În figura 13, punctaţi segmentul AC şi interpretaţi desenul ca şi cînd el ar reprezenta...

57. Considerăm punctele M_1, M_2, M_3 situate pe perpendicularele în O_1, O_2, O_3 pe planul figurii, la distanţele R_1, R_2, R_3 de acest plan (de aceeaşi parte a planului).

58. Să căutăm noi două numere x şi y, astfel ca $x + y = 6$; $xy = 7$. După aceea să arătăm că numerele astfel găsite sînt tocmai cei doi radicali.

59. $(x + a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}a + \dots + C_n^k x^{n-k}a^k + \dots$
$(a + x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + \dots + C_n^k a^{n-k}x^k + \dots$
Înmulţim şi căutăm în ambii membrii coeficientul lui $x^n\ a^n$.

61. Să distingem cazurile k impar și $k = 2^b \cdot i$, de ex: $k = 5$ și $k = 12 = 2^2 \cdot 3$. Pentru $k = 5$, în general $k = i$, simplificăm în diagonală și rămîne la numărător factorul 32. Pentru $k = 2^2 \cdot 3$, în general, $k = 2^b \cdot i$, rămîn la numărător 32 și la numitor 2^b.

62. Poate prin inducție. Verificări pentru $n = 3, 4, \ldots$ sînt ușor de făcut. Cum am putea face trecerea de la n la $n + 1$? Am scris coeficienții C_9^k:

$$1 \quad \underline{9} \quad \underline{\underline{36}} \quad 84 \quad \underline{126} \quad \underline{\underline{126}} \quad 84 \quad \underline{36} \quad \underline{\underline{9}} \quad 1$$

Am subliniat cu o linie pe cei din S_1, cu două pe cei din S_2.

Să calculăm pe cei cu $n = 10$. Ne amintim de triunghiul lui Pascal

$$1,\ 1 + \underline{9},\ \underline{9} + \underline{\underline{36}},\ \underline{\underline{36}} + 84,\ 84 + \underline{126},\ \underline{126} + \underline{\underline{126}},\ \underline{\underline{126}} + 84, \ldots$$

Avem acum

$$S_1' = (1 + \underline{9}) + (84 + \underline{126}) + (84 + \underline{36}) + 1 = S_0 + S_1$$

$$S_2' = (\underline{9} + \underline{\underline{36}}) + (\underline{126} + \underline{\underline{126}}) + (\underline{36} + \underline{\underline{9}}) = S_1 + S_2$$

$$S_0' = 1 + (\underline{\underline{36}} + 84) + (\underline{\underline{126}} + 84) + (\underline{\underline{9}} + 1) = S_2 + S_0.$$

Din $S_1 = S_2$ rezultă $S_1' = S_0'$, iar din $S_0 = S_1 + 1$ rezultă $S_1' = S_0' = 2\, S_1 + 1$ și $S_2' = 2\, S_1$ deci $S_2' = S_1' - 1$.

Nu rămîne decît să transcriem acest procedeu în cazul general.

63. 1) Avem $4! = 2^3 \cdot i$, $8! = 2^7 \cdot i$, $16! = 2^{15} \cdot i$; să arătăm că $2^m! = 2^{2^m - 1} \cdot i$. Trecînd de la m, la $m + 1$, vom scrie

$2^{m+1}! = 1 \cdot 2 \ldots 2^m \cdot (2^m + 1)(2^m + 2) \ldots (2^m + 2^m)$

2) Diferența $17 \cdot 19 \ldots 29 \cdot 31 - 1 \cdot 3 \ldots 13 \cdot 15$ o scriem $d = (16 + 1)(16 + 3) \ldots (16 + 13)(16 + 15) - 1 \cdot 3 \ldots \ldots 15$.

Grupăm parantezele cîte două: $(16 + 1)(16 + 15)$, $(16 + 3)(16 + 13)$ etc. Obținem

$[16^2 + 16(1 + 15) + 1 \cdot 15] \cdot [16^2 + 16 \cdot (3 + 13) + 3 \cdot 13] \ldots = (2 \cdot 16^2 + 1 \cdot 15)(2 \cdot 16^2 + 3 \cdot 13)(2 \cdot 16^2 + 5 \cdot 11)(2 \cdot 16^2 + 7 \cdot 9)$

După desfacerea parantezelor (conform formulei $(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)(x + a_4) = \ldots$), termenii impari $1 \cdot 3 \ldots 15$ se reduc. Să examinăm la ce putere este 2 în termenii care rămîn. Toate produsele $1 \cdot 15$, $3 \cdot 13$, $5 \cdot 11$, $7 \cdot 9$ sînt de forma $8k - 1$. Termenul cu $2 \cdot 16^2$ se înmulțește cu $(M8 - 1)(M8 - 1)(M8 - 1) = M8 - 1$. Deci avem $2 \cdot 16^2 (M8 - 1 + M8 - 1 + M8 - 1 + M8 - 1) = 2 \cdot 16^2 (8k - 4) = 2 \cdot 16^2 \cdot 4 \cdot i = 2^3 \cdot 16^2 \cdot i$. Ceilalți termeni, corespunzători lui x^2, x^3, x^4, au factorul 2 la puteri mai mari, deci este decisiv termenul în x. Obținem $2^{11} \cdot i$. Avînd și la fracția din față un 2, obținem în final, pentru $n = 5$, $2^{12} \cdot i$.

În cazul general, conducem calculul analog, ceea ce necesită atenție și perseverență.

64. Verificările numerice făcute ne sugerează, ca și în trecerea de la a_n la a_{2n}, să folosim în calcule numai puteri ale lui 2. De obicei, încercările numerice particulare sugerează cazul general; aici însă, se pare că ele ne încurcă (criteriile de călăuzire a gîndirii nu sînt absolute, lipsite de excepții; trebuie să ne așteptăm și la lucruri... neașteptate !).

În problema de față, în scrierea termenilor de la a_n la a_{2n}, e de preferat să nu folosim numai puteri ale lui 2 —

— chiar dacă ele ni se oferă în calcul — ci un alt mod, în care să apară mai ușor anumite regularități.

65. Dacă la o fracție subunitară $\frac{a}{b}$ mărim și numărătorul și numitorul cu același număr k, obținem o fracție mai mare (mai apropiată de 1, căci $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{a}$, iar $1 - \frac{a+k}{b+k} = \frac{b-a}{b+k} < \frac{b-a}{b}$.

68. Să calculăm pe r_1 și r în funcție de MT (și unghiul A); în raportul r_1/r, MT se va simplifica.

69. Să privim expresia E ca un trinom cu necunoscuta $\cos a$.

70. Cazurile $m = 6$, $m = 7$ ne sugerează să grupăm termenii cîte 3, cu semnele $+ - +$, și să arătăm că fiecare grupă e un polinom, care prin împărțire la $(x-1)^2$ dă un cît, care are numai coeficienți pozitivi.

71. Fracția $\frac{b_i}{x - a_i}$ descrește cînd x crește.

75. Două fețe laterale opuse ale piramidei înseamnă două plane ce se taie după o dreaptă. Cum va fi planul care le taie după două drepte paralele?

76. Vectorii OA sînt distribuiți uniform în jurul lui O. Nu e nici un motiv ca suma să ia o anumită direcție și nu alta. Dacă ei reprezintă forțe aplicate punctului O, punctul rămîne pe loc — încotro s-ar putea mișca? — forțele își fac echilibru, rezultanta (suma) lor este nulă.

77. Să adoptăm un calcul în care să folosim faptul că vectorii $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, ..., $\overrightarrow{OA_n}$...

81. Să facem suma vectorilor $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$ direct și într-un al doilea mod, în care să folosim ipoteza.

83. Să găsim o legătură între produsele $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'}$.

Pentru a simplifica expresiile, să observăm că dacă ducem prin O un plan $Q \parallel P$, proiecția unghiului pe planul Q este aceeași ca și pe planul P. Condiția 3 devine: o latură *în* planul Q.

84. Scriem $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}$ și analogele.

85. Relația din problema precedentă este valabilă și în cazul cînd M nu este în planul ABC.

86. Produsul între un număr și un cosinus poate fi interpretat ca proiecția unui vector. O sumă de astfel de produse înseamnă suma proiecțiilor unor vectori — și ne amintim că această sumă este proiecția sumei vectorilor.

87. Să nu transformăm deodată toate numerele a_i, ci pe rînd. Să arătăm că la fiecare „turnare dintr-un vas" ce depășește media la unul aflat sub medie, pentru a le apropia între ele, produsul numerelor crește.

89. Produsul $p = x^3y^2$ este maxim odată cu $q = \dfrac{x^3y^2}{3^3\cdot 2^2}$

93. Putem aplica relației

$(a+b)(b+c)(c+d) \geqslant 8\, abc.$

ideea — generală — din problema 87?

Acolo era vorba de media aritmetică și media geometrică sau de valoarea maximă a unui produs de numere cu sumă constantă sau de enunțul corelativ, valoarea minimă a unei sume de numere cu produsul constant.

Aici avem și în membrul I și în II produse. Totuși, dacă efectuăm *m.* I, vom avea o sumă.

95. Fie $a_1 a_2 \ldots a_n = k^n$. Să presupunem k dat.

Produsul din membrul I, E poate fi scris

$$E = 1 + \sum a_1 + \sum a_1 a_2 + \ldots + \sum a_1 a_2 \ldots a_i + \ldots + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_n,$$

unde prin $\Sigma a_1 a_2 \ldots a_i = s_i$ înțelegem suma tuturor produselor de cîte i numere alese din cele n.

Vom arăta că fiecare din sumele s_i este minimă pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = k$.

96. Notăm $s - a_i = b_i$ și exprimăm enunțul numai prin numerele b.

98. 1) Notăm $p - a = a'$, $p - b = b'$, $p - c = c'$; avem $a', b', c' > 0$.

2) Să stabilim întîi pentru *două* unghiuri de sumă constantă că produsul sinusurilor lor este maxim cînd unghiurile sînt egale.

99. În toate cazurile, aplicăm *metoda* din problema precedentă, considerînd întîi două unghiuri.

101. Rabatem fața din fund ($BB_1A_2A_3$) pe baza de jos (rotind-o de 90° în jurul muchiei A_2A_3). Acum punctul

B este în planul bazei, în B'. Unim printr-o dreaptă A cu B'.

107. Fie n obiecte

$$\bar{1} \quad \bar{2} \quad \bar{3} \quad \ldots \quad \overline{n-2} \quad \overline{n-1} \quad \bar{n}$$

Dacă luăm k din ele rămîn $n - k$.

114. În tabloul combinărilor de m obiecte $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ cîte n, fiecare literă joacă același rol: deci de cîte ori a fost folosit a_1 în formarea tabloului, tot de atîtea ori a fost folosit a_2 sau a_3 ... sau a_m.

Dacă acest argument nu este convingător încă, să ne amintim că numărul grupelor care conțin un anumit obiect — oricare din ele — este C_{m-1}^{n-1}.

116. Ca și în problema **114**, ne bazăm pe faptul că fiecare bilă dintr-o urnă joacă același rol.

120. Dacă în m dăm factor pe a, apar termeni de forma $C_n^i\, b^{n-i}\, i\, a^{i-1}$ și $i\, a^{i-1}$ este derivata lui a^i (considerat ca funcție de a). În loc să derivăm (în raport cu a) suma termen cu termen, să derivăm direct pe $(a + b)^n$.

După ce reușim, ne fixăm atenția pe m'' și vom căuta să adaptăm o metodă analogă.

124. Dacă în expresia lui μ_2 neglijăm diferențele mai mici ca ε, iar pe cele mai mari le înlocuim cu ε, vom obține un număr mai mic decît μ_2 (am neglijat, am micșorat).

135. Notînd distanțele cu x, y, z, vom căuta întîi pozițiile lui P, astfel ca $x = y + z$; vom obține un loc geometric (o linie) cu ajutorul căruia vom putea delimita *regiunile* în care $x < y + z$ sau $x > y + z$.

Bănuim că locul geometric este un segment de dreaptă din cauză că relația $x = y + z$ este lineară. Pentru a-i determina poziția căutăm puncte particulare (pe laturi) care satisfac relația.

139. Se scrie numărul ca sumă — de ex: $7823 = 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3$. Se caută în ce clasă modulo 9 este 10, apoi 10^2, 10^3, ..., 10^n.

140. Aceeași ca în problema precedentă.

141. Vedem în ce clase modulo 9 este fiecare din numerele scrise.

142. Acum „proba prin 9" iese: rezultatul este în clasa 1 (9); ceea ce nu înseamnă neapărat că el este exact: este în aceeași clasă cu rezultatul exact, adică dacă este greșit, diferența între rezultatul scris și cel exact este multiplu de 9.

Să aplicăm, analog, „proba prin 11".

144. Aplicăm proba prin 9.

146. Să arătăm că nu pot fi doi multipli în aceeași clasă. În acest caz, fiind m multipli și tot m clase, mulțimea multiplilor parcurge mulțimea claselor ($a \cdot 1$ într-o clasă, $a \cdot 2$ în altă clasă, $a \cdot 3$ în alta decît precedentele ș.a.m.d., al m^{lea} multiplu într-o a m^a clasă; clasele în care se află multiplii lui a sînt toate clasele, în general, într-o altă ordine).

Nu pot fi doi în aceeași clasă. Căci dacă ar fi... (metoda reducerii la absurd).

149. Ecuația $a * x = b$ are soluție; fie ea x_1, putem scrie $b = x_1 * a$.

155. Într-un grup oarecare *notăm* $a * a = a^2$; $a^2 * a = a^3$ etc. Deoarece grupul este finit, puterile succesive nu pot fi mereu diferite; survine un moment cînd ajungem la o putere egală cu una anterioară.

163. Dacă dăm lui x valori de la 1 la $\frac{p-1}{2}$, vom găsi un $x = a$ și numai unul, astfel ca $a^2 + 1 = c \cdot p$. Din $a < \frac{p}{2}$, rezultă $a^2 + 1 < \frac{p^2}{4} + 1 < p^2$, deci $c < p$; descompunînd în factori primi vom avea

$$a^2 + 1 = p_1 p_2 \dots p_h p + 1 \quad \text{unde} \quad p_i < p.$$

Vom folosi inducția completă; admițînd propoziția pentru numerele prime mai mici ca p, să arătăm că rezultă pentru p. În acest scop, se folosește identitatea

$$(a^2 + b^2)(A^2 + B^2) = (aA \pm bB)^2 + (aB \mp bA)^2$$

care arată că produsul a două sume de patrate poate fi scris în două moduri ca sumă de patrate. De văzut dacă în una din forme nu se pot face simplificări.

164. O sumă de două patrate poate fi descompusă în factori cînd lucrăm cu numere complexe.

4

SOLUȚIA

1. $N = \dfrac{12^2 \cdot 5 + 10}{365} = \dfrac{2 \cdot 6 \cdot 60 + 10}{360 + 5} = 2$

2. a) $\dfrac{112}{449} < \dfrac{112}{448} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{127}{508} < \dfrac{127}{507}$

b) $3599 = 3600 - 1 = (60 - 1)\ (60 + 1) = 59 \cdot 61.$

c) Se observă că succesiunea cifrelor este

$13 \quad 13 \cdot 3\ (= 39) \quad 39 \cdot 3\ (= 117) \quad 117 \cdot 3\ (= 351)$

d) viteza medie = distanța împărțită la timpul de parcurs.

Distanța 60 km + 60 km = 120 km. Timpul = 3 ore +

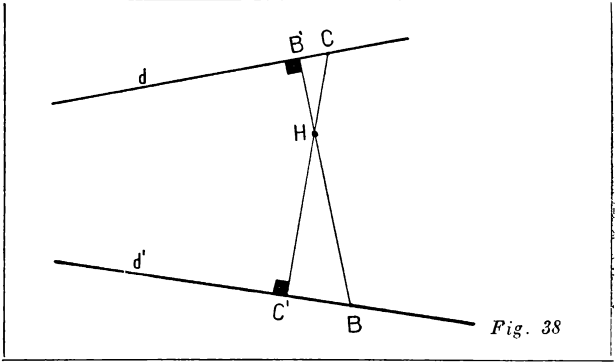


Fig. 38

$+ 2$ ore $= 5$ ore. Viteza medie $= 120$ km: 5 ore $=$ $= 24$ km/oră. Calculul analog dacă nu cunoaştem distanţa şi o notăm cu d. În acest caz, distanţa totală $= 2d$. Timpul $= \frac{d}{20} + \frac{d}{30}$, $v = 2d : \left(\frac{d}{20} + \frac{d}{30}\right)$; se simplifică prin d şi obţinem $v = 24$.

Nepotrivirea între prima impresie de moment ($v =$ $= 25$) şi soluţia justă ($v = 24$) se explică astfel: numai dacă mobilul merge 3 ore cu viteza v_1 şi *tot 3 ore* cu viteza v_2, viteza medie este media vitezelor. Mobilul din problemă a mers *mai mult timp* cu 20 km/oră decît cu 30 km/oră, de aceea viteza medie e mai aproape de 20 km/oră decît de 30 km/oră.

3. $HB' \perp d$, întîlneşte pe d' în B (fig. 38). Analog, CC'. Perpendiculara din H pe BC va trece — dacă ar fi prelungită — prin $A = d \cap d'$.

4. Prin translația de 1 cm, verticală, în sus, patrulaterul mărginit de liniile b_1 și a_1 se suprapune peste cel cuprins între b_2 și a_2, deci aceste două figuri sînt egale (fig. 2).

Dacă din aria de la b_1 la a_2 scădem 1) pe cea de la b_2 la a_2, obținem „linia" b; 2) pe cea de la b_1 la a_1 obținem „linia" a.

6. $x = \frac{100}{109}V$; $\quad V - x = \frac{9}{109}V$

$$\frac{9}{109}V = \frac{1}{100}\cdot\frac{900}{109}V \approx 8{,}25\% \text{ din } V.$$

Notă. Cînd spunem atît la sută, trebuie să fie clar (chiar dacă subînțeles) *din ce*. „Cu cît la sută își micșorează gheața volumul"? Înțelegem cu cît la sută *din volumul gheței.*

7. Volumul dislocuit de gheață este 1,3 dm³, exact cît trebuie pentru gheața topită. Nivelul rămîne același.

8. Mașina parcurge IG în 10 min. Ea sosind în G la ora 8 a fost în I la 7^{50}. Inspectorul a făcut de la ora 7 la 7^{50} distanța GI, mergînd cu 6 km/oră. Deci, a) $GI = 6\text{ km}\cdot\frac{5}{6} = 5\text{ km}$, b) mașina merge 5 km în 10 min, $v = 30$ km/oră, c) dacă șantierul e în S sau în alt punct, S', economia de timp rămîne aceeași; deci datele problemei nu permit aflarea răspunsului c.

9. După ce s-a îndepărtat de lădiță 10 minute, pentru a o regăsi face *tot 10 minute.* În intervalul de 20 de minute, lădița a parcurs 1 km. Deci ea a mers cu 3 km/oră.

Observare. S-a presupus că efortul muscular imprimă bărcii aceeași viteză u, față de apa curgătoare ca și în apa stătătoare. Este complet justă, din punct de vedere fizic, această presupunere?

Lopata este o *pîrghie*, avînd ca punct de sprijin *apa*. Acest sprijin este mai puternic atunci cînd apa vine spre lopată decît atunci cînd fuge din fața ei.

10. Cantitatea totală de lichid din A este aceeași. Deci A conține atîta alcool cîtă apă îi lipsește. Dar apa care îi lipsește a fost turnată în B.

11. Dacă numerele x, y, z sînt toate pozitive, egalitatea nu este posibilă căci $\frac{1}{x+y+z} < \frac{1}{x}$ (avînd numitorul mai mare). Analog dacă toate trei sînt negative. Fie $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x = -X$ $(X > 0)$.

Egalitatea poate fi scrisă

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y+z-X} + \frac{1}{X}$$

deci

$$yz = X(y+z-X)$$

$$X^2 - (y+z)X + yz = 0$$

care are rădăcinile $X = y$ și $X = z$.

Dacă $x = -y$, $x^n = -y^n$ și egalitatea de demonstrat se reduce la $\frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^n}$.

Analog dacă sînt două numere negative și unul pozitiv.

12. $x = 1$ (sau $y = 1$), $f(x, y) > 1$. Pentru $x = 2$, $y = 2, f(x, y) = \frac{3}{4} < 1$. Pentru valori superioare ale lui

x sau y, vom avea $f(x, y) < \frac{3}{4} < 1$. Deci $f(x, y) = 1$ **nu** e posibil.

13. *OM* este mediană în triunghiul dreptunghic *OAB*, deci egală cu $\frac{1}{2}AB$ = constant. Cînd scara alunecă, *M* se mișcă pe un arc de cerc.

14. Dacă rotim triunghiul *ADC* în jurul lui *AC* (fig. 39) unghiul *DFE*, inițial de 180°, se micșorează. Și distanța *DE*, latură în triunghiul *DFE* cu *DF* și *FE* constante, se micșorează.

În triunghiul *DCE*, *DC* și *CE* rămîn constante, iar *DE* se micșorează; deci și unghiul *DCE*, opus ei, se micșorează.

15. Dintre cele *cinci* segmente ce pleacă din *A* (fig. 40) există *trei* la fel colorate (nu pot fi două negre, două albe — al cincilea cum ar fi?). Ele sînt muchii din *A* în tetraedrul *ABCD*. Cum să colorăm laturile triunghiului de bază *BCD*? Dacă colorăm una din ele la fel cu muchiile din *A* (linii pline în figură), apare un triunghi în condițiile problemei. Dacă le colorăm altfel decît muchiile (linii punctate în figură), atunci triunghiul *BCD* va fi în condițiile problemei. Deci, oricum, există un astfel de triunghi.

16. Dacă ea este cireașă, avem

Etichete *CV*, *C*, *V*	Sub *C* nu putem pune *CV*, căci
Realitate *C* ,	ar rezulta sub *V* tot *V* și eti-
	cheta nu ar fi greșită. Deci sub

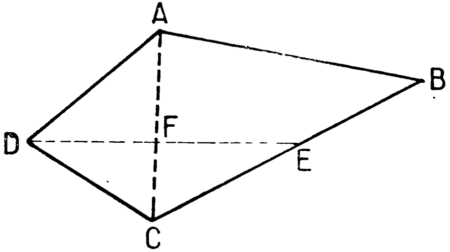


Fig. 39

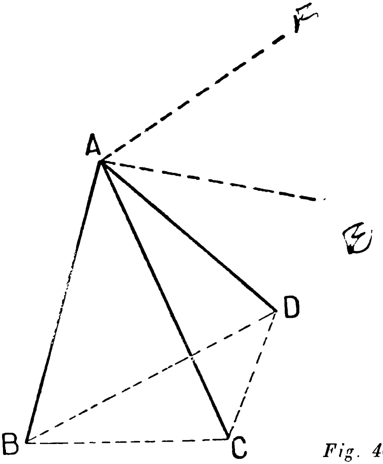


Fig. 40

C trebuie pus V și deci sub V, CV. Analog, dacă am scos vișină, obținem CV, C, V

V, CV, C

17. A nu e în O_1, O_2, O_3 cf. (1). El nu e nici în O_4, O_5 cf. (2). Deci $O_6 - m - A$.

Cf. (2) B, O_3 și O_5 au profesii diferite; deci O_5 nu e i; cf. 2b, nu e m, rezultă $O_5 - p$ și $O_4 - i$.

Cunoscînd profesiile, putem atașa persoanele.

Obținem

O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
m	p	i	i	p	m
B	F	D	C	E	A

18. O_3: am negru sau alb. Să admit că am negru. Sînt posibile din nou două ipoteze: O_2 are negru sau alb. În ipoteza — N N, O_1 ar răspunde „Știu", deci această ipoteză cade. În ipoteza — A N, O_1 răspunde „Nu știu". Dar O_2? Acesta raționează astfel: dacă aș avea negru, O_1 ar fi răspuns „Știu"; el a spus însă „Nu știu", deci am alb. În ipoteza — A N, O_2 ar răspunde „Știu: am alb". Dar el a răspuns „Nu știu", deci cade și această ipoteză. Ambele ipoteze în care eu aș avea negru au căzut, înseamnă că am alb.

19. Dacă sînt n discuri negre, $n + 1$ oameni și a discuri albe și dacă O_1 vede numai negre (n) răspunde „Știu: am alb". Dacă el răspunde „Nu știu", înseamnă că nu a văzut numai negre; în acest caz, dacă O_2 vede numai negre, răspunde „Știu: am alb" (folosind ipoteza că O_1 nu a văzut numai negre).

În general, primul care vede după el numai negre și știe că precedenții au răspuns „Nu știu", răspunde:

„Știu, am alb". Demonstrația prin inducție completă. Fie h rangul acestuia. Admitem propoziția pentru $h - 1$ și arătăm că rezultă pentru h. Conform propoziției admise, dacă O_{h-1} ar fi văzut numai negre, ar fi răspuns „Știu". Însă el a răspuns „Nu știu", deci nu a văzut numai negre; în această situație O_h, care vede numai negre și știe că precedentul său a răspuns „Nu știu", deduce că el însuși are alb.

20. P îl ia deoparte pe O și arătînd cu mîna unul din drumuri d_1 întreabă: acesta este drumul bun?

Să admitem că O este mincinos ($O = M$)

1) Drumul d_1 este cel bun:

P: Acesta e drumul bun?

M: Acesta e drumul rău.

Eu: Ce i-ai spus lui *P*?

M: Acesta e drumul bun.

2) Drumul d_1 este cel rău.

P: Acesta e drumul bun?

M: Acesta e drumul bun.

Eu: Ce i-ai spus lui *P*?

M: Acesta e drumul rău.

În ambele ipoteze, ultima afirmație a lui *M* este justă.

 Dacă omul este sincer, răspunsurile sînt clare.

21. Numărul 36 poate fi scris ca produs de trei factori în mai multe moduri:

1) $1 \cdot 1 \cdot 36$ 4) $1 \cdot 4 \cdot 9$ 7) $2 \cdot 3 \cdot 6$
2) $1 \cdot 2 \cdot 18$ 5) $1 \cdot 6 \cdot 6$ 8) $3 \cdot 3 \cdot 4$
3) $1 \cdot 3 \cdot 12$ 6) $2 \cdot 2 \cdot 9$

sumele celor trei factori sînt

1) 38; 2) 21; 3) 16; 4) 14; 5) 13; 6) 13; 7) 11; 8) 10.

În cazurile 5 și 6 obținem aceeași sumă. Conchidem că numărul etajelor este 13. De aceea B răspunde și acum că nu se poate afla (dacă de exemplu numărul etajelor ar fi fost 10, B ar fi știut că e în cazul 8).

Pînă aici B nu poate răspunde decît că vîrstele sînt sau 1, 6, 6 sau 2, 2, 9. În momentul în care i se vorbește ceva despre „cel mai mare“, ipoteza 1, 6, 6 cade și rămîne singura compatibilă cu condițiile problemei: 2, 2, 9.

22. Rezultă că numărul băieților b este cu 8 mai mare ca al fetelor f.

Ajungem la o problemă-tip: să aflăm două numere cînd cunoaștem suma și diferența lor.

În cazul nostru, dacă din 72 persoane scoatem 8 băieți, rămîn 64 persoane, tot atîtea fete cîți băieți. Rezultă că sînt 32 fete și 40 băieți sau inițial: 34 fete, 40 băieți.

23. Fie $A = a_i^j$, numărul de pe linia i și coloana j. Să arătăm că el este mai mic decît orice număr b majorant al unei coloane. Fie $b = a_m^k$, majorantul coloanei k. Avem $a_i^j < a_i^k < a_m^k$. Dacă însă $k = j$, $a_i^j < a_m^j$, căci $b = a_m^j$ e cel mai mare număr al coloanei j. Deci $a_i^j < b$, oricare ar fi b, în particular $A = a_i^j < B$.

Se poate însă întîmpla şi să coincidă $A = a_i^j$ (cel mai mic număr al liniei i) cu $B = a_i^j$, ca cel mai mare număr al coloanei j şi totodată cel mai mic dintre majoranţii coloanelor. Exemple:

				a					a
1)	1	2	3	1	2)	1	2	3	1
	5	6	7	5		5	6	7	5
	4	8	9	4		8	4	9	4
b:	5	8	9		*b*:	8	6	9	

$A = B$ $\qquad\qquad$ $A = 5;\ B = 6$

Notă. Dificultatea este legată numai de limbaj.

24. Avem $AC_2 = AB_2$. Dacă îndoim aceste segmente, CB_2 peste CA_2 şi BC_2 peste BA_2, obţinem perimetrul triunghiului. Deci unul din ele este semiperimetrul, p. Acum $BC_2 = AC_2 - AB = p - c$.

Pentru cercul înscris îndoim BA_1 peste BC_1, CA_1 peste CB_1. Deci dacă din perimetru scoatem cele două segmente din B şi cele două din C, am scos de două ori latura a. Aşadar $AB_1 + AC_1 = 2p - 2a$; $AB_1 = p - a$.

Notă. Pentru a înţelege demonstraţia şi a o gîndi concentrat, ea trebuie făcută încă o dată, fără a mai folosi literele (A, C_2, B_2 ...) care ne-au servit ca să o expunem. *Pentru sine*, cititorul poate spune: ăsta vine peste ăsta etc. Actul de a gîndi o demonstraţie nu coincide cu acela de a o redacta, de a o *comunica* spre exterior. Expunerea introduce lungimi care dăunează gîndirii concentrate, esenţială pentru a înţelege şi gusta o demonstraţie. De aceea este esenţial ca cineva să *reconstituie* o demonstraţie citită, să o facă *a lui*.

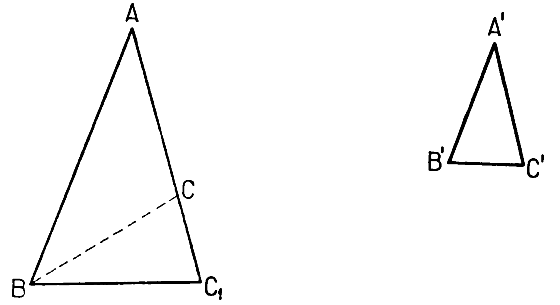


Fig. 41

25. Deoarece BC_2 este egal cu semiperimetrul, $AC_2 = r_b = p - c$ (fig. 20). Analog, $r_c = p - b$. Suma razelor este $2p - b - c = a$.

26. Prima teoremă: orice element al lui F este în L, adică $F \subset L$.

A doua: orice element al lui L este în F, adică $L \subset F$.

Ambele teoreme: $F \subset L$ şi $L \subset F$, adică $F = L$: mulţimea punctelor la egală distanţă de A şi B *este aceeaşi* cu mulţimea punctelor mediatoarei.

27. Desenăm două triunghiuri asemenea ABC_1 şi $A'B'C'$, astfel ca $BC_1 < BA$ (fig. 41). Căutăm punctul C pe semidreapta AC_1, astfel ca $BC = BC_1$ (cu compasul; îl putem găsi pentru că $BC_1 < BA$). Triunghiurile ABC, $A'B'C'$

îndeplinesc condițiile din ipoteză $\hat{A} = \hat{A}', \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$, dar nu sînt asemenea căci $C \neq C'$ (pe figură, C e obtuz, iar C' ascuțit).

Observație. Propoziția

$$\left(A = A'; \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}\right) \Rightarrow ABC \sim A'B'C'$$

nu este adevărată. Ce nu e adevărat? Implicația. Nu-i adevărat că dacă ipoteza e îndeplinită, în mod necesar e îndeplinită și concluzia. Unii interpretează astfel: „propoziția nu-i adevărată; înseamnă că triunghiurile nu sînt asemenea". Interpretare greșită. Triunghiurile pot fi asemenea sau pot să nu fie asemenea. Informațiile date de ipoteză nu sînt suficiente nici pentru a afirma că sînt, nici pentru a afirma că nu sînt asemenea. Pentru a putea face una din aceste afirmații ne mai trebuie o informație în plus, despre cele două triunghiuri.

29. Construim triunghiul dreptunghic AB_1C (fig. 42). Descriem un arc de cerc cu centrul în A și raza AB_1, care mai taie dreapta BC în B. Triunghiul ABC are elementele h, b, c aceleași ca și triunghiul AB_1C, deci verificînd relația. Dar ABC nu este dreptunghic.

