Modulul 1

MULȚIMI, RELAȚII, FUNCȚII

Subiecte :
1. **Proprietățile mulțimilor. Mulțimi numerice importante.**
2. **Relații binare. Relații de ordine. Relații de echivalență.**
3. **Imagini directe și imagini inverse de submulțimi printr-o funcție. Cardinalul unei submulțimi.**

***Evaluare:* 1. Prezentarea noțiunilor importante introduse.**
2. Rezolvarea problemelor finale.

1.1. MULȚIMI.

În acest paragraf ne vom referi la câteva noțiuni de bază ale analizei matematice absolut necesare în abordarea acesteia. Vom presupune cunoscute și nu vom defini riguros noțiuni primare ca: obiect, element, mulțime, colecție, egalitate, proprietate. De exemplu, o mulțime poate fi dată prin:

(1) $A = \{a, b, c, \ldots\}$ - punând în evidență elementele sale,

(2) $B = \{b: b$ are proprietatea $P\}$ - punând în evidență o proprietate caracteristică a elementelor mulțimii B.

Faptul că a este un element al mulțimii A se notează prin $a \in A$, am utilizat aici semnul "$\in$" de apartenență. Contrariul acestuia este semnul "$\notin$" de neapartenență, simbolizând că un element nu aparține unei mulțimi.

Dacă A este o parte (submulțime) a mulțimii B, simbolizăm aceasta prin semnul de incluziune " $\subset$ ", și anume scriem $A \subset B$. Utilizând semnele " $\Rightarrow$ " (implică) și " $\Leftrightarrow$ " (echivalent) putem scrie:

(3) $(A \subset B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Următoarele operații asupra mulțimilor sunt foarte des întâlnite:

(4) Reuniunea: $A \cup B = \{x: x \in A$ sau $x \in B\}$;

(5) Intersecția: $A \cap B = \{x: x \in A$ și $x \in B\}$;

(6) Diferența: $A - B = (A \setminus B) = \{x: x \in A$ și $x \notin B\}$;

(7) Complementara: $C_A B = (A \setminus B)$ (aici am presupus că $B \subset A$);

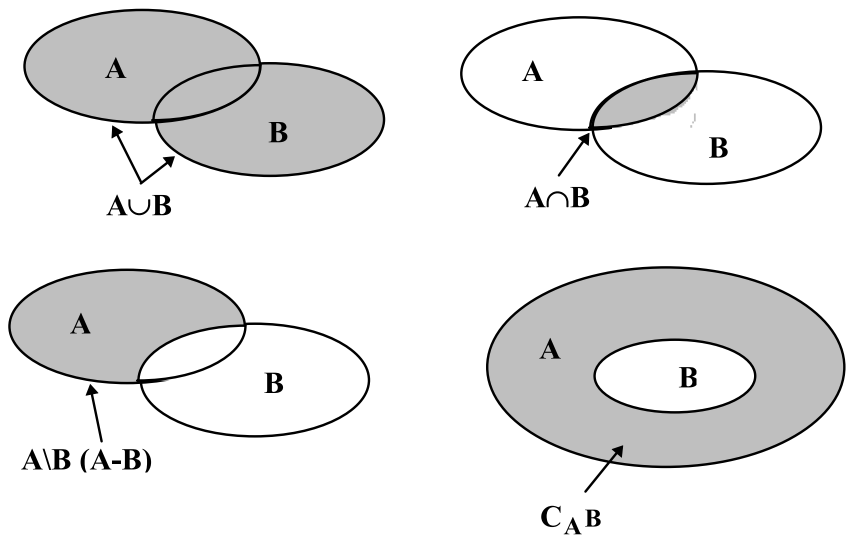
(8) Produsul cartezian: $A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$;

Ca de obicei semnul " = " indică egalitatea mulțimilor între care este pus și vom avea:

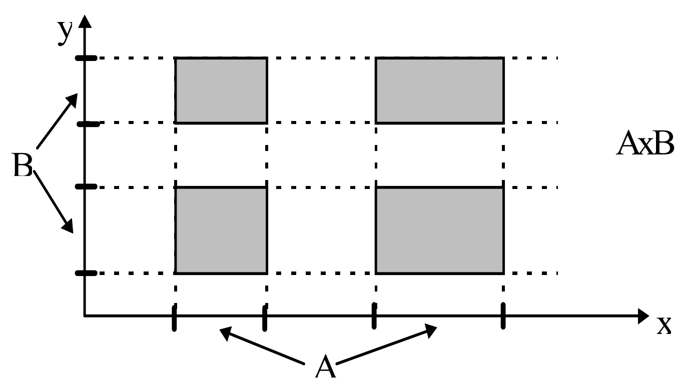
(9) $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B$ și $B \subset A)$;

Dacă presupunem că A și B sunt submulțimi de puncte ale planului, putem reprezenta operațiile menționate mai sus astfel:

(10)



Dacă A şi B sunt submulțimi ale mulțimii (axei) numerelor reale, atunci A x B este o submultime a planului $\mathbf{R}^2$.



Mulțimea fără nici un element o notăm cu $\varnothing$ şi se numeşte mulțimea vidă. Pentru o mulțime $A \neq \varnothing$ familia submulțimilor acesteia formează o nouă mulțime pe care o notăm cu P(A) şi care se numeşte familia părților lui A.

În continuare considerăm o multime totală E şi celelalte mulțimi care apar le considerăm ca fiind părți ale lui E. Referitor la operațiile cu mulțimi definite mai sus amintim câteva proprietăți mai importante:

(11) $C_A{}^A = \varnothing,\quad C_A{}^\varnothing = A,\quad C_E\left(C_E{}^A\right) = A$;

(12) $A \cup B = B \cup A$ (comutativitatea reuniunii);

(13) $(A \cap B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociativitatea reuniunii);

(14) $A \cup \varnothing = A,\ A \cup E = E$;

(15) $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea intersecției);

(16) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativitatea intersecției);

(17) $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap E = A$;

(18) $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$;

(19) $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

(18) si (19) sunt cunoscute sub numele de relațiile lui De Morgan.

(20) $A \times \varnothing = \varnothing$; A x B este în general diferit de B x A, adică produsul cartezian nu este comutativ.

(21) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (distributivitatea intersecției față de reuniune)

(22) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributivitatea reuniunii față de intersecție)

(23) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ (distributivitatea produsului cartezian față de reuniune, respectiv intersecție).

Demonstrația egalităților precizate mai sus se poate face prin dublă incluziune. De exemplu, să demonstrăm egalitatea (18).

Arătam mai întâi că $C_E(A \cup B) \subset C_E A \cap C_E B$.

Fie $x \in C_E(A \cup B) \Rightarrow x \in E$ şi $x \notin A \cup B \Rightarrow x \in E$ şi $(x \notin A)$ şi $(x \notin B) \Rightarrow (x \in E$ si $x \notin A)$ şi $(x \in E$ şi $x \notin B) \Rightarrow x \in C_E A$ şi $x \in C_E B \Rightarrow x \in C_E A \cap C_E B$.

Arătăm apoi că $C_E A \cap C_E B \subset C_E(A \cup B)$:

Fie $x \in C_E A \cap C_E B \Rightarrow (x \in E$ şi $x \notin A)$ şi $(x \in E$ şi $x \notin B) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in E$ şi $(x \notin A$ şi $x \notin B) \Rightarrow x \in E$ şi $x \notin A \cup B \Rightarrow x \in C_E(A \cup B)$.

Din cele două incluziuni rezultă egalitatea (18).

În continuare prezentăm mulțimile numerice de bază ale analizei matematice.

