G. PÓLYA

CUM REZOLVĂM O PROBLEMĂ?

Un nou aspect al metodei matematice

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ
Bucureşti — 1965

DIN PREFAȚA LA PRIMUL TIRAJ

O descoperire mare rezolvă o problemă mare, dar există un grăunte de descoperire în soluția oricărei probleme. Puteți avea în față o problemă modestă; dacă însă ea vă stîrnește curiozitatea și vă pune în joc facultățile de inventivitate, și dacă o rezolvați prin mijloace proprii, puteți simți încordarea dinaintea descoperirii și vă puteți bucura de triumful realizării ei. Astfel de experiențe, la o vîrstă de mare receptivitate, pot crea gustul pentru munca intelectuală, punîndu-și pentru toată viața amprenta asupra minții și asupra caracterului.

Așadar, profesorul de matematică dispune de mari posibilități. Dacă el își umple timpul muștruluindu-și elevii cu operații rutiniere, el le ucide interesul, le frînează dezvoltarea intelectuală și-și folosește prost posibilitățile. Dacă însă stîrnește curiozitatea elevilor, propunîndu-le probleme proporționale cu cunoștințele lor și dacă îi ajută să-și rezolve problemele prin întrebări care-i stimulează, el le poate inocula gustul pentru o gîndire independentă și să le dezvolte aptitudinile corespunzătoare.

De asemenea, elevul a cărui programă cuprinde un curs de matematică, dispune de posibilități deosebite. Bineînțeles, aceste posibilități se pierd, dacă el consideră matematica drept un obiect la care trebuie să dea un anumit număr de examene și pe care îl va uita cît mai repede după examenul de absolvire. Aceste posibilități se pot pierde și în cazul cînd elevul are anumite aptitudini naturale pentru matematică, deoarece, la fel ca oricare altul, el trebuie să-și descopere talentele și gusturile; el nu poate ști dacă îi place budinca cu zmeură, în caz că n-a gustat-o niciodată. El poate ajunge însă să constate că o problemă de matematică poate fi tot atît de captivantă ca un joc de cuvinte încrucișate sau că o muncă intelectuală încordată poate reprezenta un exercițiu tot atît de oportun ca și o partidă dificilă de tenis. După ce a gustat plăcerea matematicii, nu o va mai uita cu uşurinţă şi există atunci şanse mari ca matematica să ajungă să însemne ceva pentru el: o preocupare de amator, un instrument în profesiunea sa, chiar profesiunea sa sau o mare ambiţie.

Autorul îşi aminteşte de vremea cînd era student, un student destul de ambiţios, dornic să înţeleagă un pic de matematică şi de fizică. Asculta prelegeri, citea cărţi, căuta să asimileze soluţiile şi faptele care îi erau prezentate, dar exista o întrebare care îl tulbura mereu: „Da, soluţia pare să meargă, face impresia că este corectă; dar cum poate fi inventată o astfel de soluţie? Da, acest experiment pare să-şi atingă scopul, arată ca un fapt; dar cum pot oamenii să descopere astfel de fapte? Şi cum aş putea eu însumi să inventez sau să descopăr astfel de lucruri?" Astăzi, autorul predă matematica la universitate; el îşi închipuie sau speră că unii dintre studenţii săi mai însetaţi de cunoştinţe îşi pun întrebări asemănătoare şi, de aceea, încearcă să le satisfacă curiozitatea. Căutînd să înţeleagă soluţia cutărei sau cutărei probleme, precum şi motivarea soluţiei şi procedeele prin care a fost obţinută, încercînd să explice altora aceste motivări şi procedee, el a fost condus pînă la urmă să scrie cartea de faţă. Autorul speră că ea va fi folositoare profesorilor care doresc să dezvolte aptitudinile elevilor lor în domeniul rezolvării problemelor, ca şi elevilor dornici să-şi dezvolte singuri aptitudinile.

Deşi această carte acordă o atenţie specială cerinţelor celor ce învaţă şi predau matematica, ea va interesa pe oricine este preocupat de căile şi de mijloacele care duc la invenţii şi descoperiri. Acest interes pare să fie mult mai răspîndit decît am crede la prima vedere. Spaţiul pe care ziarele şi revistele pentru marele public îl acordă cuvintelor încrucişate şi altor jocuri pare să arate că oamenii consacră un anumit timp rezolvării unor probleme fără valoare practică. La baza dorinţei de a soluţiona diverse probleme care nu conferă avantaje materiale ar putea sta o curiozitate mai profundă, o dorinţă de a înţelege căile şi mijloacele, motivările şi procedeele de rezolvare.

Paginile ce urmează sînt scrise întrucîtva concis, dar cît se poate de simplu şi se întemeiază pe un studiu îndelungat şi serios al metodelor de rezolvare. Acest gen de studiu, căruia unii autori îi spun *euristică*, nu este la modă astăzi, dar are un trecut bogat şi, poate, un oarecare viitor.

Studiind metodele de rezolvare a problemelor, ni se dezvăluie o altă faţă a matematicii. Da, matematica are două fețe: este știința riguroasă a lui Euclid, dar ea este și altceva Prezentată în maniera lui Euclid, matematica apare ca o știință sistematică, deductivă; dar în procesul creării ei, matematica se prezintă ca o știință experimentală, inductivă. Ambele aspecte sînt tot atît de vechi ca și matematica însăși. Însă al doilea aspect este nou într-o singură privință: matematica *in statu nascendi*, în procesul invenției, nu a fost niciodată pînă acum prezentată în acest mod nici celui ce învață, nici celui ce predă, nici marelui public.

Obiectul euristicii are variate legături cu alte științe, matematicienii, logicienii, psihologii, pedagogii sau chiar filozofii pot revendica diversele părți ale ei ca aparținînd domeniului lor de specialitate. Dîndu-și bine seama de posibilitatea unor critici venite din toate aceste părți și perfect conștient de limitele sale, autorul are o singură pretenție: el posedă o anumită experiență în rezolvarea problemelor și în predarea matematicii la diferite niveluri.

Subiectul acestei lucrări este tratat mai pe larg într-o carte mai amplă pe care autorul o pregătește în prezent.

Universitatea Stanford, 1 august, 1944.

DIN PREFAȚA LA TIRAJUL AL ȘAPTELEA

Sînt bucuros să anunț că am izbutit acum să îndeplinesc, cel puțin în parte, o promisiune făcută în prefața la primul tiraj: cele două volume *Inducția și analogia în matematică* și *Modele de raționament plauzibil*, care constituie recenta mea lucrare *Matematica și raționamentele plauzibile*[1], continuă linia de gîndire începută în *Cum rezolvăm o problemă?*

Zürich, 30 august, 1954

---

[1]. Vezi G. Pólya, *Matematica și raționamentele plauzibile*, vol. I și II, Ed. Științifică, București, 1962 — *N.R.*

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A DOUA

Ediția a doua adaugă, în afară de unele îmbunătățiri de mică importanță, o nouă parte, a patra, *Probleme, sugestii, soluții.*

Pe cînd prezenta ediție se afla sub tipar, a apărut un studiu (Educational Testing Service, Princeton, N.J.; cf. *Time*, 18 iunie, 1956), care pare să fi formulat unele observații juste; ele nu sînt noi pentru cei în cunoștință de cauză, dar era de mult timpul să fie spuse marelui public: „... matematica se bucură de îndoielnica onoare de a fi materia cea mai puțin populară din programa analitică... Viitorii profesori trec prin școala elementară, unde învață să urască matematica... Ei se întorc în școala elementară pentru a învăța o nouă generație să o urască".

Nădăjduiesc că prezenta ediție, destinată unei difuzări mai largi, va convinge pe unii dintre cititorii ei că matematica, pe lîngă faptul că este un drum necesar spre tehnică și spre știință, poate fi captivantă și poate deschide perspective activității intelectuale la nivelul cel mai înalt.

Zürich, 30 iunie, 1956

CUM REZOLVĂM O PROBLEMĂ ?

1.

Trebuie *să înțelegem* problema.

Înțelegerea problemei

Care este necunoscuta? Care sînt datele? Care este condiția?

Poate fi satisfăcută condiția? Este condiția suficientă pentru a determina necunoscuta? Sau este insuficientă? Sau redondantă? Sau contradictorie?

Să facem un desen. Să introducem notații corespunzătoare.

Să separăm diversele părți ale condiției. Le putem scrie în limbaj matematic?

2.

Să găsim legătura dintre date și necunoscută.

Nu este exclus să fim puși în situația de a considera probleme auxiliare dacă nu izbutim să găsim o legătură directă.

Eventual, ar trebui obținut un *plan* al soluției.

Întocmirea unui plan

Am mai întîlnit această problemă? Sau poate că am avut de-a face cu ea, într-o formă oarecum diferită?

Cunoaștem vreo problemă înrudită? Cunoaștem vreo teoremă care ar putea fi utilă aici?

Să cercetăm necunoscuta! Și să ne gîndim la o problemă cunoscută, avînd aceeași necunoscută sau una similară.

Iată o problemă înrudită cu a noastră și rezolvată anterior. Am putea să o folosim? Am putea să-i utilizăm rezultatul? Am putea cumva să-i folosim metoda? Nu am putea să introducem vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă? S-ar putea reformula problema? Am putea s-o reformulăm oarecum altfel? Să revenim la definiții. Dacă nu putem să rezolvăm problema propusă, încercăm să rezolvăm mai întîi o problemă înrudită. Am putea să imaginăm o problemă înrudită și mai accesibilă? O problemă mai generală? O problemă mai particulară? O problemă analogă?

Ştim să rezolvăm o parte a problemei? Să păstrăm numai o parte a condiţiei, omiţînd restul; în ce măsură este acum determinată necunoscuta, cum mai poate ea să varieze? Am putea deduce ceva util din datele problemei? Ne-am putea imagina alte date, adecvate pentru a determina necunoscuta? Am putea schimba necunoscuta sau datele, sau şi pe una şi pe celelalte, dacă este cazul, astfel încît noua necunoscută să fie mai strîns legată de noile date?
Au fost utilizate toate datele? A fost utilizată întreaga condiţie? S-a ţinut seama de toate noţiunile esenţiale care intervin în problemă?

3.

Să ne realizăm planul.

Realizarea planului

În cadrul realizării planului soluţiei, *se verifică fiecare pas*. Ne putem da limpede seama că pasul este corect? Putem demonstra că este corect?

4.

Să analizăm rezultatul obţinut.

Privirea retrospectivă

Se poate *verifica rezultatul*? Putem verifica argumentarea? Se poate obţine rezultatul şi pe altă cale? Ne putem da seama de aceasta dintr-o privire? Se poate folosi rezultatul sau metoda la o altă problemă?

CUM REZOLVĂM O PROBLEMĂ ?

(Variantă prescurtată)

1. *Căutăm să înțelegem problema.*
2. *Găsim calea de la necunoscută la date, considerînd, eventual, probleme intermediare („analiză“).*
3. *Realizăm ideea soluției („sinteză“).*
4. *Verificăm rezultatul și-l apreciem critic.*

2.

Enunțăm relația (sau relațiile) dintre necunoscută și date.

Transformăm elementele necunoscute. Încercăm să introducem necunoscute noi, mai apropiate de datele problemei.

Transformăm elementele date. Încercăm să obținem astfel elemente noi, mai apropiate de necunoscutele pe care le căutăm.

Rezolvăm numai parțial problema.

Satisfacem numai parțial condiția; în ce măsură mai rămîne necunoscuta nedeterminată? (Locuri geometrice!)

Generalizăm. Examinăm cazurile particulare. Aplicăm analogii.

3.

Verificăm corectitudinea fiecărui pas, păstrînd numai ceea ce „concepem cu toată claritatea sau deducem cu o certitudine deplină“ (*Descartes*)

1. Ce spune problema? Ce este dat? Ce trebuie aflat?

Determină datele necunoscuta? Sau sînt insuficiente, — redondante?