Reciproca nu este adevărată în sensul că din relația $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ nu rezultă *în mod necesar* că triunghiul ABC este dreptunghic.

30. Deoarece oricum am așeza o placă, ea acoperă trei culori, dacă s-ar putea pardosi cu plăci întregi, ar trebui să existe tot atîtea patrate din fiecare culoare. Însă avem

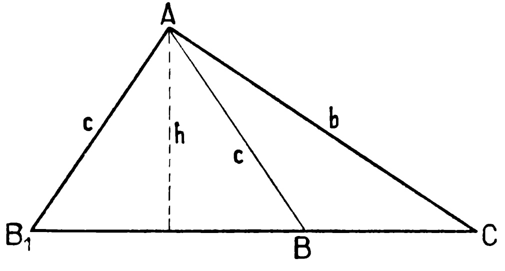


Fig. 42

23 patrate cu culoarea 2, 23 cu 3 şi numai 20 cu 1 (pentru că s-au scos cele 4 din colţuri).

32. Deoarece M_1 este simetricul lui M faţă de BC, analog M_2, M_3, linia mijlocie $A'B'$ în triunghiul ABC este şi linie mijlocie în triunghiul $M_1M_2M_3$. Rezultă M_1M_2 $(= 2A'B') = AB$ şi analoagele. Triunghiurile ABC şi $M_1M_2M_3$ fiind egale, şi cercurile circumscrise lor sînt egale (fig. 32).

Notă. Problema se numeşte „Problema piesei de 5 lei a lui Ţiţeica", deoarece acest ilustru matematician a descoperit enunţul desenînd nişte cercuri cu o monedă de 5 lei — deci cercuri egale.

33. Considerăm figura 43, în care $r_3 < r_2 < r_1$, deci $\gamma_1 > \beta_1$, $\beta_2 > \alpha_2$, $\gamma_2 > \alpha_1$.

Din C, coarda AB, comună cercurilor ABM şi ABC, este văzută sub unghiul $\frac{\alpha^1}{2} + \frac{\beta^1}{2}$, deci din O centrul

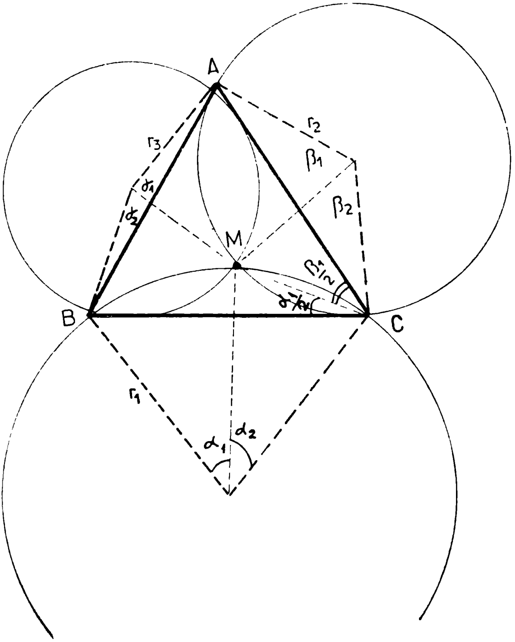


Fig. 43

cercului ABC, este văzută sub unghiul $\alpha_1 + \beta_1$. Dar $\gamma_1 + \gamma_2 > \alpha_1 + \beta_1$, de unde $r_3 < R$. Analog, arătăm că $R < r_1$.

Observație. Putem considera problema precedentă drept un caz limită în care în loc de $r_3 < r_2 < r_1$, avem $r_3 = r_2 = r_1$. Dacă oricît ar fi de apropiat r_3 de r_1, avem $r_3 < R < r_1$, la limită, cînd $r_3 = r_1$ și $R = r_3 = r_1$.

34. Ducînd $B'D \parallel AB$, (D, pe CC') se formează triunghiul $NB'D$ asemenea cu NBC'. Rezultă

$$\frac{NB'}{NB} = \frac{B'D}{BC'} = \frac{\frac{1}{3}AC'}{\frac{2}{3}AB} = \frac{\frac{1}{9}AB}{\frac{2}{3}AB} = \frac{1}{6}; \text{ deci}$$

$$\frac{NB}{NB + NB'} = \frac{6}{1+6}; \frac{BN}{BB'} = \frac{6}{7}$$

Raportul ariilor triunghiurilor BNC și $BB'C$ este egal cu raportul înălțimilor din N și B' egal cu $\frac{BN}{BB'}$ (din 2 tr. dreptunghice) deci egal cu $\frac{6}{7}$. Însă aria $BB'C = \frac{1}{3}S$. Rezultă aria $BNC = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3}S = \frac{6}{21}S$ și deci aria $NB'C = \frac{1}{3}S - \frac{6}{21}S = \frac{1}{21}S$.

Nu este nevoie să reluăm calculele și nici raționamentele pentru a afirma că aceleași relații se mențin pe celelalte laturi.

Rezultă că: 1) cele 3 triunghiuri (1), (2), (3) sînt echivalente

$$(1) = (2) = (3) = \frac{1}{21}S$$

2) cele trei patrulatere sînt echivalente, unul din ele fiind $\frac{1}{3} S - \frac{2}{21} S = \frac{5}{21} S$

$$(4) = (5) = (6) = \frac{5}{21} S$$

3) triunghiul din mijloc este echivalent cu (1) + + (2) + (3) (sau cu S din care scădem $\frac{3}{21} S$ şi $\frac{15}{21} S$)

$$(7) = \frac{1}{7} S.$$

35. Dacă luăm $\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{1}{k}$ (deci k în loc de 3), prin calcule cu totul analoge, obţinem:

unul din cele 3 tr. are aria $\frac{1}{k(k^2 - k + 1)} S$

unul din cele 3 patrulatere $\frac{k^2 - k - 1}{k(k^2 - k + 1)} S$

triunghiul din mijloc $\frac{(k - 2)^2}{k^2 - k + 1} S.$

Exemple: obţinem rapoartele:

pentru $k = 3$, $\frac{1}{21}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{1}{7}$ (regăsim)

$k = 2$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, 0 (căci triunghiul din mijloc dispare, iar patrulaterele devin triunghiuri).

$k = 4$	$\frac{1}{52}$	$\frac{11}{52}$	$\frac{4}{13}$	$\left(=\frac{16}{52}\right)$
$k = 5$	$\frac{1}{105}$	$\frac{19}{105}$	$\frac{9}{21}$	$\left(=\frac{45}{52}\right)$
$k = \frac{5}{2}$	$\frac{8}{95}$	$\frac{22}{95}$	$\frac{1}{19}$	$\left(=\frac{5}{95}\right)$

36. $r_1r_2r_3 = x(1 - x)y\ (1 - y)\ z\ (1 - z) \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ (egal pentru $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$), inegalitate imposibilă pentru $r_1 > \frac{1}{4}$, $r_2 > \frac{1}{4}$, $r_3 > \frac{1}{4}$.

Notă. Aceasta este soluția cea mai simplă la problema *propusă.* Raționamentul făcut cu folosirea figurii 22 ar rămîne totuși util pentru o problemă mai complexă: ce sisteme de valori pot lua numerele r_1, r_2, r_3.

37. Pentru calculul volumelor luăm ca bază fața AC_1D_1 și ca vîrfuri B_1 și B (fig. 44). Deoarece raportul înălțimilor din B_1 și B este egal cu AB_1/AB, rezultă că și raportul volumelor celor două tetraedre $AB_1C_1D_1$ și ABC_1D_1 va fi tot AB_1/AB. Volumul tetraedrului este o mărime proporțională cu muchia AB_1, deci cu fiecare din muchiile AB_1, AC_1, AD_1. Acum aplicăm regula de 3 compusă

AB	AC	AD ...	V
AB_1	AC_1	AD_1 ...	$V_1 = ?$

Rezultă $\frac{V_1}{V} = \frac{AB_1}{AB}\cdot\frac{AC_1}{AC}\cdot\frac{AD_1}{AD}$

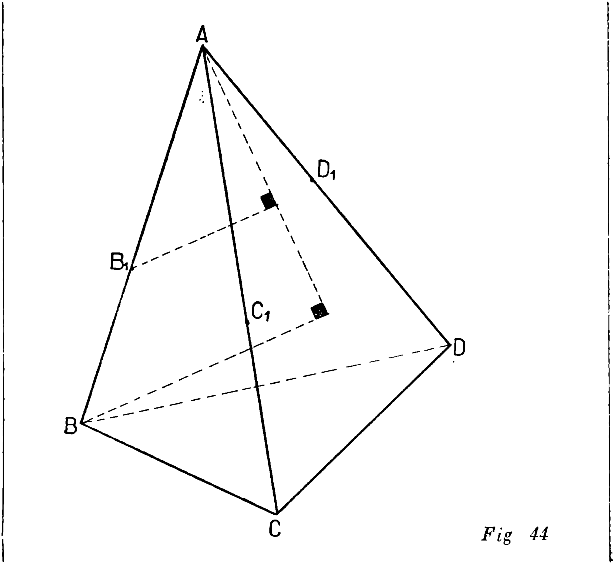


Fig 44

38. Fie M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 puncte pe muchiile AB, AC, AD, BC, BD, CD ale tetraedrului $ABCD$ și fie

$$x_1 = \frac{AM_1}{AB},\ x_2 = \frac{AM_2}{AC},\ x_3 = \frac{AM_3}{AD},\ x_4 = \frac{BM_4}{BC},\ x_5 = \frac{BM_5}{BD},$$

$$x_6 = \frac{CM_6}{CD}.\ \text{Avem } O < x_i < 1.$$

Din problema 37 rezultă

$$r_1 = \frac{v_1}{V} = x_1x_2x_3; \quad r_2 = \frac{v_2}{V} = x_4x_5(1 - x_1);$$

$$r_3 = \frac{v_3}{V} = x_6(1-x_2)(1-x_4); \; r_4 = \frac{v_4}{V} = (1-x_3)(1-x_5)(1-x_6)$$

Deci:

$$r_1r_2r_3r_4 = x_1(1 - x_1) \; x_2(1 - x_2) \; x_3(1 - x_3) \; x_4(1 - x_4)$$

$$x_5(1 - x_5)\,x_6(1 - x_6) \leqslant \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2^{12}}$$

Nu se poate ca toate numerele r_1, r_2, r_3, r_4 să fie mai mari ca $\frac{1}{8}$.

39. Unghiul $\hat{B}$ (fig. 45), format de cele două tangente din B, este $2\widehat{ABP}$, iar $\hat{C} = 2\widehat{ACP}$. Vedem deci că $\widehat{ABP} + \widehat{ACP} = 90°$. În acest caz, $\widehat{BPC} = 360 - (180 - A) - (ABP + ACP) = 90 + A$. Construim pe BC arcul capabil de unghiul $90 + A$.

40. a. Construim cercul de centru A'' și rază h_b. Ducem din A tangenta la acest cerc, care va fi dreapta AC.

b. Segmentul AA'' (v. soluția precedentă) este văzut din C sub unghiul $180° - A$.

41. Folosim figura 46. În triunghiul BOM unghiurile sînt:

$$\hat{B} = 90 - \frac{A}{2}; \; \hat{O}_1 = \frac{A}{2} + x \; ; \; \hat{M} = 90° - x$$

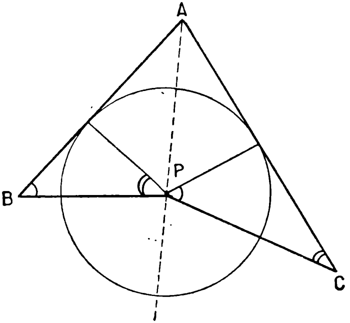


Fig. 45

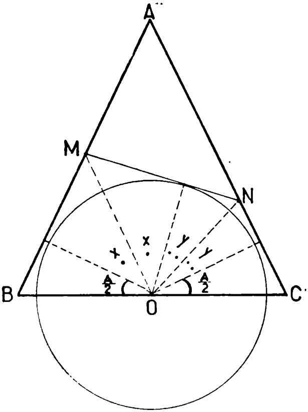


Fig. 46

în CON:

$$\widehat{C} = 90 - \frac{A}{2}; \widehat{O}_2 = \frac{A}{2} + y; \widehat{N} = 90 - y$$

Însă făcînd suma unghiurilor din O,

$$A + 2x + 2y = 180°; \quad x + y = 90 - \frac{A}{2}$$

ceea ce se citește: $\frac{A}{2} + x = 90 - y$

adică $\widehat{O}_1 = \widehat{N}$ (sau $\frac{A}{2} + y = 90 - x$, adică $\widehat{O}_2 = \widehat{M}$)

Cele două triunghiuri au unghiurile respectiv egale (M din primul egal cu CON din al doilea).

Proporționalitatea laturilor (cu atenție la ce unghiuri se opun): $OB/CN = BM/OC$, deci $BM \cdot CN = OB \cdot OC$

42. Avem $AI \cdot AO = AC^2$ (teorema catetei) $= AE \cdot AF$ (puterea punctului). Din $AI \cdot AO = AE \cdot AF$ rezultă că I, O, E, F sînt pe un cerc (reciproca teoremei de la puterea punctului). Rezultă $\widehat{EIA} = \widehat{EFO}$; $\widehat{OIF} = \widehat{FEO}$. Însă $\widehat{EFO} = \widehat{FEO}$ (tr. OEF este isoscel).

43. Triunghiurile AMD, AMC au un unghi comun, M. Avem $AM^2 = MB^2 = MD \cdot MC$ (puterea punctului), ceea ce se scrie și $\frac{AM}{MC} = \frac{MD}{AM}$. Unghiul M este cuprins între laturi proporționale, deci triunghiurile sînt asemenea. La MD se opune $\widehat{MAD}$; la omoloaga ei în triunghiul mare, AM se opune $\widehat{ACM}$. Deci $\widehat{MAD} = \widehat{ACD}$. Dreptele CE și AB sînt paralele.

Notă. Criteriul doi de asemănare se întîlnește în probleme mult mai rar decît criteriul unu. Sîntem mai puțin obișnuiți cu el. Aceasta ar fi poate o explicație pentru faptul că problema — trecută în biletele de examen de admitere la Politehnică mai mulți ani — deși relativ simplă, nu a fost rezolvată de candidații care au avut... nenorocul să o tragă.

44. a) $\widehat{ANM} = 45°$; $\widehat{MNB} = 45°$, deci $\widehat{ANB} = 90°$; dar și $\widehat{BNE} = 90°$ (analog). Din $\widehat{BNA} = \widehat{BNE}$ rezultă că N, E, A sînt colineare. Dar și $\widehat{CNA} = 90°$. Din $\widehat{BNA} =$ $= 90°$ și $\widehat{CNA} = 90°$ rezultă B, N, C colineare.

b) Din $\widehat{BNA} = 90°$ rezultă că locul lui N este cercul de diametru AB. Dreapta NM fiind bisectoarea unghiului $\widehat{BNA}$ taie acest cerc la mijlocul arcului AB, care se află și pe mediatoarea lui AB la distanță de AB egală cu $\frac{1}{2}\,AB$, deci este fix.

45. Poziția de minim m este la intersecția dreptei FF'' cu d; suma minimă este segmentul FF''. Cînd M se depărtează de m într-o parte sau cealaltă pe d, suma crește.

46. a) Fie F'' simetricul lui F' față de d și m (FF'' x d) (fig. 36). Dacă $FF'' < 2a$, există două poziții ale lui M pe dreaptă pentru care $MF + MF' = 2a$ (căci dacă M se deplasează pe d, într-o direcție și în cealaltă, suma *crește* de la valoarea FF'' la ∞). Dacă $FF'' > 2a$, dreapta

d nu taie elipsa. Dacă $FF'' = 2a$, dreapta şi elipsa au comun numai punctul m, dreapta d este tangenta în m la elipsă.

b) Rezultă din a) cazul 3.

47. Din triunghiurile dreptunghice formate (fig. 37)

$$(b + c)^2 = (d_2 + d_1)^2 + (d_2' + d_1')^2$$

$$a^2 = (d_2 - d_1)^2 + (d_2' + d_1')^2$$

Prin scădere,

$$4\, d_1 d_2 = (b + c)^2 - a^2$$

Observaţie. Avem şi

$$(c - b)^2 = (d_2 - d_1)^2 + (d_2' - d_1')^2$$

Scăzînd din a^2

$$a^2 - (c - b)^2 = 4d_1' d_2'$$

deci produsul distanţelor la bisectoarea interioară se exprimă în funcţie de latura corespunzătoare şi *diferenţa* celorlalte două.

48. Deoarece tangenta în M la elipsă este bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{F'MF}$, obţinem

$$4d_1d_2 = (2a)^2 - FF'^2$$

Produsul distanţelor de la focarele elipsei la o tangentă variabilă la elipsă este constant.

49. Din egalitatea triunghiurilor menţionate rezultă $A'O_1 = A'O_2$ şi $\widehat{O_2A'O_1} = A + [180 - (90 + A)]$ — în

paranteza dreaptă avem cele două unghiuri egale cu unghiurile ascuțite ale unuia din triunghiurile considerate. Deci $\widehat{O_2A'O_1} = 90°$.

Triunghiul $A'O_1O_2$ este deci dreptunghic și isoscel.

Observație. Cînd A este obtuz, figura e puțin schimbată, unghiul din B' (și din C') va fi $270° - A$; în rest, demonstrația rămîne aceeași.

50. Deoarece triunghiurile $B'O_2O_1$ și $B'O_4O_3$ (fig. 47) sînt dreptunghice, isoscele, o rotație de centru B' și unghi $90°$ suprapune triunghiul $B'O_2O_4$ peste $B'O_1O_3$.

51. Obținem

$$O_1O_2^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - 2\frac{ab}{3} \cos\,(60 + C)$$

Schimbînd pe b cu c,

$$O_1O_3^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2\frac{ac}{3} \cos(60 + B)$$

Deci trebuie să arătăm că

$$b^2 - 2ab\cos(60 + C) = c^2 - 2ac\cos(60 + B)$$

Înlocuim pe a prin $2R \sin A$, analog pe b și c, pentru a avea o relație numai între unghiuri.

Relația de demonstrat devine

$$\sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A \sin B \cos(60 + C) - \\ - 2\sin A \sin C \cos\,(60 + B)$$

Dezvoltînd pe $\cos\,(60 + C)$ și $\cos\,(60 + B)$ se reduc doi termeni și obținem

$$\sin^2 B - \sin^2 C = \sin A \sin B \cos C - \sin A \sin C \cos B$$

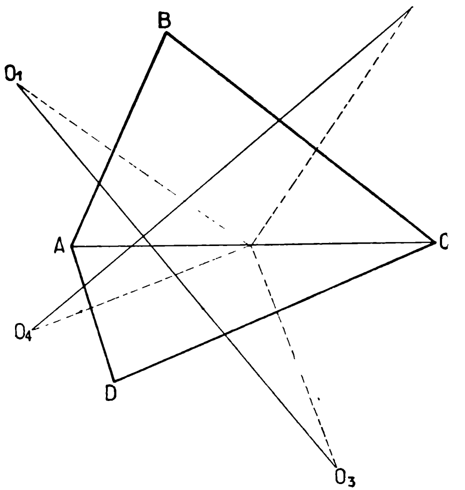


Fig. 47

Membrul I poate fi scris *sin* $(B + C)$ *sin* $(B - C)$ iar al doilea, *sin* A *sin* $(B - C)$. Însă *sin* $A =$ *sin* $(B + C)$.

52. Fie A' simetricul lui A față de O_3O_2. Avem $O_2A = O_2A'$; însă $O_2A = O_2C$, deci $O_2A' = O_2C$. Unind O_2 cu A' se formează în O_2 patru unghiuri: primele două (de sus pe fig. 28) egale, α și α, al treilea $60 - \alpha$, al patrulea $120 - \alpha - 60 = 60 - \alpha$. Deci și ultimele două

sînt egale și O_2O' este bisectoare în triunghiul isoscel $A'O_2C$. Altfel spus: simetricul lui A' față de $O'O_2$ este C. Analog — fără a mai fi nevoie să refacem demonstrația — simetricul lui A' față de $O'O_3$ este B.

Rezultă $O'B$ $(= O'A') = O'C$ și $\widehat{BO'C} = 120°$. Deci O' este pe mediatoarea lui BC, segmentul BC este văzut din O' sub unghiul de 120° și, O' fiind exterior, rezultă că $O' \equiv O_1$.

53. În triunghiul AOB, avem $OA = R \cos \alpha$, $OB = R \cos \beta$, $\widehat{AOB} = 60° + \alpha + \beta = 150° - \gamma$ (pentru că $\alpha + \beta + \gamma = 90°$). Aplicăm teorema cosinusului (renunțăm la factorul R care va apare la toate laturile — sau presupunem $R = 1$, ceea ce nu schimbă problema).

$$AB^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2 \cos\alpha \cos\beta \cos (30 + \gamma)$$

$$AC^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\gamma + 2 \cos\alpha \cos\gamma \cos (30 + \beta)$$

Rămîne să arătăm că

$$\cos^2\beta - \cos^2\gamma = \cos\alpha \ (\cos\beta \sin\gamma - \cos\gamma \sin\beta)$$

Înlocuim cos α prin $\sin (\beta + \gamma)$ și facem calculele.

Observație. Putem să ne limităm la latura AB, dar să-i transformăm expresia, astfel încît să obținem o expresie simetrică în α, β, γ.

Obținem:

$$AB^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 + \sin^2\gamma + \\ + \sqrt{3} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$$

Însă

$$\sin^2\gamma - \cos \alpha \cos \beta \sin\gamma = \sin \gamma [\cos (\alpha + \beta) - \\ \cos \alpha \cos \beta] = - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

Soluție geometrică. Considerăm triunghiul $A_1B_1C_1$ format de mijloacele coardelor care subîntind cîte 60°.

Avem (fig. 12) $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{BAa}$ (alterne interne) $= \widehat{ar, cr, a} = 30°$ (căci arcul cuprins este 60°). Analog, $AC_1B_1 = 30°$. Înseamnă că A este centrul triunghiului echilateral construit pe latura B_1C_1. Putem acum aplica problema **52.**

54. Notăm r numărul complex de modul 1 și argument 60°. Figura 12.

Cele 6 puncte de pe cerc au afixele:

$$a,\ ar,\ b,\ br,\ c,\ cr$$

(căci ar are modulul lui a și argumentul mai mare cu 60° ca al lui a).

Punctele A, B, C au afixele:

$$\frac{1}{2}(a + cr),\quad \frac{1}{2}(b + ar),\quad \frac{1}{2}(c + br)$$

Vectorul $\overrightarrow{AB}\ (= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ are afixul

$\frac{1}{2}[b + ar - (a + cr)]$, iar $\overrightarrow{AC}$, $\frac{1}{2}[c + br - (a + cr)]$

ABC este echilateral; e o condiție echivalentă cu $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$ și $\widehat{BAC} = 60°$.

Problema se reduce la a verifica relația

$$(b + ar - a - cr)\ r = c + br - a - cr$$

care se scrie

$$(a - c)\ (r^2 + 1) = (a - c)r;\ r^2 = r - 1,$$

relație ce se verifică imediat fie prin calcul, fie geometric, reprezentînd vectorul r^2 de modul tot 1 și de argument $2 \cdot 60° = 120°$.

Notă. Soluția poate fi transcrisă într-un limbaj pur vectorial — fără cunoașterea numerelor complexe — dacă citim ar sub forma: vectorul a rotit (în sens direct) cu 60° și dacă ținem seama că rotind fiecare termen al unei sume de vectori cu același unghi și suma se rotește la fel.

55. Cu AC punctat, aceeași figură, reprezintă o prismă cu baza ABC, tăiată de un plan $A'B'C'$. Intersecția între planele $A'B'C'$ și ABC este o dreaptă, Δ. Dreptele BC și $B'C'$ — situate pe o față a prismei — se taie într-un punct α. Punctul α aparține și planului ABC și planului $A'B'C'$, deci intersecției lor, Δ. Idem punctele β, γ. Cele trei puncte α, β, γ sînt pe dreapta Δ.

Observație. E posibil ca $A'B'C' \parallel ABC$, în care caz punctele α, β, γ sînt la infinit.

Notă. În general, problemele de geometrie în spațiu le rezolvăm desfăcîndu-le în mai multe probleme de geometrie plană. Aici, o problemă de geometrie plană o demonstrăm folosind teoreme de geometrie în spațiu.

Ideea era ascunsă tocmai pentru că nu ne așteptam la o astfel de inversare a obișnuitului: problemă de geometrie plană — metoda: o configurație din spațiu!

Interesant e și faptul că în interpretarea spațială folosim numai teoreme legate de relația de incidență (intersecție de plane, punct situat pe o dreaptă, dreaptă conținută în plan etc.), pe cînd în prima metodă foloseam și rapoarte de segmente.

56. 1) Punctăm AC și $A'C'$ (fig. 14). Același desen va

reprezenta o piramidă $SABC$, tăiată de planul $A'B'C'$.

Fie Δ intersecția planelor ABC și $A'B'C'$. Punctele α, β, γ aparțin dreptei Δ.

Prin teorema lui Menelau, soluția e mai lungă decît în problema precedentă:

Din triunghiul SBC tăiat de transversala α $B'C'$,

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{C'C}{C'S} \cdot \frac{B'S}{B'B} = +1. \quad \text{Analog:}$$

$$\frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{A'A}{A'S} \cdot \frac{C'S}{C'C} = +1$$

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{B'B}{B'S} \cdot \frac{A'S}{A'A} = +1$$

Înmulțind,

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = +1.$$

57. Dreapta M_1M_2 taie dreapta O_1O_2 în C' și din triunghiurile dreptunghice $C'O_1M_1$, $C'O_2M_2$ rezultă $\frac{C'O_1}{C'O_2} = \frac{R_1}{R_2}$, deci $C' \equiv C$. Punctele A, B, C se află pe dreapta d, de intersecție a planelor $M_1M_2M_3$ și $O_1O_2O_3$.

58. Din $x + y = 6$, $xy = 7$ rezultă $x = 3 + \sqrt{2}$, $y = 3 - \sqrt{2}$. Calculăm pe x^5; obținem $843 + 589\sqrt{2}$. Deci $\sqrt[5]{843 + 589\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$ (iar al doilea radical este $3 - \sqrt{2}$).

60. În cazul general, fracțiile considerate sînt

$$\frac{m-2}{2}, \quad \frac{m-4}{4}, \quad \frac{m-6}{6} \ldots \quad \frac{m-2h}{2h} \ldots$$

Dacă $2h = 2^a \cdot i$, i, impar, $m - 2h = 2^a\ (2^{n-a} - i)$; numărul din paranteză este impar.

61. $k = i$, $a = 2^n$; $k = 2^b \cdot i$, $a = 2^{n-b}$
În particular, pentru $k = 2^{n-1}$, $a = 2$. În șirul

$$C_{2^n}^k\ (k = 1,2, \ldots,\ 2^n - 1),$$

numai termenul din mijloc (cu valoarea cea mai mare) este multiplu de 2 fără a fi de 4.

63. $(2^k + 1)\ (2^k + 3) \ldots [2^k + (2^k - 3)] \cdot [2^k + (2^k - 1)] - 1 \cdot 3 \ldots (2^k - 1)$
(2^{k-1} factori). Produsele impare se reduc. Grupăm cîte 2.

$$(2^{2k+1} + M\,8 - 1)\ (2^{2k+1} + M\,8 - 1) \ldots (2^{2k+1} + M\,8 - 1)$$

2^{k-2} factori și căutăm cu ce se înmulțește 2^{2k+1}. Luăm factorul 2^{2k+1} din o paranteză și factorii $(M\ 8 - 1)\ (M\ 8 - 1) \ldots (M\ 8 - 1)$ din celelalte $2^{k-2} - 1$ paranteze; acestea fiind în număr impar, obținem $M\ 8 - 1$. Deci $2^{2k+1}\ (M\ 8 - 1)$ de 2^{k-2} ori, așadar $2^{3k-1} \cdot i$.
În problemă, $k = n - 1$. Răspuns final: $a = 3\ (n - 1)$.

64. Fie $n = 2^m$, $a_n = 2^{n+m-1}$. Obținem:

$$a_{n+1} = 2^{n+m} + 2^n;\ \ a_{n+2} = 2^{n+m+1} + 2^{n+1} + 2^{n+1};$$

$$a_{n+3} = 2^{n+m+2} + 2^{n+2} + 2^{n+2} + 2^{n+2} = 2^{n+m+2} + 3 \cdot 2^{n+2}$$

$$a_{n+4} = 2^{n+m+3} + 3 \cdot 2^{n+3} + 2^{n+3} = 2^{n+m+3} + 4 \cdot 2^{n+3}$$

ceea ce ne sugerează:

$$a_{n+i} = 2^{n+m+i-1} + i \cdot 2^{n+i-1}$$

formulă ce se demonstrează imediat prin inducție asupra lui i.

Să cercetăm acum dacă a_{n+i} este putere a lui 2.

$$a_{n+i} = 2^{n+i-1}(2^m + i)$$

Este necesar și suficient ca $2^m + i$ să fie putere a lui 2,

deci $i = 2^m$. Se poate lua și $i = 3 \cdot 2^m$, $7 \cdot 2^m \ldots (2^{k-1} - 1) \cdot \cdot 2^m$, însă — prin metoda adoptată de noi, e suficient să arătăm că pentru $i = 2^m$ avem o putere a lui 2 *și pentru* $i < 2^m$, nu. Pentru $i = 2^m$, obținem $a_{2n} = a^{2n+m}$.

Am dovedit că dacă pentru $n = 2^m$, avem $a_n = 2^{n+m-1}$ atunci și pentru $n = 2^{m+1}$, avem aceeași relație și că pentru valori ale lui n cuprinse între 2^m și 2^{m+1}, a_n *nu* este putere a lui 2. c.c.t.d.

65. Fie $E = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots \frac{2n-1}{2n}$

Mărind cu 1 și numărătorul și numitorul la fiecare fracție din E,

$$E < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots \frac{2n}{2n+1}$$

Deci $E^2 < \frac{1}{2n+1}$, $E < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Interpretare. $\lim\limits_{n \to \infty} E = 0.$

Generalizare. $\frac{a}{a+r} \cdot \frac{a+2r}{a+3r} \cdot \frac{a+4r}{a+5r} \cdots$

$$\cdots \frac{a+2nr}{a+(2n+1)r} < \frac{1}{\sqrt{a+(2n+3)r}}$$

66. $E = (n+1)^k - n^k = n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1\right]$

Însă $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{1}{n}$ (căci funcția a^x, cu $a > 1$ este *crescătoare*). Rezultă $E < n^k \cdot \frac{1}{n}$, $E < \frac{1}{n^{1-k}}$.

Deoarece $1 - k > 0$, *lim* $E = 0$.

67. $f(o) = 1 + \sqrt{m}$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m}{2}}$.

Este *necesar* ca $1 + \sqrt{m} = 2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m}{2}}$; $m + 2\sqrt{m} = 2m$; $\sqrt{m}(\sqrt{m} - 2) = 0$; $m = 0$ sau $m = 4$.

Dacă $f(x) =$ constant, atunci $m = 0$ sau $m = 4$. Rămîne să verificăm dacă, în adevăr, pentru aceste valori, $f(x) =$ const.

1) $m = 0$, $f(x) = cos^2 x + sin^2 x = 1$.

2) $m = 4$, $f(x) = \sqrt{cos^4 x + 4(1 - cos^2 x)} + \sqrt{sin^4 x + 4(1 - sin^2 x)} = 2 - cos^2 x + 2 - sin^2 x = 3$.