Vom nota prin **N** mulțimea numerelor naturale:

(24) $\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$;

prin **Z** mulțimea numerelor întregi:

(25) $\mathbf{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$;

si prin **Q** mulțimea numerelor rationale:

(26) $\mathbf{Q} = \left\{x:\quad x = \dfrac{p}{q},\quad p \in \mathbf{Z},\quad q \in \mathbf{N}\right\}$.

Proprietățile acestor mulțimi de numere le presupunem cunoscute. Probleme practice simple arată că aceste mulțimi de numere sunt insuficiente pentru a le rezolva. De exemplu, lungimea diagonalei unui pătrat având latura de lungime 1 (un număr rațional) nu va fi un număr rațional, deoarece este egal cu $1\sqrt{2}$, iar $\sqrt{2}$ nu poate fi scris sub forma $\dfrac{p}{q}$ cu $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$. De aici a apărut necesitatea extinderii lui **Q** la o mulțime mai bogată, şi anume la mulțimea numerelor reale, notată cu **R**.

Vom avea astfel:

(27) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$, unde **I** este multimea numerelor iraționale care o completează pe **Q** până la **R**.

Mulțimea numerelor reale se poate defini direct punând în evidență elementele sale sau axiomatic, ca o mulțime de elemente ce satisface la anumite grupe de axiome. În mod direct, constructiv, **R** se defineşte ca fiind mulțimea numerelor de forma:

(28) $$x = r, r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ... = r + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + ... + \frac{r_n}{10^n} + ...$$

unde $r_i \in \{0,1,2,...,9\}$ iar r este un numar întreg denumit partea întreagă a lui x $(r = [x])$. Această definiție nu este prea comodă, deoarece în membrul drept din (28) apare o suma infinită de termeni care conduce inevitabil la o limită.

Definiția axiomatică a numerelor reale este mai comodă, şi prin axiomele ei regăsim proprietățile submulțimilor ei considerate anterior.

Prin mulțimea numerelor reale înțelegem mulțimea **R** care satisface următoarele grupe de axiome:

(A1) <u>Axiome de adunare:</u>

$(\mathbf{R},+)$ formează un grup comutativ, notăm cu 0 elemntul neutru si cu -x opusul unui element x.

(A2) <u>Axiome de înmulțire sau multiplicare:</u>

$(\mathbf{R} \setminus \{0\},\cdot)$ formează un grup comutativ, notăm cu 1 elementul neutru şi cu $\frac{1}{x}$ sau x^{-1} inversul elementului x față de operația multiplicativă.

(A3) <u>Axioma distributivității:</u>

$x(y+z) = x \cdot y + x \cdot z$, pentru orice x, y, z $\in$ **R**, adică operația multiplicativă este distributivă față de cea aditivă şi deci $(\mathbf{R},+,\cdot)$ este un corp comutativ.

Axiomele de mai sus nu-l determina pe **R** deoarece si multimea **Q** le verifică. De asemenea submulțimea $\{0,1\} \subset$ **R** verifică sistemul de axiome considerat anterior.

(A4) <u>Axiome de ordine</u>:

Oricare ar fi elementele x, y $\in$ **R** se verifică cel puțin una din relațiile $x \le y$ sau $y \le x$ si următoarele proprietăți sunt satisfăcute:

(A4.1.) $x \le x$, oricare ar fi $x \in$ **R**, iar $x \le y$ si $y \le x$ implică $x = y$;

(A4.2.) $x \le y$ si $y \le z$ implică $x \le z$;

(A4.3.) $x \le y$ implică $x + z \le y + z$, oricare ar fi $z \in$ **R**;

(A4.4.) $0 \le x$, $0 \le y$ implică $0 \le x \cdot y$.

Nici sistemul de axiome enunțat până în prezent nu este suficient pentru a defini mulțimea numerelor reale, deoarece şi **Q** satisface la toate aceste axiome.

Axioma finală pentru definirea mulțimii numerelor reale este axioma următoare, numită axioma marginii superioare. Pentru a enunța însă această axiomă avem nevoie de câteva noțiuni pregătitoare:

O mulțime nevidă $A \subset \mathbf{R}$ se numeşte mărginită superior dacă există $x \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem $a \leq x$, pentru orice $a \in A$, acest număr se numeşte margine superioară pentru mulțimea A.