Se poate da problemei o altă formulare?

Se poate găsi vreo legătură între problema noastră și o problemă a cărei soluție o cunoaștem? Sau cu una care se rezolvă mai simplu? Sau care se rezolvă direct?

Aceste întrebări trebuie puse ori de cîte ori elevul se oprește în rezolvarea problemei, la rezolvarea fiecărei probleme intermediare. În plus: Au fost folosite toate datele problemei?

„Înlocuim termenii prin definițiile lor“. (*Pascal*)

4.

Este rezultatul plauzibil? De ce?

S-ar putea face o verificare?

Nu există vreo altă cale care să ducă la același rezultat? Vreo cale mai directă? Ce rezultate se mai pot obține pe aceeași cale?

---

[1] Cf. nota de la p. 33.

INTRODUCERE

Consideraţiile care urmează sînt grupate în jurul listei precedente de întrebări şi recomandări, intitulată Cum rezolvăm o problemă? Orice întrebare sau recomandare citată de aici va fi tipărită cu *cursive*, iar la ansamblul listei ne vom referi prin „lista" sau „lista noastră".

În paginile următoare va fi discutat scopul listei, va fi ilustrată prin exemple utilizarea ei practică şi vor fi explicate noţiunile şi operaţiile intelectuale care stau la baza ei. Ca explicaţie preliminară, putem spune doar atît: dacă vă veţi adresa singuri, într-un mod corect, acestor întrebări şi recomandări, ele vă vor ajuta să rezolvaţi problema. Dacă, folosindu-le corect, veţi adresa aceleaşi întrebări şi recomandări unuia dintre elevii dumneavoastră, îl veţi ajuta să-şi rezolve problema.

Cartea cuprinde patru părţi.

Titlul primei părţi este „În clasă". Ea conţine douăzeci de puncte. Fiecare punct va fi citat împreună cu numărul său, tipărit cu litere grase, de exemplu „pct. **7**". Punctele **1—5** discută „Scopul" sau „Destinaţia" listei noastre, în linii mari. Punctele **6—17** explică ce înseamnă „Părţi principale, întrebări principale" ale listei şi discută un prim exemplu practic. Punctele **18, 19, 20** adaugă „Alte exemple".

Titlul părţii a II-a, care este foarte scurtă, este „Cum rezolvăm o problemă?" Este scrisă sub formă de dialog: un profesor întrucîtva ideal răspunde la întrebările succinte ale unui elev întrucîtva ideal.

Partea a III-a, cea mai amplă, este un „Scurt dicţionar de euristică"; o vom cita ca „Dicţionarul". Ea conţine 68 de articole ordonate alfabetic. De exemplu, semnificaţia termenului *e u r i s t i c ă* este explicată în articolul cu acelaşi titlu de la p. 96. Cînd titlul unui astfel de articol este citat în text, el va fi tipărit cu cursive spaţiate. Anumite paragrafe din cîteva articole au un caracter mai tehnic; acestea sînt cuprinse între paranteze drepte. Unele articole sînt foarte strîns legate de prima parte, la care adaugă noi ilustrări și comentarii mai speciale. Alte articole depășesc întrucîtva scopul primei părți și explică fondul, baza ei. Articolul cheie este *Euristica modernă*. Aici se explică conexiunea dintre principalele articole și planul care stă la baza „Dicționarului"; articolul conține și indicații referitoare la modul cum se pot obține informații despre cutare sau cutare punct din listă. Trebuie subliniat că există aici un plan comun și o anumită unitate, deoarece articolele din „Dicționar" prezintă ca aspect exterior o mare varietate. Există cîteva articole mai ample, consacrate discutării sistematice, dar concentrate, a unei teme mai generale; altele conțin comentarii mai particulare, pe cînd celelalte cuprind referiri sau date istorice, citate, aforisme și chiar glume.

„Dicționarul" nu trebuie citit prea repede; textul său este adesea condensat și pe alocuri este vorba despre chestiuni mai subtile. Cititorul poate consulta „Dicționarul" pentru a se informa asupra unor puncte particulare. Dacă acestea provin din experiența dobîndită din problemele rezolvate de el sau de elevii săi, lectura are șanse mult mai mari de a fi profitabilă.

Titlul părții a IV-a este „Probleme, indicații, soluții". Ea îi propune cititorului mai ambițios cîteva probleme. Fiecare dintre ele este urmată (la un interval potrivit) de o „indicație", care îi poate dezvălui o cale de acces la rezultatul expus în „soluție".

Am vorbit în repetate rînduri despre „elev" și despre „profesor" și ne vom referi mereu din nou la ei. Este cazul să menționăm că „elevul" poate fi student într-o instituție de învățămînt superior, într-o școală medie sau oricine învață matematica. De asemenea, „profesorul" poate preda într-o școală superioară, într-una medie sau poate fi orice persoană care se interesează de tehnica predării matematicii. Autorul consideră situațiile cîteodată din punctul de vedere al elevului și cîteodată din cel al profesorului (acest din urmă caz este preponderent în prima parte). Dar de cele mai multe ori (mai ales în partea a treia), punctul de vedere este cel al unei persoane care nu este nici profesor, nici elev, ci numai doritoare să rezolve o problemă care îi stă în față.

Partea I

ÎN CLASĂ

SCOPUL

1. Să-l ajutăm pe elev. Una dintre sarcinile cele mai importante ale profesorului constă în a-şi ajuta elevii. Această sarcină nu este tocmai uşoară; ea cere timp, experienţă, devotament şi principii sănătoase.

Elevul trebuie să dobîndească o cît mai mare experienţă de muncă independentă. Dacă este însă lăsat singur cu problema sa, neajutat sau ajutat insuficient, s-ar putea să nu progreseze de loc. Dacă profesorul ajută prea mult, elevului nu-i mai rămîne nimic de făcut. Profesorul trebuie să ajute, dar nici prea mult şi nici prea puţin, astfel ca elevului să-i revină o *parte raţională din muncă.*

Chiar dacă elevul nu este în stare să facă mare lucru, profesorul trebuie să-i dea iluzia că lucrează independent. Pentru a realiza aceasta, profesorul trebuie să-şi ajute elevul într-un mod discret, *nesîcîitor.*

Cel mai bine este însă ca elevul să fie ajutat într-un mod firesc. Profesorul trebuie să se pună în locul elevului, să vadă dificultăţile acestuia, să încerce a înţelege ce se întîmplă în mintea lui şi să pună o întrebare sau să-i indice un pas *care ar fi putut să-i vină în minte şi elevului.*

2. Întrebări, recomandări, operaţii intelectuale. Căutînd să-l ajute pe elev într-un mod eficient, însă discret şi firesc, profesorul este condus să pună mereu aceeaşi întrebare şi să indice mereu aceiaşi paşi. Astfel, în nenumărate probleme, trebuie să întrebăm: *Care este necunoscuta?* Putem varia cuvintele şi întreba acelaşi lucru în mai multe feluri : Ce se cere? Ce vrem să găsim? Ce trebuie să căutăm? Scopul acestor întrebări este de a concentra atenţia elevului asupra necunoscutei. Cîteodată obţinem acelaşi efect într-un mod mai firesc, printr-o recomandare: *Să cercetăm necunoscuta!* Întrebarea şi recomandarea urmăresc acelaşi efect; ele tind să declanşeze aceeaşi operaţie mintală.

Autorul a considerat că ar merita osteneala să strîngă şi să grupeze întrebările şi recomandările tipic utile elevului cînd se discută cu el o problemă. Lista pe care o studiem conţine întrebări şi recomandări de acest gen, alese şi ordonate cu grijă; ele sînt tot atît de utile pentru cineva care rezolvă probleme lucrînd individual. Dacă cititorul este suficient de familiarizat cu lista şi este în stare să vadă în spatele recomandării acţiunea pe care o sugerează, el va înţelege că, lista enumeră, în mod indirect, *operaţii intelectuale tipic utile în rezolvarea problemelor*. Aceste operaţii sînt trecute în listă potrivit ordinii în care apar cel mai frecvent.

3. Generalitatea este o importantă caracteristică a întrebărilor şi a recomandărilor cuprinse în lista noastră. Să luăm întrebările: *Care este necunoscuta? Care sînt datele? Care este condiţia?* Aceste întrebări au o aplicabilitate generală, le putem pune cu rezultate bune în orice fel de probleme. Folosul lor nu este limitat de subiectul problemei. Putem avea o problemă de algebră sau de geometrie, matematică sau nematematică, teoretică sau practică, o problemă serioasă sau pur şi simplu un joc; oricum ar fi ea, aceste întrebări îşi păstrează sensul şi ne pot ajuta să rezolvăm problema.

Există, ce e drept, o restricţie sau o limitare, însă ea nu are nimic a face cu subiectul problemei. Anumite întrebări şi recomandări din listă sînt aplicabile numai „problemelor de aflat (sau de găsit)“, nu şi „problemelor de demonstrat“. Dacă avem o problemă de acest din urmă fel, trebuie să recurgem la alte întrebări; vezi *Probleme de aflat, probleme de demonstrat*.

4. Bunul simţ. Întrebările şi recomandările din lista noastră sînt generale şi, totodată, naturale, simple, evidente şi izvorăsc din bunul simţ. Să luăm recomandarea: *Să cercetăm necunoscuta! Şi să ne gîndim la o problemă cunoscută, avînd aceeaşi necunoscută sau una similară.* Această recomandare vă pune să faceţi ce aţi fi întreprins oricum, fără să vă sfătuiască nimeni, dacă sînteţi serios preocupat de problemă. Ţi-e foame? Vrei să găseşti mîncare şi te gîndeşti la căile obişnuite pentru a o obţine. Ai o problemă de construcţie geometrică? Vrei să construieşti un triunghi şi te gîndeşti la căile obişnuite de a construi un triunghi. Ai o problemă de orice altă natură? Vrei să găseşti o anumită necunoscută şi te gîndeşti la căile obişnuite pentru a găsi o astfel de necunoscută sau una asemănătoare. Cine procedează astfel, urmează întocmai recomandarea citată din lista noastră. Și este pe calea cea bună, recomandarea este bună, ea îl sfătuiește să adopte un procedeu care, foarte frecvent, se dovedește încununat de succes.

Toate întrebările și recomandările din lista noastră sînt firești, simple, evidente, de domeniul bunului simț; dar ele enunță bunul simț în termeni generali. Ele sugerează o conduită care-i vine în minte natural oricărui om preocupat serios de problema sa și care posedă o anumită doză de bun simț. Însă cel ce adoptă drumul cel bun nu se preocupă, de obicei, să-și explice comportarea într-o formă curgătoare și, poate, nu este în stare să o exprime; lista noastră încearcă să dea o astfel de exprimare.

5. Profesor și elev. Imitație și experiență. Punînd o întrebare sau făcînd o recomandare din listă, profesorul poate avea în vedere două obiective: 1° să-l ajute pe elev să rezolve problema la care lucrează acum; 2° să dezvolte aptitudinile elevului, astfel încît să fie capabil de a rezolva pe viitor singur problemele.

Experiența ne arată că întrebările și recomandările din listă, dacă sînt folosite într-un mod adecvat, îi sînt de foarte multe ori utile elevului. Ele au două caracteristici comune: bunul simț și generalitatea. Dat fiind că provin din bunul simț, ele vin adesea în minte cu totul firesc; elevul le-ar fi putut găsi și singur. Dat fiind că sînt generale, ele îl ajută pe elev într-un mod discret; ele nu fac decît să-i indice o direcție generală și îi lasă acestuia toate posibilitățile de a acționa singur.