68. $$\frac{r_1}{r} = \frac{AM - MT}{AM + MT} = \frac{1 - sin\frac{A}{2}}{1 + sin\frac{A}{2}} = \frac{\left(1 - sin\frac{A}{2}\right)^2}{cos^2\frac{A}{2}}$$

Problema devine:

Într-un triunghi oarecare

$$\sum \frac{1 - sin\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}} \cdot \frac{1 - sin\frac{B}{2}}{cos\frac{B}{2}} = 1$$

Ținem seama că $\sum tg\frac{A}{2}\, tg\frac{B}{2} = 1$

Identitatea revine la:

$$\sum cos\frac{C}{2} - \sum cos\frac{C}{2}\left(sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2}\right) = 0$$

A doua sumă este

$$\left(sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2}\right)cos\frac{C}{2} + \left(sin\frac{B}{2} + sin\frac{C}{2}\right)cos\frac{A}{2} + \left(sin\frac{C}{2} + \right.$$

$$\left. + sin\frac{A}{2}\right)cos\frac{B}{2} = sin\frac{A+B}{2} + sin\frac{B+C}{2} + sin\frac{C+A}{2} =$$

$$= cos\frac{C}{2} + cos\frac{A}{2} + cos\frac{B}{2}.$$

69. Știm că $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

Să căutăm rădăcinile trinomului

$$cos^2a - 2\, cos\, b\, cos\, c\, cos\, a - (1 - cos^2b - cos^2c) = 0$$

$$cos\, a = cos\, b\, cos\, c \pm \sqrt{cos^2b\, cos^2c + 1 - cos^2b - cos^2c}$$

Sub radical avem $(1 - cos^2b)(1 - cos^2c) = sin^2b\ sin^2c$

Deci

$$cos\, a = cos\, b\, cos\, c \pm sin\, b\, sin\, c = cos\,(b \pm c)$$

$$E = -[cos\, a - cos\,(b + c)] \cdot [cos\, a - cos\,(b - c)]$$

$$E = 4\ sin\frac{a+b+c}{2} sin\frac{b+c-a}{2} sin\frac{a-b+c}{2} sin\frac{a+b-c}{2}$$

70. După ce reducem pe x la puterea cea mai mare, precum și, în cazul m impar, termenii liberi, termenii rămași pot fi grupați astfel:

$$A_k = C_m^{2k-1}\, x^{(m+1)\,(m-2k+1)} - C_{m+1}^{2k}\, x^{m(m-2k+1)} +$$
$$+ C_m^{2k}\, x^{(m+1)\,(m-2k)}$$

$$A_k = C_m^{2k-1}\, x^{(m+1)\,(m-2k)} \left(x^{m+1} - \frac{m+1}{2k}\, x^{2k} + \frac{m-2k+1}{2k}\right)$$

Vom avea $y = \sum_{k=1}^{n} A_k$, unde $n = \frac{m-1}{2}$ (m, impar) sau $\frac{m}{2}$ (m, par).

Urmează să împărțim polinomul Q din paranteză cu $(x-1)^2$ și să arătăm că obținem la cît numai coeficienți pozitivi. Notăm $\frac{m+1}{2k} = a$ · Avem

$$Q(x) = x^{m+1} - 1 - a\ (x^{2k} - 1)$$
$$Q(x) = (x-1)\ (x^m + x^{m-1} + \ldots + 1 - a\ (x^{2k-1} +$$
$$+ x^{2k-2} + \ldots + 1) = (x-1)\ C(x)$$
$$C(x) = x^m + x^{m-1} + \ldots + x^{2k} + (1-a)x^{2k-1} + \ldots +$$
$$+ (1-a)x + 1 - a$$

Dacă împărțim pe $C(x)$ la $x - 1$, obținem, după schema lui Horner, următorii coeficienți la cît:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ m - 2k + 1,\ m - 2k + 1 + 1 - a,\ m -$$
$$- 2k + 1 + 2\ (1-a), \ldots,\ m - 2k + 1 +$$
$$+ (2k-1)\ (1-a)$$

adică

$$1, 2, \ldots, A = m - 2k + 1, \ A - \frac{1}{2k}A, \ A - \frac{2}{2k}A, \ldots, A - \frac{2k-1}{2k}A.$$

aceştia sînt toţi pozitivi.

Dacă fiecare A_k este $(x - 1)^2$ înmulţit cu un polinom cu termeni pozitivi, şi suma lor, adică y, va fi la fel. Deci $y > 0$ pentru orice x pozitiv, afară de $x = 1$, unde $y = 0$.

71. Fracţia $\frac{b}{x - a_i}$ este descrescătoare, căci dacă $x > a_i$ şi x creşte, fracţia e pozitivă cu numitor crescător, iar dacă $x < a_i$ şi x creşte, fracţia este negativă dar are valoare absolută din ce în ce mai mare, pe măsură ce x se apropie de a_i. Avem $\lim\limits_{x \to a_i} \frac{b_i}{x - a_i} = \pm \infty$, + dacă $x > a_i$, — dacă $x < a_i$; aceasta înseamnă că $\left|\frac{b_i}{x - a_i}\right|$ poate fi făcut oricît de mare, dacă luăm pe x suficient de aproape de a_i.

Dacă fiecare termen al sumei descreşte, şi suma descreşte. Avem $\lim\limits_{x \to a_i} f(x_i) = \pm \infty$, după cum $x > a_i$ sau $x < a_i$, căci toţi termenii cu numitori diferiţi de $x - a_i$ au în punctul a_i valori finite.

Aşadar, graficul funcţiei $y = f(x)$ în intervalul (a_i, a_{i+1}) este de forma din figura 48 b, iar în ansamblu, cel din figura 48.

73. Dacă $y = a^x$ cu $a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, n un număr dat, pentru $x = \frac{1}{n}$ obținem $a^x = 1 + \frac{1}{n}$, acest punct $\left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ fiind pe dreapta $y = x + 1$.

Ținînd seama de concavitatea curbei $y = a^x$ (y crește din ce în ce mai repede), rezultă că atunci cînd n crește, $a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ crește și punctele de intersecție cu dreapta d, $(0, 1)$ și $\left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ se apropie; cînd $n \to \infty$, aceste puncte tind să se confunde. Deci pentru $n \to \infty$, *lim*

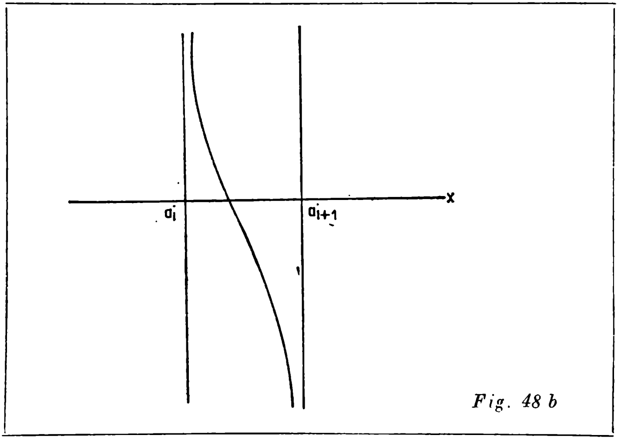


Fig. 48 b

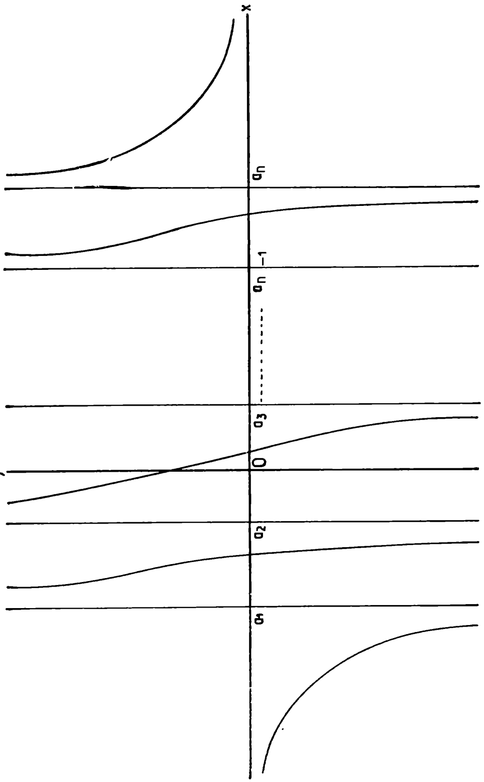


Fig. 48

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este un număr a, astfel că dreapta d e tangentă la $y = a^x$ (această valoare a lui a se notează e).

Dacă $y = a^x$ cu $a = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$, pentru $x = -\frac{1}{n}$, obținem $y = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$. Punctul $\left(-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$ este pe dreapta $y = x + 1$. Cînd n crește, acest punct se apropie de $(0, 1)$, deci a descrește și tinde tot la e.

74. 1) Unind O cu punctele M ale dreptei d, toate dreptele proiectante OM vor fi în planul (O, d), deci punctele M' vor fi la intersecția d' a planului (O, d) cu planul T. Excepție: cînd planul (O, d) este paralel cu T, d' este „dreapta de la infinit" a planului T.

2) Ducem prin O un plan P paralel cu T. Dacă dreptele d_1 și d_2 se întîlnesc în M și M nu e în planul P, proiecțiile dreptelor, d_1', d_2' se întîlnesc în M', proiecția lui M. Dacă M este în planul P, dar nu în O, M' este la infinit și d_1', d_2' sînt paralele.

Dacă d_1, d_2 sînt paralele fără a fi paralele cu T, punctul lor de la infinit ($OM \parallel d_1$) se proiectează la distanță finită; *proiecțiile d_1', d_2' sînt concurente* (de aceea două drepte în realitate paralele — de pildă șinele unei căi ferate, trotoarele unei străzi — apar în desen ca drepte neparalele). Dacă $d_1 \parallel d_2 \parallel T$, și proiecțiile d'_1, d'_2 sînt paralele.

75. Două fețe opuse se taie după dreapta SE. Planul care le taie după două drepte paralele trebuie să fie paralel cu SE (fig. 49). Pentru ca secțiunea să fie paralelogram, planul de secţiune trebuie să fie paralel şi cu SF, deci paralel cu planul ESF.

Notă. Problema poate fi interpretată astfel: fiind dat un centru de proiecţie S, să se afle un plan pe care un patrulater dat $ABCD$ să se proiecteze din S după un paralelogram. Conform problemei precedente, cele două puncte în care se întîlnesc laturile opuse ale patrulaterului trebuie să fie în planul dus prin S paralel cu planul de proiecţie.

76. Pentru n par, 2 cîte 2 vectori sînt opuşi, deci suma e zero. Fie n, impar. Să admitem că suma vectorilor OA ar fi un vector OS diferit de O (fig. 50). Rotind tot sistemul în jurul lui O cu unghiul $\frac{2\pi}{n}$, şi suma se va roti de acelaşi unghi. Însă, prin această rotaţie sistemul de vectori se suprapune pe el însuşi. Am obţine pentru aceiaşi vectori două sume, OS şi OS'. Rezultă că $OS = O$.

Dacă cercul are raza 1 şi proiectăm vectorii pe axa OA, obţinem:

$$1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos 2\cdot\frac{2\pi}{n} + \ldots + \cos(n-1)\frac{2\pi}{n} = 0$$

Dacă proiecţia o facem pe o axă cu care OA_1 face unghiul α, în loc de 1 punem $\cos\alpha$ şi fiecare din argumentele următoare creşte cu α.

Dacă n este impar, 2 cîte 2 vectori sînt simetrici faţă de OA_1 deci au proiecţii egale. De pildă, în cazul septagonului, obţinem:

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7} = 0$$

77. Fie Q diametral opus lui P (fig. 50). Aplicăm teorema catetei în triunghiul PA_1Q, dar proiecţia catetei pe ipo-

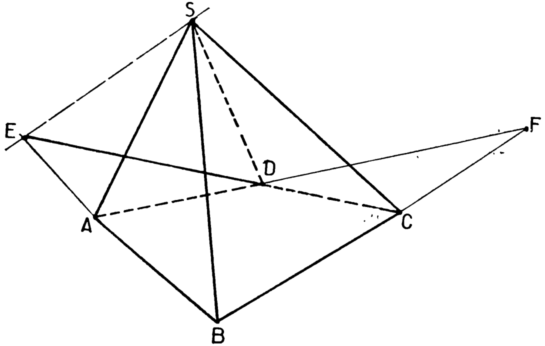


Fig. 49

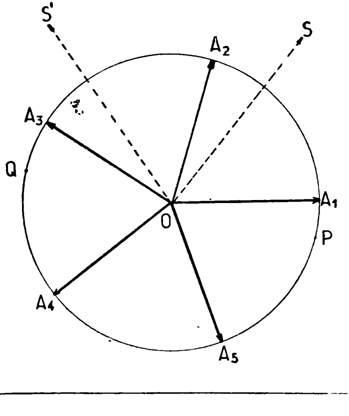


Fig. 50

tenuză o exprimăm cu ajutorul proiecției *vectorului* OA_1 pe *axa* OP.

$PA_1^2 = 2R \cdot (R - pr \cdot OA_1)$, unde proiecția OA_1 se ia cu plus sau minus, după cum e sensul ei pe axa OP.

Obținem $\sum PA^2 = n \cdot 2R^2 - 2R\left(\sum pr \cdot OA\right)$

Paranteza este nulă.

78. Da, dacă în loc de poligon regulat considerăm un *poliedru regulat*, iar punctul P pe sfera circumscrisă lui. Nu există însă decît 5 poliedre regulate: tetraedrul (cu patru fețe, patru vîrfuri); cubul (cu 6 fețe, opt vîrfuri) și octaedrul (ce se obține luînd ca vîrfuri centrele fețelor cubului — deci cu 6 vîrfuri și opt fețe), dodecaedrul (cu 12 fețe pentagonale, deci cu $\frac{12 \cdot 5}{3} = 20$ vîrfuri) și icosaedrul (ce se obține luînd ca vîrfuri centrele fețelor dodecaedrului — deci cu 12 vîrfuri și 20 de fețe).

(La dodecaedru, deși numărul vîrfurilor este par, nu avem 2 vectori opuși).

Pentru problema din enunț, putem lua mai multe poliedre regulate înscrise în aceeași sferă.

79. $n = 3$. Fie C mijlocul lui A_1A_2; $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{CA_2} = 0$, $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} = 2 \cdot \overrightarrow{MC}$. Rezultă $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} = 2 \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA_3}$. Pentru ca această sumă să fie 0 este necesar și suficient ca vectorii 2 $\overrightarrow{MC}$ și $\overrightarrow{MA_3}$ să fie opuși; adică M să fie pe segmentul A_3C la 2/3 din el de A_3 $\left(\text{și } \frac{1}{3} \text{ de } C\right)$. Deci pentru $n = 3$, G este punctul de intersecție al medianelor triunghiului $A_1A_2A_3$.

Admitem propoziția pentru n. Fie $\overrightarrow{CA_1} + \ldots + \overrightarrow{CA_n} = 0$, $\overrightarrow{MA_1} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = n\,\overrightarrow{MC}$. Rezultă $\overrightarrow{MA_1} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} + \overrightarrow{MA_{n+1}} = n\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA_{n+1}}$. Ca această sumă să fie 0, este necesar și suficient ca vectorii $n\overrightarrow{MC}$ și $\overrightarrow{MA_{n+1}}$ să fie opuși, adică M să fie pe segmentul $A_{n+1}C$ și MC să fie $\frac{1}{n+1}$ din el.

80. Suma $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0$ poate fi scrisă în patru moduri de forma $\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$ și în șase moduri de forma $(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$.

Consecințe. Suma $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$ poate fi scrisă $3\,\overrightarrow{GG'}$, unde G' este intersecția medianelor triunghiului BCD. Suma $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$ poate fi scrisă $2\,\overrightarrow{GG_1}$, unde G_1 este mijlocul lui AB.

Avem $\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GG'} = 0$, ceea ce arată că G este pe segmentul ce unește A cu G' $\left(\text{la } \frac{1}{4} \text{ din el de } G'\right)$. El este și pe celelalte 3 segmente analoge. Avem $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} = 0$ (G_2, mijlocul lui CD). G este la mijlocul segmentului G_1G_2.

Obținem teorema: dreptele care unesc vîrfurile tetraedrului cu centrele de greutate ale fețelor opuse și dreptele care unesc mijloacele muchiilor opuse sînt 7 drepte concurente.

81. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 2\ \overrightarrow{PO}$; $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NC}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC}$ (căci $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = 0$). Însă vectorii $\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{NC}$ fiind egali, suma lor este pe bisectoarea $\overrightarrow{AE}$ a unghiului lor. Deci $PO \parallel AE$.

82. Avem $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Înmulțim scalar cu $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\ (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

însă
$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2 = a^2.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC};\ a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos\ A$$

(dacă $BA \perp AC$, $a^2 = b^2 + c^2$).

83. Fie A_1OB_1 proiecția unghiului AOB pe planul Q (fig. 51)
Avem

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A}$$
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1B}$$

deci

$$\underset{(1)}{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}} = \underset{(2)}{\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OB_1}} + \underset{(3)}{\overrightarrow{A_1A} \cdot \overrightarrow{B_1B}} \quad \text{(r)}$$

(căci $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{B_1B}$ este nul, B_1B fiind $\perp$ pe OA_1; analog $\overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{A_1A}$).

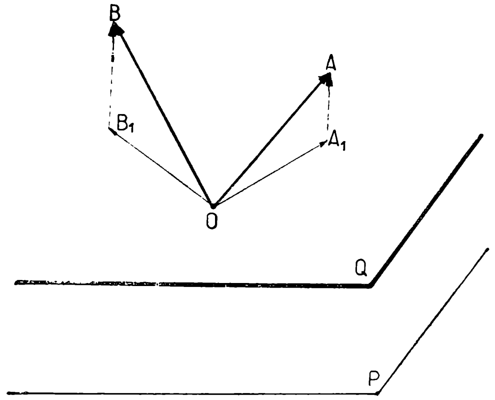


Fig. 51

Relația (r) conține 3 termeni. Dacă doi sînt nuli, și al treilea e nul.

(1) = O exprimă că $\widehat{AOB} = 90°$; (2) = 0 că $\widehat{A_1OB_1} = 90°$

(3) = 0 exprimă că sau $A_1A = 0$ sau $B_1B = 0$, deci că o latură a unghiului AOB este paralelă cu planul P (cuprinsă în planul Q). Obținem trei teoreme:

(1) = 0, (3) = 0 $\Rightarrow$ (2) = 0 (Dacă un unghi este drept și are o latură paralelă cu planul P, proiecția lui pe P este unghi drept).

(2) = 0, (3) = 0 $\Rightarrow$ (1) = 0 (Dacă un unghi are o latură paralelă cu planul P și se proiectează pe acest plan după un unghi drept, este și el drept).

(1) = 0, (2) = 0 $\Rightarrow$ (3) = 0 (Dacă un unghi este drept și se proiectează pe planul P tot după un unghi drept, el are o latură paralelă cu P).

Dacă una din teoreme o considerăm directă, celelalte două sînt reciprocele ei.

84. $MA\,(MC - MB) + MB\,(MA - MC) + MC\,(MB - MA) = 0$.

Relația este adevărată oricare ar fi punctul M. Fie M punctul de intersecție al înălțimilor AA' și BB'. În acest caz, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA}$. Din relație rezultă $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ceea ce arată că $MC \perp AB$.

85. Din $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ și $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ rezultă — folosind relația din pr. 84 — $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

Se poate da și o soluție fără vectori. Fie $MH \perp ABC$ (H în planul ABC). Din $BC \perp MA$ și $BC \perp MH$ rezultă $BC \perp AH$; analog $CA \perp BH$, deci H este ortocentrul triunghiului ABC. Din $CH \perp AB$, $AB \perp MH$ rezultă $AB \perp MC$.

86. Considerăm vectorii v_1 de mărime 1 și astfel că unghiul de la Ox la v_1 este a_1; analog, v_2 de mărime $\frac{1}{2}$ și unghi a_2 etc.

Suma $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ este un vector nenul. În adevăr, $\left|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right|$ e cuprins între $1 - \frac{1}{2}$ și $1 + \frac{1}{2}$ (fig. 52).

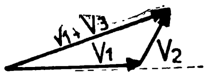


Fig. 52

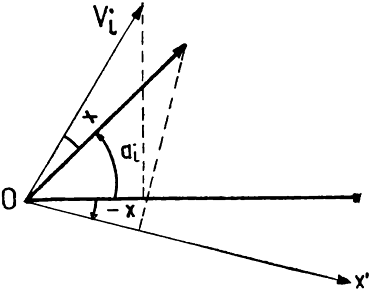


Fig. 53

$\left|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3\right|$ este cuprins între $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}$ și $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$ etc. $\left|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n\right|$ este cuprins între $1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$ și $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Fie A mărimea și B unghiul vectorului sumă. $f(x)$ este suma proiecțiilor vectorilor $\vec{v}_i$ pe o axă Ox' care face cu Ox unghiul $-x$, deci și proiecția sumei pe Ox' (fig. 53). Însă proiecția unui vector pe o axă Ox' de unghi $-x$

este egală cu proiecția aceluiași vector rotit cu unghiul + + x, pe axa Ox. Rezultă că:

$$f(x) = A \cos (B + x)$$

Din $\cos (B + x_1) = 0$ rezultă $B + x_1 = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ analog $B + x_2 = (2h + 1)\frac{\pi}{2}$, deci $x_1 - x_2 = (k - h)\pi = n\pi$.

87. Dacă două numere pozitive a, b variază așa fel încît suma lor k rămîne aceeași, atunci cînd numerele se apropie unul de altul, produsul lor crește (cînd se depărtează, produsul scade).

În adevăr, fie $a = \frac{k}{2} - x$ și deci $b = \frac{k}{2} + x$ (suma $a + b$ este k). Avem $ab = \frac{k^2}{4} - x^2$. Cînd x descrește, produsul crește. Produsul ab ia cea mai mare valoare cînd $x = 0$, deci cînd $a = b = \frac{k}{2}$.

Să considerăm acum n numere cu sumă constantă. Să luăm întîi ca exemplu

$$6 + 10 + 15 + 18 + 21 = 70$$

Transformăm numerele astfel ca ele să devină egale cu media lor, 14, lucrînd pe rînd la cîte o pereche de numere așa fel ca pe unul să-l mărim, pe celălalt să-l micșorăm cu aceeași cantitate. De pildă, așa:

$$6 + 10 + 15 + 18 + 21 = 13 + 10 + 15 + 18 + 14 = 14 + 10 + 15 + 17 + 14 = 14 + 13 + 15 + 14 + 14 = 14 + 14 + 14 + 14 + 14.$$

La fiecare schimbare, obținem produsul numerelor mai mare ($13 \cdot 14 > 6 \cdot 21$; $14 \cdot 17 > 13 \cdot 18$ etc.). Avem deci $6 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21 < 13 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 14 < \ldots < 14^5$ sau $\sqrt[5]{6 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21} < \frac{6 + 10 + 15 + 18 + 21}{5}$

Putem ușor extinde procedeul la cazul general. Obținem: dacă n numere $a_1, \ldots, a_n$ nu sînt toate egale între ele, media lor geometrică este mai mică (strict) ca media lor aritmetică. Aceste medii sînt egale *numai* în cazul cînd numerele sînt egale între ele.

Această propoziție fiind importantă și mult folosită în aplicații sau exerciții, să reflectăm asupra ei pentru a o înțelege complet.

Dublă interpretare. Relația

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

poate fi gîndită astfel:

1) dacă numerele pozitive $a_1, \ldots, a_n$ variază așa fel ca suma lor S să rămînă constantă, produsul lor va lua valoarea maximă atunci cînd numerele sînt egale între ele, deci fiecare egal cu $\frac{S}{n}$. Aceasta este interpretarea care ne-a servit în demonstrație,

2) dacă numerele a_i variază astfel ca produsul lor p să rămînă constant, suma lor va varia, dar: dacă facem toate numerele egale între ele, deci fiecare egal cu $\sqrt[n]{p}$, media lor geometrică este egală cu cea aritmetică $\left(\sqrt[n]{p} = \frac{\sqrt[n]{p} + \ldots + \sqrt[n]{p}}{n}\right)$, adică suma ia valoarea $n \cdot \sqrt[n]{p}$; pe cînd în orice situație în care numerele nu sînt egale, media aritmetică va fi mai mare ca cea geometrică, adică $a_1 + a_2 + \ldots + a_n > n \cdot \sqrt[n]{p}$. Valoarea $n \cdot \sqrt[n]{p}$

este valoarea *minimă* a sumei și ea e atinsă cînd numerele sînt egale între ele. Așadar:

1) Dacă suma a n numere pozitive e constantă, produsul este *maxim* cînd numerele sînt egale.

2) Dacă produsul este constant, suma este *minimă* cînd numerele sînt egale între ele.

88. 1. Dacă $a = \frac{k}{2} - x$ și $b = \frac{k}{2} + x$, avem $a^2 + b^2 = \frac{k^2}{2} + 2x^2$, care este minim pentru $x = 0$ și care descrește cînd x descrește (a și b se apropie).

2. $a^2 + b^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{2}$, (egal pentru $a = b$).

3. 1) Dacă $a_1 + ... + a_n = k$, $a_1^2 + ... + a_n^2$ este minim pentru $a_1 = ... = a_n = \frac{1}{n}k$.

În adevăr, dacă $a_1, ..., a_n$ nu sînt toate egale, le înlocuim prin media lor aritmetică, lucrînd succesiv asupra a cîte o pereche de numere pe care le apropiem de medie (prin același procedeu ca în problema 87). De fiecare dată suma patratelor se micșorează. Deci, în cazul unor numere neegale, suma patratelor lor este mai mare ca în cazul cînd numerele sînt egale și au aceeași medie

$$a_1^2 + ... + a_n^2 \geqslant n.\left(\frac{a_1 + a_{\cdot} + ... + a_n}{n}\right]^2$$

2) Dacă $a + b = k$, suma $a^4 + b^4$ este minimă pentru $a = b = \frac{k}{2}$. În adevăr, dacă $a = \frac{k}{2} - x$ și $b = \frac{k}{2} + x$, $a^4 + b^4 = 2\left[\left(\frac{k}{2}\right)^4 + 6\left(\frac{k}{a}\right)^2 x^2 + x^4\right]$ este minim pentru $x = 0$ și descrește cînd x descrește.

Analog pentru orice exponent (folosind binomul lui Newton). Extinderea la mai multe numere exact ca și în cazul exponentului 2.

Reunind ambele generalizări

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^m$$

89. Fie $q = \frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{y}{2}$. Suma factorilor este $\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} = x + y = k$; deci q este maxim cînd factorii sînt egali, adică $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{k}{5}$. Avem $q \leqslant \left(\frac{k}{5}\right)^5$, $p = 108\ q$, deci $p \leqslant 108.\left(\frac{k}{5}\right)^5$. Valoarea maximă a lui p are loc pentru aceleași valori ca și cea a lui q.

Generalizare. Dacă $x + y + z = k$, produsul $P = x^m y^n z^p$ (m,n,p numere naturale) este maxim atunci cînd $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} \left(= \frac{k}{m+n+p}\right)$ căci maximum lui P are loc o dată cu al lui

$Q = \left(\frac{x}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{z}{p}\right)^p$. Analog dacă sînt mai multe numere.

Cazul cînd exponenții m, n, p sînt fracții pozitive se reduce la acesta. De exemplu, dacă este vorba de

$$p = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \cdot z^{\frac{2}{5}},$$

ridicînd la puterea 20 (= c.m.m.c. al numitorilor), obținem $p^{20} = x^{10} \cdot y^{15} \cdot z^8$ și maximum lui p are loc o dată cu al lui p^{20}.

Aplicație. Avem $x^2 + y^2 = d^2$. Se cere ca x^2y să fie maximum. Acesta are loc o dată cu maximumul produsului $(x^2)^2 y^2$, care are loc cînd $\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{1} = \frac{d^2}{3}$, de unde $x = = d \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = d \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$.

90. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
p fiind dat, S este maxim atunci cînd produsul $(p-a)(p-b)(p-c)$ este maxim; dar suma factorilor lui, $(p-a)+(p-b)+(p-c) = p$ este constantă; el — și deci și S — va fi maxim atunci cînd $p - a = p - b = p - c$, $a = b = c$, adică atunci cînd triunghiul este echilateral.

91. $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3}}$$

Deoarece semnul = este valabil în ambele relații în aceleași condiții (cînd $a_1 = a_2 = a_3$), deducem relația din enunț.

În general

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant n^2$$

Gîndiți-vă de ce am subliniat propoziția cursivă*.

---

* Din inegalitățile $x^4 + 1 \geqslant 1$, $x^2 + 2x + 2 \geqslant 1$ *nu* putem deduce $(x^4 + 1)(x^2 + 2x + 2) \geqslant 1$, ci numai $(x^4 + 1)(x^2 + 2x + 2) > 1$, pentru că valorile minime nu corespund aceluiași x.

92. Efectuînd produsul și ordonînd convenabil termenii, scriem inegalitatea sub forma

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geqslant 0$$

93. Dacă am efectua produsul din membrul I (nu e nevoie să lucrăm efectiv, ci numai să gîndim), am obține o sumă cu 8 termeni (de gradul 3). *Deoarece literele joacă același rol*, produsul acestor 8 termeni va conține literele a, b, c *la aceeași putere*. La ce putere? În raport cu toate literele produsul va avea gradul $3 \cdot 8$, deci fiecare literă va avea exponentul 8.

Media aritmetică a celor 8 termeni este

$$\frac{(a+b)\ (b+c)\ (c+a)}{8}$$

Media lor geometrică este $\sqrt[8]{a^8b^8c^8} = abc$.

Relația dată exprimă în fond tot faptul că med.ar. $\geqslant$ med.g. însă referitor nu la numerele a,b,c ci la termenii sumei din m.I.

Relația (1)

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \geqslant 16abcd$$

se demonstrează *exact în același mod*; de asemenea, relațiile analoge cu mai multe litere. Dar gîndiți-vă ce calcule ar fi fost necesare dacă am fi rămas la prima direcție a gîndirii: să obținem sume de patrate!

Relația (2)

$$(a+b+c+d)\ (abc+abd+acd+bcd) \geqslant 16\ abcd$$

se poate demonstra tot prin aceeași idee, însă în două variante cu deosebiri neesențiale:

1) să ne imaginăm membrul I ca *o sumă* cu 16 termeni de gradul IV

2) să tratăm separat fiecare paranteză:

$$a + b + c + d \geqslant 4 \cdot \sqrt[4]{abcd}$$

$$abc + abd + acd + bcd \geqslant 4 \cdot \sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3}$$

Înmulțim și ținem seama că semnul = este valabil în aceleași condiții; obținem relația.

Generalizarea poate merge acum și mai departe.

94. Pe baza aceleiași idei, obținem

$$P_1 \, P_2 \dots P_k \geqslant A(a_1 \, a_2 \dots a_n)^B$$

unde $P_1, P_2, \dots P_k$ sînt polinoame simetrice de $a_1, a_2, \dots, a_n$ de diverse grade, iar A și B se stabilesc făcînd în m. I literele egale cu a. Exemplu:

$$(a + b + c + d)\ (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\ (ab + ac + ad + + bc + bd + cd)$$

Pentru $a = b = c = d$ obținem $4a \cdot 4a^2 \cdot 6a^2 = 96\ a^5$, deci punem în continuare $\geqslant 96\ (abcd)^5$.

Puteți astfel construi diferite exerciții. Dacă însă vreți să le propuneți unor colegi care nu cunosc ideea generală, trebuie să le alegeți așa fel încît ele să poată fi făcute și prin „calcule".

95. s_i are C_n^i termeni. În s_i fiecare literă este folosită de același număr de ori (de $h = \frac{i}{n} C_n^i$ ori). Înseamnă că produsul acestor termeni va fi $a_1^h\, a_2^h \dots a_n^h = k^{nh}$. Produsul fiind dat, s_i este minim pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_n = k$. Fiecare sumă s_i fiind minimă pentru aceleași valori, și E va avea minimul pentru aceste valori. Deci

$$E_{minim} = (1 + k)^n$$

Putem gîndi şi astfel: să ne bazăm pe relaţia media aritmetică $\geqslant$ media geometrică. Media aritmetică a termenilor lui s_i este $\frac{s_i}{C_n^i}$, iar media lor geometrică este $\sqrt[C_n^i]{k^{nh}} = k^i$. Obţinem $s_i \geqslant C_n^i k^i$ (fiecare termen din membrul I e mai mare sau egal cu termenul corespunzător al dezvoltării binomului din membrul II).