Numărul $x \in \mathbf{R}$ se numeşte cea mai mică margine superioară sau margine superioară strictă a mulțimii A dacă este margine superioră pentru mulțimea A şi pentru orice altă margine superioară x' a lui A avem $x \leq x'$. Marginea superioară stricta a unei mulțimi A, dacă există, se notează prin “sup A” şi ea este unică. Într-adevar, dacă ar exista două margini stricte x_1 si x_2 pentru o mulțime nevidă A, atunci din $x_1 \leq x_2$ şi $x_2 \leq x_1$ rezultă că ele coincid.

Analog se defineşte marginea inferioară strictă a unei mulțimi A şi se notează prin y = inf A.

(A5) <u>Axioma marginii superioare:</u>

Dacă A este o submulțime nevidă a mulțimii **R**, care este mărginită superior, atunci multimea A admite o margine superioară strictă şi aceasta este un element al lui **R**.

Mulțimea numerelor reale poate fi pusă în corespondența biunivocă cu mulțimea punctelor unei drepte pe care s-a fixat o origine O, un sens si o unitate de măsură şi care de obicei este numită axa reală. Punctele de la infinit ale dreptei reale se notează cu $\pm \infty$. Mulțimea numerelor reale **R** completată cu cele două simboluri se noteaza $\overline{\mathbf{R}}$ şi se numeşte închiderea mulțimii numerelor reale, $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm \infty\}$. Între aceste simboluri şi numerele reale se poate atribui sens unor operații, iar altora nu, de exemplu, $x \pm \infty = \pm \infty$, $a \cdot \infty = \infty$ dacă $a > 0$, $a \cdot \infty = -\infty$ dacă $a < 0$, $\infty + \infty = \infty$, pe când $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ sunt considerate operații fără sens.

Dați exemple de mulțimi.
Construiți pe baza mulțimilor date noi mulțimi, prin operațiile prezentate.
Prezentați câteva mulțimi numerice importante.

1.2. RELAȚII BINARE, RELAȚII DE ORDINE, RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ

Fie M o mulțime diferită de mulțimea vidă şi $R \subset M \times M$ o parte a produsului cartezian a lui M cu ea însăşi. Mulțimea R se numeşte relație binară pe M. De exemplu, dacă M = Z putem considera:

$$R = \{(x, y): x, y \in Z \text{ şi } x \text{ este divizibil cu } y\}.$$

Faptul că $(x, y) \in R$ se mai scrie x R y şi citim x se află în relația R cu y.

Despre o relație binară R definită pe o mulțime M spunem că este:

(1) reflexivă dacă x R x are loc pentru orice $x \in M$;
(2) simetrică dacă x R y implică y R x;
(3) antisimetrică dacă x R y şi y R x implică x = y;
(4) tranzitivă dacă x R y şi y R z implică x R z.

O relație binară R definită pe o mulțime nevidă M se numeşte:

(5) relație de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă;
(6) relație de ordine strictă dacă este tranzitivă;
(7) relatie de echivalentă dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Dacă R este o relație de ordine pe o mulțime $M \neq \emptyset$ şi oricare ar fi $x, y \in M$ are loc x R y sau y R x spunem că mulțimea M este total ordonată în raport cu relația R, în caz contrar spunem că M este parțial ordonată.

Dacă R este o relație de echivalență pe mulțimea M, atunci clasa de echivalență a unui element $a \in M$ se defineşte prin $\hat{a} = \{x \in M: xRa\}$. Mulțimea claselor de echivalența ce pot fi formate din elementele mulțimii M se numeşte mulțime cât a lui M prin raport cu relația R şi se notează prin M / R.