Dar cele două obiective menționate mai sus sînt strîns legate între ele; dacă elevul reușește să rezolve problema la care lucrează acum, el adaugă un pic la aptitudinile sale de a rezolva probleme. Apoi nu trebuie să uităm că întrebările noastre sînt generale, aplicabile în numeroase situații. Dacă aceeași întrebare se dovedește utilă în repetate rînduri, este puțin probabil ca elevul să nu-și dea seama de aceasta, ceea ce-l va determina să-și pună singur întrebarea într-o situație similară. Punîndu-și întrebarea în repetate rînduri, el va izbuti o dată și o dată să pună în lumină ideea adecvată. Prin această reușită, el descoperă drumul cel bun pentru a folosi întrebarea, și atunci el și-a asimilat-o în mod real.

Elevul își poate însuși atît de bine cîteva întrebări din lista noastră, încît devine capabil, pînă la urmă, să-și pună întrebarea potrivită la momentul potrivit și să realizeze într-un mod firesc și eficient operația mintală corespunzătoare. Fără îndoială, un astfel de elev a extras din lista noastră cel mai mare folos posibil. Ce poate face profesorul pentru a obține acest rezultat optim? Rezolvarea problemelor este o abilitate practică, să zicem ca înotul. Obținem o anumită abilitate sau pricepere practică prin imitație și prin exercițiu. Încercînd să înotați, imitați ceea ce fac alți oameni cu brațele și cu picioarele pentru a-și menține capul deasupra apei și, pînă la urmă, învățați să înotați făcînd exerciții de înot. Încercînd să rezolvați probleme, trebuie să observați și să imitați ceea ce fac alții cînd rezolvă probleme și, pînă la urmă, rezolvînd probleme, învățați să le rezolvați.

Profesorul care dorește să dezvolte priceperile elevilor săi de a rezolva probleme trebuie să sădească în mintea lor un anumit interes pentru probleme și să le dea toate posibilitățile de a imita și de a exersa. Dacă profesorul vrea să dezvolte la elevii săi operațiile intelectuale corespunzătoare întrebărilor și recomandărilor din lista noastră, el le va pune elevilor aceste întrebări și le va face aceste recomandări ori de cîte ori i se prezintă ocazia într-un mod natural. Mai mult, cînd profesorul rezolvă o problemă în fața clasei, el trebuie să-și regizeze puțin ideile și să-și pună singur aceleași întrebări pe care le folosește cînd îi ajută pe elevi. Călăuzit astfel, elevul va descoperi eventual folosirea corectă a acestor întrebări și recomandări, dobîndind prin aceasta ceva mai valoros decît cunoașterea unor fapte matematice particulare.

DIVIZIUNI PRINCIPALE, ÎNTREBĂRI PRINCIPALE

6. Cele patru faze. În timp ce încercăm să găsim soluția, ne putem schimba de repetate ori punctul de vedere, modul în care privim problema. Trebuie să ne modificăm poziția mereu. Concepția noastră asupra problemei este la început, după toate probabilitățile, mai curînd incompletă; modul nostru de a o vedea se schimbă după ce am făcut oarecare progrese; el diferă iarăși cînd sîntem aproape de a fi obținut soluția.

Pentru a grupa în mod convenabil întrebările și recomandările din lista noastră, trebuie să distingem patru faze ale muncii. Întîi, trebuie *să înțelegem* problema; trebuie să ne dăm limpede seama ce anume se cere. Al doilea, trebuie să vedem cum sînt legate între ele diversele elemente, care este relația dintre necunoscută și datele problemei, pentru a ne face o idee asupra soluției, pentru a întocmi un *plan*. Al treilea, ne *realizăm* planul. Al patrulea, *privim retrospectiv* soluția obținută, o revedem și o discutăm.

Fiecare dintre aceste faze își are importanța sa. Se poate întîmpla ca un elev să aibă o străfulgerare, să sară toți pașii pregătitori și să dea direct soluția. Firește, astfel de idei fericite sînt de dorit, dar se poate întîmpla ceva cu totul indezirabil și neplăcut dacă elevul sare vreuna dintre cele patru faze, în cazul cînd nu are o idee bună. Cel mai rău este cînd elevul se apucă să calculeze sau să construiască fără *a fi înțeles* problema. În general, este nefolositor să clarificăm amănunte înainte de a ne da seama de legătura principală sau înainte de a fi întocmit un fel de *plan*. Numeroase greșeli pot fi evitate dacă, în cadrul realizării planului său, elevul *își verifică fiecare pas*. Unele dintre cele mai bune efecte ale problemei se pot pierde dacă elevul omite să reexamineze și *să reconsidere* soluția completă.

7. Înțelegerea problemei. Este o prostie să răspundem la o întrebare pe care nu o înțelegem. Este neplăcut să lucrăm în vederea unui scop pe care nu-l dorim. Astfel de lucruri prostești și neplăcute se întîmplă adesea, în școală și în afara ei, însă profesorul ar trebui să se străduiască pentru a preîntîmpina producerea lor în clasă. Elevul trebuie să înțeleagă problema. Dar nu este de ajuns numai să o înțeleagă, el trebuie să fie și animat de dorința de a o rezolva. Dacă elevului îi lipsește înțelegerea sau interesul, vina nu este totdeauna a lui; problema trebuie să fie bine aleasă, nici prea grea și nici prea ușoară, naturală și atractivă, iar un anumit timp trebuie consacrat expunerii ei firești și interesante.

În primul rînd, trebuie înțeles enunțul verbal al problemei, formularea ei în cuvinte. Profesorul poate verifica aceasta pînă la un anumit punct; el îi cere elevului să repete enunțul și acesta trebuie să fie capabil de a o face într-un mod curgător. De asemenea, elevul trebuie să fie capabil de a pune în evidență părțile principale ale problemei, necunoscuta, datele, condiția. Așadar, profesorul poate numai rareori să se dispenseze de întrebările: *Care este necunoscuta? Care sînt datele? Care este condiția?*

Elevul trebuie să examineze atent, de mai multe ori și sub diverse aspecte părțile principale ale problemei. Dacă problema este legată de o figură, aceasta trebuie *desenată* și să se arate pe ea necunoscuta și datele. Dacă trebuie alese denumiri pentru aceste obiecte, el ar trebui să introducă notații *corespunzătoare*; dînd atenție alegerii adecvate a simbolurilor, el are obligația de a examina obiectele pentru care urmează să aleagă simbolurile. Mai există o altă întrebare, care poate fi utilă în acest stadiu pregătitor, cu condiția să nu ne așteptăm la un răspuns definitiv, ci doar la unul provizoriu, pe care elevul îl intuiește, îl ghicește: *poate fi satisfăcută condiția?*

(În dezvoltarea părții a II-a, la p. 47, paragraful „Înțelegerea problemei" este subîmpărțit în două etape: „Familiarizarea cu problema" și „Munca pentru o mai bună înțelegere".)

8. Exemplu. Să ilustrăm unele dintre tezele expuse pînă acum. Vom lua următoarea problemă simplă: *Să se afle diagonala unui paralelipiped dreptunghic, la care cunoaștem lungimea, lățimea și înălțimea.*

Pentru a discuta cu folos această problemă, elevii trebuie să fie familiarizați cu teorema lui Pitagora și cu unele dintre aplicațiile ei în geometria plană, dar ei pot să aibă foarte puține cunoștințe sistematice în domeniul geometriei în spațiu. Aici, profesorul se poate sprijini pe cunoașterea relațiilor spațiale, pe care elevul o are din viața de toate zilele.

Profesorul poate face problema interesantă, concretizînd-o. Clasa este un paralelipiped dreptunghic, ale cărui dimensiuni pot fi măsurate sau evaluate cu aproximație; elevii trebuie să găsească, „să măsoare indirect" diagonala clasei. Profesorul arată care sînt lungimea, lățimea și înălțimea clasei, indică printr-un gest diagonala și dă viață figurii desenate pe tablă prin referiri repetate la clasă.

Dialogul dintre profesor și elev poate să înceapă astfel:

„Care este necunoscuta?"
„Lungimea diagonalei unui paralelipiped".
„Care sînt datele?"
„Lungimea, lățimea și înălțimea paralelipipedului".

„*Alege notații potrivite.* Cu ce literă ar trebui notată necunoscuta?“

„x“.

„Ce litere vei alege pentru lungime, lățime și înălțime?

„a, b, c“.

„*Care este condiția* care leagă între ele a, b, c, și x?“

„x este diagonala paralelipipedului avînd lungimea, lățimea și înălțimea egale respectiv cu a, b și c“.

„Are problema sens? Vreau să spun: *Este condiția suficientă pentru a determina necunoscuta?*“

„Da, este suficientă. Din moment ce cunoaștem a, b, c, cunoaștem paralelipipedul. Paralelipipedul fiind determinat, diagonala este determinată“.

9. Întocmirea unui plan. Avem un plan, dacă știm, cel puțin în linii mari, ce calcule sau construcții trebuie efectuate pentru a obține necunoscuta. Drumul de la înțelegerea problemei pînă la conceperea unui plan poate fi lung și sinuos. În adevăr, pasul principal pentru a obține soluția unei probleme constă în a elabora ideea unui plan. Este posibil ca această idee să se cristalizeze doar treptat. Sau, după încercări în aparență neîncununate de succes și după o perioadă de ezitări, ea poate să apară dintr-o dată, ca o scînteie, ca o „idee strălucită“. Lucrul cel mai bun pe care profesorul îl poate face pentru elev este de a-l ajuta într-un mod discret să ajungă la o astfel de idee strălucită. Întrebările și recomandările pe care le vom discuta acum tind să ducă la o astfel de idee.

Pentru a fi capabil să înțeleagă situația în care se află elevul, profesorul trebuie să se gîndească la propria sa experiență, la dificultățile și la succesele pe care le-a înregistrat rezolvînd probleme.

Firește, știm că este greu să ne vină o idee bună dacă avem cunoștințe insuficiente asupra subiectului și că este imposibil să ajungem la o astfel de idee dacă nu avem de loc cunoștințe. Ideile bune se întemeiază pe experiența dint trecut și pe cunoștințele dobîndite anterior. Simpla reamintire nu este suficientă pentru o idee bună, dar nu putem avea o idee bună dacă nu ne împrospătăm anumite fapte corespunzătoare; materialele singure nu sînt suficiente pentru a clădi o casă, dar nu putem clădi o casă dacă nu am strîns materialele necesare. Materialele necesare pentru a rezolva o problemă de matematică sînt anumite elemente importante din cunoştinţele de matematică dobîndite anterior, ca probleme rezolvate în trecut sau teoreme demonstrate în trecut. De aceea, este de multe ori cazul să începem cu întrebarea: *Cunoaştem vreo problemă înrudită?*

Dificultatea constă în faptul că, de obicei, există prea multe probleme înrudite în vreun fel cu problema noastră actuală, adică avînd cu ea anumite puncte comune. Cum putem alege punctul sau cele cîteva puncte care ne sînt într-adevăr de folos? Există o recomandare care indică un punct comun esenţial: *Să cercetăm necunoscuta! Şi să ne gîndim la o problemă cunoscută, avînd aceeaşi necunoscută sau una similară.*

Dacă am reuşit să ne reamintim de o problemă rezolvată anterior şi care este foarte apropiată de problema noastră prezentă, înseamnă că am avut noroc. Este cazul să facem ceva pentru a merita acest noroc; îl putem merita, exploatînd vechea problemă. *Iată o problemă înrudită cu a noastră şi rezolvată anterior. Am putea să o folosim?*

Bine înţelese şi analizate cu seriozitate, întrebările de mai sus ajută de cele mai multe ori la declanşarea unei desfăşurări corecte a ideilor, dar ele nu pot să ajute totdeauna, nu pot avea o acţiune magică. Dacă ele nu au efect, trebuie să căutăm un alt punct de contact adecvat şi să explorăm diversele aspecte ale problemei noastre; trebuie să variem problema, să o transformăm, să o modificăm. Se poate reformula problema? Unele întrebări din listă noastră furnizează mijloace specifice pentru a varia problema, cum sînt generalizarea, particularizarea, folosirea unei analogii, suprimarea unei părţi din condiţie etc.; detaliile sînt importante, dar nu putem insista acum asupra lor. Modificarea problemei poate conduce la o problemă auxiliară adecvată: *Dacă nu putem să rezolvăm problema propusă, încercăm să rezolvăm mai întîi o problemă înrudită.*

Încercînd să aplicăm diferite probleme sau teoreme cunoscute, considerînd diverse modificări, experimentînd cu diferite probleme auxiliare, ne putem îndepărta atît de mult de problema noastră, încît apare pericolul de a o pierde cu totul din vedere. Există însă o întrebare potrivită pentru a ne întoarce la ea: *Au fost utilizate toate datele? A fost utilizată întreaga condiţie?*

10. Exemplu. Să revenim la exemplul de la pct. **8.** În momentul cînd l-am părăsit, elevii tocmai izbutiseră să înţeleagă problema și să arate pentru ea un anumit interes. Acum este posibil să le fi venit oarecare idei proprii, să manifeste oarecare inițiativă. Dacă profesorul, după ce-i privește cu atenție, nu poate descoperi nici un simptom al unei astfel de inițiative, el trebuie să rezume cu grijă dialogul anterior cu elevii. El trebuie să fie pregătit să repete cu anumite modificări întrebările la care elevii nu știu să răspundă. El trebuie să fie pregătit să se lovească adesea de tăcerea dezorientată a elevilor (pe care o vom marca prin puncte...).