96. Din $s - a_i = b_i$, $a_i = s - b_i$.

$$\frac{s - b_1}{b_1} + \frac{s - b_2}{b_2} + \dots + \frac{s - b_n}{b_n} \geqslant \frac{n}{n - 1}$$

$$\left(\frac{s}{b_1} - 1\right) + \left(\frac{s}{b_2} - 1\right) + \dots + \left(\frac{s}{b_n} - 1\right) = s\left(\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}\right) - n$$

Însă $b_1 + \dots + b_n = ns - s$. Înlocuind pe s în funcţie de b, relaţia devine

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n - 1} \cdot \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n}\right) - n \geqslant \frac{n}{n - 1}$$

Acum putem folosi relaţia $m_a \geqslant m_g$.

$$\frac{b_1 + \dots + b_n}{n} \cdot \frac{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}}{n} \geqslant 1$$

Media geometrică a numerelor b este $k = \sqrt[n]{b_1 \dots b_n}$, iar a numerelor $\frac{1}{b}$ este $\frac{1}{k}$. Produsul lor este 1.

 97. s din $E(n)$ nu este acelaşi cu s din $E(n - 1)$.

98. 1) Cu notaţiile introduse, obţinem $a = b' + c'$ şi analoagele. Inegalitatea devine

$$(a' + b')(b' + c')(c' + a') \geqslant 8\, a'b'c'$$

2) Fie $A + B = k$ (const.). Avem $\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A - B) - \cos(A + B)\right] = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos k$

Dacă $A - B$ este un unghi variabil care descreşte de la 180° la 0°, $\cos(A - B)$ creşte de la -1 la $+1$; valoarea maximă a produsului $\sin A \sin B$ este atinsă pentru $A = B$.

Să presupunem că lucrăm numai cu unghiuri pozitive şi mai mici ca 180° şi să generalizăm. Fie $A + B + C = k$, $k < 180° \cdot 3$. Dacă A, B, C, nu sînt egale, fie $A > B > C$. Vom avea $C < \frac{k}{3}$ şi $A > \frac{k}{3}$. Apropiind pe A de C, aşa ca suma să rămînă constantă, $\sin A \sin C$ va creşte; facem această apropiere pînă ce unul ia valoarea $\frac{k}{3}$. Procedăm la fel cu celelalte două unghiuri rămase (v. pr. 87). Găsim că produsul $\sin A \sin B \sin C$ va fi maxim pentru unghiuri egale (egale cu $\frac{k}{3}$).

În problemă avem unghiuri pozitive a căror sumă este 90°. Produsul dat va fi maxim pentru $\frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2} = 30°$ şi valoarea maximă va fi $(\sin 30°)^3 = \frac{1}{8}$.

Evident, se poate generaliza pentru mai multe unghiuri şi cu totul analog cînd avem produse de cosinusuri.

99. 1,3) $sin\ A + sin\ B = 2\ sin \frac{A - B}{2}\ cos\ \frac{A - B}{2}$

$cos\ A + cos\ B = 2\ cos \frac{A + B}{2}\ cos \frac{A - B}{2}$. Deci suma sinusurilor sau cosinusurilor a două unghiuri de sumă dată crește cînd $A - B$ scade și atinge maximum pentru $A = B$.

$$4{,}5)\quad tg\ A + tg\ B = \frac{sin\ (A + B)}{cos\ A\ \ cos\ B}$$

$$ctg\ A + ctg\ B = \frac{sin\ (A + B)}{sin\ A\ \ sin\ B}$$

Am stabilit că dacă $A + B = k$, produsele sin A sin B și *cos* A *cos* B cresc cînd $A - B$ scade și își ating maximele pentru $A = B$. Pentru aceste valori fracțiile își ating minimele.

2) Avem $sin^2\ A + sin^2 B = 1 - cos\ (A + B)\ cos\ (A - B)$. Deci cînd $A - B$ descrește, *cos* $(A - B)$, adică scăzătorul, crește și deci diferența se micșorează.

Extinderea la trei sau mai multe unghiuri, analog ca în problema precedentă.

100. A. Soluția 1. Să presupunem $a + b + c$ dat (constant). În acest caz, $a^2 + b^2 + c^2$ este minim pentru $a = b = c$ (pr. 88), iar S este maxim tot pentru $a = b = c$ (pr. 90).

Se verifică ușor că în cazul triunghiului echilateral, în enunț este valabil semnul egal. Deci la un triunghi neechilateral cu același perimetru, $a^2 + b^2 + c^2$ este mai mare și $4 \cdot \sqrt{3} \cdot S$ mai mic ca la triunghiul echilateral — adică avem inegalitate.

B. Soluția 2. Deplasăm vîrful A paralel cu BC pînă
 ce triunghiul devine isoscel (fig. 54). Aria a rămas aceeași;

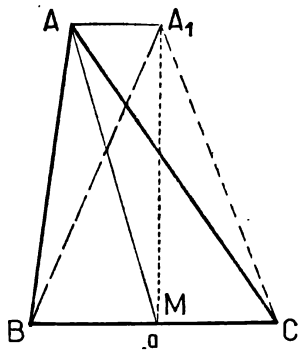


Fig. 54

a a rămas același; avem $b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2$, AM s-a micșorat, deci și $b^2 + c^2$. E suficient să demonstrăm inegalitatea pentru triunghiul isoscel. Ea se scrie în acest caz:

$a^2 + 2b^2 \geqslant 4\sqrt{3}\ \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Ridicînd la pătrat (sînt cantități pozitive), ea devine $(a^2 - b^2)^2 \geqslant 0$. Egalitatea are loc pentru $a = b$ (triunghi echilateral).

Soluția 3. Deplasăm pe A astfel ca AM să rămînă constant (pe un arc de cerc), pînă ce A ajunge în A'' pe mediatoare, cînd S este maxim; suma $a^2 + b^2 + c^2$ nu s-a schimbat. Revine tot la soluția 2.

C. Soluția 4. Presupunem date cele 3 laturi. Să calculăm pe S. Avem $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot DC$.

$$h^2 = b^2 - DC^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2};$$

$$4\ S^2 = a^2h^2 = a^2b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4}$$

Ridicînd relația dată la pătrat și folosind expresia lui S, ea se va scrie

$$(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 \geqslant 0$$

Soluția 5. Presupunem date înălțimea din A, h, și cele două segmente a_1 și a_2 determinate de ea pe BC; deci $a = a_1 + a_2$ (există cel puțin un vîrf, astfel ca înălțimea din el să aibă piciorul între celelalte vîrfuri). În funcție de acestea, inegalitatea devine

$$(a_1 + a_2)^2 + a_1^2 + h^2 + a_2^2 + h^2 \geqslant 2\sqrt{3}\cdot(a_1 + a_2)h$$

Înmulțim peste tot cu 3 și o scriem sub forma

$$(a_1\sqrt{3} - h)^2 + (a_2\sqrt{3} - h)^2 + [(a_1 + a_2)\sqrt{3} - 2h]^2 \geqslant 0$$

Egalitatea are loc pentru $a_1\sqrt{3} = a_2\sqrt{3} = h$ (tr.ech.).

Soluția 6. Presupunem date două laturi și unghiul cuprins: b, c, A. Avem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc\ \cos A;\ S = \frac{1}{2}\ bc\ \sin A$$

Inegalitatea devine:

$$2\ b^2 + 2c^2 - 2\ bc\ \cos A \geqslant 2\sqrt{3}\ bc\ \sin A$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{1}{2}\cos A + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right) \geqslant 0$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\ (60^\circ - A) \geqslant 0$$

Construind un triunghi cu laturile b, c şi unghiul cuprins $60° - A$ (sau $A - 60°$), în membrul I avem patratul laturii a treia, deci o cantitate pozitivă. Această a treia latură este nulă numai dacă $b = c$ şi $60 - A = 0$, deci cînd triunghiul dat este echilateral.

AC. Soluţia 7. Presupunem date o latură şi unghiurile. Folosind $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$, $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ relaţia devine

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geqslant 2\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$$

Pentru $A = B = C = 60°$, verificăm că avem egalitate.

Conform problemei precedente, membrul I este minim şi membrul II maxim pentru $A = B = C$. Deci pentru unghiuri neegale avem neegalitate.

Soluţia 8. Presupunem date cercul circumscris şi unghiurile. Avem (fig. 55)

$$S = \sum \frac{1}{2} a R \cos A = \frac{1}{2} \sum R^2 \sin 2A$$

Înlocuind pe a cu $2R \sin A$, ş.a., inegalitatea devine

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

Înlocuind $\sin^2 A$ prin $\frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$ etc.

$$\cos(2A - 60°) + \cos(2B - 60°) + \cos(2C - 60°) \leqslant \frac{3}{2}$$

Suma unghiurilor $2A - 60°$,... fiind $180°$, aplicăm problema precedentă.

Soluţia 9. Adunînd relaţia $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ cu analogele ei, obţinem

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cos A + 2ac \cos B + 2ab \cos C$$

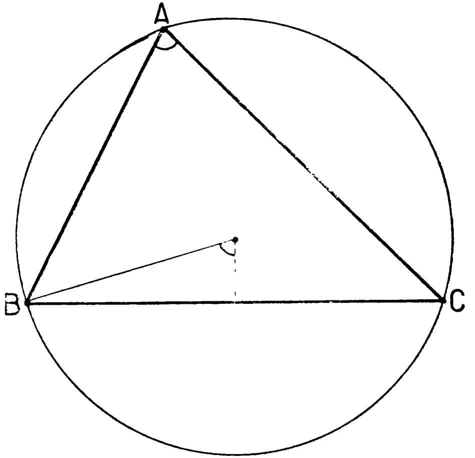


Fig. 55

Însă $S = \frac{1}{2}\ bc\ sin\ A = \frac{1}{2}\ ac\ sin\ B = \frac{1}{2} ab\, sin\, C$

Inegalitatea devine

$$ctg\ A + ctg\ B + ctg\ C \geqslant \sqrt{3}$$

Soluţia 10. Presupunem date a, h_a, m_a. (Triunghiul este *determinat* de aceste elemente căci, cu condiţia $m_a \geqslant \geqslant h_a$ — mediana mai mare ca înălţimea din acelaşi vîrf — el poate fi construit şi construcţia este unică.)

Avem $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 2m^2 + \frac{a^2}{2}$; $S = \frac{1}{2} ah$

Inegalitatea devine

$$\frac{3}{2} a^2 + 2m^2 \geqslant 2\sqrt{3}\, ah$$

$$3a^2 - 4\sqrt{3}\, ah + 4\, m^2 \geqslant 0$$

Privind membrul I ca un trinom în a, realizantul este $12\, h^2 - 12\, m^2$. Pentru $m > h$, rădăcinile sînt complexe, deci avem semnul $>$. Pentru $m = h$ realizantul este nul. Rădăcina (dublă) este $\frac{2}{\sqrt{3}}\, m$. Numai pentru $a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot m$ este valabil semnul $=$. Dar în acest caz triunghiul este echilateral.

Notă. Avem aici un exemplu de problemă cu mai multe soluții. Cel mai celebru caz este al unei teoreme din teoria numerelor — numită *legea reciprocității* — care are 56 de demonstrații — nici una „ușoară" — avînd ca autori străluciți matematicieni ca Gauss, Cauchy, Iacobi... Cincizeci și șase! Pe cînd există și probleme pentru care nu s-a găsit încă nici o soluție! (în special, tot în teoria numerelor). Există — în domeniul elementar, foarte numeroase — probleme care nu au decît o soluție ascunsă care se găsește cu greu, prin încercări, uneori prin „noroc", fără un fir călăuzitor.

Este în această situație o „ciudățenie", un fapt încă neexplicat psihologic. Ține el de insuficiențele gîndirii umane sau de natura problemelor în sine?

101. AB' este diagonală într-un dreptunghi cu dimensiunile a, $b + c$, deci $AB'^2 = a^2 + (b + c)^2$.

Analog, cînd drumul ajunge în N, rabatem fața laterală pe planul bazei; dacă B ia poziția B'', AB'' este diagonală într-un dreptunghi cu dimensiunile $a + c$ și b, deci

$$AB''^2 = b^2 + (a + c)^2.$$

Analog, prin P, obținem un drum cu lungimea $AB'''^2 = c^2 + (a + b)^2$.

Mai sînt posibile încă 3 drumuri, care însă conduc la aceleași trei valori. Urmează să alegem pe cel mai scurt. Dacă $a > b > c$, cel mai scurt este AB'.

102. Prin desfășurarea cilindrului, obținem un dreptunghi. Unim noile poziții ale lui A și B printr-un segment. O catetă este înălțimea cilindrului, cealaltă este arcul de cerc cuprins între A și proiecția lui B pe bază, B' (arc $AB' < 180°$).

Notă. Înfășurînd dreptunghiul din nou pe cilindru, segmentul AB devine un arc dintr-o curbă numită *elice.*

103. $AB < AC + CB$ (arce de cercuri mari — mai mici ca $180°$) $AB = R\gamma$, $AC = R\beta$, $CB = R\alpha$, unde α, β, γ sînt unghiurile la centru corespunzătoare și problema revine la: a arăta că fiind dat un triedru (fig. 56), între unghiurile fețelor lui avem relația $\gamma < \alpha + \beta$. Ducem $CC' \perp$ planul AOB și $CA \perp OA$. Triunghiurile dreptunghice OAC și OAC' au cateta OA comună, dar $OC > OC'$; rezultă $\widehat{AOC'} < \beta$. Analog $\widehat{BOC'} < \alpha$

Deci $\gamma < \alpha + \beta$

Generalizăm ușor pentru un drum format din mai multe arce de cercuri mari. (Se poate demonstra că drumul cel mai scurt între două puncte este arcul de cerc mare).

104. Pentru $n_1 = 5$, $n_2 = 3$, avem următoarele perechi

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & a_4b_1 & a_5b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & a_4b_2 & a_5b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_4b_3 & a_5b_3 \end{matrix}$$

Lîngă a_1 putem pune n_2 elemente; idem lîngă a_2 etc., idem lîngă a_{n_1}, deci în total $n_1 \cdot n_2$ grupe.

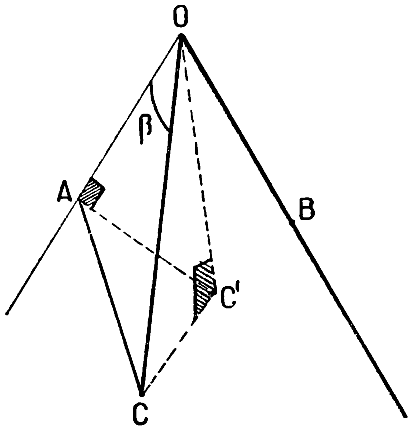


Fig. 56

Dacă lîngă fiecare pereche $a_i\ b_j$ punem succesiv pe $c_1, c_2, \ldots, c_{n3}$, obținem triplete de forma $a_i b_j c_k$, dintr-o pereche n_3, din $n_1\ n_2$ perechi $n_1\ n_2\ n_3$ triplete ș.a.m.d.

Concretizări. 1) Dacă în urna U_1 sînt n_1 bile, în U_2, n_2 bile, în U_3, n_3 bile și scoatem prima bilă din U_1, a doua din U_2, a treia din U_3 ,acest lucru poate fi făcut în $n_1\ n_2\ n_3$ moduri.

2) Dacă dintr-un punct A pleacă n_1 drumuri, fiecare din ele se desface în n_2 drumuri, fiecare din acestea în n_3 (fig. 57), putem ajunge din punctul A în regiunea B în $n_1\ n_2\ n_3$ moduri.

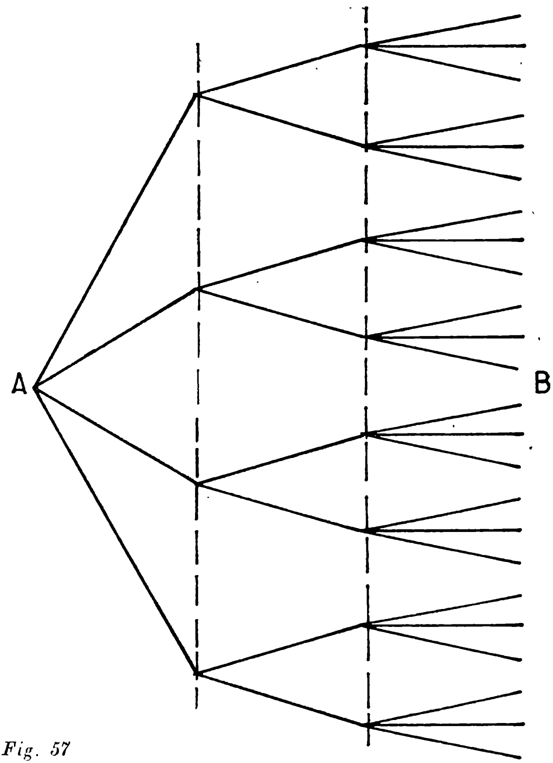


Fig. 57

În general, dacă un fenomen se formează din k trepte, pe treapta 1 existînd n_1 decizii posibile, pe a doua n_2, ... pe a i^a, n_i ... fenomenul poate avea în total $n_1 n_2 \dots n_k$ forme.

Exemplu. Se dă numărul $N = 2^5 \cdot 7^2 \cdot 11$. Un divizor oarecare al lui este $d = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2} \cdot 11^{\beta_3}$ cu condițiile: $0 \leqslant \beta_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant 2$, $0 \leqslant \beta_3 \leqslant 1$. (Din $N = d \cdot k$, rezultă că d nu poate avea factori care nu sînt în N, iar pe cei din N nu-i poate avea cu exponent mai mare. Unii factori ai lui N pot lipsi — de aceea considerăm și cazul $\beta = 0$. De exemplu pentru $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 0$ obținem $d = 2^3 \cdot 7$).

Cîți divizori are numărul N?

Răspuns: Conform schemei de mai sus, N are $n = 6 \cdot 3 \cdot 2$ divizori. În general $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ are $n = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ divizori.

105. Schema din problema precedentă. La prima treaptă sînt n decizii posibile; la a doua $n - 1$, la a treia $n - 2$ ... la a k^a, $n - (k - 1)$.

Numărul tuturor grupelor posibile — pe care îl notăm A_n^k și îl numim numărul *aranjărilor* de n obiecte luate cîte k — va fi

$$A_n^k = n(n-1) \dots [n - (k-1)]$$

produsul a k factori descrescători începînd cu n.

Exemplu: $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Observație. Două grupe pot diferi între ele numai prin ordinea elementelor, de exemplu: $a_1 a_2 a_5$; $a_2 a_5 a_1$.

Pentru $k = n$, obținem $A_n^n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$. În acest caz, fiecare grupă conține *toate* cele n obiecte, deci două grupe oarecare diferă *numai* prin ordinea obiectelor. Numărul acestor grupe îl notăm P_n ($P_n = A_n^n = n!$) și îl numim numărul *permutărilor* de n obiecte.

Mulțimea grupelor formate o numim *tabloul aranjărilor*, respectiv *permutărilor.*

106. Într-o clasă sînt $P_k = k!$ grupe. Cîte clase sînt? De cîte ori se cuprinde numărul grupelor dintr-o clasă în numărul total al grupelor. Notăm C_n^k, numărul claselor

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k}$$

(k factori descrescători începînd cu n, supra tot k factori crescători începînd cu 1).

C_n^k ne arată cîte grupe se pot face cu n obiecte luate cîte k, dacă nu considerăm distincte două grupe ce diferă numai prin ordinea obiectelor, deci două grupe distincte diferă prin cel puțin un obiect. C_n^k se numește numărul combinărilor de n cîte k.

Exemplu: $C_5^2 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$

Tabloul C_5^2 va fi

$$1-2;\ 1-3;\ 1-4;\ 1-5;\ 2-3;\ 2-4;\ 2-5;$$
$$3-4;\ 3-5;\ 4-5.$$

107. Deci la fiecare grupă de k obiecte corespunde o grupă de $n-k$ (cele rămase) și reciproc. Între tablourile C_n^k și C_n^{n-k} se stabilește o corespondență biunivocă, deci ele au același număr de grupe.

108. În 1) grupele formate din k obiecte însă alese din totalul de $n-1$ (cele n fără a_n). Numărul lor este C_{n-1}^k.

În 2) avem obiectul a_n atașat la toate grupele din tabloul C_{n-1}^{k-1}, deci numărul acestor grupe este C_{n-1}^{k-1}.

Avem deci

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Dacă avem tablourile de grupe C_{n-1}^k și C_{n-1}^{k-1}, atașăm la grupele din al doilea obiectul a_n și reunim cu primul; obținem tabloul C_n^k.

Observație. Același raționament rămîne valabil dacă în loc de obiectul a_n, considerăm un anumit alt obiect (oarecare), de exemplu a_3. Cîte grupe nu conțin pe a_3? C_{n-1}^k. Cîte conțin pe a_3? C_{n-1}^{k-1}.

Formula se menține și pentru $k = 1$ *dacă luăm prin convenție* $C_n^0 = 1$ ($C_n^1 = n$; $C_{n-1}^1 = n - 1$; $C_{n-1}^0 = 1$).

109. 1) C_{n-2}^k 2) C_{n-2}^{k-1} (nu folosim pe a_1, nici pe a_2, grupăm cele $n - 2$ obiecte rămase cîte $k - 1$ pentru a atașa pe a_2).

3) C_{n-2}^{k-1}; 4) C_{n-2}^{k-2} (la grupele obținute atașăm a_1 a_2).

Avem deci

$$C_n^k = C_{n-2}^k + 2\,C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$$

Observație. Această formulă poate fi obținută și prin aplicarea formulei din problema precedentă: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Însă *pe baza aceleiași formule*, $C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1}$; $C_{n-1}^{k-1} = C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$.

Care demonstrație trebuie preferată? A doua este mai ușoară. Prima — cea bazată pe considerarea a două obiecte fixe — solicită mai mult efortul de gîndire, dar ea este mai lămuritoare: arată și care este interpretarea de fond a fiecărui termen din formulă.

110.

$$
\begin{array}{lcccccc}
C_4^k: & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
C_5^k: & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
$$

Se adună doi termeni consecutivi și se scrie rezultatul sub al doilea.

Pornind cu $n = 1$, obținem *triunghiul lui Pascal:*

1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Pentru a găsi pe C_n^k în acest tablou, ținem seama că pe linia n avem C_n^k $(k = 0, 1, \ldots n)$.

111. 1) Litera a_1 este scrisă în C_{n-1}^{k-1} grupe. 2) În tabloul C_n^k sînt scrise $k\, C_n^k$ litere (într-o grupă ,k și sînt C_n^k grupe). Literele avînd același rol, una din cele n litere este folosită de $\frac{1}{n} k\, C_n^k$ ori.

Avem deci

$$\frac{k}{n} C_n^k = C_{n-1}^{k-1}; \quad C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$$

În mod evident, $C^1_{n-1} = n - 1$. Făcînd în formulă $k = 2, 3, \ldots, k$, obținem

$$C^2_n = \frac{n}{2}(n-1) = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}; \quad C^3_n = \frac{n}{3}C^2_{n-1} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

etc.

112. a) Din 0 în A (7, 3) sînt atîtea drumuri în cîte moduri din cele 10 unități putem alege 3 (pe care le decretăm verticale). Deci C^3_{10}. Același raționament, în care fixăm unitățile orizontale, ne conduce la C^7_{10} (egal cu primul).

În general, C^m_{m+n} (sau C^n_{m+n}).

b) Numărul drumurilor ce ajung în A este egal cu al celor ce ajung în A_1 + al celor ce ajung în A_2. Deci

$$C^n_{m+n} = C^n_{m+n-1} + C^{n-1}_{m+n-1}$$

ceea ce reprezintă, cu notații puțin schimbate, relația din problema **108.**

113. Cîte grupe conțin i bile albe? Pentru a forma o astfel de grupă, luăm întîi i bile albe și putem face aceasta în C^i_a moduri; apoi luăm $n - i$ bile negre și putem face aceasta în C^{n-i}_b moduri. În totul, deci, $C^i_a\ C^{n-i}_b$ grupe. (Evident, dacă i $> a$ sau $n - i > b$, acest număr este nul).

Dacă adunăm numărul grupelor cu 0 bile albe, cu acel al grupelor cu 1 bilă albă... cu acel al grupelor cu n bile albe, obținem numărul total de grupe, deci (1) $C^0_a \cdot C^n_b + C^1_a \cdot C^{n-1}_b + \ldots + C^i_a\ C^{n-i}_b + \ldots + C^n_a\ C^0_b = C^n_{a+b}$ (dacă $n > b$, nu există nici o grupă cu 0 albe, dar acest lucru nu trebuie examinat separat, căci prin C^k_m unde $k > m$, înțelegem zero).

Dacă numărul de grupe cu cîte i bile albe îl înmulţim cu i, obţinem numărul de bile albe din aceste grupe. Deci numărul total de bile albe este

$$A = \sum_{i=1}^{i=n} i\, C_a^i\, C_b^{n-i}$$

Pentru a calcula această sumă, observăm că

$i\, C_a^i = \dfrac{a(a-1)\ldots(a-i+1)}{1\cdot 2\ldots(i-1)} = a\, C_{a-1}^{i-1}$. Avem deci

$$A = a\sum_{i=1}^{i=n} C_{a-1}^{i-1}\cdot C_b^{n-i}$$

Putem folosi în calculul lui A formula (1) în care în loc de a, avem $a-1$, în loc de n, $n-1$.

$$A = a\cdot C_{a+b-1}^{n-1}$$

Media cerută o găsim împărţind pe A cu numărul total de grupe. Deci

$$M(i) = a\cdot\frac{C_{a+b-1}^{n-1}}{C_{a+b}^n} = a\cdot\frac{(a+b-1)!}{(n-1)!\,(a+b-n)!}\cdot\frac{n!\,(a+b-n)!}{(a+b)!}$$

$$M(i) = n\cdot\frac{a}{a+b}$$

Notă. Se poate rezolva problema printr-o metodă mult mai simplă; dar este necesară o idee.

114. În tabloul C_m^n sînt în total $n\cdot C_m^n$ litere; fiecare literă este folosită de $r = \dfrac{n\cdot C_m^n}{m}$ ori. Dacă fiecare bilă albă este folosită de r ori, numărul total de bile albe folosite va fi

$$a\cdot\frac{n}{m}\cdot C_m^n$$

împărțind acest număr cu numărul total de grupe C_m^n obținem media

$$M(i) = n \cdot \frac{a}{a+b}$$

115. Pentru $n = 2$, numărul *total* al grupelor este (104)

$$N = (a_1 + b_1)\ (a_2 + b_2)$$

Colorite: *aa*; *ab*; *ba*; *bb*

Cîte grupe *aa*? Aplicăm problema 104. În prima treaptă a_1 posibilități, în a doua a_2, deci a_1a_2 grupe *aa*. Analog: a_1b_2 grupe *ab*, b_1a_2 grupe *ba*, b_1b_2 grupe *bb*.

Putem scrie

$$N = a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + b_1b_2$$

Pentru $n = 3$, numărul total de grupe este

$$N = (a_1 + b_1)\ (a_2 + b_2)\ (a_3 + b_3)$$

$$N = a_1a_2a_3 + a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + a_1b_2b_3 + b_1a_2a_3 + $$
$$+ b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3 + b_1b_2b_3$$

Sînt acum 8 colorite, reprezentate prin literele cu care sînt scriși cei 8 termeni din dezvoltarea lui N. *Valoarea* unui termen (cînd înlocuim factorii lui prin numerele date) arată cîți termeni sînt în acel colorit ($a_1a_2a_3$ grupe alb alb alb; $a_1a_2b_3$ grupe alb alb negru etc.).

Dacă scriem 0 în loc de *a* și 1 în loc de *b*, cele 8 colorite pot fi scrise 000; 001; 010; 011; 100; 101; 110; 111. Acestea sînt toate numerele de 3 cifre în baza 2 (egale respectiv cu 0,1,2,3,4,5,6,7).

Cazul general. Numărul total de grupe

$$N = (a_1 + b_1)\ (a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)$$

Numărul de colorite: la fiecare treaptă sînt *două* posibilități (alb sau negru) și avem n trepte. Deci în total 2^n colorite. Ele pot fi reprezentate prin toate numerele de n cifre în baza 2.

Dezvoltăm produsul care dă pe N (fără a schimba ordinea factorilor). Obținem 2^n termeni (fiecare cu n litere a, b). Un termen arată două lucruri: 1) prin literele cu care este format, coloritul; 2) prin valoarea lui numerică, cîte grupe cu acel colorit există.

116. Dacă o grupă începe cu A_1 (prima bilă albă din U_1) în locurile 2, 3, ..., n sînt puse în toate modurile bilele din $U_2 \dots U_n$. Deci au pe A_1, $(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n) = \frac{N}{a_1 + b_1}$ grupe. Așadar, au cîte o bilă albă din U_1, $a_1 \cdot \frac{N}{a_1 + b_1}$ grupe. Analog, au cîte o bilă albă din U_2, $a_2 \cdot \frac{N}{a_2 + b_2}$ grupe etc. Numărul total de bile albe din toate grupele este deci

$$\sum a_i \cdot \frac{N}{a_i + b_i} = N(p_1 + p_2 + \dots + p_n)\left(p_i = \frac{a_i}{a_i + b_i}\right)$$

Pentru a găsi media împărțim la numărul total de grupe, N

$$M(i) = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

117. Fie

$$(1)\quad N = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)$$

Pentru a obține i bile albe într-o grupă, alegem i urne din care scoatem numai alb (și din celelalte $(n-i)$ numai negru). Ca număr de grupe obținem produsul între numerele de bile albe din urnele alese și numerele de bile negre din cele rămase. La urne identice, obținem $a^i b^{n-i}$ grupe. Dar putem alege cele i urne în C_n^i moduri. Deci obținem $C_n^i a^i b^{n-i}$ grupe cu i bile albe. Numărul total de grupe este

$$(2) \qquad N = (a+b)^n = b^n + C_n^1\, b^{n-1}\, a + \dots + \\ + C_n^i\, b^{n-i}\, a^i + \dots + C_n^n\, a^n$$

unde termenii au fost scriși în ordinea crescătoare a numărului de bile albe (b^n grupe cu 0 albe, $C_n^1\ b^{n-1}\ a$ grupe cu o bilă albă etc.)

Observație. Produsul (1) dezvoltat are 2^n termeni. Produsul (2) are tot 2^n termeni, însă sînt grupați la un loc acei care reprezintă același număr de bile albe. Deci

$$1 + C_n^1 + \dots + C_n^i + \dots + C_n^n = 2^n$$

Media. Conform problemei 116, obținem $M(i) = np$ $\left(p = \dfrac{a}{a+b}\right)$

118. $t_i : t_{i-1} = C_n^i\, b^{n-i}\, a^i : C_n^{i-1}\, b^{n-i+1}\, a^{i-1} = \dfrac{n-i+1}{i} \cdot \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{n+1}{i} - 1\right) \cdot \dfrac{a}{b};\ \left(\dfrac{n+1}{i} - 1\right) \cdot \dfrac{a}{b} > 1 \iff i < (n+1)p$

Dacă $(n+1)\,p = k + f$ (1), unde k este întreg, iar f subunitar, pentru orice $i \leqslant k$, avem $t_i > t_{i-1}$ și pentru orice $i > k$, $t_i < t_{i-1}$; în cazul $(n+1)\ p = k$ (întreg), pentru $i = k$, $t_k = t_{k-1}$. Avem deci

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} \leqslant t_k > t_{k+1} > \dots > t_n$$

semnul = fiind valabil numai în cazul $f = 0$.

Raportul $\frac{i}{n}$ îl numim *frecvenţa* bilelor albe în grupele de n bile formate. El poate fi exprimat şi în procente; de exemplu: pentru $n = 200$, $i=90$, frecvenţa este 45%.

Grupele cele mai numeroase sînt acelea cu frecvenţa $\frac{k}{n}$, unde k este cel mai mare întreg cuprins în $(n+1)p$. Dacă np este întreg, $\frac{k}{n} = p$, frecvenţa egală cu probabilitatea p; de exemplu $a = 3$, $b = 2$ $\left(p = \frac{3}{5}\right)$, $n = 100$ grupele cele mai numeroase vor fi acelea cu 60 bile albe $\left(\frac{60}{100} = \frac{3}{5}\right)$.