Dacă, de exemplu, considerăm M = **R** (mulțimea numerelor reale) atunci “ $\leq$ ” defineşte o relație de ordine totală pe **R**, “ < “ defineşte o relație de ordine strictă, iar $x R y \Leftrightarrow x - y = 0$ defineşte pe **R** o relație de echivalență.

Fie acum, M = { 1, 2, …, 9 }, pe M definim relația binară $x R y \Leftrightarrow (x - 1)\cdot(x - 2)(x - 3) + (y - 1)(y - 2)(y - 3) = 0$. Se constată uşor că relația R este simetrică şi tranzitivă dar nu este reflexivă.

Definți relațiile binare de ordine şi relațiile binare de echivalență.
Construiți exemple din relațiile definite anterior.
Construți pentru relațiile de echivalență considerate mulțimea claselor de echivalență.

1.3. IMAGINI DIRECTE, IMAGINI INVERSE DE SUBMULŢIMI PRINTR-O FUNCŢIE, CARDINALUL UNEI MULŢIMI

Să considerăm acum două mulţimi M şi N. O relaţie binară de la M la N se defineşte ca o parte a produsului cartezian, $F \subset M \times N$. Elementele lui $M \times N$ se împart astfel în două clase, care aparţin lui F şi care nu aparţin lui F.

Dacă pentru orice $x \in M$ există în mod unic $y \in N$ astfel ca $(x, y) \in F$ atunci relaţia binară F se numeşte relaţie funcţională sau funcţie de la M la N. Se regăseşte astfel definiţia clasică a noţiunii de funcţie (aplicaţie) de la M la N prin care înţelegem o asociere la fiecare element x din M a unui element unic y din N. De fapt relaţia funcţională $F \subset M \times N$ se identifică cu graficul funcţiei $M \ni x \xrightarrow{f} y \in N$, adică $F = \{(x, f(x)) : x \in M\}$.

Subliniem faptul că printr-o funcţie de la M la N înţelegem tripletul (M, N, f), M se numeşte domeniul de definiţie, N se numeşte mulţime în care funcţia ia valori, iar f este corespondenţa de la M la N. Nu ne vom ocupa de cazul când unui element $x \in M$ i se asociază o parte $f(x) \subset N$, dar precizăm că de aceste cazuri se ocupa teoria funcţiilor multivoce sau a multifuncţiilor.

Un caz particular de funcţie îl constituie şirul de elemente dintr-o mulţime M. Fie **N** mulţimea numerelor naturale. Se numeşte şir de elemente din M o aplicaţie $f : \mathbf{N} \to M$. Dacă notăm $a_n = f(n)$ atunci şirul realizează corespondenţa (succesiunea) $n \to a_n$ şi acest lucru se notează pe scurt prin $\{a_n\}_{n\geq 1}$ sau $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. În esenta noţiunea de şir stabileşte o ordonare, o enumerare de termeni dintr-o mulţime, în corespondenţa cu mulţimea numerelor naturale sau cu o parte infinită a sa. Evident putem înlocui pe **N** cu $N \cup \{0\}$ sau cu N-$\{1, 2,\ldots, k\}$, $k \geq 1$ enumerarea temenilor în corespondenţă cu **N** se păstrează.

Fie o funcţie $f : M \to N$ (definită pe M cu valori în N) şi $A \subset M$. Mulţimea $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ se numeşte imaginea submulţimii A prin funcţia f. Dacă considerăm $A = M$ atunci f(M) se numeşte mulţimea valorilor funcţiei f. Evident f(A), f(M) sunt incluse în N.

Fie acum $B \subset N$. Prin $f^{-1}(B)$ înţelegem mulţimea $\{x \in M: f(x) \in B\}$ care se numeşte imaginea inversă sau contraimaginea lui B prin functia f.