Cunoști vreo problemă înrudită?"

...

„*Cercetează necunoscuta! Cunoști vreo problemă cu aceeași necunoscută?*"

.....

„Bine, *care este necunoscuta?*"

„Diagonala unui paralelipiped"

„Cunoști vreo *problemă cu aceeași necunoscută?*"

„Nu. Pînă acum nu am avut nici o problemă cu diagonala unui paralelipiped".

„Cunoști vreo *problemă cu o necunoscută asemănătoare?*

...

„Diagonala este un segment, un segment de dreaptă, nu-i așa? N-ai rezolvat nici o problemă în care necunoscuta era lungimea unui segment?"

„Desigur, am rezolvat astfel de probleme. De exemplu, să găsim o latură într-un triunghi dreptunghic".

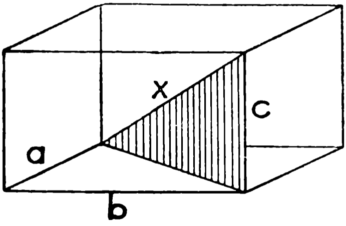

Fig. 1

„Foarte bine! *Iată o problemă înrudită cu a noastră și rezolvată anterior. Ai putea să o folosești?*

...

„Ai reușit să-ți amintești de o problemă înrudită cu cea pe care o ai acum și pe care ai rezolvat-o anterior. Nu ai vrea să o utilizezi? *Nu ai putea introduce vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?*"

...

„Bagă de seamă, problema de care ți-ai reamintit se ocupă de un triunghi. Ai vreun triunghi în figură?"

Să sperăm că această din urmă indicație a fost destul de explicită pentru a trezi la viață ideea rezolvării care constă în a introduce un triunghi dreptunghic (cel hașurat în fig. 1), și avînd ca ipotenuză diagonala căutată. Dar profesorul trebuie să fie pregătit și pentru cazul în care chiar această indicație atît de explicită este insuficientă pentru a-i urni pe elevi din punctul mort; de aceea, el trebuie să fie pregătit să folosească o gamă întreagă de indicații din ce în ce mai explicite.

„Ai fi mulțumit dacă ai avea un triunghi în figură?"

„Ce fel de triunghi ți-ar plăcea să ai în figură?"

„Deocamdată nu știi să găsești diagonala; dar spuneai că poți să afli latura unui triunghi. Ce ai de gînd acum?"

„Ai putea găsi diagonala dacă ea ar fi o latură într-un triunghi?"

Cînd, ajutați mai mult sau mai puțin, elevii izbutesc să introducă elementul auxiliar hotărîtor, triunghiul dreptunghic hașurat în fig. 1, profesorul trebuie să se convingă că elevii își dau seama acum cu destulă claritate ce au de făcut; abia pe urmă el îi poate încuraja să treacă la calcule.

„Cred că a fost o idee bună să desenezi acest triunghi. Acum ai triunghiul; ai oare și necunoscuta?"

„Necunoscuta este ipotenuza triunghiului; o putem calcula cu ajutorul teoremei lui Pitagora".

„Da,dacă cele două catete sînt cunoscute; dar le cunoști oare?"

„O catetă este dată: c. Cred că cealaltă nu este greu de aflat. Da, în adevăr, cealaltă catetă este ipotenuza unui alt triunghi dreptunghic".

„Foarte bine! Acum văd că ai un plan".

11. Realizarea planului. Nu este ușor de a concepe un plan, de a elabora ideea soluției. Pentru aceasta este nevoie de foarte mult: cunoștințe dobîndite anterior, o deprindere bună în munca intelectuală, concentrare asupra scopului și, în plus, noroc. Realizarea planului este mult mai ușoară; aici se cere în primul rînd răbdare.

Planul ne dă o linie generală de conduită; trebuie să ne convingem că detaliile se potrivesc cu această linie generală și de aceea trebuie să examinăm detaliile unul după altul, cu răbdare, pînă cînd totul devine perfect clar, pînă nu mai rămîne nici un ungher obscur în care s-ar putea ascunde vreo greșeală.

Dacă elevul a conceput într-adevăr un plan, profesorul dispune de un răgaz relativ. Primejdia principală este ca elevul să-și uite planul. Aceasta se poate întîmpla cu ușurință dacă elevul a primit planul de la altul, dacă-l acceptă, bazîndu-se pe autoritatea profesorului; dar dacă a lucrat el însuși, chiar ajutat, și dacă a conceput cu satisfacție ideea finală, el nu o va pierde ușor. Totuși profesorul trebuie să insiste ca elevul *să-și verifice fiecare pas.*

Ne putem convinge de corectitudinea unui pas din raționamentul nostru fie „intuitiv“, fie „formal“. Ne putem concentra asupra punctului respectiv, pînă ne dăm seama clar și distinct că nu mai încape nici o îndoială asupra corectitudinii pasului; pe de altă parte, putem deduce acest punct în conformitate cu anumite reguli formale. (Deosebirea dintre „intuiție“ și „demonstrația formală“ este suficient de clară în multe cazuri importante; discutarea mai amănunțită a acestei chestiuni o putem lăsa pe seama filozofilor.)

Principalul este ca elevul să fie convins cu adevărat de corectitudinea fiecărui pas. În anumite cazuri, profesorul poate să accentueze deosebirea dintre „a vedea“ și „a demonstra“: *Vă puteți da limpede seama că pasul este corect?* Dar puteți oare să și *demonstrați că pasul este corect?*

12. Exemplu. Să rezumăm munca la problema noastră pînă în momentul în care am părăsit-o la sfîrșitul pct. **10.** Pînă la urmă, elevului i-a venit ideea soluției. El distinge triunghiul dreptunghic în care necunoscuta x este ipotenuza, iar înălțimea c (cunoscută) este una dintre catete; cealaltă catetă este diagonala unei fețe. Elevul trebuie îndemnat, eventual, să introducă o notație adecvată. El trebuie să noteze cu y această a doua catetă, care este diagonala feței cu laturile a și b. Astfel, el poate vedea mai clar ideea soluției, care constă în introducerea unei probleme auxiliare unde necunoscuta este y. În cele din urmă, considerînd un nou triunghi dreptunghic, el poate obține (vezi fig. 1)

$$x^2 = y^2 + c^2$$

$$y^2 = a^2 + b^2$$

şi apoi, eliminînd necunoscuta auxiliară y,

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Profesorul nu are motive să-l întrerupă pe elev dacă el efectuează în mod corect aceste detalii, eventual, cu excepţia sfatului de a *verifica fiecare pas*. Astfel, profesorul poate întreba:

„Îţi poţi da limpede seama că triunghiul cu laturile x, y, c este dreptunghic?"

La această întrebare, elevul poate răspunde cinstit „Da", încurcîndu-se totuşi, dacă profesorul, nesatisfăcut numai cu convingerea intuitivă a elevului, continuă să întrebe:

„Dar ai putea *demonstra* că acest triunghi este dreptunghic?"

De aceea, este mai bine ca profesorul să renunţe la această întrebare cît timp clasa nu a dobîndit cunoştinţe solide de geometrie în spaţiu. Chiar în acest din urmă caz există pericolul ca răspunsul la o întrebare secundară să devină principala dificultate pentru majoritatea elevilor.

13. Privire retrospectivă. Chiar elevii foarte buni, după ce au obţinut soluţia problemei şi au transcris-o pe curat, îşi închid caietul şi caută să se ocupe de altceva. Procedînd astfel, ei trec peste o fază importantă şi instructivă a muncii. Aruncînd o privire retrospectivă asupra soluţiei complete, reconsiderînd şi reexaminînd rezultatul şi calea care a dus la el, ei pot să-şi consolideze cunoştinţele şi să-şi dezvolte aptitudinile de a rezolva probleme. Un profesor bun trebuie să înţeleagă şi să le arate şi elevilor că nici o problemă nu poate fi epuizată. Întotdeauna mai rămîne cîte ceva de făcut; cu suficientă muncă şi pătrundere, putem îmbunătăţi orice soluţie şi, cel puţin, putem totdeauna să ajungem la o înţelegere mai bună a ei.

În momentul de faţă, elevul şi-a realizat planul. El şi-a scris soluţia, verificîndu-se pas cu pas. De aceea, el ar trebui să aibă motive suficiente pentru a crede că soluţia sa este corectă. Cu toate acestea, erorile sînt oricînd posibile, mai ales dacă deducţia este lungă şi complicată. De aceea, verificările sînt de dorit. Mai cu seamă cînd dispunem de un procedeu rapid şi intuitiv pentru a verifica fie rezultatul, fie calea pe care s-a ajuns la el, acest procedeu nu trebuie pierdut din vedere. *Se poate verifica rezultatul? Putem verifica argumentarea?*

Pentru a ne convinge de prezența unui obiect sau de faptul că el posedă o anumită calitate, obișnuim să-l privim și să-l atingem. Și după cum preferăm să percepem prin intermediul a două organe de simț diferite, tot astfel preferăm să ne convingem prin două probe diferite: *S-ar putea obține rezultatul pe altă cale?* Natural, preferăm o cale scurtă și intuitivă uneia lungi și greoaie: *Ne putem da seama de aceasta dintr-o privire?*

Una dintre cele dintîi și mai importante datorii ale profesorului constă în a nu da elevului impresia că problemele matematice ar avea prea puține legături unele cu altele și că nu ar avea de loc legături cu altceva. Avem o posibilitate firească de a cerceta conexiunile unei probleme, atunci cînd privim retrospectiv soluția ei. Elevii vor găsi această privire retrospectivă asupra soluției într-adevăr interesantă, dacă au depus un efort serios și dacă au conștiința că au lucrat bine. În acest caz, ei sînt dornici să vadă ce ar mai putea înfăptui prin efortul lor și cum ar putea lucra la fel de bine altă dată. Profesorul trebuie să-i încurajeze pe elevi ca aceștia să imagineze cazuri în care ar putea utiliza din nou procedeul folosit acum sau aplica rezultatul obținut. *Putem folosi rezultatul sau metoda la o altă problemă?*

14. Exemplu. La pct. **12**, elevii au găsit, pînă la urmă, soluția: dacă cele trei muchii ale unui paralelipiped dreptunghic care pornesc din același vîrf sînt a, b, c, atunci diagonala este

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Se poate verifica rezultatul? Profesorul nu se poate aștepta la un răspuns bun din partea unor elevi lipsiți de experiență. Dar elevii trebuie să se convingă foarte curînd din propria lor experiență că problemele „cu litere" prezintă un mare avantaj față de cele pur numerice; dacă problema este dată „în litere", rezultatul ei se pretează la o serie de verificări de care o problemă „cu numere" nu este de loc susceptibilă. Exemplul nostru, deși foarte simplu, este suficient pentru a dovedi aceasta. Profesorul poate pune mai multe întrebări despre rezultat, la care elevii să răspundă ușor prin „Da", în schimb, un singur răspuns „Nu" ar pune în evidență o lipsă serioasă a rezultatului nostru.