Dacă np nu este întreg, putem avea $\frac{k}{n} < p$ sau $\frac{k}{n} > p$, însă frecvenţa $\frac{k}{n}$ este foarte apropiată, prin lipsă sau adaos, de p.

Exemplu (fig. 58): $a = 3, b = 2, n = 5, \frac{k}{n} = \frac{3}{5} = p$.

$$(a+b)^5 = b^5 + 5b^4a + 10\,b^3a^2 + 10\,b^2a^3 + 5\,ba^4 + a^5$$

$$(3+2)^5 = 32 + 240 + 720 \quad + 1080 \quad + 810 \quad + 243$$

119.

$$M = \frac{a_1^2 + \ldots + a_N^2 - 2m(a_1 + \ldots + a_N) + m^2 \cdot N}{N} = m'' -$$

$$- 2m \cdot m + m^2$$

$$M = m'' - m^2.$$

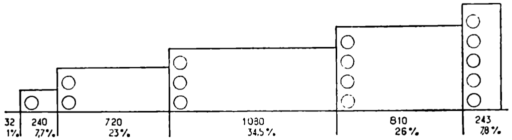


Fig. 58

120. Avem $m = \frac{1}{N} \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} C_n^i \, b^{n-i} \, i a^{i-1} =$

$$= \frac{1}{N} \cdot a \cdot \frac{d(a+b)^n}{da} = \frac{a}{N} \cdot n\,(a+b)^{n-1} = \frac{na}{a+b} = np.$$

Regăsim rezultatul din problema **117.**

$$m'' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} i^2 C_n^i \, b^{n-i} a^i = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{n} i\,(i-1)\, C_n^i \, b^{n-i} \, a^i + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{n} i \, C_n^i \, b^{n-i} \, a^i \right)$$

A doua parte a sumei a fost calculată: este np.

Pentru a calcula prima parte, dăm a^2 factor comun, și obținem ca termen general $C_n^i \, b^{n-i} \, i\,(i-1)\, a^{i-2}$, care este derivata a doua a termenului respectiv din 1; calculăm deci derivata a doua (în raport cu a) a expresiei $(a+b)^n$; obținem: derivata $1 = n(a+b)^{n-1}$; derivata a doua $n(n-1)\,(a+b)^{n-2}$. Așadar,

$$m'' = \frac{1}{N} \cdot a^2 \cdot n(n-1)\,(a+b)^{n-2} + np = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \cdot n(n-$$
$$-1) + np = n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np.$$

Rezultă

$$M = m'' - m^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$$

— formulă foarte importantă în teoria probabilităților.

Vom căuta însă și altă metodă pentru calculul lui m și M, fără a folosi derivata.

121. Însumînd numerele din tablou întîi pe coloane, obținem

$$S = (s_1 + k\alpha_1) + (s_1 + k\alpha_2) + \ldots + (s_1 + k\alpha_h) = hs_1 + ks_2$$

(unde $s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, $s_2 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_h$)

Împărțind pe S la numărul elementelor kh, obținem

$$m = m_1 + m_2$$

Pentru M, avem de făcut suma S a termenilor

$[a_i + \alpha_j - (m_1 + m_2)]^2$, pe care îi scriem $[(a_i - m_1) + (\alpha_j - m_2)]^2$

$$\begin{aligned} S = {} & [(a_1 - m_1) + (\alpha_1 - m_2)]^2 + \ldots + [(a_1 - m_1) + (\alpha_h - m_2)]^2 + \\ & + [(a_2 - m_1) + (\alpha_1 - m_2)]^2 + \ldots + [(a_2 - m_1) + (\alpha_h - m_2]^2 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [(a_k - m_1) + (\alpha_1 - m_2)]^2 + \ldots + [(a_k - m_1) + (\alpha_h - m_2)]^2 \end{aligned}$$

Suma termenilor din coloana 1 este

$$(a_1 - m_1)^2 + \ldots + (a_k - m_1)^2 + k(\alpha_1 - m_2)^2 +$$
$$2\,(\alpha_1 - m_2)\,(a_1 - m_1 + a_2 - m_1 + \ldots + a_k - m_1)$$

 Ultimul termen este nul, căci $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = km_1$

Analog la celelalte coloane. Însumînd acum rezultatele din cele h coloane, obţinem

$$S = [S_1 + k(\alpha_1 - m_2)]^2 + [S_1 + k(\alpha_2 - m_2)^2] + \\ + \ldots + [S_1 + k(\alpha_h - m_2)^2$$

$$S = hS_1 + kS_2.$$

Împărţind cu kh

$$M = M_1 + M_2$$

121. *bis.* 1) Dacă avem 3 mulţimi: R_1, R_2 şi $R_3 = A_1, A_2, \ldots, A_H$ şi formăm mulţimea R' avînd ca elemente sumele $a_i + \alpha_j + A_l$, vom avea

$$m = m_1 + m_2 + m_3; \quad M = M_1 + M_2 + M_3$$

(mulţimea R' se formează din R şi R_3, aşa cum R s-a format din R_1 şi R_2).

Analog pentru mai multe mulţimi.

2) Fie $m^{(n)} = \frac{1}{kh} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} [a_i + \alpha_j - (m_1 + m_2)]^r$, $m_1^{(n)}$, $m_2^{(n)}$ expresiile analoge în R_1 şi R_2.

Avem

$$[(a_i - m_1) + (\alpha_j - m_2)]^p = (a_i - m_1)^n + \ldots + \\ + C_n^p(a_i - m_1)^{n-p}(\alpha_j - m_2)^p + \ldots + (\alpha_j - m_2)^n$$

Sînt kh astfel de termeni; pentru uşurinţă, dacă cititorul consideră necesar, îi poate scrie, ca şi în cazul $n = 2$, într-un tablou cu k linii şi h coloane.

Dînd lui j o valoare fixă şi lui i valorile $1, 2, \ldots, k$, obţinem termenii de pe coloana j cu suma

$$(a_1 - m_1)^n + \ldots + (a_k - m_1)^n + \ldots + C_n^p(\alpha_j - \\ - m_2)^p[(a_1 - m_1)^{n-p} + \ldots + (a_k - m_1)^{n-p}] + \\ + \ldots + k(\alpha_j - m_2)^n$$

Însumăm rezultatele de la toate coloanele, adică facem aici $j = 1, 2, \ldots h$ și adunăm

$$S^{(n)} = h\, S_1^{(n)} + \ldots + C_n^p\, S_1{}^{(n-p)}\, S_2^{(p)} + \ldots + k S_2^{(n)}$$

Împărțind cu kh,

$$m^{(n)} = m_1^{(n)} + \ldots + C_n^p\, m_1{}^{(n-p)}\, m_2^{(p)} + \ldots + m_2^{(n)}$$

Prescurtat:

$$m^{(n)} = (m_1 + m_2)^{(n)}$$

(exponent simbolic).

Ținînd seama că $m_1^{(1)} = \frac{1}{k} \sum (a_i - m_1) = 0$ și $m_2^{(1)} = 0$ obținem pentru $n = 2$ și $n = 3$

$m^{(2)} = m_1^{(2)} + m_2^{(2)}$; $m^{(3)} = m_1^{(3)} + m_2^{(3)}$ (prima întîlnită în problema precedentă cu notația $M = M_1 + M_2$), iar pentru $n = 4$

$$m^{(4)} = m_1^{(4)} + m_2^{(4)} + 6 m_1^{(2)}\, m_2^{(2)}.$$

122. În R_2 avem: $m = \dfrac{1 + 1 + \ldots + 1 + 0 + 0 + \ldots + 0}{a + b} =$

$$= \frac{a}{a+b} = p$$

$$M = \frac{1}{a+b}[(1-p)^2 + (1-p)^2 + \ldots + (1-p)^2 + (0-p)^2 + (0-p)^2 + \ldots + (0-p)^2] = \frac{a}{a+b}(1-p)^2 + \frac{b}{a+b}\cdot p^2 = pq^2 + p^2 q = pq\,(p+q) = pq$$

Pentru n urne identice, avem

$$m = p + p + \dots + p = np;\ M = pq + \dots + pq = npq.$$

123.

$$m^{(4)}(n + 1) = m^{(4)}(n) + m^{(4)} + 6\, m^{(2)}(n)\, m^{(2)}$$

$$m^{(4)}(n + 1) = m^{(4)}(n) + pq\,(1 - 3\,pq) + 6 \cdot npq \cdot pq$$

Dînd lui n valorile $1, 2, \dots, n - 1$ și adunînd, obținem

$$m^{(4)}(n) = npq\,(1 - 3\,pq) + 6\,p^2q^2 \frac{n(n-1)}{2}$$

$$m^{(4)}(n) = npq + 3\,n\,(n - 2)\,p^2q^2.$$

124. Obținem

$$\mu_2 > \frac{(N - l)\,\varepsilon^2}{N};\quad \frac{pq}{n} > \left(1 - \frac{l}{N}\right) \cdot \varepsilon^2;\quad \frac{l}{N} > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Oricît de mic ar fi numărul ε_1, putem lua pe n suficient de mare ca să avem $\frac{pq}{n\varepsilon^2} < \varepsilon_1$.

Vom lua $n > \frac{pq}{\varepsilon^2 \cdot \varepsilon_1}$.

Exemplu. Fie $p = q = \frac{1}{2}$ și $\varepsilon = \frac{1}{10}$; deci ne interesează numărul l al grupelor în care frecvența α satisface inegalitățile $-\frac{1}{10} < \alpha - \frac{1}{2} < \frac{1}{10}$; $\frac{2}{5} < \alpha < \frac{3}{5}$ (frecvența să fie între 40% și 60%).

Raportul $\frac{l}{N}$ (frecvența grupelor care satisfac condiția pusă) poate fi oricît de apropiat de 1. Dacă, de pildă, vrem ca $\frac{l}{N} > 0{,}99$, ceea ce înseamnă $\frac{pq}{n\varepsilon^2} < \frac{1}{100}$, vom lua $\left(n > \frac{pq}{\varepsilon^2 \varepsilon^1}\right)$, $n > \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100}}$, $n > 2\,500$. Dacă vrem ca $\frac{l}{N} > 0{,}999$ vom lua $n > 25\,000$ etc.

Notă. Acest fapt simplu *aritmetic* — faptul că pentru valori mari ale lui n grupele în care frecvența este apropiată de p sînt cele mai numeroase (în sensul dat de inegalitățile scrise) — are o importanță *fundamentală* în calculul *probabilităților* (v. pr. 133).

Să remarcăm că „pragurile" găsite pentru n sînt calculate cu o largă aproximație în plus. Sensul demonstrației stă în afirmația „există n astfel ca...".

Calcule mai exacte — dar mai laborioase — pot furniza valori mai mici pentru pragurile lui n de la care inegalitățile considerate să fie satisfăcute.

125. Avem

$$m^{(4)}(n) = \frac{(a_1 - np)^4 + \ldots + (a_N - np)^4}{N} = npq + 3n(n-2)p^2q^2 \quad \text{(pr. 121)}$$

Împărțind peste tot cu n^4,

$$\mu_4 = \frac{(\alpha_1 - p)^4 + \ldots + (\alpha_N - p)^4}{N} = \frac{3p^2q^2}{n^2} + \frac{pq(1 - 6pq)}{n^3}$$

Dacă neglijăm cele l diferențe $|\alpha - p|$ mai mici ca ε și pe celelalte, mai mari ca ε, le înlocuim cu ε, obținem

$$\frac{N - l}{N} \cdot \varepsilon^4 < \frac{3p^2q^2}{n^2} + \frac{pq(1 - 6pq)}{n^3}$$

deci

$$\frac{l}{N} > 1 - \frac{3p^2q^2}{n^2\varepsilon^4} - \frac{pq(1-6pq)}{n^3\varepsilon^4}$$

Exemplu: pentru $p = q = \frac{1}{2}$, neglijăm ultimul termen.

Pentru a avea $1 - \frac{l}{N} < \varepsilon_1$, este suficient să luăm

$$\frac{3p^2q^2}{n^2\varepsilon^4} < \varepsilon_1; \text{ aici } pq = \frac{1}{4}, \text{ deci } n > \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}}{\varepsilon^2\cdot\sqrt{\varepsilon_1}}.$$

Dacă, la fel ca în problema **124**, luăm $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{100}$, obținem $n > \frac{0{,}45}{\frac{1}{1\,000}} = 450$ limită de circa 5 ori mai mică decît cea aflată prin $m^{(2)}$.

126. Dacă într-o grupă există 3 obiecte date (în problemă, biletele 3, 4 și 10), lîngă acestea mai sînt *două* (de ex. 5 și 7, 5 și 29 etc.) diferite de acestea, deci alese din celelalte 27 de obiecte. Deci numărul cazurilor favorabile este C_{27}^2.

$$p = C_{27}^2 : C_{30}^5 = \frac{27\cdot 26}{2} : \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{3\cdot 4\cdot 5}{30\cdot 29\cdot 28} =$$

$= \frac{1}{29\cdot 14} = \frac{1}{406}$ (Foarte puțin probabil! Ca și cînd dintr-o urnă cu 406 bile una singură ar fi albă și tocmai pe aceea vrem s-o nimerim).

127. Grupele care nu conțin pe 2, 5, 10 sînt formate numai din celelalte 7 bilete. Numărul lor: C_7^4.

$$p = (C_{10}^4 - C_7^4) : C_{10}^4 = 1 - q, \quad q = C_7^4 : C_{10}^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{6}$$

$$p = \frac{5}{6}.$$

În general, dacă q este probabilitatea evenimentului contrar (constituit din cazurile nefavorabile), avem $p + q = 1$.

128. $$A_{n-2}^{k-2}; \quad p = A_{n-2}^{k-2} : A_n^k = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Observație. Rezultatul nu depinde de k (de ce?).

129. În general, fie n numărul biletelor din urnă și k numărul persoanelor.

Numărul cazurilor posibile. Avem k urne identice, din fiecare se extrage un bilet (v. pr. 104); sînt n^k cazuri posibile.

Numărul cazurilor fără coincidențe: la prima urnă n, la a doua $n - 1$, la a treia $n - 2$ etc. deci A_n^k.

$$q = A_n^k : n^k.$$

Cu datele problemei, $q = \dfrac{365 \cdot 364 \ldots 336}{365^{30}} = \dfrac{364 \ldots 336}{365^{29}}$

Calcul cu logaritmi (direct e practic imposibil)

$$\begin{aligned} \log q &= 26 + 28 + 30 + 30 + 31 + 33 + 34 + 35 + \\ &+ 37 + 38 + 40 + 40 + 42 + 43 + 44 + 45 + \\ &+ 47 + 48 + 49 + 50 + 51 + 53 + 54 + 55 + \\ &+ 56 + 58 + 59 + 60 + 61 - 29 \cdot 62{,}3 \text{ (miimi)} = \end{aligned}$$

$$= 29 \cdot 44 + (-18 - 16 - 14 - 14 - 13 - 11 - 10 - 9 - 7 - 6 - 4 - 4 - 2 - 1 + 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 + 11 + 12 + 14 + 15 + 16 + 17) - 29 \cdot 62{,}3 = 29 \cdot (-18{,}3) + 1 \text{ (miimi)} = -0{,}530 = \bar{1}{,}470.$$

(Am folosit numai 3 zecimale neavînd nevoie de un rezultat mai exact; am scris numai zecimala 2^a şi a 3^a, căci partea întreagă şi prima zecimală fiind aceleaşi la toţi logaritmii se reduc.)

Găsim $q = 0{,}295$, deci $p = 0{,}705$.

Probabilitatea de a găsi coincidenţe este $p \approx 0.70$, mult mai mare ca aceea de a nu le găsi.

Dacă facem verificarea, de exemplu la 10 clase, vom găsi foarte probabil 7 (sau 6 sau 8) clase în care există doi elevi cu aceeaşi dată a naşterii.

Observaţii. 1. Am folosit ca model o urnă cu 365 bilete. Este justă asimilarea situaţiei concrete din problemă cu extragerea unor bilete dintr-o urnă? Da, numai în ipoteza că *datele de naştere sînt egal de probabile.* Este justă această ipoteză? — aceasta nu mai e o problemă de *matematică*, ci de studiu direct asupra realităţii. E sigur că într-o problemă analogă, unde ar fi fost vorba de naşterea oilor, ipoteza nu e conformă realităţii, căci mieii se nasc numai primăvara.

Chestiuni asemănătoare se pun ori de cîte ori se aplică matematica la situaţii reale. Instrumentul matematic e totdeauna corect şi riguros; adecvarea lui la situaţia reală e o chestiune care trebuie verificată.

2. Problema este reprezentativă pentru necesitatea unui *calcul* de probabilităţi. Intuitiv, nu putem spune nimic în legătură cu probabilitatea cerută sau chiar sîntem înclinaţi să spunem: e greu (puţin probabil să

apară coincidențe). Calculul ne arată la ce trebuie să ne așteptăm.

130. *Soluția* 1. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_a, B_1, B_2, \ldots B_b$ bilele urnei. Dacă am tras întîi pe A_1, a doua oară putem trage una din bilele rămase $A_2 \ldots A_a\ B_1 \ldots B_b$. Avem $a + b - 1$ cazuri de forma:

$$A_1 \times \{ A_2 \ldots A_a\ B_1 \ldots B_b \}$$

Din acestea favorabile sînt $a - 1$ cazuri.

Analog, dacă prima bilă extrasă este A_2 sau $A_3 \ldots$ sau A_a.

Dacă am tras întîi B_1 avem $a + b - 1$ cazuri de forma

$$B_1 \times \{ A_1, A_2, \ldots, A_a, B_2, \ldots B_b \}$$

din care favorabile sînt a cazuri. La fel pentru fiecare din cele b bile negre.

Cazuri posibile $(a + b - 1) \cdot (a + b)$

Cazuri favorabile $a(a - 1) + ab = a(a + b - 1)$

Rezultă $p = \dfrac{a}{a + b}$

Găsim deci că probabilitatea de a scoate alb a doua oară — după ce am scos o bilă oarecare — este aceeași ca la prima extracție. Cum ne explicăm acest rezultat?

Soluția 2. Fie $a + b = n$. Făcînd două extrageri succesive, înseamnă că facem A_n^2. Cîte din grupele lui A_n^2 au ca a doua bilă pe A_1? Tot atîtea cîte au ca a doua bilă pe $A_2, \ldots$, pe A_a, pe $B_1 \ldots$ pe B_b — *căci toate bilele joacă același rol.* Deci a doua bilă este A_1 în $\frac{1}{n} \cdot A_n^2$ grupe; a doua bilă este A_2 tot în $\frac{1}{n} \cdot A_n^2$ grupe etc.

Rezultă că a doua bilă este albă în $a \cdot \frac{1}{n} \cdot A_n^2$ grupe din totalul de A_n^2 grupe. Deci $p = \frac{a}{n}$.

Generalizare. Scoatem pe rînd k bile — necunoscute — din urnă. Care este probabilitatea ca următoarea bilă scoasă să fie albă?

Un raţionament *identic* cu cel din soluţia 2 ne arată că ea este tot $\frac{a}{a+b}$. (Se vede aici cît este de util de a folosi observaţia că toate bilele joacă acelaşi rol).

Găsim deci că şi atunci cînd scoatem întîi k bile oarecare ($k < n$), probabilitatea de a scoate apoi alb *rămîne aceeaşi.*

Deoarece acest rezultat poate să surprindă, să raţionăm şi altfel: în tabloul A_n^k sînt grupe în care A_1 ocupă primul loc, *altele* în care ocupă al doilea loc, ... altele în care ocupă locul k. Sînt tot atîtea grupe în fiecare caz; adică, sînt tot atîtea şanse ca A_1 să cadă pe locul 1 sau pe locul k. Probabilitatea de a scoate A_1 la prima extragere sau la a k^a extragere este aceeaşi. La fel, probabilitatea de a scoate alb.

131. Faptul de a cunoaşte prima bilă extrasă schimbă complet problema. Dacă ea este albă, rămîn $a + b - 1$ bile în care $a - 1$ albe; probabilitatea de a scoate a doua oară alb este $p' = \frac{a-1}{a+b-1}$. Dacă prima bilă scoasă este neagră, probabilitatea de a scoate a doua oară alb este $p'' = \frac{a}{a+b-1}$.

132. Fie $A_1, A_2, \dots A_a$ și $B_1, B_2, \dots B_b$ bilele. Dacă la prima extragere s-a scos bila A_1, în locul ei se pune B_0. La a doua extragere putem scoate $A_2, \dots, A_a, B_1, \dots B_b, B_0$

Analog dacă s-a scos $A_2, A_3, \dots, A_a$.

Dacă la prima s-a scos B_1, în locul ei se pune A_0 și la a doua putem scoate $A_1, \dots, A_a, A_0, B_2, \dots B_b$. Analog pentru $B_2, \dots, B_b$.

Numărul total de cazuri: $(a + b)(a + b)$

1) Numărul de cazuri în care a doua oară se scoate alb: $(a - 1)a + (a + 1)\cdot b$; (negru: $(b + 1)a + (b - 1)b$).

2) Numărul de cazuri în care se scoate aceeași culoare: (alb în primele a cazuri, negru în următoarele b cazuri)

$$(a - 1)a + (b - 1)\cdot b.$$

(Iar culoare contrară: $(b + 1)a + (a + 1)b$).

Ca verificare, și în problema 1) și în 2), adunînd cele două numere obținute, găsim numărul total de cazuri.

133. 1) În loc de n urne identice $U(a + b)$, putem folosi o urnă de n ori (de fiecare dată punînd bila scoasă înapoi).

Formula

$$N = (a + b)^n = b^n + C_n^1 b^{n-1} a + \dots + C_n^i b^{n-i} a^i + \dots + a^n$$

arată că se pot forma N grupe, dintre care sînt $t_i = C_n^i\, b^{n-i}\, a^i$ grupe cu i bile albe.

Interpretare: făcînd n extrageri din U, probabilitatea de a scoate i bile albe este $p_i = t_i/N$.

2) Cel mai probabil este să scoatem k bile albe, unde k este întregul numărului $(n + 1)p$ (pr. **118**).

3) Din cele N grupe, sînt l grupe la care diferența între frecvență și probabilitate este în modul mai mică decît ε, $|f - p| < \varepsilon$. Raportul $\frac{l}{N}$ este probabilitatea ca

în n extrageri să obținem o grupă la care $|f - p| < \varepsilon$

Exemplu: $a = b$, deci $p = \frac{1}{2}$ (de pildă o bilă albă și una neagră sau jocul cu banul unde alb înseamnă stemă, negru marca); $\varepsilon = \frac{1}{10}$ și $n = 100$ înseamnă că jucăm un joc în care mizăm pe faptul că din 100 extrageri vom obține alb de un număr de ori cuprins între 40 și 60 $\left(\frac{60}{100} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}\right)$.

Raportul $\frac{l}{N}$ este în acest caz (pr. 124)

$$\frac{l}{N} > 1 - \frac{pq}{n \cdot \varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{400 \cdot \frac{1}{100}} = 0{,}75.$$

Probabilitatea de a scoate alb de k ori cu $40 < k < 60$ este mai mare decît 0,75.

Dacă însă $n > 2\,500$, probabilitatea ca $\left| f - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{10}$ devine mai mare decît 0,99 (deci foarte aproape de certitudine).

4) Calcule mai exacte arată că e suficient să luăm $n > > 450$ pentru ca această probabilitate să fie $> 0{,}99$ (pr. **125**).

Dînd cu banul de 1 000 de ori, probabilitatea ca banul să cadă de un număr de ori situat între 400 și 600 este mai mare ca 0,99. Nu este exclus ca acest număr să fie mai mic ca 400 sau mai mare ca 600, de pildă să nu cadă niciodată, dar este extrem de puțin probabil.

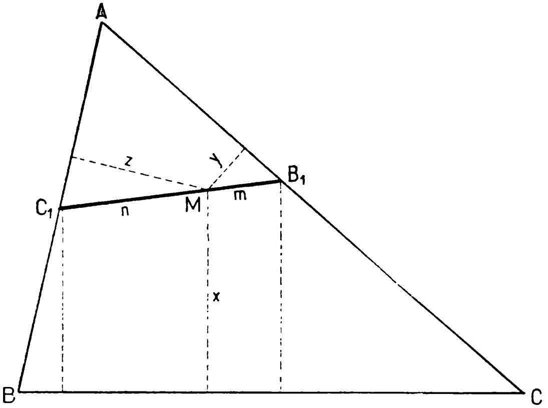


Fig. 59

134. Dacă știm că șansa de a urca este de 3 ori mai mare ca aceea de a coborî — ceea ce rezultă cu probabilitate din frecvențele observate — deducem că durata de parcurs de la etajul 6 la ultimul este de 3 ori mai mică decît dela parter la etajul 6, deci există 8 etaje.

Acest rezultat nu este absolut sigur, ci numai foarte probabil, deoarece nu este exclus, ci numai foarte puț inprobabil ca frecvența observată să difere mereu de probabilitate.

135. Dacă $y = 0$ (punctul P pe latura AC, fig. 59), relația $x = y + z$ devine $x = z$, deci o poziție a lui P este B_1, piciorul bisectoarei din B. Analog C_1 al celei din C.

Să arătăm că pentru toate punctele segmentului B_1C_1 relația $x = y + z$ este satisfăcută.

Fie d_1 distanța de la B_1, la BC și la AB. Analog, d_2 pentru C_1.

Fie M un punct pe B_1C_1; notăm $MB_1 = m$, $MC_1 = n$ și x,y,z distanțele lui M la laturile a, b, c. Pe x îl calculăm din trapezul $B_1C_1\ B_2C_2$. Ducînd prin C_1 (dacă $C_1C_2 < B_1B_2$) paralelă la BC, avem

$$\frac{MN}{d_1 - d_2} = \frac{n}{m+n} \quad \text{deci} \quad x = d_2 + \frac{n}{m+n}(d_1 - d_2) = \frac{md_2 + nd_1}{m+n}$$

Pe z îl calculăm ducînd perpendicularele din M și din B_1 pe AB. Analog, pe y

$$\frac{z}{d_1} = \frac{n}{m+n} \qquad \frac{y}{d_2} = \frac{m}{m+n}$$

Rezultă $x = y + z$.

Vedem direct că pentru P în interiorul triunghiului AB_1C_1 ($PM \perp BC$), x crește, iar y și z scad, deci aici $x > y + z$.

Găsim că pentru a se putea construi triunghiul cu laturile x, y, z este necesar și suficient ca P să fie în interiorul triunghiului $A_1B_1C_1$, format de picioarele bisectoarelor.

Să calculăm raportul între aria s a acestui triunghi și aria S a triunghiului dat. Este mai ușor să calculăm ariile s_1, s_2, s_3 ale triunghiurilor AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1.

Raportul ariilor a două triunghiuri ce au un unghi comun este egal cu raportul între produsele laturilor care îl mărginesc.

Deci

$$\frac{s_1}{S} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}$$

Însă, folosind teorema bisectoarei, găsim că

$$AB_1 = \frac{bc}{a + c}, \quad AC_1 = \frac{bc}{a + b}$$

Obținem $\frac{s_1}{S} = \frac{bc}{(a + b)(a + c)}$.

$$p = \frac{S - (s_1 + s_2 + s_3)}{S} = 1 - \left[\frac{bc}{(a + b)(a + c)} + \right.$$

$$\left. + \frac{ca}{(b + c)(b + a)} + \frac{ab}{(c + a)(c + b)}\right]$$

Efectuînd calculul, găsim

$$p = \frac{2abc}{(a + b)(a + c)(b + c)}$$

Observație. În cazul triunghiului echilateral $p = \frac{1}{4}$. Acesta este p maxim (căci presupunînd produsul abc dat, suma celor 8 termeni de la numitor este minimă pentru termeni egali, ceea ce dă $a = b = c$).

136. 1. 3, 13, 23, 33; 4, 14, 24, 34.
3, 10, 17, 24; 4, 11, 18, 25.

2. Dacă $a = mq + r_a$, $b = mq' + r_b$, atunci

$$a + b = m(q + q') + (r_a + r_b)$$

$$a \cdot b = m(mqq' + qr_b + q'r_a) + r_a r_b$$

 $a + b \equiv r_a + r_b \pmod{m} \qquad a \cdot b \equiv r_a \cdot r_b \pmod{m}$

Dacă a, respectiv b, variază rămînînd în aceleași clase, se schimbă numai q, respectiv q', dar congruențele scrise rămîn aceleași.

Spunem că: suma, respectiv produsul, a două clase este tot o clasă, anume clasa în care se află suma, respectiv produsul, a doi reprezentanți *oarecare* ai claselor date. În exerciții numerice este mai ușor de lucrat cu reprezentanții cei mai mici ai claselor; în unele chestiuni teoretice este de preferat să se lucreze cu reprezentanți oarecare. Definițiile date se extind pentru sume și produse de mai multe clase.

3. 1) *modulo* 10: $\dot{3} + \dot{5} = \dot{8}$; $\dot{3} + \dot{9} = \dot{2}$

$\dot{3} + \dot{7} = \dot{0}$; $\dot{3} \cdot \dot{7} = \dot{1}$; $(\dot{3})^2 = \dot{9}$, $\dot{3}^3 = \dot{9} \cdot \dot{3} = \dot{7}$, $\dot{3}^4 =$
$= \dot{7} \cdot \dot{3} = \dot{1}$

— sau direct $3^4 = 81$, $81 \equiv 1 \pmod{10}$. $\dot{7} \cdot \dot{3}^2 + \dot{4} \cdot$
$\cdot \dot{3} + \dot{8} = \dot{3} + \dot{2} + \dot{8} = \dot{3} + \dot{0} = \dot{3}$

2) *modulo* 7: $\dot{3} + \dot{2} = \dot{5}$; $\dot{3} + \dot{4} = \dot{0}$; $\dot{3} + \dot{6} = \dot{2}$;

$\dot{3} \cdot \dot{4} = \dot{5}$; $\dot{3}^2 = \dot{2}$, $\dot{3}^3 = \dot{2} \cdot \dot{3} = \dot{6}$, $\dot{3}^4 = \dot{6} \cdot \dot{3} = \dot{4}$ sau
$\dot{3}^4 = \dot{3}^2 \cdot \dot{3}^2 = \dot{4}$

— sau $3^4 = 81$, $81 \equiv 4 \pmod{7}$; $\dot{3}^6 = \dot{3}^4 \cdot \dot{3}^2 = \dot{4} \cdot \dot{2} = \dot{1}$;

$\dot{5} \cdot \dot{3}^2 + \dot{0} \cdot \dot{3} + \dot{1} = \dot{3} + \dot{0} + \dot{1} = \dot{4}$ $(\dot{5} \cdot \dot{3}^2 = \dot{5} \cdot \dot{2} = \dot{3}$
sau $\dot{5} \cdot \dot{3}^2 = \dot{5} \cdot \dot{3} \cdot \dot{3} = \dot{1} \cdot \dot{3} = \dot{3})$

Observație. Deoarece adunarea și înmulțirea claselor se face cu ajutorul acestor operații aplicate unor *numere*, rezultă că ele au proprietățile de bază de la numere: fiecare este asociativă și comutativă, înmulțirea este distributivă față de adunare.

137. 1) $a \equiv r\ (m)$ înseamnă că $a = mq + r$. Orice $d \cdot c \cdot$ al numerelor m și r divide și pe a, căci din $m = d\, m_1$, $r = d\, r_1$ rezultă $a = d\, (m_1 q + r_1)$, deci este și $d \cdot c \cdot$ al numerelor a și m. Reciproc, orice $d \cdot c$ al numerelor a și m divide și pe r, căci din $a = d\, a_1$, $m = dm_1$, rezultă $r = d\, (a_1 - m_1 q)$, deci este și $d \cdot c \cdot$ al numerelor r și m. Mulțimea $d \cdot c \cdot$ ai numerelor a și m coincide cu mulțimea $d \cdot c \cdot$ ai numerelor r și m. În particular, cele mai mari numere din cele două mulțimi coincid.

Dacă $(r, m) = 1$ adică r și m sînt prime între ele, toate numerele din clasa lui r vor fi prime cu modulul.

Dacă $(r, m) = d$, toate numerele din clasa lui r se divid cu d.