Imaginea directă şi imaginea inversă definite prin funcţia $f : M \to N$, considerate ca funcţii definite pe P(M) cu valori în P(N), respectiv pe P(N) cu valori în P(M), au următoarele proprietăţi ce decurg imediat din definiţie:

a) $f(\emptyset) = \emptyset$;

b) dacă $A \subset B$ rezultă $f(A) \subset f(B)$;

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
e) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$;
f) dacă $P \subset Q$ rezultă $f^{-1}(P) \subset f^{-1}(Q)$;
g) $f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$;
h) $f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$;
i) $f^{-1}(CA) = Cf^{-1}(A)$;
unde A, B $\in$ P(M) si P, Q $\in$ P(N).

Demonstrația acestor proprietăți se bazează pe definiția egalității a două mulțimi, prin dublă incluziune. De asemenea extinderea la cazul reuniunii şi intersecției finite, respectiv numarabile, este imediată.

Funcția f pentru care f (M) = N se numeste surjectivă. Dacă pentru orice $x_1, x_2 \in M$ şi $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ atunci funcția f se numeşte injectivă. Funcțiile f care sunt şi injective şi surjective se numesc funcții bijective.

Dacă f : M $\to$ N este o functie bijectiva, atunci putem defini corespondența inversă (funcția inversă) $f^{-1}: N \to M$ prin: dacă f (a) = b atunci $f^{-1}(b) = a$ Deci clasa funcțiilor bijective coincide cu clasa funcțiilor inversabile, adică a funcțiilor $f : M \to N$ pentru care există $f^{-1}: N \to M$, astfel ca:

(1)
$$\left(f^{-1} \circ f\right)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a, \quad \forall a \in M$$
$$\left(f \circ f^{-1}\right)(b) = f\left(f^{-1}(b)\right) = f(a) = b, \quad \forall b \in N$$

Fie acum P şi Q două mulțimi. Spunem că P şi Q sunt echipotente sau că au acelaşi cardinal dacă există o aplicație bijectivă $f : P \to Q$ (evident atunci există şi $f^{-1}: Q \to P$). Relația de echipotență este o relație de echivalență, adică $P \sim Q \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ P şi Q sunt echipotente atrage după sine faptul că relația " ~ " este o relație binară de echivalență.

Spunem despre o mulțime M că este finită dacă ea este echipotentă cu o parte mărginită a mulțimii numerelor naturale. Dacă P este echipotentă cu {1, 2, …, n} spunem că P are n elemente sau că are cardinalul n, adică card (P) = n.

O mulțime P se numeşte numărabilă dacă este echipotentă cu mulțimea numerelor naturale; notăm acest fapt prin card (P) = χ_0 (prin alef zero fiind notat cardinalul numerelor naturale).

O mulțime care este finită sau numărabilă se numeşte cel mult numărabilă.

Dintre proprietățile mulțimilor numărabile amintim :
(2) reuniunea unui şir de mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă;
(3) produsul cartezian a doua mulțimi numărabile este numărabilă;
(4) o reuniune numărabilă de mulțimi finite este cel mult numărabilă.

În continuare ne vom referi la câteva proprietăţi ale mulţimii numerelor reale.

Mulţimea numerelor reale **R** este nenumarabilă (nu poate fi pusă în corepondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale). Notăm card **R** = χ (alef) şi spunem că **R** are cardinalul χ sau că este de puterea continuului .

De asemenea orice interval de forma (a, b) cu a < b este echipotent cu **R**, mulţimea **Q** este numărabilă iar mulţimea **R** - **Q** este nenumarabilă, aşadar putem spune că există " mai puţine " numere raţionale decât numere iraţionale.

Dacă considerăm funcţiile :

a) $f:(-1,-1) \to R, f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f:(o,\infty) \to R, f(x) = \ln x$

c) $f:(a,b) \to (0,\infty), f(x) = \dfrac{a-x}{x-b}$

d) $f:(a,b) \to (c,d), f(x) = \dfrac{c-d}{a-b}\cdot d + \dfrac{ad-bc}{a-d}$

vom constata că toate sunt bijecţii şi deci mulţimile care apar mai sus sunt toate echipotente între ele şi au acelaşi cardinal cu **R**.