„*Au fost utilizate toate datele*? Apar toate datele, adică a, b, c, în formula obținută pentru diagonală?"

„Lungimea, lățimea și înălțimea joacă același rol în problema noastră; ea este simetrică în raport cu a, b, c. Este oare expresia pe care ați obținut-o pentru diagonală simetrică față de a, b, c? Rămîne ea neschimbată dacă schimbați între ele a, b, c?"

„Problema noastră este o problemă de geometrie în spațiu: să se afle diagonala unui paralelipiped de dimensiuni a, b, c date. Problema amintită este analogă cu una de geometrie plană: să se afle diagonala unui dreptunghi de dimensiuni a, b, date. Este rezultatul problemei noastre «în spațiu» analog cu rezultatul problemei «plane»?

„Dacă înălțimea c descrește și dispare pînă la urmă, paralelipipedul se transformă într-un paralelogram. Dacă punem $c = 0$ în formula obținută, vom căpăta formula corectă pentru diagonala unui paralelogram dreptunghic?"

„Dacă înălțimea c crește, diagonala crește și ea. Reiese oare aceasta din formula obținută?"

„Dacă toate cele trei dimensiuni a, b, c ale paralelipipedului cresc în aceeași proporție, diagonala crește și ea în aceeași proporție. Dacă în formula obținută vom substitui pentru a, b, c, respectiv $12a$, $12b$, $12c$, expresia diagonalei corespunzătoare acestei substituții trebuie și ea să fie înmulțită cu 12. Așa este?"

„Dacă a, b, c sînt măsurate în metri, formula dă diagonala, tot în metri; dacă însă toate măsurile sînt în centimetri, formula trebuie să rămînă corectă. Așa este?"

(Ultimele două întrebări sînt, în esență, echivalente; vezi *Verificarea cu ajutorul dimensiunii*.)

Aceste întrebări dau de multe ori rezultate bune. În primul rînd, un elev inteligent nu poate să nu fie impresionat de faptul că formula face față cu succes unui număr atît de mare de încercări. Înainte, el era convins că formula este corectă, deoarece o dedusese cu grijă. Acum, convingerea sa a sporit și această creștere a încrederii sale provine dintr-un izvor diferit: ea se datorește unui fel de „probă experimentală". Apoi, mulțumită întrebărilor de mai sus, detaliile formulei capătă o nouă semnificație și sînt confruntate cu fapte variate. De aceea, formula are șanse mai mari de a fi memorată, cunoștințele elevului sînt întărite. În sfîrșit, aceste întrebări pot fi transferate cu ușurință la probleme similare. După o oarecare experiență în rezolvarea unor probleme asemănătoare, un elev inteligent poate ajunge să sesizeze ideea generală care stă la baza ei: utilizarea tuturor datelor importante, modificarea datelor, simetrie, analogie. Dacă el capătă obişnuinţa de a-şi îndrepta atenţia spre astfel de puncte, aptitudinile sale de a rezolva probleme vor înregistra un progres esenţial.

Putem verifica argumentarea? Reverificarea pas cu pas a căii prin care s-a ajuns la soluţie poate fi necesară în cazuri dificile şi importante. De regulă, este suficient de a alege pentru verificare punctele „nevralgice". În cazul nostru, ar fi recomandabil să discutăm retrospectiv întrebarea la care sfătuiam să se renunţe cît timp soluţia nu fusese obţinută: Se poate *demonstra* că triunghiul cu laturile x, y, c este dreptunghic? (Vezi sfîrşitul pct. **12**).

Se poate folosi rezultatul sau metoda la o altă problemă? Cu o uşoară încurajare şi după unul sau două exemple, elevii găsesc fără greutate aplicaţii constînd mai ales în a da o *interpretare concretă* elementelor matematice abstracte ale problemei. Profesorul recursese şi el la o astfel de interpretare concretă, considerînd sala în care avea loc discuţia drept paralelipipedul din problemă. Un elev mai puţin inteligent ar putea propune ca aplicaţie să se calculeze diagonala cofetăriei din apropiere în locul diagonalei clasei. Dacă elevii nu reuşesc singuri să dea dovadă de mai multă imaginaţie, profesorul poate propune o problemă întrucîtva diferită, de exemplu: „Se dau lungimea, lăţimea şi înălţimea unui paralelipiped dreptunghic; să se afle distanţa de la centru la unul dintre colţuri".

Elevii pot folosi *rezultatul* problemei pe care tocmai au rezolvat-o, remarcînd că distanţa cerută reprezintă jumătate din diagonala pe care au calculat-o. De asemenea, ei pot folosi *metoda*, introducînd triunghiuri dreptunghice adecvate (această din urmă alternativă este mai puţin evidentă şi ceva mai greoaie în cazul nostru).

După această aplicaţie, profesorul poate vorbi despre poziţia celor patru diagonale ale paralelipipedului şi despre cele şase piramide avînd ca baze cele şase feţe şi centrul ca vîrf comun, iar semidiagonalele ca muchii laterale. După ce a trezit suficient imaginaţia geometrică a elevilor, profesorul trebuie să revină la întrebarea sa: *Se poate folosi rezultatul sau metoda la o altă problemă?* Acum sînt mai multe şanse ca elevii să găsească o interpretare concretă mai interesantă, bunăoară următoarea:

„În centrul unui acoperiș plan dreptunghiular, lung de 21 m și lat de 16 m, trebuie ridicată o prăjină înaltă de 8 m. Pentru a o fixa avem nevoie de patru cabluri egale. Cablurile pornesc din același punct al prăjinii, situat la 2 m sub extremitatea ei, și sînt legate de cele patru colțuri ale acoperișului. Cît de lung va fi fiecare cablu?"

Elevii pot folosi *metoda* problemei pe care au rezolvat-o amănunțit, introducînd un triunghi dreptunghic într-un plan vertical și altul într-un plan orizontal. Sau ei pot folosi *rezultatul*, închipuindu-și un paralelipiped dreptunghic avînd ca diagonală x unul dintre cele patru cabluri, iar ca muchii

$$a = 10{,}5; \qquad b = 8; \qquad c = 6.$$

Aplicarea directă a formulei dă $x = 14{,}5$.

Alte exemple vezi la *Se poate folosi rezultatul?*

15. Căi de acces diferite. Să mai rămînem, un timp, la problema pe care am considerat-o la punctele **8**, **10**, **12**, **14**. Partea principală a rezolvării, descoperirea planului, a fost descrisă la pct. **10**. Menționăm că profesorul ar fi putut proceda în alt mod. Plecînd de la aceleași date ca la pct. **10**, el ar fi putut urma un drum întrucîtva diferit, punînd următoarele întrebări:

„Cunoști vreo problemă înrudită?"

„Cunoști vreo problemă *analogă*?"

„Vezi, avem de-a face cu o problemă de geometrie în spațiu. Ai putea să te gîndești la vreo problemă analogă mai simplă din geometria plană?"

„Vedeți, problema noastră se referă la o figură în spațiu, este vorba în ea despre diagonala unui paralelipiped dreptunghic. Ce problemă analogă am putea avea despre o figură în plan? Ea ar trebui să se refere la... diagonala unui ..."

„Unui paralelogram dreptunghic, a unui dreptunghi".

Elevii, chiar dacă sînt foarte lenți și nepăsători și au fost înainte incapabili să ghicească ceva, sînt constrînși, pînă la urmă, să contribuie, fie chiar într-o măsură modestă, la ideea soluției. În afară de aceasta, dacă elevii sînt atît de lenți, profesorul nu trebuie să abordeze problema paralelipipedului fără să-i fi pregătit în prealabil, discutînd cu ei problema analogă a dreptunghiului. El poate continua apoi după cum urmează:

„Iată o problemă înrudită cu a noastră și rezolvată anterior. Ai putea să o folosești?"

„Nu ai putea să introduci vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?"

Este posibil ca profesorul să reușească să le sugereze elevilor ideea pe care o vrea. Aceasta constă în a concepe diagonala paralelipipedului dat ca diagonală a unui dreptunghi convenabil, care trebuie introdus în figură (ca intersecție a paralelipipedului cu un plan care trece prin două muchii opuse). Ideea este în esență aceeași ca și înainte (pct. **10**), însă calea urmată este alta. La pct. **10**, contactul cu cunoștințele elevilor s-a stabilit prin intermediul necunoscutei; o problemă rezolvată anterior a fost reluată, deoarece necunoscuta ei era aceeași cu cea din problema noastră. În punctul de față, ideea soluției a fost găsită cu ajutorul unei analogii.

16. Metoda profesorului de a pune întrebări, prezentată la punctele **8**, **10**, **12**, **14**, **15**, este în esență următoarea: se începe cu o întrebare generală sau cu o recomandare generală din lista noastră și, dacă este cazul, se coboară treptat la întrebări și la recomandări mai particulare și mai concrete pînă se ajunge la o întrebare care face să apară un răspuns în mintea elevului. Dacă elevul trebuie ajutat să-și exploateze ideea, se pleacă din nou, dacă este posibil, de la o întrebare sau de la o recomandare generală din listă și se revine iarăși la una mai specială, dacă este nevoie; și așa mai departe.

Natural, lista noastră nu este decît o primă listă de acest gen; ea pare să fie suficientă pentru majoritatea cazurilor simple, dar este în afară de orice îndoială că ea ar putea fi perfecționată. Este însă important ca recomandările de la care pornim să fie simple, naturale și generale, iar lista lor să fie scurtă[1].

Recomandările trebuie să fie simple și naturale, deoarece, altfel, ele nu pot fi *discrete*.

Recomandările trebuie să fie generale, aplicabile nu numai problemei actuale, ci unor probleme de orice fel, dacă ele sînt menite să dezvolte aptitudinile elevului și nu doar o tehnică specială.

---

[1] În lumina celor de mai sus, ar fi utilă pentru cititor să cunoască varianta prescurtată a listei lui G. Pólya (p.12), care poate fi utilizată ca afiș didactic. Ea a fost reprodusă din *L'Enseignement mathematique*, vol. XXX, nr. 4—5—6. — *N.T.*

Lista trebuie să fie scurtă pentru ca întrebările să poată fi repetate frecvent, într-un mod neartificial și în circumstanțe variate; astfel, există posibilitatea ca ele să fie însușite de elevi și să contribuie la dezvoltarea unei *obișnuințe intelectuale*.

Este necesar să se treacă treptat spre recomandări speciale, pentru ca elevului să-i revină o cît mai mare *parte din muncă*.

Această metodă de a pune întrebări nu este rigidă; și este bine așa, deoarece, în această materie, orice procedeu rigid, mecanic, pedant nu poate fi decît dăunător. Metoda noastră admite o anumită elasticitate și variație, ea admite diferite căi de acces (pct. **15**), ea poate fi și trebuie aplicată în așa fel, încît întrebările pe care le pune profesorul *să-i fi putut veni în minte și elevului însuși*.