2) Relația $(a, m) = 1$ poate fi interpretată și astfel: dacă numerele sînt descompuse în factori primi (și presupunînd cunoscută teoria acestei descompuneri) nici un factor prim al lui m nu se află printre factorii primi ai lui a.

Din $(a, m) = 1$ și $(b, m) = 1$ rezultă că nici un factor prim al lui m nu se află în a și nici în b, deci nici în produsul ab, adică și $(ab, m) = 1$.

138. Scădem reprezentanți oarecare ai claselor respective (aleși cu condiția ca scăderea să se poată face).

modulo 10. $\dot{7} - \dot{3} = \dot{4}$ căci $\dot{4} + \dot{3} = \dot{7}$; $\dot{7} - \dot{9} = \dot{8}$ $(17 - 9 = 8)$ căci $\dot{8} + \dot{9} = \dot{7}$; $\dot{2} - \dot{2} = \dot{0}$.

modulo 7. $\dot{5} - \dot{1} = \dot{4}$; $\dot{5} - \dot{6} = \dot{6}$ $(12 - 6 = 6)$; $\dot{2} - \dot{2} = \dot{0}$.

139. $10 \equiv 1\ (9)$, deci $10^n \equiv 1\ (9)$.
$7823 \equiv 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3\ \ (9)$

Observație. Un număr din clasa de rest 6 modulo 7 poate fi scris $M7 + 6$. Dar el mai poate fi scris $M7 + 7 - 1$. Analog, un $M7 + 5$ poate fi scris și $M7 - 2$ etc. O notație de felul $a \equiv -1 \pmod 7$ înseamnă că $a = M\,7 - 1$ (sau $a + 1 = M7$ sau $a + 1 \equiv 0$ (7)). Forma $M7 - r$ sau $M\,m - r$ se folosește de obicei pentru $r < \frac{m}{2}$, pentru a face calculul mintal mai ușor.

Regăsim aceste forme dacă facem împărțirea în clase a tuturor numerelor întregi (inclusiv a celor negative); de exemplu: $-16 = -21 + 5 = 7\cdot(-3) + 5$, de aceea putem scrie $-16 \equiv 5 \pmod 7$, adică -16 este în clasa de rest 5, mod 7.

140. a) deoarece pentru $n \geqslant 2$, $10^n \equiv 0$ (4), $N \equiv 10\,z + u$ (4), $10\,z + u$ fiind numărul format de ultimele două cifre ale numărului N.

b) Pentru $n \geqslant 3$, $10^n \equiv 0$ (8), deci $N \equiv 100\,s + 10\,z + u$ (8) — numărul format de ultimele 3 cifre; de exemplu: $23\,782 \equiv 782$ (8). Pentru calcul mintal, putem folosi faptul că $10^2 \equiv 4$ (8), deci $10^2 \cdot s \equiv 0$ sau 4 (8) după cum s este par sau impar. Exemple: $782 \equiv 4 + 2 = 6$ (8); $645 \equiv 45 \equiv 5$ (8).

c) $10 = 11 - 1$, deci $10^2 \equiv 1$ (11); $10^3 = 10^2 \cdot 10$, deci $10^3 \equiv 10$ (11). $10^4 = 10^2 \cdot 10^2$, $10^4 \equiv 1$ (11) etc. Găsim $10^{2n} \equiv 1$ (11), $10^{2n+1} \equiv -1$ (11) (în înțelesul $10^{2n+1} = M\,11 + 10 = M\,11 - 1$).

$7385 = 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5 \equiv -7 + 3 - 8 + 5 \equiv -7 \equiv 4 \pmod{11}$

În general, $N \equiv (a_1 + a_3 + \ldots) - (a_2 + a_4 + \ldots)$, mod. 11, unde $a_1, a_2, a_3 \ldots$ sînt cifrele de ordinul 1,2,3 ... adică respectiv cifra unităților, zecilor, sutelor etc.

d) Avem $10 \equiv 3$, $10^2 \equiv 2$, $10^3 \equiv 6$, $10^4 \equiv 4$, $10^5 \equiv 5$, $10^6 \equiv 1$ (modulo 7) apoi $10^7 \equiv 3$, $10^8 \equiv 2$ ... (se repetă).

Găsim o regulă mai complicată decît în cazurile precedente. De exemplu $18\,349 \equiv 1 \cdot 4 + 8 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 9 \pmod 7$.

Putem proceda şi astfel: pornim de la faptul că $10^3 \equiv 6\ (7)$ adică $1000 = M7 - 1$. Despărţim numărul ca în exemplul: $18\,349 = 18 \cdot 1000 + 349 = 18\,(M\,7 - 1) + 349 = M\,7 + 349 - 18$, rămînînd a afla prin calcul direct în ce clasă se află diferenţa $349 - 18$.

e) Exemplu. $6215_{(8)} = 6 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 5$ însă $8 \equiv 1\ (7)$ deci şi $8^n \equiv 1\ (7)$. Aşadar

$6215_{(8)} \equiv 6 + 2 + 1 + 5 \pmod 7$. Regula este analogă cu aceea modulo 9 pentru numerele scrise în baza 10. Regăsim aceeaşi regulă pentru modulo $B - 1$, cînd numerele sînt scrise în baza B.

f) $6215_{(8)} \equiv 5 \pmod 8$ — în general un număr este în clasa dată de ultima cifră.

g) analog cu d).

h) $8 \equiv 3,\ 8^2 \equiv 4,\ 8^3 \equiv 2,\ \ 8^4 \equiv 1\ (5)$ apoi se repetă: $8^5 \equiv 3,\ 8^6 \equiv 4 \ldots$

141. $7285 \equiv 4\ (9)$, $3427 \equiv 7\ (9)$; $4 \cdot 7 \equiv 1\ (9)$. Rezultă că produsul numerelor trebuie să fie în clasa 1 modulo 9. Însă rezultatul scris este în clasa 2, deci el nu este just.

Notă. Acest procedeu se numeşte „proba prin 9".

142. $7285 \equiv 3\ (11)$; $3427 \equiv 6\ (11)$.
$24\,065\,695 \equiv 5 + 6 + 6 + 4 - (9 + 5 + 2) \equiv 5\quad (11)$.
Însă $3 \cdot 6 \equiv 7 \not\equiv 5$, deci rezultatul scris nu este corect.

143. Acum iese şi proba prin 9 şi proba prin 11. Dacă rezultatul este greşit, diferenţa între el şi rezultatul corect este şi multiplu de 9 şi de 11 deci de 99. Întrucît e la fel de probabil ca greşeala să fie 1 sau 2, 3, ..., 99, 100, 101, ... 198, ... şi din 99 de numere consecutive numai unul e multiplu de 99, înseamnă că în medie din 99 de înmulțiri greșite, numai una scapă nesemnalată cînd iese și proba prin 9 și prin 11.

Ținînd seama că în general este mai probabil să se lucreze corect decît cu greșeli, rezultă că probabilitatea ca un rezultat la care s-au verificat și proba prin 9 și cea prin 11 — ca în exemplul nostru — să fie greșit este cu mult mai mică decît 1/100.

144. Oricum am așeza cifrele, numerele A și B sînt în clasa 5 (dată de suma cifrelor) modulo 9.

Dacă am avea $A = kB$, unde $k > 1$ pentru că $A \neq B$ și $k < 9$ (căci $122\,346\,689 \cdot 9$ este un număr cu 10 cifre), ar însemna că $\dot{5} \cdot \dot{k} = \dot{5}$, ceea ce nu e posibil decît pentru $k = 1$, adică pentru $k = M\,9 + 1 > 10$.

145.

	3·1	3·2	3·3	3·4	3·5	3·6	3·7	3·8	3·9	3·10
Clasa	3	6	9	2	5	8	1	4	7	0

Se observă că multiplii lui 3 parcurg *toate* clasele de resturi (în fiecare clasă e un multiplu de 3).

Interpretare. Considerăm produsele $\dot{3} \cdot \dot{x} = \dot{r}$; cînd x parcurge toate clasele, și r parcurge toate clasele. Ecuația $\dot{3} \cdot \dot{x} = \dot{r}$, unde r este dat, are o soluție și numai una. Exemplu: $\dot{3} \cdot \dot{x} = \dot{1}$. Tabelul întocmit ne arată că $x = 7$.

Împărțirea este operația inversă înmulțirii; de exemplu, $\dot{1} : \dot{3}$ înseamnă să găsim $\dot{x}$ astfel ca $\dot{3} \cdot \dot{x} = \dot{1}$.

Rezultatul găsit poate fi interpretat și astfel: în mulțimea claselor de resturi modulo 10, orice împărțire cu împărțitorul 3 este posibilă.

	4·1	4·2	4·3	4·4	4·5	4·6	4·7	4·8	4·9	4·10
clasa:	4	8	2	6	0	4	8	2	6	0

Interpretare. Ecuația $\dot{4} \cdot \dot{x} = \dot{r}$ nu are soluție dacă r este impar; dacă r este par, ea are două soluții.

Interpretare geometrică. Dacă împărțim cercul în 10 arce egale și unim punctele de diviziune din 3 în 3, trecem prin toate vîrfurile și obținem decagonul stelat. Dacă, însă, le unim din 4 în 4, trecem numai prin 5 vîrfuri și obținem pentagonul stelat.

146. Dacă ai și aj *ar fi* în aceeași clasă, diferența lor ar fi multiplu de m

$$a(j - i) = m \cdot c$$

Dar m este prim cu a (presupunînd numerele descompuse în factori primi, nici un factor al lui m nu e în a; ar însemna că toți sînt în $j - i$); *ar însemna* că $j - i$ este divizibil cu m, *ceea ce nu se poate*, pentru că $j - i < m$.

Interpretare. Ecuația $\dot{a} \cdot \dot{x} = \dot{b}$, unde $(a, m) = 1$ are soluție; ea e unică.

147. În acest caz toate numerele, afară de acelea din clasa 0 (care conține multiplii lui p), sînt prime cu modulul.

Orice ecuație $\dot{a} \cdot \dot{x} = \dot{b}$ cu $\dot{a} \neq \dot{0}$ are soluție unică; altfel spus: orice împărțire în care numitorul este diferit de $\dot{0}$ este posibilă.

148. 1) Rezultă din problema precedentă și din observația de la problema **136.**

2) Fie $r_1 = 1, r_2, r_3, \ldots, r_\varphi$ numerele mai mici ca m și prime cu m (reprezentanți ai claselor ce conțin numere prime cu modulul). Din $(r_i, m) = 1$ și $(r_j, m) = 1$ rezultă $(r_i r_j, m) = 1$ deci înmulțirea este lege de compoziție internă. Fie a unul din aceste numere $(a, m) = 1$.

Produsele $ar_1, ar_2, \ldots, ar_\varphi$ sînt în clase distincte (căci, conform pr. **146**, toate produsele $a \cdot 1, a \cdot 2, \ldots, a \cdot m$ sînt în clase distincte). Deci aceste φ produse constituie un alt sistem de reprezentanți ai tuturor claselor cu numere prime cu modulul.

Ecuația $\dot{a} \cdot \dot{x} = \dot{r}$ are o soluție și numai una.

Cînd $m = p$, prim, regăsim punctul 1 al problemei.

Exemplu: $m = 15$. Clasele cu numere prime cu modulul sînt: $\dot{1}, \dot{2}, \dot{4}, \dot{7}, \dot{8}, \dot{11}, \dot{13}, \dot{14}$. Pentru a rezolva, de exemplu, ecuația $\dot{7}\,\dot{x} = \dot{2}$, facem toate înmulțirile

$7 \cdot 1$,	$7 \cdot 2$,	$7 \cdot 4$,	$7 \cdot 7$,	$7 \cdot 8$,	$7 \cdot 11$,	$7 \cdot 13$,	$7 \cdot 14$
7	14	13	4	11	2	1	8

Citim că ecuația $\dot{7} \cdot \dot{x} = \dot{2}$ are soluția $\dot{x} = \dot{11}$, ecuația $\dot{7} \cdot \dot{x} = \dot{1}$ are soluția $\dot{x} = \dot{13}$ etc.

149. Există x_1 astfel cu $x_1 * a = b$. Avem $b * e = (x_1 * a) * e = x_1 * (a * e) = x_1 * a = b$

Nu există două elemente neutre; dacă și e_1 și e_2 ar fi neutre, am avea $e_1 * e_2 = e_1$ (căci e_2 este neutru) și $e_1 * e_2 = e_2$(căci e_1 este neutru), deci $e_1 = e_2 (= e_1 * e_2)$.

Soluția ecuației $a * x = b$ este unică: $x = a' * b$ — căci $a * (a' * b) = (a * a') * b = e * b = b$. Dacă x_1 verifică ecuația, adică $a * x_1 = b$, înmulțind cu a', obținem $a' * (a * x_1) = a' * b$, $x_1 = a' * b$, deci $x_1 = x$.

În particular, inversul unui element este unic, căci și ecuația $a * x = e$ are soluție unică.

150. Produsul claselor este independent de reprezentanții cu care lucrăm (problema **136**). Vom face produsul claselor $\dot{1} \cdot \dot{2} \ldots \widehat{p-1}$: 1) luînd ca reprezentanți numerele

$1, 2, \ldots, p-1$; 2) numerele $a \cdot 1, a \cdot 2, \ldots, a \cdot (p-1)$ (care reprezintă aceleaşi clase în altă ordine). Cele două produse vor fi în aceeaşi clasă

$a \cdot 1 \cdot a \cdot 2 \ldots a \cdot (p-1) \equiv 1 \cdot 2 \ldots \cdot (p-1) \pmod p$

deci

$(p-1)!\,(a^{p-1}-1) = p \cdot c$ (diferenţa este un multiplu de p)

Însă $(p-1)!$ nu conţine factorul p. Rezultă că $a^{p-1} - 1 = Mp$, ceea ce se mai scrie

Oricare ar fi a, $(a, p) = 1$, $a^{p-1} \equiv 1\ (p)$

Aceasta este teorema lui *Fermat*.

Ea mai poate fi enunţată astfel: orice clasă de resturi modulo p, afară de 0, la puterea $p-1$ este clasa 1.

Înmulţind relaţia $a^{p-1} - 1 = Mp$ cu a, obţinem

$$a^p - a = Mp$$

relaţie care este adevărată *pentru orice a* (şi în cazul cînd a este un Mp).

151. Din relaţia $(x+1)^p \equiv x^p + 1\ (p)$ rezultă că dacă $x^p \equiv x\ (p)$ atunci şi $(x+1)^p \equiv x+1\ (p)$. Însă în mod evident, $1^p \equiv 1\ (p)$. Deci pentru orice x, $x^p \equiv x\ (p)$.

152. Fie $r_1 = 1, r_2, \ldots, r_\varphi$ resturile prime cu m şi a unul din ele. Produsele

$$ar_1, ar_2, \ldots, ar_\varphi$$

constituie un alt sistem de reprezentanţi ai claselor de resturi prime cu modulul. Făcînd produsul acestor clase în două moduri, obţinem

$$a^\varphi \cdot r_1 r_2 \ldots r_\varphi \equiv r_1 r_2 \ldots r_\varphi \qquad (m)$$

$$r_1 r_2 \ldots r_\varphi (a^\varphi - 1) \equiv 0 \qquad (m)$$

m divide produsul din membrul I; dar nici un factor al lui m nu se află în $r_1 r_2 \ldots r_\varphi$; rezultă că $a^\varphi - 1$ este divizibil cu m, $a^\varphi - 1 \equiv 0\ (m)$ sau $a^\varphi \equiv 1\ (m)$.

Întrucît numărul φ depinde de m, îl vom nota $\varphi(m)$. Obținem

Teorema lui Euler. Dacă $(a, m) = 1$, atunci $a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (m)$.

153. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementele grupului, $*$ legea de compoziție, și a unul din ele, pe care îl compunem cu toate elementele

$$a * a_1,\ a * a_2, \ldots, a * a_n$$

Aceste „produse" reprezintă toate elementele grupului (în altă ordine). În adevăr, există un astfel de produs egal cu a_i, căci ecuația $a * x = a_i$ are soluție. (Soluția este unică, pentru că avem n produse, fiecare egal cu unul din cele n elemente, dacă unul din ele ar fi scris de două ori, nu ar fi scrise toate).

Avem deci

$$(a * a_1) * (a * a_2) * \ldots * (a * a_n) = a_1 * a_2 * \ldots * a_n$$

$$a^n * (a_1 * a_2 \ldots * a_n) = (a_1 * \ldots * a_n)$$

unde $a * a$ a fost notat a^2; $a^2 * a$ a fost notat a^3 etc. Relația arată că $a^n = e$.

Pentru orice element a al unui grup de ordinul n, $a^n = e$.

Teoremele Fermat și Euler sînt cazuri particulare ale acestei teoreme generale.

154.

Exp.:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1											
	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1
	3	9	1									
	4	3	12	9	10	1						
	5	12	8	1								
	6	10	8	9	2	12	7	3	5	4	11	1
	7	10	5	9	11	12	6	3	8	4	2	1
	8	12	5	1								
	9	3	1									
	10	9	12	3	4	1						
	11	4	5	3	7	12	2	9	8	10	6	1
	12	1										

155. Fie a^{n+1} prima putere egală cu una anterioară, adică a, a^2, a^3, ..., a^n sînt distincte, iar $a^{n+1} = a^m$, unde $1 \leqslant m \leqslant n$.

Dacă am avea $m > 1$, ar rezulta $a^n * a = a^{m-1} * a$, deci $a^n = a^{m-1}$, contrar ipotezei că a, a^2, ..., a^n sînt distincte. Rezultă că $m = 1$; $a^{n+1} = a$, deci $a^n = e$ (elementul neutru) c.c.t.d.

Spunem că a aparține exponentului n.

De exemplu, în tablou, 4 ap. exp. 6, iar 2 ap. exp. 12.

156. Dacă a ap. exp. n, n este un divizor al lui $p - 1$. În adevăr $a^{p-1} = 1$ (cf. t. lui Fermat); deoarece a, a^2, ... $a^n = 1$, $a^{n+1} = a$, $a^{n+1} = a^2$, ... rezultă că vom mai avea 1 pentru exp. 2 n, 3 n, ... deci $p - 1$ este multiplu de n.

157. Să ne fixăm atenția asupra puterilor lui 2 (mod. 13). Să facem produsele $8 \cdot 12$; $8 \cdot 7$. Avem $8 = 2^3$; $12 = 2^6$; deci $8 \cdot 12 = 2^9 = 5$; $8 = 2^3$, $7 = 2^{11}$; deci $8 \cdot 7 = 2^{14} = 2^2 = 4$. Fie împărțirile $7 : 6$; $3 : 6$. Avem $7 = 2^{11}$, $6 = 2^5$; deci $7 : 6 = 2^6 = 12$; $3 = 2^4$, $6 = 2^5$; deci $3 : 6 = 2^4 : 2^5 = 2^{16} : 2^5 = 2^{11} = 7$.

Calculul este foarte asemănător cu calculul cu logaritmi. Dacă $2^x = k$, spunem că x este indicele lui k (noțiune analoagă cu cea de logaritm: $10^2 = 100$; 2 este logaritmul lui 100). Pentru a face o înmulțire, de exemplu $8 \cdot 12$, 1) căutăm indicii; 2) facem suma lor; 3) căutăm ce element are ca indice această sumă. Dacă în loc de „indice“ scriem „logaritm“, avem regula de înmulțire a două numere cu ajutorul logaritmilor.

158. Fie R rădăcina primitivă și $R^a = k$. Pentru a găsi puterile lui k, luăm șirul multiplilor lui a și resturile lor în împărțirea prin $p - 1$. Cf. pr. 146, dacă $(a, p - 1) = 1$, obținem toate elementele, deci în acest caz k este rădăcină primitivă. Deci există $\varphi(p - 1)$ rădăcini primitive.

159. Din $2^{5\xi} = 2^{\alpha}$ rezultă $5\xi \equiv \alpha$ (mod. 12).

Șirul primilor 12 multipli ai lui 5 parcurg toate clasele mod. 12, deci va fi unul și numai unul într-o clasă dată.

Ecuația $x^3 = a$ o scriem $2^{3\xi} = 2^{\alpha}$. Deoarece $(3, 12) = 3$, multiplii lui 3 parcurg numai clasele cu numere multipli de 3

$3 \cdot 1$	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 3$	$3 \cdot 4$	$3 \cdot 5$	$3 \cdot 6$	$3 \cdot 7$	$3 \cdot 8$	$3 \cdot 9$	$3 \cdot 10$	$3 \cdot 11$	$3 \cdot 12$
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9	0

Exemplu: $x^3 = 5$; $2^{3\xi} = 2^9$. Rezultă $\xi = 3$ sau 7 sau 11 adică $x = 8$ sau 11 sau 7.

Analog în cazul general.

160. $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ sau $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv p - 1 \ (p)$.

Rezultă din teorema lui Fermat. Avem $x^{p-1} \equiv 1 \ (p)$, deci $\left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = p \cdot c$.

Diferența numerelor din cele două paranteze este 2; deci (pentru $p > 2$) sau unul sau celălalt este multiplu de p.

161. Dacă $x < \frac{p}{2}$ și $x_1 = p - x > \frac{p}{2}$, avem $x^2 \equiv x_1^2 \ (p)$. Dacă $x < \frac{p}{2}$ și $x_1 < \frac{p}{2}$, $x \neq x_1$, x^2 și x_1^2 nu pot fi în aceeași clasă, căci $x^2 - x_1 = (x - x_1)(x + x_1)$ și nici una din paranteze nu are factorul p, căci $x - x_1 < p$, $x + x_1 < p$.

Așadar, pentru $1 \leqslant x \leqslant \frac{p-1}{2}$, valorile lui x^2 sînt în clase distincte. Pentru $\frac{p+1}{2} \leqslant x \leqslant p - 1$, clasele lui x^2 sînt cele din primul caz în ordine inversă.

Notă. Elementele a pentru care $x^2 \equiv a \ (p)$ are soluții se numesc resturi patratice. Celelalte, nonresturi.

Resturile patratice au indici pari, iar nonresturile indici impari.

În cazul $p = 13$, resturile patratice sînt 2^k, unde

 $k = 2, 4, 6, 8, 10, 12$, adică: 4, 3, 12, 9, 10, 1.

Rezultă că produsul a două resturi sau a două nonresturi este rest (are indice par), pe cînd produsul între un rest și un nonrest este nonrest (are indice impar).

162. Cf. pr. 160, la exp. $\frac{p-1}{2}$ se află elementele $p - 1$ și 1. Dacă $p = 4k + 1$, atunci $\frac{p-1}{2}$ este par, deci $p - 1$ avînd indice par este rest patratic. Dacă $p = 4k + 3$, $\frac{p-1}{2}$ este impar, deci $p - 1$ este nonrest.

Interpretare. Numărul $x^2 + 1$ nu poate avea factori primi impari decît de forma $p = 4\ k + 1$, căci dacă $x^2 + 1 = Mp$, $x^2 = Mp + p - 1$ și $p - 1$ este rest patratic.

El poate avea și factorul 2, dar nu la exponent mai mare ca 1, căci dacă $x = 2\ m + 1$, $x^2 + 1 = 4\ m\ (m + 1) + 2 = 2 \cdot [2\ m\ (m + 1)\ + 1] = 2\ i$.

Dacă r este rest și $p - 1$ este rest (nonrest), produsul lor $p - r$ va fi rest (respectiv nonrest).

163. Lemă. Dacă $a^2 + b^2 = cp$ (1) și $A^2 + B^2 = C \cdot p$ (2), unde (a, b) și (A, B) nu sînt Mp, avem

$$cCp^2 = (aA \pm bB)^2 + (aB \mp bA)^2 \qquad (3)$$

Să arătăm că sau cu semnul superior sau cu celălalt, putem simplifica prin p^2. Înmulțind (1) cu B^2 și (2) cu b^2 și scăzînd,

$$a^2B^2 - b^2A^2 = cpB^2 - Cpb^2 = Mp;$$

$$(aB + bA)\ (aB - bA) = Mp.$$

Numerele $aB + bA$ și $aB - bA$ nu au ambele factorul p, căci suma lor este $2aB$, care nu e Mp (căci din $a = Mp$, prin (1) ar rezulta $b = Mp$ contrar ipotezei $(a, b) \neq$

Mp). Rezultă că *unul* din ele este Mp. Din (3) rezultă că dacă $aB + bA = Mp$, atunci şi $aA - bB$ este Mp şi putem simplifica prin p^2. Analog în al 2-lea caz.

Dacă în (1), p este la o putere mai mare, tot prin p^2 putem simplifica, deoarece $cp^\alpha B^2 - Cpb^2 = Mp$ (fără a fi Mp^2).

Obţinem prin simplificare cu p

$$cC = \alpha^2 + \beta^2$$

relaţie care, eventual, mai poate fi simplificată. Spunem că am eliminat factorul p.

Fie $a^2 + 1 = p_1p_2 \ldots p_h \cdot p$ (1′) şi $A^2 + B^2 = p_1$ (2′)

Aplicînd lema, eventual de mai multe ori, dacă p_1 este la o putere mai mare, vom obţine o relaţie de forma $\alpha^2 + \beta^2 = p_2 \ldots p_k \cdot p$. Împreună cu relaţia $A_2^2 + B_2^2 = p_2$, aplicînd lema, eliminăm pe p_2 etc., pînă ajungem la relaţia $p = \alpha^2 + \beta^2$.

Scrierea este unică, deoarece din $p = a^2 + b^2$ şi $p = A^2 + B^2$, prin aplicarea lemei am ajunge la $1 = \alpha^2 + \beta^2$.

E uşor de văzut că şi dacă $p_1 = 2$, simplificarea se poate face.

Note. 1) Din $p_1 = a^2 + b^2$ şi $p_2 = A^2 + B^2$, rezultă că p_1p_2 poate fi scris ca sumă de patrate în două moduri, apoi $p_1p_2p_3$ în patru moduri etc. De asemenea p^2, p^3 etc. pot fi scrise ca sume de două patrate în mod unic.

2) Evident, dacă $p = 4k + 3$, el nu poate fi scris $a^2 + b^2$, căci cu a par şi b impar obţinem $a^2 + b^2 = M4 + 1$.

3) Numărul $a^2 + b^2$ cu $(a, b) = 1$ are numai factori primi de forma $4k + 1$. În adevăr, fie $a^2 + b^2 = Mp$, $b^2 = Mp + r$; rezultă $a^2 = Mp - r$. Cf. pr. 162, nu putem avea r rest şi $p - r$ rest decît dacă $p = 4k + 1$.

164. Avem $13 = 3^2 + 2^2$; $13 = (3 + 2i)(3 - 2i)$. 13 NU este număr prim. Cf. pr. 163, numărul 2 și numerele prime $p = 4k + 1$ *NU* sînt prime în inelul lui Gauss.

Numerele prime de forma $p = 4k + 3$ sînt prime și în inelul lui Gauss. În adevăr, din $p = (a + bi)(c + di)$ rezultă

$p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Nu putem avea $p = a^2 + b^2$. Din $p^2 = a^2 + b^2$, rezultă $c^2 + d^2 = 1$ ($c = \pm 1$, $d = 0$ sau $c = 0$, $d = \pm 1$) ceea ce arată că $c + di$ ar fi o unitate a inelului. Nu am avea o descompunere în factori divizori proprii.

Dacă $p = 4k + 1$, $p = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$. Numărul $a + bi$ este prim (de asemenea $a - bi$). În adevăr, $(a, b) = 1$, deci $a + bi$ nu este divizibil cu nici un întreg obișnuit. Din $a + bi = (c + di)(e + fi)$ ar rezulta $a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)(e^2 + f^2) = p$, ceea ce conduce, ca mai sus, la concluzia că un factor este unitate și celălalt tot divizor impropriu.

Numere prime în inelul lui Gauss sînt numerele prime reale de forma $4k + 3$ și numerele complexe în care se descompun numerele prime de forma $p = 4k + 1$ sau $2 = (1 + i)(1 - i)$.

În afară de acestea nu mai sînt altele. În adevăr, fie $z = A + Bi$ cu $(A, B) = 1$; cf. pr. 163, $A^2 + B^2$ are numai factori primi de forma $p = 4k + 1$; fie $p = a^2 + b^2$ unul din ei. Avem

$$\frac{A + Bi}{a + bi} = \frac{aA + bB}{p} + i\frac{aB - bA}{p}$$

$$\frac{A + Bi}{a - bi} = \frac{aA - bB}{p} + i\frac{aB + bA}{p}$$

Cf. lemei de la soluția **163**, unul din aceste cîturi este întreg, deci $A + Bi$ este divizibil sau cu $a + bi$ sau cu $a - bi$.

165. Fie $z = t\,(A + Bi)$, $(A, B) = 1$.
Numărul real t îl descompunem în factori primi reali, în loc de 2 scriem $(1 + i)\,(1 - i)$ sau $-i\,(1 + i^2)$; factorii primi de forma $4k + 3$ îi lăsăm așa, pe cei de forma $4k + 1 = a^2 + b^2$ îi descompunem în $a + bi$ și $a - bi$ (care sînt numere prime distincte, nu se obține unul din altul prin înmulțire cu o unitate). Rămîne să descompunem pe $A + Bi$. Descompunem în factori primi reali pe $A^2 + B^2$.

$$A^2 + B^2 = p_1 p_2 \dots p_h$$

Scriem numărul p_1 (care este de forma $4k + 1$ sub forma $a^2 + b^2$. Arătăm ca și la soluția pr. 164 că $A + + Bi$ este divizibil sau cu $a + bi$ sau cu $a - bi$. Facem împărțirea și cu cîtul procedăm analog.

5

ALTE PROBLEME

Dăm mai jos cîteva probleme la care nu mai specificăm tipul; lăsăm cititorului plăcerea de a reflecta asupra caracterului problemei.

De asemenea, nu mai despărțim enunțul de „Cum gîndim" sau de „Soluție". Contăm pe faptul că cititorul s-a deprins *să întrerupă* lectura pentru a căuta întîi singur și s-a convins despre importanța acestui mod de lucru. Mod de lucru care trebuie menținut și în studiul oricărei expuneri matematice — nu numai al culegerilor de probleme. El este util și datorită faptului că multe tratate, pentru a realiza o expunere economică, mărginită la ceea ce este esențial din punct de vedere pur logic, nu mai arată cum s-a pus problema sau cum gîndim cînd dibuim în procesul de căutare a soluției. Operații foarte importante pentru înțelegerea profundă a lucrurilor și pe care trebuie să le facă cititorul singur.

166. La un congres au fost n oameni, dar nu fiecare din ei a dat mîna cu toți ceilalți. Să se arate că numărul acelora care au realizat un număr impar de strîngeri de mînă este par.

Soluție. La fiecare „A și B și-au dat mîna" se realizează *două* strîngeri de mînă. Deci numărul total de strîngeri de mînă s este par. Dacă socotim pe indivizi, unul a dat mîna de p_1 ori, altul de p_2 ori ..., (p, numere pare), un altul de i_1 ori, altul de i_2 ori ..., (i, numere impare); $p_1 + p_2 + \ldots + i_1 + i_2 + \ldots = s$ (par).

Numărul termenilor i este par.

167. Avem două cartonașe, unul cu ambele fețe albe, celălalt cu o față roșie și una albă. Se ia din sac unul la întîmplare și se așază pe masă. Vedem că fața de deasupra este albă. Care este probabilitatea ca pe cealaltă față să fie roșu?

Cum gîndim. Pe a doua față ar putea fi alb sau roșu; două cazuri. Deci $p = \frac{1}{2}$. Ar fi prea simplu ca să constituie o problemă. Am numărat toate cazurile posibile — egal de probabile între ele?

Soluție. Fie a_1, a_2 cele două fețe ale cartonului alb, și a, r ale celuilalt.

Cazuri posibile: 1) să scoatem primul carton și să-l așezăm cu a_1 deasupra; 2) idem, cu a_2 deasupra; 3) al doilea carton cu *a* deasupra; 4) idem cu *r* deasupra. Acestea sînt egal de probabile. Știm că s-a realizat unul din primele 3 cazuri; unul din aceste 3 cazuri este „favorabil“ (al 3-lea). Deci $p = \frac{1}{3}$.