Următoarea proprietate a numerelor reale este cunoscută sub numele de <u>proprietatea lui Arhimede</u> : Pentru orice numere reale fixate x, y $\in$ **R**, x > 0 există n $\in$ **N** astfel încât nx $\geq$ y.

Aşadar se poate parcurge o distanţă oricât de mare y dar finită cu paşi oricât de mici x, căci există n ≥ 1 astfel ca $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} \geq y$.

Fie acum $I_n = [a_n, b_n]$ n ≥ 0 un şir de intervale închise de numere reale astfel ca $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$, şi dacă $l(I_n)$ este lungimea intervalului I_n, adica $l(I_n) = b_n - a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ atunci <u>lema (proprietatea) intervalelor închise incluse</u> afirma că intersecţia $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n$, a acestor intervale este nevidă şi se reduce la un punct.

Remarcăm că închiderea intervalelor este esenţială fiindcă dacă luam, de exemplu, $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$ atunci celelalte condiţii de mai sus sunt îndeplinite şi totuşi $\bigcap\limits_{n\geq 1} I_n = \emptyset$.

În practică mulţimea **R** a numerelor reale nu este suficientă pentru a exprima rezultatele obţinute. Chiar rezolvarea unei ecuaţii de gradul al doilea cu coeficienţi reali necesită introducerea numerelor complexe

C = **R** + i**R** = $\{x + iy : x, y \in$ **R**, $i^2 = -1\}$.

Definiţi imaginea directă şi imaginea inversă a unei submulţimi printr-o funcţie.

Definiți funcția injectivă , funcția surjectivă, funcția bijectivă și funcția inversabilă.
Dați exemplu de mulțimi finite și mulțimi numărabile.

<u>Probleme finale</u> :

1. Să se figureze în plan mulțimile:
a) $A = \{(x , y) \in R^2 \mid x - y^2 \leq 0 , x - y > 1 \}$
b) $B = \{(x , y) \in R^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1 , x , y \geq 0 \}$

2. **Fie** $A = \{-2 , -4\} \cup (-1 , 0]$ **și** $B = [-2 , 1) \cup \{3\} \cup [5 , +\infty)$. **Să se determine** $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \times B$, $(A \cup B) - (B - A)$.

3. Să se compare mulțimile:
$A = \{(x , y) \in R^2 \mid x + y = 5 \}$ **și** $B = \{(x , y) \in R^2 \mid 2x^2 + 2y^2 \geq 25 \}$.

4. **Fie** $A = \{x \in R \mid 2 \leq x \leq 5 \}$ **și** $B = \{ x \in R \mid 3 \leq x \leq 10\}$. **Să se verifice egalitatea** $C(A \cup B) = CA \cap CB$.

5. **Fie** $A = \{1,2,3,4\}$ **și relația** $\rho \subset A^2$, $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1) (2,3),(3,3),(3,2)\}$. **Să se verifice că** ρ **este o relație binară : reflexivă, simetrică, antisimetrică și transitivă.**

6. **Fie** $E = \{1,2,3,4\}$ **și relația** $\rho \subset R^2$, $(x,y)\ \rho\ (x',y') \Leftrightarrow xy' = x'y$.
Să se arate că ρ **este o relație binară de echivalență. Determinați clasele de echivalență** $C_{(1,2)}$ **și** $C_{(2,3)}$.

7. **Fie relația** $\rho \subset N^2$ **definită astfel** $x\ \rho\ y \Leftrightarrow x \mid y$. **Să se verifice că** ρ **este o relație de ordine pe N.**

8. **Să se arate că funcția** $f: R \to (-1,1)$, **unde** $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ **este bijectivă .**

9. **Să se arate că funcția** $f: (0, +\infty) \to (0,1)$, **unde** $f(x) =$ **Error! este inversabilă. Determinați inversa sa.**

10. Să se arate că mulțimea A =(-1,1) are același cardinal ca și mulțimea numerelor reale R .