Dacă vreun cititor va dori să încerce în clasa sa metoda pe care o propunem aici, el va trebui, bineînțeles, să acționeze cu precauție. El va trebui să studieze cu grijă exemplul introdus la pct. **8** și exemplele următoare de la punctele **18**, **19**, **20**. El va trebui să prepare cu grijă exemplele pe care intenționează să le discute, luînd în considerare diferite căi de acces. El trebuie să înceapă cu cîteva sondaje și să descopere treptat cum poate ajunge să stăpînească metoda, ce atitudine au față de ea elevii și cît timp necesită.

17. Întrebări bune și întrebări proaste. Dacă metoda de a pune întrebări, prezentată în punctul precedent, este înțeleasă corect, ea ajută la compararea calității diverselor recomandări care se pot face elevilor cu scopul de a-i ajuta.

Să revenim la situația pe care o aveam la începutul pct. **10**, cînd a fost pusă întrebarea: *Cunoașteți vreo problemă înrudită?* În locul acesteia, cu cea mai bună intenție de a-i ajuta pe elevi, se poate pune întrebarea: *Ați putea aplica aici teorema lui Pitagora?*

Intenția putea fi lăudabilă, dar întrebarea este cît se poate de nepotrivită. Trebuie să ne dăm seama în ce situație a fost pusă; vom înțelege atunci că există un lung șir de obiecții împotriva unui astfel de „ajutor“.

(1) Dacă elevul este aproape de soluție, el va înțelege recomandarea cuprinsă în întrebare; dacă nu este aproape de rezolvare, este foarte posibil ca să nu-și dea seama spre ce anume țintește întrebarea. Astfel, întrebarea nu-i este de nici un ajutor tocmai acolo unde nevoia de ajutor este mai mare.

(2) Dacă recomandarea a fost înțeleasă, ea dezvăluie secretul în întregime, și elevului nu-i mai rămîne aproape nimic de făcut.

(3) Recomandarea este de natură prea particulară. Chiar dacă elevul o poate utiliza la rezolvarea problemei respective, el nu învață astfel nimic pentru o problemă viitoare. Întrebarea nu este instructivă.

(4) Chiar dacă a înțeles recomandarea, elevul va izbuti cu greu să-și dea seama cum a ajuns profesorul la ideea de a pune o astfel de întrebare. Și cum ar fi putut el, elevul, să ajungă singur la această întrebare? Ea apare ca o surpriză nefirească, ca un iepure scos de scamator dintr-un joben; întrebarea este într-adevăr neinstructivă.

Nici una dintre aceste obiecții nu poate fi ridicată împotriva procedeului descris la pct. **10** sau împotriva celui de la pct. **15.**

ALTE EXEMPLE

18. O problemă de construcție. *Să se înscrie un pătrat într-un triunghi dat, astfel încît două vîrfuri ale pătratului să fie situate pe baza triunghiului, iar celelalte două pe cîte o latură a triunghiului.*

„*Care este necunoscuta?*"

„Un pătrat".

„*Ce este dat?*"

„Un triunghi, și nimic mai mult".

„*Care este condiția?*"

„Cele patru vîrfuri ale pătratului trebuie să fie pe perimetrul triunghiului, două pe bază și cîte unul pe fiecare dintre cele două laturi".

„*Poate fi satisfăcută condiția?*"

„Cred că da, dar nu sînt sigur".

„Problema nu ți se pare prea ușoară. *Dacă nu poți să rezolvi problema propusă, încearcă să rezolvi mai întîi o problemă înrudită.* Ai putea satisface *o parte a condiției?*"

„Ce înseamnă «o parte a condiției?»

„Vezi, condiția se referă la toate vîrfurile pătratului. Cîte vîrfuri avem aici?"

„Patru".

„O parte a condiției ar putea să privească mai puțin decît patru vîrfuri. *Păstrează o parte a condiției, omițînd restul.* Ce parte a condiției este ușor de satisfăcut?"

„Este ușor de desenat un pătrat avînd două vîrfuri pe perimetrul triunghiului, ba chiar un pătrat avînd trei vîrfuri pe perimetru!"

„Desenează o figură!"

Elevul desenează fig. 2.

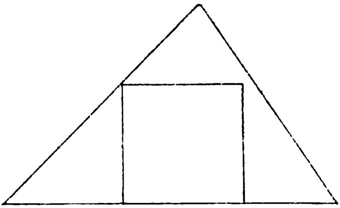

Fig. 2

„Ai păstrat numai o parte a condiției, omițînd restul. În ce măsură este acum determinată necunoscuta?"

„Pătratul nu este determinat, dacă numai trei dintre vîrfurile lui se află pe perimetrul triunghiului".

„Bine! Fă un desen".

Elevul desenează fig. 3.

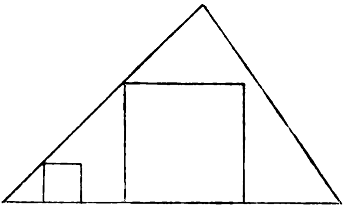

Fig. 3

„După cum ai spus, pătratul nu este determinat prin *partea din condiție pe care ai păstrat-o. Cum mai poate el să varieze?"*

...

„Trei vîrfuri ale pătratului nostru se află pe perimetrul triunghiului, pe cînd al patrulea vîrf nu este încă acolo unde ar trebui să fie. După cum ai spus, pătratul nostru este nedeterminat, el poate să varieze; același lucru este adevărat și în privința celui de-al patrulea vîrf. *Cum mai poate el să varieze?*"

...

„Dacă vrei, încearcă să o faci experimental. Desenează mai multe pătrate avînd trei vîrfuri pe perimetru, la fel cu cele două pătrate din figură. Desenează pătrate mari și pătrate mici. Care pare să fie locul geometric al celui de-al patrulea vîrf? *Cum mai poate el să varieze?*"

Profesorul l-a adus pe elev foarte aproape de ideea soluției. Dacă elevul este capabil să ghicească că locul geometric al celui de-al patrulea vîrf este o dreaptă, el a prins această idee.

19. O problemă de demonstrat. *Două unghiuri sînt situate în plane diferite, dar laturile lor sînt paralele două cîte două și orientate în același sens. Să se demonstreze că unghiurile sînt egale.*

Ni se cere să demonstrăm o teoremă fundamentală a geometriei în spațiu. Problema poate fi pusă unor elevi familiarizați cu geometria plană și care cunosc cele cîteva fapte din geometria în spațiu care pregătesc această teoremă în *Elementele* lui Euclid. (Teorema de mai sus, pe care o vom demonstra acum, este propoziția 10 din cartea XI a lui Euclid). În acest punct sînt tipărite cu litere cursive nu numai întrebările și recomandările citate din lista noastră, ci și altele, care se află cu ele în aceeași relație ca cea dintre „problemele de demonstrat" și „problemele de aflat". (Această relație este tratată sistematic în „*P r o b l e m e d e a f l a t, p r o b l e m e d e d e m o n s t r a t*" 5, 6.)

„*Care este ipoteza?*"

„Două unghiuri sînt situate în plane diferite. Fiecare latură a unuia este paralelă cu latura corespunzătoare a celuilalt și are aceeași direcție".

„*Care este concluzia?*"

„Unghiurile sînt egale".

„*Desenează o figură. Introdu notații corespunzătoare*".

Elevul desenează dreptele din fig. 4 și, ajutat mai mult sau mai puțin de profesor, alege literele, așa cum se arată în această figură.

„*Care este ipoteza?* Spune-o, folosind notațiile noastre".

„A, B, C nu sînt situate în același plan cu A', B', C'. Avem $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$. De asemenea, AB este orientată în același sens ca și $A'B'$, iar AC în același sens ca $A'C'$".

„*Care este concluzia?*“

$$„\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'“.$$

„*Cercetează concluzia! Şi gîndeşte-te la o teoremă cunoscută, avînd aceeaşi concluzie sau una similară*“.

„Dacă două triunghiuri sînt egale, unghiurile lor omologe sînt egale“.

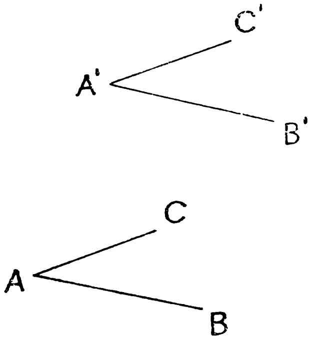

Fig. 4

„Foarte bine! *Avem aici o teoremă înrudită cu a noastră şi demonstrată anterior. Ai putea să o foloseşti?*“

„Cred că da, însă nu-mi dau bine seama cum“.

„*Ai putea să introduci vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?*“

...

„Ei bine, teorema pe care ai amintit-o atît de frumos se ocupă de triunghiuri, de două triunghiuri egale. Ai vreun triunghi în figură?“

„Nu. Dar pot introduce. Unesc B cu C şi B' cu C'. Obţin atunci două triunghiuri, ΔABC şi $\Delta A'B'C'$“.

„Aşa. Dar la ce servesc aceste triunghiuri?“

„Pentru a demonstra concluzia $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$“.

„Bine. Dacă vrei să demonstrezi aceasta, ce fel de triunghiuri îţi trebuie?“

„Triunghiuri egale. Da, într-adevăr, pot alege B, C, B', C' în aşa fel încît să am

$$AB = A'B', \ AC = A'C'“.$$

„Foarte bine! Şi acum, ce vrei să demonstrezi?“

„Vreau să demonstrez că triunghiurile sînt egale,

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'.$$

Dacă reuşesc să demonstrez aceasta, concluzia $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$ va rezulta imediat".

„Bravo! Ai acum un alt scop, scopul de a demonstra o nouă concluzie. *Cercetează concluzia! Şi gîndeşte-te la o teo-*

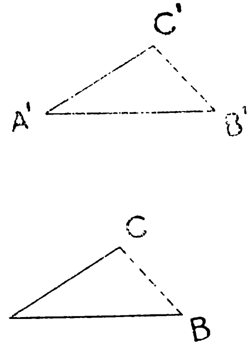

Fig. 5

remă cunoscută avînd aceeaşi concluzie sau una similară".

„Două triunghiuri sînt egale, dacă ... dacă cele trei laturi ale unuia sînt respectiv egale cu cele trei laturi ale celuilalt".

„Aşa! O altă teoremă ar fi fost mai puţin potrivită aici. *Iată o teoremă înrudită cu a noastră şi demonstrată anterior. Ai putea să o foloseşti?*"

„Aş putea să o folosesc dacă aş şti că $BC = B'C'$".

„Aşa este! Şi acum, ce vei urmări?"

„Să demonstrez că $BC = B'C'$".

„*Gîndeşte-te la o teoremă cunoscută avînd aceeaşi concluzie sau una similară*".

„Da, cunosc o teoremă care se termină cu cuvintele"... atunci, cele două segmente sînt egale". Dar nu se potriveşte.

„*Nu ai putea să introduci vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?*"

...

„Cum ai putea demonstra că $BC = B'C'$, dacă în figură nu este nici o legătură între BC şi $B'C'$".

...

„Ai folosit ipoteza? Care este ipoteza?“

„Presupunem că $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$. Da, fireşte, trebuie s-o folosesc“.

„Ai folosit întreaga ipoteză? Spuneai că $AB \parallel A'B'$. Este tot ce ştim despre aceste segmente?“

„Nu; AB este, în plus, egal cu $A'B'$, prin construcţie. Segmentele acestea sînt paralele şi egale. La fel sînt AC şi $A'C'$“.

„Două segmente paralele şi de lungime egală formează o figură interesantă. *Ai întîlnit-o înainte?*“

„Bineînţeles! Sigur! Un paralelogram! Voi uni A cu A', B cu B' şi C cu C'“.