Notă. Problema atrage atenția asupra necesității condiției „egal de probabil“.

168. Avem trei feluri de vase: de 4, de 5 și de 8 litri capacitate. Nu știm cîte sînt din fiecare fel — aceasta se cere să aflăm noi, știind că în total sînt 138 de vase; încap în ele 748 litri de apă; numărul vaselor de 5 litri este cu 10 mai mare decît dublul numărului vaselor de 8 litri.

Problemă de pedagogie: să se dea o metodă de rezolvare accesibilă unui copil care nu a învățat încă algebra.

Cum gîndim. Deoarece copilul nu știe algebră și întrucît el gîndește mai ușor aspectele concrete, să concretizăm — pe cît posibil — prin figuri atît ecuațiile, cît și operațiile pe care le facem pentru rezolvarea sistemului.

Soluție. Figura 60 ține în atenție condițiile problemei. Faptul că cele de 5 sînt cu 10 mai multe ca dublul celor de 8, îl figurăm astfel: lîngă fiecare vas de 8 punem 2 vase de 5, apoi mai punem încă 10 vase de 5 „singure“.

Acum să turnăm apă în ele. Turnăm întîi în cele 10, pentru că știm numărul lor; turnăm deci $5 \cdot 10 = 50$ litri. Să umplem restul. Problema devine: 128 vase, încap 698 litri, cele de 5 de 2 ori mai multe ca cele de 8 (pe figură de la linia punctată în stînga). Să turnăm în ele apă. În care? Nu mai știm cîte sînt de un anumit fel; de aceea turnăm în *toate* cîte 4 litri. 4 litri $\times$ 128 = 512 litri. Rămîn 698 — 512=186 litri, cu care trebuie să completăm vasele de 5 și pe cele de 8. Avem mai multe grupe, compuse fiecare din 2 vase de 5 și unul de 8: în fiecare grupă mai turnăm $1 + 1 + 4 = 6$ litri. Turnăm

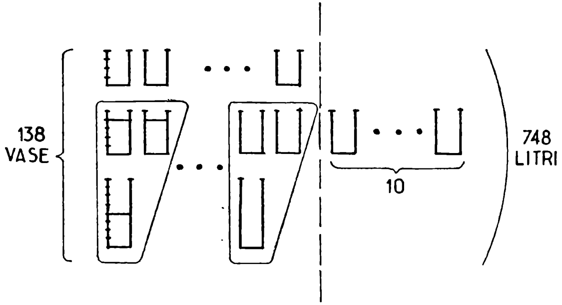


Fig. 60

în total 186 litri. Cîte grupe sînt? 186 : 6 = 31. Deci sînt 31 vase de 8; 62 vase de 5, la care adăugăm pe cele 10 umplute la început: 72; rămîn 138 – 31 – 72 = 35 (vase de 4).

169. Dacă elevii dintr-o clasă se așază cîte 2 în bancă, rămîn 14 elevi în picioare. Dacă se așază cîte 3 în bancă, 3 bănci rămîn libere.

Să se explice unui elev care nu știe algebră, cum să afle cîți elevi și cîte bănci erau.

Soluție. Figura 61. Eliberăm 3 bănci sculînd în picioare pe cei 6 ocupanți. Acum sînt în picioare 14 + 6 = 20 de elevi, care trebuie așezați cîte unul în fiecare bancă, în care erau deja cîte 2 elevi. Deci acum sînt: bănci ocupate 20 și libere 3. Total 23 bănci. Elevi: $20 \cdot 3 = 60$.
 (Sau: $23 \cdot 2 + 14 = 60$, ceea ce constituie *proba*).

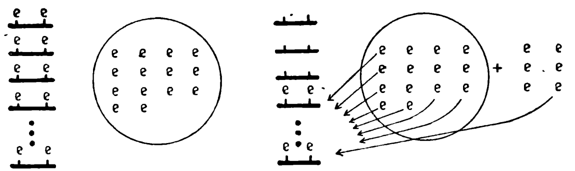


Fig. 61

170. Pentru ce valori ale lui n (număr natural) poate fi simplificată fracția $\frac{a}{b} = \frac{5n + 3}{11n + 8}$?

Cum gîndim. Pentru ca fracția $\frac{a}{b}$ să poată fi simplificată, trebuie ca a și b să aibă un divizor comun. În problemă, a și b sînt variabili o dată cu n. Cum să găsim divizorul comun a două numere variabile?

Ideea. Dacă a și b au un divizor comun d, adică $a = d \cdot a_1$, $b = d \cdot b_1$, acesta divide și numărul $ka + hb$ $(= d \cdot \cdot (ka_1 + hb_1)$. Incomod este faptul că a și b sînt variabile; ideea este să alegem pe k și h astfel încît $ka + hb$ să nu mai depindă de n.

Soluție. Avem $5b - 11a = 7$. Deci dacă a și b au un $d.c. \neq 1$, acesta nu poate fi decît 7. Problema devine: pentru ce n, $5n + 3 = 7k$? Această condiție este și suficientă: dacă $a = M7$, $5b = 11a + 7$ este și el $M7$, deci și $b = M7$.

Pentru a rezolva ecuația $5n + 3 = 7k$, încercăm $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Găsim $n = 5$. Orice număr n din clasa de rest 5 modulo 7 — și numai din această clasă — răspunde la problemă. Soluția generală: $n = 5 + 7h$ $(h = 0, 1, 2, \ldots)$.

171. Aceeași problemă pentru $\frac{a}{b} = \frac{3n^2 - 10}{7n^2 + 20}$

Soluție. Aplicăm aceeași metodă. Avem $3b - 7a = 130$. Divizorul comun al numerelor a și b divide pe 130. Numărul $a = 3n^2 - 10$ se divide cu 2 sau 5, dacă și numai dacă n se divide. Să vedem pentru ce n, $3n^2 - 10 = M\,13$. Încercăm cu $n = M\,13 \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$. Găsim că pentru $n = 13h \pm 5$.

172. Aceeași problemă pentru $\frac{a}{b} = \frac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$

Soluție. Avem $b - na = n^2 + 1$. Dacă a și b au un *d.c.*, acesta divide și pe $n^2 + 1$. Dar $a = n(n^2 + 2)$. Putem găsi un n astfel ca $n(n^2 + 2)$ și $n^2 + 1$ să aibă un d.c.? Numerele $n^2 + 1$ și $n^2 + 2$ sînt consecutive, deci sînt prime între ele. Numerele n și $n^2 + 1$ sînt tot prime între ele (dacă ar avea ca d.c. pe d, acesta ar divide și pe $n^2 + 1 - n \cdot n = 1$).

Așadar, pentru orice n fracția dată este ireductibilă.

173. Dacă n puncte din plan nu sînt situate pe aceeași dreaptă, există (cel puțin) o dreaptă care conține numai două din cele n puncte (J. Sylvester).

Ideea. Lemă. Considerăm 3 puncte pe o dreaptă P_2, P_3, P_4 și un punct P_1 în afara ei (fig. 62). Fie Q proiecția lui P_1 pe dreaptă. Cel puțin două din cele 3 puncte sînt de aceeași parte a lui Q, eventual unul confundat cu Q. Dacă avem configurația din figura 62, distanța de la P_2 la dreapta P_1P_3 este mai mică decît distanța de la Q la acea dreaptă, deci și mai mică decît P_1Q.

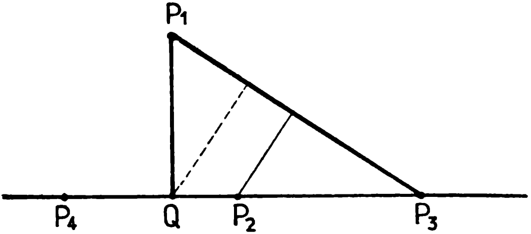


Fig. 62

Soluție. Considerăm dreptele distincte între ele care conțin (cel puțin) două puncte din cele n date. Ele sînt evident în număr finit. Din fiecare punct P_i dat ($i = 1, 2, \ldots, n$) ducem perpendiculare pe fiecare dreaptă ce nu trece prin P_i. Mulțimea lor $\{d_1, d_2, \ldots d_k\}$ e finită (căci și punctele și dreptele sînt în număr finit) și nu este vidă (căci nu toate punctele sînt pe aceeași dreaptă). Fie d_m cea mai mică din ele, $d_m \leqslant d_i$, dacă $i \neq m$, $i = 1, 2, \ldots k$. Conform lemei, dreapta pe care a fost dusă perpendiculara d_m conține numai două puncte, din cele n date (dacă ar conține mai multe de două, ar exista un $d < d_m$).

174. Notăm cu O, G, H centrul, centrul de greutate, ortocentrul triunghiului ABC.

Să se demonstreze că $\vec{V} = 3 \cdot \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ este vectorul nul. Consecință.

Cum gîndim. Conform problemei **79**, $3 \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Vectorul $\vec{V}$ apare deci ca o sumă de *patru* vectori. Să folosim asociativitatea sumei. Avem, de exemplu, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2 . \overrightarrow{OA'}$ (A' mijlocul lui BC) și $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{HA}$. Deci

$$\vec{V} = 2 \cdot \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{HA}$$

Rezultă de aici că $\vec{V} = O$?

Ideea. Din expresia $\vec{V} = 2 \cdot \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{HA}$ rezultă numai că dacă $\vec{V} \neq O$, avem $\vec{V} \perp BC$ (căci și OA' și HA sînt $\perp$ pe BC). Dar dacă am fi asociat și în alt mod termenii lui $\vec{V}$?

Soluție. Dacă $\vec{V} \neq O$, $\vec{V} \perp BC$. Dar cu totul analog ar rezulta și $\vec{V} \perp AC$ și $\vec{V} \perp AB$. Nu este posibil ca același vector să fie perpendicular pe toate laturile triunghiului.

Rezultă că $\vec{V} = \vec{O}$.

Interpretare. Relația $3 \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$ arată că punctele O, G, H sînt colineare și $OH = 3 \cdot OG$.

175. Să se demonstreze că punctele O,G,H sînt colineare, elementar (fără a folosi vectori).

Cum gîndim. Putem gîndi în mai multe moduri (fig. 63).

1. Unim pe O cu G și *separat* (căci nu știm încă dacă punctele sînt colineare) pe G cu H. Să arătăm că triunghiurile OGA' și HGA sînt asemenea — de unde rezultă egalitatea unghiurilor din G (deci va trebui folosit un criteriu în care intră și laturi).

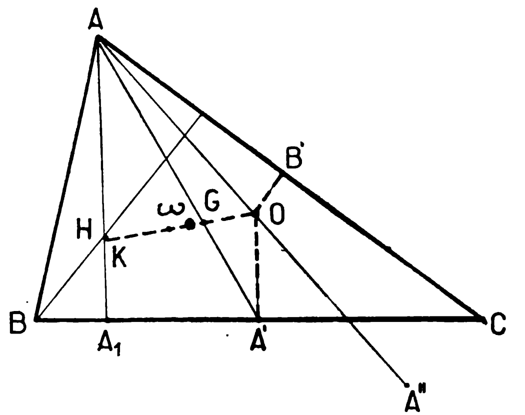


Fig. 63

2. Prelungim pe OG pînă în K, astfel ca $GK = 2\ OG$. Arătăm că punctul K este pe înălțime.

3. Considerăm punctul A'' diametral opus lui A pe cercul circumscris. Arătăm că simetricul lui H față de A' este A''.

Soluție. 1. Pentru a arăta că $OGA' \sim HGA$, știind că $\widehat{GA'O} = \widehat{GAH}$ și că $GA = 2GA'$, este suficient să arătăm că și $HA = 2\ OA'$. Aceasta este o nouă problemă — mai simplă — la care s-a redus problema dată.

2. Avem $OGA' \sim KGA$, prin construcție. Rezultă $\widehat{GA'O} = \widehat{GAK}$, deci $AK \parallel OA'$, adică $AK \perp BC$; punctul K este pe înălțimea din A.

Este el chiar punctul H?

Cu totul analog demonstrăm că punctul K este și pe înălțimea din B, deci $K = H$. În fond, nici nu mai este nevoie de o demonstrație. Cînd am demonstrat că punctul K este pe înălțimea din A, am demonstrat în fond că este pe *o* înălțime, oricare.

3. Figura $HBA''C$ este paralelogram (căci $BH \perp AC$; $A''C \perp AC$, $BH \parallel A''C$; analog $CH \parallel A''B$).

Rezultă că diagonala HA'' taie pe BC în A' și $HA' = A'A''$.

În triunghiul AHA'', AA' este mediană, HO este mediană. Ele se taie într-un punct situat pe AA' la $\frac{2}{3}$ de A, adică — deoarece AA' este mediană și în triunghiul ABC — în G.

Notă. Dreapta OGH se numește dreapta lui Euler.

Dintre demonstrațiile date, cea mai elementară este a treia, căci o putem da *înainte* de a fi trecut la studiul asemănării; ea presupune un cuantum mai restrîns de cunoștințe anterioare. Este drept că e mai ascunsă; ea a fost găsită probabil fără a se cunoaște concluzia, judecînd sintetic: ce s-ar putea deduce din considerarea punctului A''.

Din figura considerată pot fi deduse și alte proprietăți. De exemplu?

176. Soluția 1 de la problema precedentă nu este completă. A mai rămas de demonstrat că $AH = 2\ OA'$. Aceasta rezultă din soluția 2. Dar direct?

Ideea. Triunghiurile AHB și $A'OB'$ sînt asemenea (raport de asemănare: 2).

177. Fie ω mijlocul segmentului HO (notațiile din pr. **175**, fig. 63). Să se arate că $\omega A' = \frac{1}{2} R$ (R, raza cercului ABC). Prin ce puncte remarcabile mai trece cercul de centru ω și rază $\frac{1}{2} R$?

Soluție. $\omega A'$ este linie mijlocie în triunghiul HOA'', deci $\omega A' = \frac{1}{2} \cdot OA'' = \frac{1}{2} R$. Cu totul analog, fără a mai fi nevoie de demonstrație (dar și fără a fi interzis să o dăm) $\omega B' = \frac{1}{2} R$, $\omega C' = \frac{1}{2} R$.

Fie A_1 piciorul înălțimii din A. Punctul ω este pe mediatoarea lui A_1A', deci $\omega A_1 = \omega A' = \frac{1}{2} R$.

Fie A_2 mijlocul lui AH. Segmentul ωA_2 este linie mijlocie în triunghiul OHA, deci $\omega A_2 = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} R$.

Concluzie: mijloacele laturilor, picioarele înălțimilor, mijloacele segmentelor ce unesc ortocentrul cu vîrfurile triunghiului sînt 9 puncte pe același cerc (cu centrul la mijlocul lui HO și cu raza $\frac{1}{2} R$).

Acesta este cercul lui Euler.

178. Să se arate că locul geometric al punctelor M pentru care

$$MA^2 + kMB^2 = c^2$$

unde A, B sînt două puncte date, k este un număr real

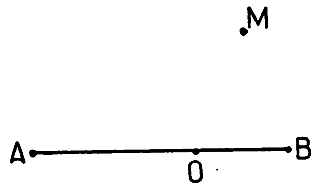


Fig. 64

diferit de -1, și c un segment $c > \sqrt{\frac{k}{k+1}} \cdot AB$, este un cerc. Să i se determine centrul și raza.

Cum gîndim. Locul este simetric față de AB. Dacă locul este cerc, centrul lui (O) se află pe dreapta AB.

Fie O un punct pe AB. Avem (fig. 64):

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} \; ; \; \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}.$$

Putem alege pe O așa fel încît condiția pusă de problemă să fie echivalentă cu $OM =$ constant?

Soluție. Avem

$$MA^2 = MO^2 + 2\,\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + OA^2; \; MB^2 = MO^2 + 2\,\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + OB^2$$

$$MA^2 + kMB^2 = (1 + k)\,MO^2 + 2\,\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}) + OA^2 + kOB^2$$

Alegem pe O astfel încît $\overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB} = O$

Condiția problemei devine echivalentă cu

$$MO^2 = \frac{1}{1+k}\left[c^2 - (OA^2 + kOB^2)\right]$$

Fie $AB = a$. Din $\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} = O$ rezultă

$OA^2 = k^2\ OB^2$ și $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = (k+1)\ \overrightarrow{OB}$, deci $OB = \frac{1}{1+k}a$, de unde $OA^2 + kOB^2 = k\ (k+1)$ $OB^2 = \frac{k}{k+1}a^2$

Locul este cercul cu centrul în O, determinat de condiția $OA + kOB = O$ și cu patratul razei egal cu $\frac{1}{1+k}$ $(c^2 - \frac{k}{k+1}a^2)$.

Pentru $k = 1$, centrul este la mijlocul segmentului AB.

179. Locul geometric al punctelor M, cu proprietatea $\frac{MA}{MB} = k \neq 1$, A și B fiind puncte fixe, k un număr pozitiv dat.

Cum gîndim. Să facem, de pildă, figura pentru $k = 2$ (fig. 65).

Două puncte ale locului (și numai două) sînt pe dreapta AB: punctul I între A și B, astfel că $\overrightarrow{AI} = k \cdot \overrightarrow{IB}$, punctul J în afara segmentului AB, astfel ca $\overrightarrow{JA} = k \cdot \overrightarrow{JB}$.

Există puncte M ale locului în afara dreptei AB (un cerc cu centrul B, cu $r > BI$, un cerc cu centrul A și raza $k \cdot r$).

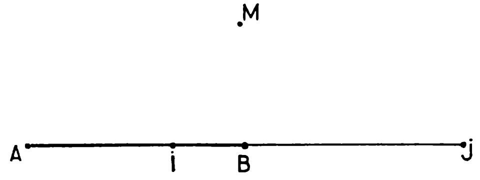


Fig. 65

Deci locul este simetric față de AB. Construind cîteva puncte, intuim că locul este cercul de diametru IJ.

Dacă vrem să lucrăm cu vectori, ținem seama că punctele acestui cerc sînt caracterizate de relația $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = O$ (ceea ce înseamnă $\widehat{IMJ} = 90°$).

Problema devine

$$MA = kMB \Longleftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = O.$$

Ideea. Să exprimăm vectorii $\overrightarrow{MI}$ și $\overrightarrow{MJ}$ în funcție de $\overrightarrow{MA}$ și $\overrightarrow{MB}$.

Soluție. Avem $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}$

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI} \text{ și } \overrightarrow{AI} = k \cdot \overrightarrow{IB}$$

Rezultă $(1 + k)\, \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + k \cdot \overrightarrow{MB}$

Analog $(1 - k)\, \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}$. Deci

$$(1 - k^2)\, \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = MA^2 - k^2\, MB^2$$

Însă $MA = kMB \Longleftrightarrow MA^2 = k^2MB^2$

Deoarece $k \neq 1$,

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = O \Longleftrightarrow MA = kMB.$$

180. Se dă un triunghi echilateral $A_1B_1C_1$ și trei unghiuri A, B, C, a căror sumă este 180°. Se construiește triunghiul AB_1C_1 cu unghiurile $AC_1B_1 = 60° + \frac{B}{3}$, $AB_1C_1 = 60° + \frac{C}{3}$, A și A_1 de o parte și alta a dreptei BC. Analog, $BA_1C_1 = 60° + \frac{C}{3}$, $BC_1A_1 = 60° + \frac{A}{3}$; $CB_1A_1 = 60° + \frac{A}{3}$, $CA_1B_1 = 60° + \frac{B}{3}$.

Să se demonstreze că unghiul BAC este egal cu unghiul A dat și că dreptele AC_1 și AB_1 împart unghiul BAC în trei unghiuri egale. Analog din B și din C (fig. 66).

Cum gîndim. Rezultă în mod imediat $B_1AC_1 = \frac{A}{3}$ și analoagele. Deoarece în concluzie este vorba de unghiuri, căutăm să găsim diverse unghiuri ale figurii. Fie A_2 intersecția $BC_1 \times CB_1$; analog B_2, C_2.

Avem $AC_1B = 360° - (60 + \frac{B}{3}) - 60° - (60 + \frac{A}{3}) = 180 - \frac{A+B}{3} = 180 - \frac{180 - C}{3} = 120 + \frac{C}{3}$. Analog,

$$BA_1C = 120 + \frac{A}{3},\ CB_1A = 120 + \frac{B}{3}.$$

$$A_2C_1B_1 = AC_1B_1 - (180 - AC_1B) = 60 + \frac{B}{3} - (60 - \frac{C}{3}) = \frac{B+C}{3} = 60 - \frac{A}{3}$$

$$A_2B_1C_1 = 60 + \frac{C}{3} - (60 - \frac{B}{3}) = \frac{B+C}{3} = 60 - \frac{A}{3}$$

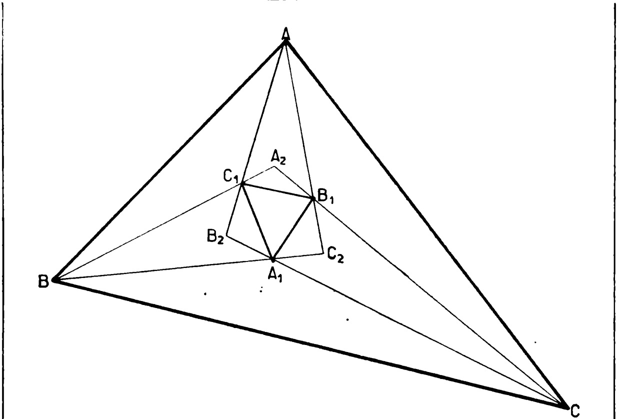


Fig. 66

Deci triunghiul $A_2B_1C_1$ este isoscel, cu unghiul din A_2 egal cu $60° + \frac{2}{3}A$. Analog, $B_2C_1A_1$ și $C_2A_1B_1$.

Rămîne să demonstrăm că BA_1 este bisectoarea unghiului C_1BC și analoagele.

Soluție. Din $A_2C_1 = A_2B_1$ și $A_1C_1 = A_1B_1$ rezultă că A_2A_1 este mediatoarea lui B_1C_1 și deci bisectoarea unghiului BA_2C.

Din $BA_2C = 60 + \frac{2}{3}A$ și $BA_1C = 120 + \frac{A}{3}$ rezultă

 $BA_1C = 90° + \frac{1}{2}BA_2C$, relație care arată că A_1 este punctul de întîlnire al bisectoarelor în triunghiul A_2BC. (Dacă A_1 este la intersecția bisectoarelor, rezultă relația; dacă A_1 se deplasează pe bisectoarea lui A_2 spre A_2 sau spre bază, unghiul scade, respectiv crește. Deci numai dacă A_1 este și pe bisectoarea unghiului A_2BC avem relația.)

181. Trisectoarele unghiurilor unui triunghi oarecare ABC se intersectează (fig. 66) în punctele A_1, B_1, C_1. Să se demonstreze că triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral (teorema lui F. Morley).

Cum gîndim. Folosim tot figura 66, dar acordînd atenție ipotezei și concluziei: AB_1 și AC_1 sînt trisectoarele unghiului A, analog BC_1, BA_1 și CA_1, CB_1; trebuie să demonstrăm că triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral.

În ce mod să folosim teorema precedentă, ținînd seama de reciprocitatea celor două enunțuri?

Să presupunem că facem tot construcția din problema precedentă, folosind aceleași unghiuri A, B, C, dar pornind de la un triunghi echilateral mai mare (latura mărită de k ori). Fiecare triunghi pe care îl construim va avea latura de k ori mai mare, deci și triunghiul final ABC.

Dacă triunghiul echilateral de la care pornim este egal cu $A_1B_1C_1$, vom obține un triunghi $A''B''C''$ egal cu ABC.

Soluție. Considerăm un triunghi echilateral $A'B'C'$ avînd $B'C' = B_1C_1$. Facem construcția din problema precedentă, folosind unghiurile A,B,C ale triunghiului dat. Obținem un triunghi $A''B''C''$ egal cu triunghiul dat ABC. Suprapunîndu-l peste ABC, trisectoarele vor coincide, deci $A'B'C'$ se va suprapune peste $A_1B_1C_1$, ceea ce arată că $A_1B_1C_1$ este echilateral.

Observație. Teorema lui Morley este interesantă în primul rînd prin enunțul ei: oricum ar fi triunghiul ABC, trisectoarele lui determină un triunghi echilateral.

Să reflectăm însă și asupra metodei de rezolvare. Atacată direct, soluția este foarte ascunsă — chiar dacă acceptăm să folosim și trigonometria sau geometria analitică.

Am adoptat o metodă asemănătoare cu aceea a „mersului invers": pornind de la un triunghi echilateral să facem o construcție, care să ne conducă la triunghiul în care s-au dus trisectoarele.

182. Considerăm ecuația generală de gradul doi în x și y, cu coeficienți reali

$$ax^2 + 2\ bxy + cy^2 + 2\ dx + 2\ ey + f = 0.$$

În unele cazuri nu există nici un punct cu coordonate reale care să o satisfacă (de ex. dacă ecuația este $x^2 + y^2 + 4 = 0$) sau există unul singur (de ex. dacă ecuația este $(x - 2y)^2 + (3x - y - 5)^2 = 0$, ea e satisfăcută numai de $x = 2$, $y = 1$).

Să se afle ce condiții trebuie săîndeplinească coeficienții, pentru ca ecuația să fie satisfăcută de mai multe puncte reale și în ce condiții curba are puncte la infinit.

Cum gîndim. Pentru fiecare x dat, ecuația devine o ecuație de gradul doi în y. Trebuie să existe valori ale lui x pentru care ecuația în y să aibă rădăcini reale.

Soluție. Scriem ecuația sub forma

$$cy^2 + 2\ (bx + e)\ y + ax^2 + 2\ dx + f = 0$$

Dacă $c = 0$, y există pentru orice $x \neq -\frac{e}{b}$.

Dacă $c \neq 0$, obținem

$$y = \frac{1}{c}\left[-(bx + e) \pm \sqrt{(bx + e)^2 - c\,(ax^2 + 2dx + f)}\right]$$

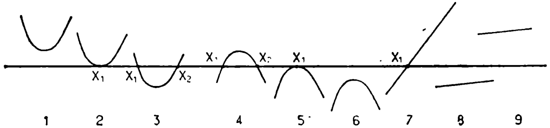


Fig. 67

Expresia de sub radical este

$E(x) = (b^2 - ac)\ x^2 + 2(be - cd)\ x + e^2 - cf$

Curba reprezentativă a funcției $E(x)$ poate fi în unul din cazurile din figura 67.

Cazurile 1, 2, 3 au loc pentru $b^2 - ac > 0$; curba are puncte și la $-\infty$ și la $+\infty$; în cazul 3 nu are puncte pentru

$$x_1 < x < x_2.$$

Cazurile 4, 5, 6 au loc pentru $b^2 - ac < 0$.

În cazul 4, curba are puncte (cîte două) pentru orice x, $x_1 < x < x_2$ (pentru $x = x_1$ și $x = x_2$ cele două puncte sînt confundate).

În cazul 5, există un singur punct care satisface ecuația; în cazul 6, nici unul.

Cazul 7 are loc pentru $b^2 - ac = 0$ și $be - cd \neq 0$. Dacă $be - cd > 0$, curba are puncte (cîte două) pentru orice x, $x > x_1$ (confundate pentru $x = x_1$). Dacă $be - - cd < 0$, curba există între $-\infty$ și x_1.

Cazul 8 are loc pentru $b^2 - ac = 0$, $be - cd = 0$ și $e^2 - cf < 0$. Nu există puncte care satisfac ecuația.

Cazul 9 are loc pentru $b^2 - ac = 0$, $be - cd = 0$ și $e^2 - cf > 0$. Curba constă din două drepte paralele cu dreapta $y = -\frac{1}{c}(bx + e)$ (confundate dacă și $e^2 - cf = 0$)

Revenim la cazul 2. Acesta are loc atunci cînd rădăcinile ecuației $E(x)$ sînt confundate, $x_1 = x_2 = \alpha$, adică

$$(be - cd)^2 - (b^2 - ac) \quad (e^2 - cf) = 0$$

condiție care poate fi scrisă

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

În acest caz, $E(x) = (b^2 - ac) \ (x - \alpha)^2$, deci

$$y = -\frac{b}{c}x - \frac{e}{c} \pm \sqrt{b^2 - ac}\,(x - \alpha)$$

ceea ce înseamnă două drepte care se întîlnesc în punctul de abscisă $x = \alpha$.

183. Considerăm curba C — numită conică — reprezentată de ecuația

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Să se arate că o dreaptă oarecare o taie cel mult în două puncte.

Să se arate că locul geometric al mijloacelor coardelor curbei paralele cu o direcție dată este o dreaptă.

Cum gîndim. Dacă $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ sînt două puncte variabile pe curba C, astfel încît AB păstrează o direcție fixă, coeficientul unghiular al dreptei AB, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, este constant.

Cu ajutorul condițiilor care exprimă că A și B sînt pe curbă și al condiției m = constant, trebuie să găsim locul punctului M, mijlocul lui AB, avînd coordonatele

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad Y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ideea. Punctele A și B fiind pe curbă, avem

$$ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + f = 0$$
$$ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 + 2dx_2 + 2ey_2 + f = 0$$

Deoarece în problemă intervin diferențele $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ și sumele $x_2 + x_1$, $y_2 + y_1$, scădem aceste relații și căutăm...

Soluție. Prin scăderea celor două relații, obținem la toți termenii diferențele și sumele de coordonate menționate cu excepția celui în b. Căutăm să scriem și diferența $x_2y_2 - x_1y_1$ în funcție de $x_2 - x_1$, $x_2 + x_1$ etc. Găsim

$$2(x_2y_2 - x_1y_1) = (x_2 - x_1)\ (y_2 + y_1) + (x_2 + x_1)\ (y_2 - y_1)$$

Scăzînd cele două relații și apoi împărțind peste tot cu $2(x_2 - x_1)$, — cazul $x_2 = x_1$ poate fi studiat direct — obținem

$$aX + bY + bmX + cmY + d + em = 0$$

Relația fiind de gradul I în X și Y, punctul $M(X, Y)$ descrie o dreaptă. Această dreaptă se numește diametrul conjugat direcției m.

Dacă $x_1 = x_2$, problema precedentă arată că diametrul conjugat direcției Oy este dreapta $bx + cy + e = 0$.

Observație. Punctele de intersecție între o dreaptă $Ax + By + C = 0$ și o conică dată se găsesc rezolvînd sistemul format de ecuația conicei și a dreptei. Eliminînd pe y între cele două ecuații (dacă $B \neq 0$), obținem o ecuație de gradul II în x. Ea poate avea două rădăcini complexe (chiar și cînd conica are puncte reale — de exemplu o elipsă și o dreaptă exterioară ei). Dar și în acest caz, $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $Y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ sînt numere reale (căci rădăcinile sînt complexe conjugate).

Putem lua în considerație și așa-zisele „puncte imaginare" ale conicei. În problema de față vom considera „toate" dreptele de direcție dată, nu numai pe acelea care taie efectiv conica; pe fiecare dreaptă mijlocul coardei este real. De aceea, prin diametru conjugat înțelegem *o dreaptă* și nu un segment.

181. Ce discuții pot fi făcute în legătură cu problema precedentă?

Cum gîndim. Am găsit că fiind dată o conică, prin ecuația ei, unei direcții m îi corespunde un diametru conjugat, o dreaptă care reprezintă locul mijloacelor coardelor de direcție m. Ecuația lui poate fi scrisă

$$ax + by + d + m\ (bx + cy + e) = 0$$

O problemă interesantă este cum variază diametrul conjugat cînd m variază și după modul cum variază să deducem genul conicei. O a doua problemă este să aflăm pentru ce m diametrul conjugat este perpendicular pe direcția m.

Soluție. Ecuația

$$(1)\ ax + by + d + m\ (bx + cy + e) = 0$$

unde m este un parametru reprezintă o dreaptă d, variabilă o dată cu m.

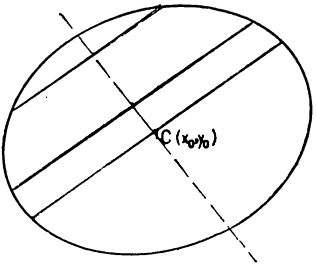


Fig 68

Considerăm dreptele

$$(d_1) \qquad ax + by + d = 0$$
$$(d_2) \qquad bx + cy + e = 0$$

Ele pot fi: 1. concurente, 2. paralele sau 3. confundate.

1. Dreptele d_1 și d_2 sînt concurente dacă $ac - b^2 \neq 0$; fie $C(x_0, y_0)$ punctul lor comun. (x_0, y_0) satisface și ecuația (1); deci d trece printr-un punct fix. Dacă ducem dreapta de direcție m chiar prin (x_0, y_0), cele două puncte de intersecție vor fi simetrice față de C (fig. 68). Aceasta, oricare ar fi m. Deci C este *centru de simetrie* al conicii.

Coeficientul unghiular al diametrului conjugat (m')

$$\text{este } m' = -\frac{a + mb}{b + mc}$$

Relația care leagă pe m de m' poate fi scrisă

$$cmm' + b(m + m') + a = 0 \qquad (2)$$

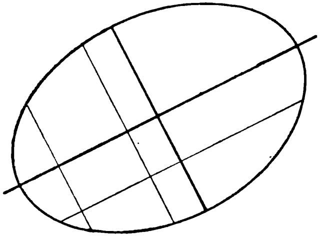


Fig. 69

Ea este *simetrică* în m și m'. Înseamnă că diametrul conjugat direcției m' are direcția m. Aceasta explică denumirea „conjugate". Ducînd prin C dreapta de direcție m și pe cea de direcție m' (fig. 68, a doua punctată), una din ele (oricare) este diametrul conjugat al celeilalte.

În ce caz doi diametri conjugați sînt ortogonali?

$mm' = -1$. Înlocuind în relația (2),

$$b\left(m - \frac{1}{m}\right) + a - c = 0$$

$$bm^2 + (a - c)\ m - b = 0 \qquad (3)$$

Ecuația (3) are două rădăcini reale m_1, m_2, al căror produs este -1; ele corespund la două direcții ortogonale, astfel că una e conjugata celeilalte.

Din definiție rezultă că acești doi diametri ortogonali sînt *axe de simetrie* ale conicei (fig. 69).

Dacă luăm axele de simetrie ca axe de coordonate, față de aceste axe ecuația nu poate fi decît de forma

$$AX^2 + CY^2 + 2F = 0 \qquad (4)$$

— cu termeni în X nu ar mai fi simetrie față de OY; cu termeni în Y nu ar mai fi simetrie față de OX.

Ecuația (4) poate reprezenta: 1) o elipsă dacă A și C au același semn, reală dacă F are semn contrar lui A și C, imaginară (fără nici un punct real) dacă F are același semn cu A și C; 2) o iperbolă dacă A și C sînt de semne contrare și $F \neq 0$; 3) două drepte dacă $F = 0$, reale dacă A și C au semne contrare, imaginare cu un singur punct real dacă A și C au același semn.

În cazul 3) centrul conicei (punctul de concurență al dreptelor) se află pe conică. În adevăr, ecuația conicei poate fi scrisă

$$x(ax + by + d) + y(bx + cy + e) + (dx + ey + f) = 0$$

(x_0, y_0) anulează parantezele; dacă el e pe conică anulează și expresia $dx + ey + f$, cele 3 drepte obținute prin egalarea parantezelor cu zero sînt concurente, adică $\Delta = 0$ (vezi prob. prec.).

2. Dacă dreptele d_1 și d_2 sînt paralele, avem $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ $(ac - b^2 = 0)$. Amplificînd al doilea raport cu m și făcînd suma numărătorilor pe suma numitorilor, obținem

$$\frac{a}{b} = \frac{a + mb}{b + mc}$$

deci și dreapta d va fi paralelă cu d_1 și d_2.

Ecuația (1) reprezintă în acest caz un fascicul de drepte paralele, direcția comună fiind dată de $m' = -\frac{a}{b}$.

Dacă luăm $m = \frac{b}{a}$ diametrul conjugat direcției m va fi perpendicular pe ea și el va fi axă de simetrie a conicei. În acest caz conica este o parabolă sau este formată din două drepte paralele.

3. Dacă dreptele d_1 și d_2 sînt confundate, avem

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e} = k$$

Ecuația (1) poate fi scrisă

$$(ax + by + d)\ (1 + km) = 0$$

deci și d se confundă cu d_1 și d_2.

În acest caz $\Delta = 0$, conica reprezintă două drepte paralele și diametrul conjugat oricărei direcții este dreapta paralelă cu ele la egală distanță.

185. Dacă printr-un punct fix 0, al unei conice nedegenerate oarecare se duc coardele variabile OA, OB perpendiculare una pe alta, dreapta AB trece printr-un punct fix.

Cum gîndim. Unde poate fi acel punct fix? Luăm o poziție particulară a unghiului AOB. Dacă A se apropie de O, la limită OA devine tangenta OT în O (fig. 70), iar OB, normala; în acest caz, AB se confundă cu normala. Problema devine: să arătăm că AB taie normala într-un punct fix.

Cum să ne alegem axele de coordonate? Ca să nu tratăm separat cazul elipsei, parabolei etc., vom lucra cu ecuația generală însă vom alege OT ca axă Ox, și ON ca axă Oy. Deci se pune subproblema: ce condiții îndeplinesc coeficienții din ecuația generală, cînd conica respectivă trece prin O și are aici pe Ox ca tangentă?

Soluție. Deoarece O este pe conică, termenul liber este nul ($f = 0$) — căci pentru $x = 0$, $y = 0$, ecuația trebuie să fie verificată. Dreapta $y = 0$ taie conica în punctele de abscise date de ecuația $ax^2 + 2dx + f = 0$, la noi $ax^2 + 2dx$. Ca a doua rădăcină să fie tot 0, trebuie ca $d = 0$.

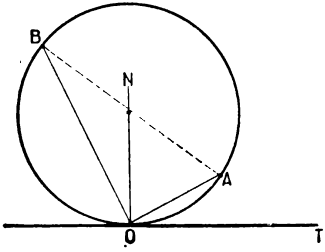


Fig 70

Așadar, ecuația conicei raportată la axele menționate este

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0.$$

Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Să scriem condițiile problemei

$$ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2ey_1 = 0 \quad (1) \quad (A \text{ pe conică})$$

$$ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 + 2ey_2 = 0 \quad (2) \quad (B \text{ pe conică})$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \quad (3) \quad (OA \perp OB)$$

Dreapta AB are ecuația

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ea taie axa Oy $(x = 0)$ în punctul de ordonată

$$y_0 = y_1 - x_1\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} \quad (4)$$

Problema revine la a arăta că din (1), (2), (3) rezultă că expresia (4) este constantă.

Căutăm să formăm întîi expresia $x_2y_1 - x_1y_2$.
Înmulțim (1) cu $-\frac{y_2}{x_1}$ și (2) cu $\frac{y_1}{x_2}$ și adunăm

$$a(x_2y_1 - x_1y_2) - cy_1y_2 \cdot \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_1x_2} - 2ey_1y_2 \cdot$$
$$\cdot \frac{(x_2 - x_1)}{x_1x_2} = 0$$

Ținînd seama de (3), $-y_1y_2 = x_1x_2$,

$$(a + c)(x_2y_1 - x_1y_2) = -2e(x_2 - x_1)$$

$$\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} = -\frac{2e}{a + c}$$

Observație. Dacă $a + c = 0$, conica este o iperbolă echilateră (eventual două drepte perpendiculare). În acest caz punctul de intersecție „este la infinit", ceea ce se interpretează astfel: coarda AB este *paralelă* cu normala în O. Ca exercițiu, cititorul poate stabili aceasta pe ecuația redusă a iperbolei echilatere, de exemplu, pe ecuația $y = \frac{1}{x}$.

186. Să se verifice egalitatea

$$(1 + r + r^2 + \ldots + r^n)(1 - r) = 1 - r^{n+1}$$

Dacă $-1 < r < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + r + \ldots + r^n) = \frac{1}{1 - r}$

Soluție. Avem $1 + r + \ldots + r^n = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r}$.
Dacă $|r| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$.

Notă. Expresia
$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ (cu o infinitate de termeni) se numește „serie". Notăm $S_n = u_1 + u_2 + \ldots +$

$+ u_n$. Dacă $\lim S_n$ există, $\lim S_n = S$, seria se numește „convergentă" și S se numește „suma" ei. În caz contrar, seria este divergentă.

Seria

$$1 + r + \dots r^n + \dots$$

numită seria geometrică, dacă $|r| < 1$, este convergentă și $S = \frac{1}{1-r}$.

187. Să se arate că seria (numită seria armonică)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

este divergentă.

Cum gîndim. S_n este un șir crescător. Ca să arătăm că nu are limită finită, trebuie să arătăm că $\lim S_n = \infty$, adică oricare ar fi numărul M, putem lua pe n suficient de mare, astfel ca să avem $S_n > M$.

Grupăm termenii lui S_n astfel:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}\right) + \dots$$

Soluție. Fiecare paranteză este mai mare ca $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \text{ etc.}$$

Deci $S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$. Luînd pe n suficient de mare ca să putem forma oricît de multe paranteze mai mari ca $\frac{1}{2}$, S_n va depăşi orice număr dat.

Din nou, cum gîndim. Dar dacă am avea o altă serie cu termeni pozitivi, descrescători şi $\lim u_n = 0$, nu am putea proceda la fel? Să luăm atît de mulţi termeni încît suma lor să depăşească $\frac{1}{2}$, apoi o nouă grupă de termeni — desigur cu mult mai mulţi termeni, pentru că ei sînt mai mici — care să depăşească $\frac{1}{2}$, ş.a.m.d. Nu totdeauna putem face acest lucru. Chiar dacă în loc de $\frac{1}{2}$ am lua un număr mai mic, de pildă $\frac{1}{100}$ (o infinitate de paranteze, fiecare depăşind $\frac{1}{100}$, ar însemna tot serie divergentă), la o serie convergentă termenii descresc atît de repede, încît nu mai putem realiza o paranteză cu suma $\frac{1}{100}$, de la un rang înainte.

La seria armonică termenii descresc; aceasta ne-a obligat să luăm din ce în ce mai mulţi termeni într-o paranteză: 2, apoi 4, apoi 8, 16 etc. Dar descresc destul de încet, pentru ca de fiecare dată să putem avea o sumă $>\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{101} < \frac{1}{100}$ dar cu puţin mai mic; $\frac{1}{1\,001} < \frac{1}{1\,000}$ cu şi mai puţin. Descreşterea o constatăm făcînd *diferenţa*. Raportul a doi termeni consecutivi este din ce în ce mai apropiat de 1. Pe cînd la seria geometrică, de pildă cu raţia $\frac{1}{2}$, fiecare termen este *jumătate* din precedentul.

Expresiile „descrește încet" sau „repede" nu sînt precise, deci nu pot intra în limbajul matematic propriu-zis. Ele nu fac decît să furnizeze o impresie, ce poate fi utilă, dar pînă la urmă raționamentul riguros decide.

Astfel: seria armonică ne-ar putea da impresia că din cauză că raportul (subunitar) a doi termeni consecutivi $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ crește apropiindu-se de 1, seria este divergentă.

Nu totdeauna este așa. De exemplu, la seria $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots$ raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tinde tot la 1, dar se demonstrează că ea este convergentă.

188. Să se demonstreze că dacă seria $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ este convergentă, $\lim u_n = 0$.

Reciproca este adevărată?

Cum gîndim. Ipoteza: $\lim S_n = S$. Ce înseamnă aceasta? Că atunci cînd n crește, numerele S_n se „îngrămădesc" în vecinătatea lui S. Însă $S_n - S_{n-1} = u_n$; $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$; îngrămădirea numerelor S_n face ca $u_n, u_{n+1}, \dots$ să fie „mici".

Soluție. $\lim S_n = S$. Deci, fiind dat un număr $\frac{\varepsilon}{2}$, putem găsi un N astfel că pentru $n > N$ să avem $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$, deci și $|S_{n+1} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ (fig. 71).

Rezultă $|S_{n+1} - S_n| < \varepsilon$, $|u_{n+1}| < \varepsilon$. Oricare ar fi ε, găsim pe N $\left(\text{cu ajutorul relației } |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$, astfel ca pentru orice $n > N$ să avem $|u_{n+1}| < \varepsilon$. Deci, $\lim u_n = 0$.

Reciproca ar avea enunțul: dacă $\lim u_n = 0$, seria $\sum u_n$ este convergentă, cu înțelesul *toate* seriile la care

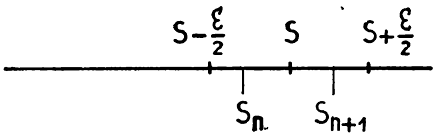


Fig. 71

lim $u_n = 0$ sînt convergente. Nu e adevărat; nu *toate*. Ca să arătăm că nu toate, e destul să arătăm una la care deși *lim* $u_n = 0$, seria e divergentă, adică să arătăm un contraexemplu. Problema precedentă ni-l oferă.

189. Știm că $A \subset B$ (mulțimea A este inclusă în mulțimea B) înseamnă că *orice* element al lui A sau *toate* elementele lui A aparțin și lui B. Incluziunea poate fi exprimată și printr-o *implicație*:

$$a \in A \Rightarrow a \in B.$$

în cuvinte: dacă $a \in A$, atunci $a \in B$.

Dacă elementele lui A și B sînt figurate prin puncte din plan, incluziunea se traduce printr-o figură ca acea alăturată (fig. 72).

Pentru exprimarea legăturii dată de incluziune sau de implicație, se folosesc și cuvintele: *suficient*; *necesar*. Deși uneori exprimările sînt eliptice (subînțelese), trebuie să fie totdeauna clare două lucruri:

1. *ce* condiție este suficientă (resp. necesară)
2. pentru ce.

Relația $A \subset B$ conduce la două exprimări:

1. Condiția $a \in A$ este suficientă pentru a afirma că $a \in B$.

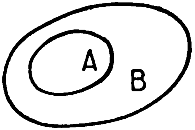


Fig. 72

2. Pentru ca a să aparţină lui A este necesar ca $a \in B$. (Este necesar; dacă a *nu* aparţine lui B, sigur nu e în A.)

Să se observe şi pe figura 72. $A \subset B$ înseamnă: dacă un punct nu e în conturul B, sigur nu e nici în A. Ca să fie în A, e în primul rînd necesar să fie în B; dar — în general — aceasta nu e suficient: poate fi în B fără a fi în A.

Să se exprime teorema precedentă (188):

1) figurînd mulţimile de care este vorba în ea;

2) exprimînd verbal relaţiile între aceste mulţimi;

3) folosind cuvîntul *suficient*;

4) folosind cuvîntul *necesar*;

5) enunţînd o teoremă în care în loc de afirmaţie se fac negaţii;

6) generalizare.

Soluţie. 1. Figura 73.

2. $C \subset Z$ (mulţimea seriilor convergente este inclusă în mulţimea seriilor la care $u_n \to 0$).

$Z - C \neq \emptyset$ traduce faptul că reciproca nu este adevărată; dacă din mulţimea seriilor cu $u_n \to 0$ scoatem pe cele convergente, nu rămîne mulţime vidă. Sau: există elemente în Z fără a fi şi în C (exemplu: seria armonică).

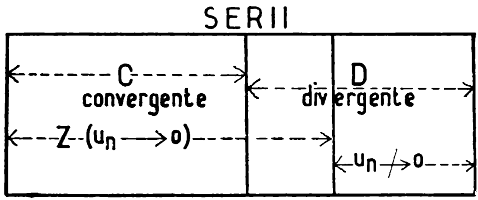


Fig 73

3. Condiţia „seria este convergentă“ este suficientă pentru a afirma că termenul ei general tinde la 0.

4. Pentru ca o serie $\sum u_n$ să fie convergentă, este necesar ca $u_n \to 0$.

(Dar nu şi suficient, ne arată seria armonică sau orice alt contraexemplu.)

5. Dacă u_n *nu* tinde la 0, seria *NU* este convergentă.

6. În general: (1) $p \Rightarrow q$ este o propoziţie echivalentă logic cu (2) *non* $q \Rightarrow$ *non* p. Echivalentă logic înseamnă: dacă am demonstrat (1) rezultă (2); invers: dacă am demonstrat (2) rezultă (1).

Dacă vorbim de mulţimi, $A \subset B \Rightarrow$ *non* $B \subset$ *non* A. Pe figură e clar: 1) admit că $A \subset B$, atunci un element care nu e în B nu e nici în A (fig. 72); 2) admit că *non* $B \subset$ *non* A; atunci orice element din A este şi în B (fig. 74).

Se poate raţiona şi direct: $p \Rightarrow q$ înseamnă: dacă p este adevărat, atunci şi q e adevărat (exemplu: p: seria este convergentă; q: $\lim u_n = 0$). *non* $q \Rightarrow$ *non* p înseamnă: dacă q nu e adevărat, atunci nici p nu este

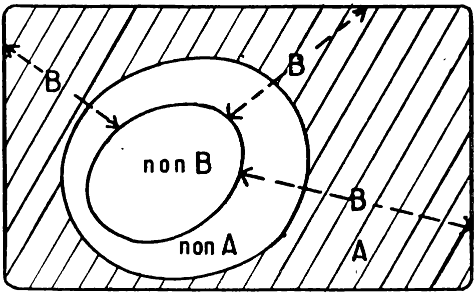


Fig. 74

(exemplu: *non* $q : u_n \not\to 0$; *non* p: seria nu e convergentă).

Admitem că am demonstrat $p \Rightarrow q$ (1). Va fi de la sine adevărată implicația *non* $q \Rightarrow$ *non* p (2) (dacă q nu e adevărată, nici p nu este, căci dacă ar fi, ar fi — conform (1) — și q, contrar ipotezei). Admitem că am demonstrat *non* $q \Rightarrow$ *non* p (2). Va fi de la sine adevărată implicația $p \Rightarrow q$ (dacă p e adevărată și q este, căci dacă nu ar fi — conform (2) — nici p nu ar fi, contrar ipotezei).

190. Considerăm mulțimea M a numerelor $p = 2^a + 1$ ($a = 1, 2, \ldots, n, \ldots$). Să se demonstreze că dacă un număr din M este prim, atunci a este o putere a lui 2.
Ideea. Avem de demonstrat că

$$p = 2^a + 1 \text{ este prim} \Rightarrow a = 2^m$$

Vom demonstra propoziția — logic echivalentă —:

$$a \neq 2^m \Longrightarrow p = 2^a + 1 \text{ nu este prim.}$$

Soluție. Dacă a nu e o putere a lui 2, el este de forma $a = 2^k \cdot i$ (i, impar $i > 1$). În acest caz, notînd $2^{2^k} = b$,

$$p = 2^{2^k \cdot i} + 1 = b^i + 1 = (b + 1)\,(b^{i-1} - b^{i-2} + + \ldots + 1),$$

deci p nu este prim (se divide cu $b + 1$)

191. Să se enunțe propoziția reciprocă teoremei precedente. Cum s-ar putea arăta că ea nu este adevărată?

Să se arate pe o figură cum sînt una față de alta mulțimile din problemă.

Soluție. Propoziția reciprocă:

$$a = 2^m \Rightarrow p = 2^a + 1 \text{ este prim.}$$

Pentru a arăta că această implicație nu este adevărată, trebuie să găsim un m pentru care p nu este prim.

Pentru $m = 0, 1, 2, 3, 4$, p ia valorile respective: 3; 5; 17; 257; 65 537 care sînt numere prime.

Euler a arătat că pentru $m = 5$, numărul $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ NU este prim; el este egal cu $641 \times 6\,700\,417$.

(Ulterior s-au găsit și alte contraexemple.)

Figura 75.

192. Am demonstrat că

$$p \Rightarrow q \sim non\ q \Rightarrow non\ p \qquad (1)$$

Să se arate, pe baza ei, că fiind dată o implicație $p \Rightarrow q$, propoziția reciprocă și cea contrară sînt echivalente logic.

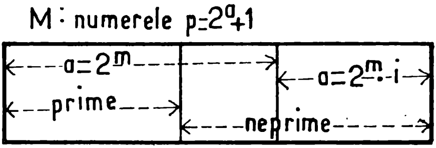


Fig. 75

Soluție. Dacă $p \Rightarrow q$ este o teoremă directă, propoziția reciprocă este

$$q \Rightarrow p$$

iar cea contrară directei

$$non\ p \Rightarrow non\ q$$

Echivalența între ele rezultă din (1) schimbînd pe p și q între ei.

193. Considerăm mulțimea M a triunghiurilor ABC cu $A = 90°$ și mulțimea M' a triunghiurilor ABC, ale căror laturi verifică relația $a^2 = b^2 + c^2$.

Se demonstrează teorema lui Pitagora.

Ce semn se pune între mulțimile M și M'? Ce nu se știe încă despre cele două mulțimi și cum trebuie precizată relația între ele?

Soluție. Teorema Pitagora: $A = 90° \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$. Deci $M \subset M'$. Nu se știe încă dacă M' pe lîngă triunghiurile dreptunghice conține și alte triunghiuri (fig. 76).

Vrem să arătăm că nu are. Putem proceda în două moduri: 1) demonstrăm reciproca: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow A = 90°$, deci $M' \subset M$, așadar $M = M'$.

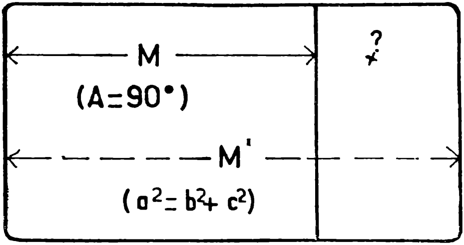


Fig 76

2) Demonstrăm contrara: $A \neq 90° \Rightarrow a^2 \neq b^2 + c^2$ (ieșind din M, ieșim și din M', deci M' nu are elemente în plus față de M, $M' = M$).

E suficient să demonstrăm una din ele (căci, după cum știm, ele sînt echivalente).

194. Citim enunțul: Condiția necesară și suficientă ca un patrulater să fie paralelogram este ca diagonalele lui să se taie în părți egale.

Ce teoreme s-au demonstrat pentru a fi traduse în acest enunț?

Soluție.

Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram ($AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$)	$\Rightarrow$	diagonalele lui se taie în părți egale ($AO = OC$; $BO = OD$)

Condiția „diagonalele patrulaterului se taie în părți egale“ este *necesară* pentru ca patrulaterul să fie paralelogram.

Teorema reciprocă:

$$(AO = OC;\ BO = OD) \rightarrow (AB \parallel CD;\ AD \parallel CD)$$

arată: condiția este și suficientă.

195. O serie alternată

$$u_1 - u_2 + u_3 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$$

în care u_i sînt numere pozitive descrescătoare și *lim* $u_n =$ $= 0$ este convergentă.

S_{2k} reprezintă o aproximație a lui S prin lipsă, iar S_{2k+1} prin adaos, eroarea fiind mai mică decît modulul primului termen neglijat.

Cum gîndim. Să urmărim pe o axă numerele $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 - u_2, \ldots$ (fig. 77).

Soluție. Numerele $S_2, S_4, \ldots, S_{2k}, \ldots$ formează un șir crescător, mărginit superior, căci $S_{2k} = (u_1 - u_2) +$ $+ (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2k-1} - u_{2k})$ și fiecare paranteză este pozitivă. Acest șir are o limită S.

Numerele $S_1 = u_1$, $S_3 = u_1 - u_2 + u_3, \ldots, S_{2k+1}, \ldots$ formează un șir descrescător, mărginit inferior, căci $S_{2k+1} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2k} - u_{2k+1})$. El are o limită S'. Însă $S_{2k+1} - S_{2k} = u_{2k+1}$. Pentru că *lim* $u_{2k+1} =$ $= 0$, *lim* $S_{2k+1} =$ *lim* S_k; $S = S'$.

Avem $S_{2k} < S$ și $S - S_{2k} < u_{2k+1}$.

196. Considerăm un semicerc de rază 1 și tangenta în A, paralelă cu diametrul BOB' (fig. 78).

O dreaptă variabilă trecînd prin O taie semicercul într-un punct N și tangenta în M. (Putem numi punctul M proiecția lui N din centrul de proiecție O pe tangentă și invers, proiecția punctului M de pe tangentă pe semicerc este N). În acest mod, unui punct de pe tangentă îi

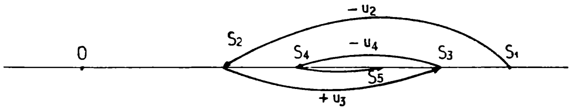


Fig. 77

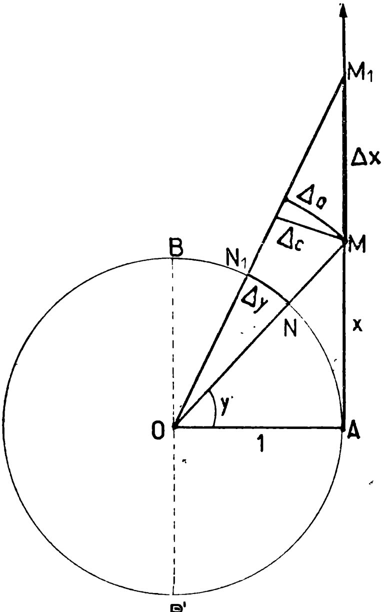


Fig. 78

corespunde un punct pe semicerc şi reciproc: unui punct de pe semicerc îi corespunde un punct pe tangentă.

Dacă pe tangentă luăm o axă numerică cu origina în A, cu sensul arătat pe figură şi cu unitatea egală cu raza cercului, fiecărui număr real x îi corespunde un punct M. De asemenea, dacă măsurăm arcele prin lungimea lor de la A, sensul pozitiv fiind cel trigonometric, fiecărui număr real y din intervalul deschis $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ îi corespunde un punct N. Avem deci o aplicaţie bijectivă a mulţimii numerelor reale R pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, + +\frac{\pi}{2}\right)$. Numărul y din interval corespunzător numărului real x îl notăm $y = arctg\ x$. Numărul real x corespunzător unui număr y din intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ îl notăm $x = tg\ y$.

a) Dacă O este luminos, iar N un punct opac care se mişcă uniform pe sfertul de cerc AB, în ce fel se mişcă umbra lui pe tangentă, M?

b) Dacă M se mişcă uniform pe tangentă, în ce fel se mişcă punctul corespunzător N pe cerc?

(Răspunsuri intuitive)

Soluţie. a) Arcului $a = AN$ parcurs într-un timp dat t, îi corespunde o lungime $b = AM$ pe tangentă. Unui arc NN' egal cu primul parcurs în timpul $t_2 - t_1 = t$ îi corespunde un segment pe tangentă mai mare, cu atît mai mare cu cît N e mai departe de A. Viteza lui M este din ce în ce mai mare, fără să precizăm deocamdată în ce fel exact creşte ea.

b) Analog, dacă M se mişcă uniform, N se mişcă din ce în ce mai încet, pe măsură ce se depărtează de A.

197. În problema precedentă presupunem viteza în mișcare uniformă egală cu 1 (unitatea de lungime în unitatea de timp). Să se calculeze viteza la un moment dat a punctului corespunzător.

Soluție. $s = v \cdot t$; dacă $v = 1$, $s = t$, timpul se măsoară prin spațiul parcurs în mișcarea uniformă cu $v = 1$.

Cînd M se mișcă uniform (plecînd în momentul O din A), avem $x = t$.

Spațiul parcurs de N în intervalul t, t_1 este arcul $NN_1 = AN_1 - AN$ notat Δy pe figură.

Viteza medie în acest interval este

$$v_m = \frac{arc\ N\ N_1}{t_1 - t} = \frac{arctg\ x_1 - arctg\ x}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Viteza în momentul t este limita acestui raport cînd $t_1 \to t$, deci Δx tinde la 0 (*derivata* funcției *arctg* x).

Avem (fig. 78)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta a} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta c} \cdot \frac{\Delta c}{\Delta x}$$

$$OM = \sqrt{1 + x^2},\ \frac{\Delta y}{\Delta a} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},\ \frac{\Delta c}{\Delta x} = sin\ M_1 = cos\,(y + \Delta y).$$

Cînd $\Delta x \longrightarrow 0$, $\frac{\Delta a}{\Delta c}$ (raport între arc și coardă) tinde la 1, $\Delta y \longrightarrow 0$, deci $cos\ (y + \Delta y)$ tinde la $cos\ y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

deci $lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1 + x^2}$.

Pe figură $x > 0$; prin simetrie față de OA găsim că formula se menține. Deci pentru orice x, derivata funcției *arctg* x este $\frac{1}{1 + x^2}$.

Acum se vede că cu cît x este mai mare, viteza lui N este mai mică; dar se vede precis în ce mod descrește această viteză.

Pentru cealaltă problemă — cînd N se mișcă uniform— viteza lui M va fi dată de

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}} = 1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Derivata funcției $x = tg\ y$ este $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$. Cînd y crește, $\cos\ y$ descrește, iar $\frac{1}{\cos^2 y}$ crește.

198. Se poate demonstra că dacă o serie în care termenii sînt puteri ale lui x este convergentă pentru $|x| < R$, derivata sumei $S(x)$ este egală cu suma seriei ce se obține derivînd fiecare termen (convergentă în același interval).

Folosind problemele **196** și **186**, să se scrie *arctg* x ca o serie de puteri ale lui x.

Soluție. Avem

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Rezultă

$$arctg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

egalitate valabilă numai pentru $|x| < 1$, pentru că derivata lui *arctg* x este $\frac{1}{1 + x^2}$ și pentru $x = 0$, $arctg\ 0 = 0$.

199. Să se demonstreze că

$$arctg \frac{1}{2} + arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

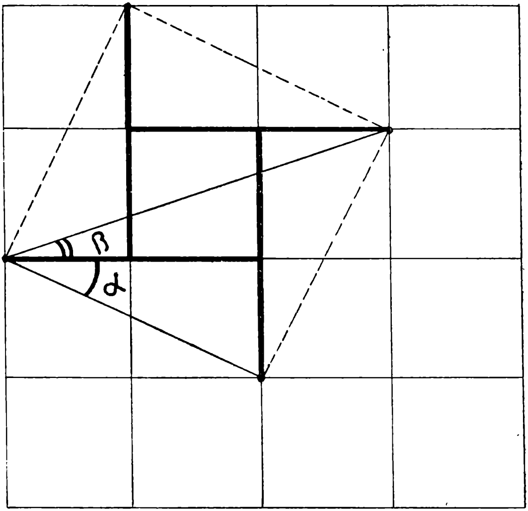


Fig. 79

Ideea. Prelungim laturile unui patrat ca în figură; obținem un nou patrat (fig. 79).

Soluție. Figura 79 arată că $tg\ \beta = \frac{1}{3}$ (adică β este *arctg* $\frac{1}{3}$) și $tg\ \alpha = \frac{1}{2}$. Ea arată că $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

200. Cu ajutorul problemelor **198** și **199**, să se calculeze numărul π cu două zecimale exacte (eroarea $< \frac{1}{100}$).

Soluție. Avem

$$arctg\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{128} + \dots$$

$$arctg\,\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{243} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2187} + \dots$$

Deci

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{27}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{243}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{128} + \frac{1}{2187}\right) + \dots$$

Ultimul termen este $< \frac{1}{90}$; deci este suficient să calculăm pe S_3 (obținînd o valoare prin adaos); la fiecare termen scoatem 3 zecimale. Obținem

$$\frac{\Pi}{4} \simeq 0{,}834\ldots - 0{,}054 + 0{,}007 = 0{,}786\ldots$$

Deci π, cu aproximație prin adaos: 3,144.

CUPRINS

Lector : AURELIAN BĂLTĂREȚU
Tehnoredactor : GABRIELA ILIOPOLOS

Apărut 1972. Comanda nr. 329.

Tiparul executat sub comanda nr. 20 003 la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii“, Piața Scînteii nr. 1
București
Republica Socialistă România

Prezenta culegere nu e alcătuită în vederea pregătirii unui examen; deci nu e necesar să fie parcursă într-un timp dat, cu o anumită febrilitate; am spune mai curînd că este vorba aici de matematică distractivă, dar nu ne însuşim acest adjectiv, căci întreaga matematică este şi distractivă. Cititorul trebuie s-o parcurgă numai în măsura în care aceasta îi face plăcere.

colecţia cristal

Lei 7,25