„Ideea nu este rea. Cîte paralelograme avem acum în figură?“

„Două. Ba nu, trei. Nu, două. Cred că sînt două despre care putem demonstra imediat că sînt paralelograme. Al treilea pare să fie un paralelogram; sper că pot demonstra aceasta. Şi atunci, demonstraţia este terminată!“

Am fi putut deduce şi din răspunsurile precedente că elevul este inteligent. După această din urmă observaţie însă, concluzia noastră devine neîndoielnică.

Elevul acesta este capabil să intuiască un rezultat matematic şi să deosebească limpede ceea ce demonstrează de ceea ce intuieşte. El ştie, de asemenea, că ceea ce intuieşte poate fi mai mult sau mai puţin plauzibil, el a profitat de pe urma lecţiilor sale de matematică; el are o experienţă reală în rezolvarea problemelor, este în stare să conceapă şi să exploateze o idee bună.

20. O problemă de determinare a vitezei unui proces. *Într-un vas conic curge apă, cu viteza*[1] *v. Vasul are forma unui con circular drept, cu baza orizontală şi cu vîrful în jos; raza bazei este a, iar înălţimea conului b. Să se afle viteza cu care se ridică nivelul apei atunci cînd înălţimea ei este egală cu y. Să se afle valoarea numerică a necunoscutei, considerînd că* $a = 4$ *m*, $b = 3$ *m*, $v = 2$ *m³/min*, *iar* $y = 1$ *m*.

Se presupune că elevii cunosc regulile simple ale derivării şi că sînt familiarizaţi cu noţiunea de „viteză de variaţie“ a unei mărimi.

„Care sînt datele?“

---

[1] Este vorba aici de cantitatea de apă care curge în unitatea de timp. — *N.T.*

„Raza bazei conului este $a = 4$ m, iar înălţimea lui este $b = 3$ m; viteza cu care apa curge în vas este $v = 2$ m^3/min, iar adîncimea apei la un moment dat este $y = 1$ m".

„Este corect. Enunţul problemei pare să ne spună că trebuie, deocamdată, să facem abstracţie de valorile numerice, să lucrăm cu litere, exprimînd necunoscuta în funcţie

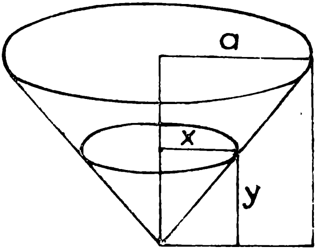

Fig. 6

de a, b, v, y, şi abia pe urmă, după ce vom fi obţinut această expresie a necunoscutei în litere, să substituim valorile numerice. Eu aş urma această sugestie. Şi acum, *care este necunoscuta?*"

„Viteza cu care creşte nivelul atunci cînd adîncimea apei este y".

„Ce înseamnă aceasta? Ai putea să o spui cu alte cuvinte?"

„Viteza cu care creşte adîncimea apei".

„Ce înseamnă aceasta? *Ai putea s-o reformulezi oarecum altfel?*"

„Viteza cu care variază adîncimea apei".

„Asta este: viteza cu care variază y. Dar ce este viteza de variaţie? *Să revenim la definiţie*".

„Viteza de variaţie a unei funcţii este derivata ei".

„Foarte bine. Să vedem acum dacă y este o funcţie. După cum am spus înainte, facem abstracţie de valoarea numerică a lui y. Ne putem oare imagina că y variază?"

„Da, nivelul y al apei creşte pe măsură ce trece timpul".

„Aşadar, y este funcţie de ce?"

„Funcţie de timpul t".

„Bine. *Introdu notaţiile corespunzătoare.* Cum ai scrie „viteza de variaţie a lui y" în simboluri matematice?"

$$„\frac{dy}{dt}“$$

„Aşa. Prin urmare, aceasta este necunoscuta. Ea trebuie exprimată cu ajutorul lui a, b, v, y. De altfel, una dintre aceste date este o «viteză». Care anume?"

„v este viteza cu care apa pătrunde în vas".

„Ce înseamnă aceasta? S-ar putea spune şi cu alte cuvinte?"

„v este viteza cu care variază volumul apei din vas".

„Ce înseamnă aceasta? *Ai putea s-o reformulezi oarecum altfel?* Cum ai scrie aceasta în *notaţii corespunzătoare?*"

$$„v = \frac{dV}{dt}“.$$

„Ce reprezintă V?"

„Volumul apei din vas, la momentul t".

„Bine. Aşadar, trebuie să exprimăm $\frac{dy}{dt}$ prin a, b, $\frac{dV}{dt}$, y. Cum procedăm?"

...

„Dacă nu ştii să rezolvi această problemă, încearcă să *rezolvi mai întîi o problemă înrudită.* Dacă nu-ţi dai seama încă de legătura dintre $\frac{dy}{dt}$ şi datele problemei, caută să găseşti o legătură mai simplă care să poată servi ca punct de sprijin".

...

„Nu-ţi dai seama că există şi alte relaţii? De exemplu, sînt oare y şi V independente una de cealaltă?"

„Nu. Cînd y creşte, V trebuie de asemenea să crească".

„Aşadar, avem aici o legătură. Care anume?"

„Ei bine, V este volumul unui con a cărui înălţime este y. Dar nu cunosc încă raza bazei".

„Putem totuşi să o luăm în considerare. Să-i dăm un nume, de exemplu x".

$$„V = \frac{\pi x^2 y}{3}“.$$

„Este corect. Acum, să vedem ce ştim despre x? Este x independent de y?"

„Nu, dacă nivelul y al apei creşte, raza x a suprafeţei libere creşte şi ea".

„Prin urmare, avem o legătură. Care este legătura?"

„Natural, nişte triunghiuri asemenea.

$$x : y = a : b“.$$

„Cum vezi, încă o legătură, pe care trebuie să o folosim. Nu uita că voiai să cunoşti relaţia dintre V şi y".

„Avem

$$x = \frac{ay}{b};$$

$$V = \frac{\pi a^2 y^3}{3 b^2}\text{“}.$$

„Foarte bine. Pare că sîntem pe drumul cel bun, nu-i aşa? Dar nu trebuie să uităm ce anume urmărim. Care este necunoscuta?“

„Este $\frac{dy}{dt}$“.

„Trebuie să găseşti legătura dintre $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ şi alte mărimi.

„Să derivăm! Bineînţeles!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2 y^2}{b^2} \frac{dy}{dt}.$$

Asta este“.

„Foarte bine! Şi acum, ce-i cu valorile numerice?“

„Dacă $a = 4$, $b = 3$, $\frac{dV}{dt} = v = 2$, $y = 1$, atunci

$$2 = \frac{\pi \times 16 \times 1}{9} \frac{dy}{dt}\text{“}.$$

Partea a II-a

CUM REZOLVĂM O PROBLEMĂ?

Familiarizarea cu problema

De unde să încep? Începe cu enunțul problemei.

Ce pot să fac? Consideră problema în întregul ei, cît poți de clar și de real. Pentru moment, nu te ocupa de amănunte.

Ce pot cîștiga procedînd astfel? Trebuie să înțelegi problema, să te familiarizezi cu ea, să-ți imprimi în minte țelul. Atenția acordată problemei va contribui, de asemenea, să-ți stimuleze memoria și să te pregătească pentru a-ți reaminti punctele relevante.

Munca pentru o mai bună înțelegere

De unde să încep? Pornește din nou de la enunțul problemei. Mergi înainte, abia cînd acest enunț îți este atît de clar și atît de bine imprimat în minte încît poți să nu te mai uiți la problemă pentru o clipă, fără teamă că ai să pierzi din vedere ansamblul.

Ce pot să fac? Izolează părțile principale ale problemei. Ipoteza și concluzia sînt părțile principale ale unei „probleme de demonstrat"; necunoscuta, datele și condițiile sînt părțile principale ale unei „probleme de aflat". Parcurge părțile principale ale problemei, examinează-le una cîte una, reexaminează-le, consideră-le în diverse combinații, legînd fiecare detaliu de celelalte detalii și fiecare dintre ele de ansamblul problemei.

Ce pot cîștiga procedînd astfel? Îți vei pregăti și clarifica detalii care ar putea să joace un rol mai tîrziu.

În căutarea ideii utile

De unde să încep? Începe prin a considera părțile principale ale problemei. Mergi mai departe abia după ce aceste părți principale au fost ordonate distinct și înțelese clar, datorită muncii pregătitoare, şi atunci cînd memoria pare să funcţioneze fidel.

Ce pot să fac? Consideră problema sub diverse aspecte şi caută contacte cu ceea ce ştii dinainte.

Consideră problema sub diverse aspecte. Accentuează diferitele părţi, examinează diferitele detalii, reexaminează-le de mai multe ori pe căi diferite, combină detaliile în diferite moduri, abordează-le pe diferite căi. Încearcă să descoperi vreun nou înţeles în fiecare detaliu, vreo nouă interpretare a ansamblului problemei.

Caută legături cu ceea ce ştii dinainte. Încearcă să te gîndeşti la ceea ce ţi-a fost de folos în situaţii similare din trecut. Încearcă să recunoşti cîte ceva familiar în ceea ce examinezi acum, caută să prinzi ceva folositor în ceea ce ai recunoscut.

Ce aş putea să întrezăresc? O idee salvatoare, poate chiar ideea decisivă care să-ţi arate dintr-o dată calea spre scop.

Cum poate fi utilă o idee? Ea îţi arată drumul în întregul lui sau o parte a drumului; ea îţi sugerează mai mult sau mai puţin clar în ce fel poţi proceda. Ideile sînt mai mult sau mai puţin complete. În general, dacă ţi-a venit o idee, înseamnă că ai avut noroc.

Ce pot face cu o idee incompletă? Să o cercetezi. Dacă ai impresia că este avantajoasă, este cazul să te ocupi de ea mai îndeaproape. Dacă pare o idee de nădejde, este bine să te asiguri cît de departe te conduce şi să reconsideri situaţia. Situaţia s-a schimbat, datorită ideii salvatoare. Examinează noua situaţie sub diverse aspecte şi caută legături cu ceea ce ştii dinainte.

Ce pot cîştiga procedînd astfel? Poţi să ai noroc şi să-ţi vină altă idee. Eventual, această nouă idee te va conduce direct la soluţie. Poate că vei avea nevoie de alte cîteva idei utile după această nouă idee. Poate că vreuna dintre aceste idei te va induce în eroare. Cu toate acestea, trebuie să fii recunoscător pentru toate ideile noi, chiar pentru cele mai puţin bune, chiar pentru cele nebuloase, de asemenea, pentru ideile suplimentare care adaugă precizări la o idee nebuloasă sau care încearcă să îmbunătăţească o idee mai puţin fericită. Chiar dacă, un anumit timp, nu-ţi vine nici o idee nouă mai ca lumea, trebuie să fii mulţumit dacă felul cum concepi problema devine mai complet sau mai coerent, mai omogen sau mai echilibrat.

Realizarea planului

De unde să încep? Pornește de la ideea fericită care conduce la soluție. Mergi mai departe cînd te simți sigur pe felul cum stăpînești legătura principală și cînd ai încredere că poți să completezi amănuntele secundare care eventual mai lipsesc.

Ce pot să fac? Fă în așa fel încît să stăpînești cît mai sigur problema. Efectuează amănunțit toate operațiile algebrice sau geometrice de care îți dai seama că ar putea fi posibile. Convinge-te de corectitudinea fiecărui pas, printr-un raționament formal sau prin intuiție sau, dacă este posibil, prin amîndouă. Dacă problema este foarte complicată, poți face deosebire între pași „mari" și pași „mici", fiecare pas mare fiind compus din mai mulți pași mici. Verifică întîi pașii mari și coboară treptat spre pași din ce în ce mai mici.

Ce pot cîștiga procedînd astfel? O prezentare a soluției din care fiecare pas este incontestabil corect.

Privire retrospectivă

De unde să încep? De la rezolvarea completă și corectă în toate detaliile ei.

Ce pot să fac? Consideră soluția sub diverse aspecte și caută legături cu ceea ce știi dinainte.

Examinează detaliile soluției și încearcă să le faci cît se poate de simple; parcurge părțile mai întinse ale soluției și caută să le scurtezi; încearcă să cuprinzi dintr-o privire întreaga soluție. Încearcă să modifici într-un mod avantajos părți mai mici sau mai mari ale soluției, caută să perfecționezi ansamblul soluției, s-o faci intuitivă, să o încadrezi cît mai natural în ceea ce știi dinainte. Scurtează metoda care te-a condus la soluție, caută să-i pui în evidență punctele și s-o utilizezi pentru alte probleme.

Ce pot cîștiga acționînd astfel? Poți găsi o soluție nouă și mai bună, poți descoperi fapte noi și interesante. Oricum ar fi, dacă-ți faci obiceiul de a examina și de a scurta astfel soluțiile, vei dobîndi cunoștințe bine ordonate și gata să fie folosite, îți vei dezvolta priceperea de a rezolva probleme.

Partea a III-a

SCURT DICȚIONAR DE EURISTICĂ

Am mai întîlnit cîndva această problemă? Se poate întîmpla să fi rezolvat înainte aceeași problemă cu care avem de-a face acum sau să fi auzit de ea sau să fi întîlnit o problemă foarte asemănătoare. Sînt eventualități pe care trebuie neapărat să le cercetăm. Încercăm să ne reamintim ceea ce s-a întîmplat. *Am mai întîlnit cumva această problemă? Sau poate am văzut aceeași problemă într-o formă oarecum diferită?* Chiar dacă răspunsul este negativ, astfel de întrebări pot marca începutul mobilizării unor cunoștințe utile.

Întrebarea din titlul acestui articol este folosită adesea cu un înțeles mai general. Cu scopul de a obține soluția, trebuie să extragem din memoria noastră elemente relevante, trebuie să mobilizăm părțile adecvate din cunoștințele depozitate în această memorie (*Progrese și reușită*). Firește, nu putem ști dinainte ce părți ale cunoștințelor noastre se vor dovedi relevante; există însă anumite posibilități a căror explorare nu trebuie omisă. Astfel, o anumită particularitate a problemei actuale, care a jucat un rol în rezolvarea unei alte probleme, ar putea să joace din nou un rol. De aceea, dacă o anumită particularitate a problemei actuale ni se pare importantă, ne străduim să o identificăm. Care este această particularitate? Ne este ea oare cunoscută? *Am mai întîlnit-o cumva înainte?*

Analizați-vă conjectura[1]**.** S-ar putea să fi intuit bine, dar ar fi o prostie să acceptați o conjectură care v-a venit în minte, ca și cum ar fi un adevăr demonstrat; așa procedează adesea oamenii neavizați. Conjectura făcută s-ar putea să fie greșită.

---

[1] Conjectura — în special cum o concepe G. Pólya — este o afirmație făcută pe baza unei cunoașteri la prima vedere a situației, fără un studiu aprofundat, ci numai pe baza ghicirii, a intuiției. Ea trebuie să satisfacă condiția de a nu fi contradictorie și servește, în acest caz, ca ipoteză de lucru. — *N.T.*

Dar ar fi o prostie tot atît de mare să disprețuiți această conjectură, care v-a venit în minte; așa fac cîteodată oamenii pedanți. Conjecturile de un anumit gen merită să fie examinate și luate în serios: este vorba despre cele care apar după ce am considerat cu atenție și am înțeles în mod real o problemă care ne interesează cu adevărat. Astfel de conjecturi conțin, de obicei, cel puțin o parte de adevăr, dar, natural, ele ne dau foarte rar întregul adevăr. Totuși avem o șansă să extragem întregul adevăr, dacă analizăm într-un mod adecvat o astfel de conjectură.

Numeroase conjecturi s-au dovedit a fi eronate, ceea ce nu le-a împiedicat să se arate utile, conducîndu-ne spre o altă conjectură mai bună.

Nici o idee nu este cu adevărat proastă decît dacă avem față de ea o atitudine necritică. Ceea ce este cu adevărat rău este să nu avem de loc idei.

1. *Feriți-vă de a proceda astfel.* Iată o povestire tipică despre dl. John Jones. Dl. Jones lucrează într-un birou. Nutrise speranța că i se va mări puțin salariul, însă, cum se întîmplă adesea cu speranțele, ea nu s-a împlinit. Unora dintre colegii săi li s-a mărit salariul, nu însă și lui. Dl. Jones nu a putut privi calm situația. Și-a tot făcut sînge rău și pînă la urmă a ajuns să-l suspecteze pe directorul său, Brown, că acesta ar fi fost răspunzător de faptul că nu i se mărise lui salariul.

Nu putem să-l blamăm pe dl. Jones că ajunsese la această bănuială. Într-adevăr, anumite indicii păreau să arate că este vorba despre directorul Brown. Adevărata greșeală a d-lui Jones a fost însă că, după ce a ajuns la bănuiala sa, a devenit orb și surd față de orice indicii care-l orientau într-o altă direcție. Se sugestiona tot timpul că directorul Brown ar fi dușmanul său personal, ceea ce-l făcu să se poarte într-un mod atît de stupid, încît, pînă la urmă, izbuti efectiv să și-l facă dușman.

Greșeala d-lui John Jones constă în faptul că el s-a purtat ca cei mai mulți dintre noi. El nu-și schimbă niciodată părerile majore, dar destul de des și de brusc părerile minore; însă niciodată el nu se îndoiește de opiniile sale, indiferent dacă sînt majore sau minore, cît timp sînt opiniile sale. El nu le pune niciodată la îndoială, nu-și pune întrebări despre ele, nu le analizează critic, mai mult, el privește cu ură o astfel de analiză critică, dacă i-ar înțelege sensul.

Să admitem că dl. John Jones are dreptate pînă la un punct. Este un om muncitor; își face datoria la slujbă și acasă. Are prea puțin timp pentru îndoieli sau analize. Cel mult, el ar putea să examineze doar cîteva dintre convingerile sale, și pentru ce ar avea îndoieli din moment ce nu-i ajunge timpul să și le analizeze?

Prin urmare, nu procedați ca dl. John Jones. Nu vă lăsați bănuiala sau conjectura să crească neanalizată, pînă devine de nedezrădăcinat. Oricum ar fi, în chestiunile teoretice, cele mai bune idei sînt zdruncinate dacă le acceptăm necritic și întărite dacă le analizăm critic.

2. *Un exemplu din matematică.* Dintre toate patrulaterele de perimetru dat, să se afle cel de arie maximă.

Care este necunoscuta? Un patrulater.

Care sînt datele? Perimetrul patrulaterului este dat.

Care este condiția? Patrulaterul căutat trebuie să aibă aria mai mare decît orice alt patrulater cu același perimetru.

Problema este foarte diferită de cele uzuale în geometria elementară și, de aceea, este cît se poate de natural să începem prin a încerca să ghicim, să facem o conjectură.

Care patrulater pare să aibă aria cea mai mare? Care ar fi conjectura cea mai simplă? Am auzit, eventual, că dintre toate figurile cu același perimetru, cercul are aria cea mai mare; s-ar putea chiar să bănuim un motiv pentru plauzibilitatea acestei afirmații. Și acum, ce patrulater este cel mai aproape de cerc? Care este cel mai aproape de el în ceea ce privește simetria?

O conjectură destul de evidentă este: pătratul. Dacă o luăm în serios, vom înțelege despre ceea ce este vorba. Trebuie să avem curajul de a enunța conjectura: „Dintre toate patrulaterele de perimetru dat, pătratul are aria maximă". Dacă ne hotărîm să analizăm această afirmație, situația se schimbă. Inițial, aveam o „problemă de aflat". După ce am formulat o conjectură, avem o „problemă de demonstrat"; trebuie să dovedim că teorema enunțată este adevărată sau falsă.

Dacă nu cunoaștem vreo problemă asemănătoare cu a noastră și rezolvată anterior, sarcina noastră ni s-ar putea părea destul de grea. *Dacă nu putem să rezolvăm problema propusă, încercăm să rezolvăm mai întîi o problemă înrudită. Știm să rezolvăm o parte a problemei?* Ne-ar putea veni ideea că, o dată ce pătratul are o situație privilegiată printre patrulatere, el trebuie, în virtutea aceluiași fapt, să aibă o situație privilegiată și printre dreptunghiuri. O parte a problemei noastre ar fi rezolvată, dacă am izbuti să demonstrăm următoarea propoziție: „Dintre toate dreptunghiurile de perimetru dat, pătratul are aria maximă“.

Această teoremă apare mai accesibilă decît cea de mai sus; ea este, bineînțeles, mai slabă. În orice caz, trebuie să-i prindem sensul; trebuie să avem curajul de a-i da o nouă formulare, mai amănunțită. O putem enunța din nou în mod avantajos în limbajul algebrei.

Aria unui dreptunghi de laturi a și b este ab.

Latura pătratului avînd același perimetru cu dreptunghiul de mai sus este $\frac{a+b}{2}$. Așadar, aria acestui pătrat este $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Ea trebuie să fie mai mare decît aria dreptunghiului, deci, urmează să avem

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab.$$

Este adevărat? Aceeași afirmație poate fi scrisă și în forma echivalentă

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab.$$

Aceasta este adevărată, deoarece este echivalentă cu

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

sau cu

$$(a - b)^2 > 0$$

și această inegalitate este cu siguranță valabilă, dacă nu avem $a = b$; așadar dreptunghiul nostru este un pătrat.

Nu am rezolvat încă problema, dar am făcut anumite progrese tocmai considerînd într-un mod corect conjectura noastră evidentă.

3. *Un exemplu nematematic.* Într-un joc de silabe încrucișate, se cere să găsim un cuvînt de 5 silabe (10 litere), definit astfel: „Acoperirea pereților din nou, de la stînga la dreapta și de la dreapta la stînga“.

Care este necunoscuta? Un cuvînt.

Care sînt datele? Lungimea cuvîntului este dată: 5 silabe (10 litere).

Care este condiția? Ea este cuprinsă în definiție. Este vorba despre ceva cu pereți, dar destul de nebulos.

Așadar trebuie să examinăm din nou definiția. Făcînd aceasta, ultima parte a definiției ne va atrage neapărat atenția: „...din nou, de la stînga la dreapta și de la dreapta la stînga". *Știm să rezolvăm o parte a problemei?* Există aici o șansă de a ghici începutul cuvîntului. O dată ce repetiția este atît de puternic accentuată, cuvîntul ar putea foarte bine să înceapă cu RE. Este o conjectură destul de evidentă. Dacă sîntem ispitiți să-i dăm crezare, trebuie să-i înțelegem sensul. Cuvîntul căutat arată astfel:

R E — — — — — — — —

Se poate verifica rezultatul? Dacă un alt cuvînt al jocului se încrucișează cu al nostru la prima silabă (de 2 litere), trebuie să încercăm dacă acest al doilea cuvînt nu începe cumva cu RE. S-ar putea să fie o idee bună de a trece la acest al doilea cuvînt și de a verifica silaba RE. Dacă avem succes în verificarea lui RE sau dacă, cel puțin, nu găsim nici argument împotrivă, putem reveni la cuvîntul nostru inițial. Ne întrebăm din nou: *Care este condiția?* Reexaminînd definiția, atenția noastră poate fi concentrată asupra ultimei părți: „...de la stînga la dreapta și de la dreapta la stînga". Să însemne oare aceasta că cuvîntul căutat se citește la fel de la stînga la dreapta și de la dreapta la stînga? Este o conjectură mai puțin evidentă (există totuși astfel de cazuri, vezi *Descompunere și recombinare*, 8).

Oricum ar fi, să ne analizăm conjectura; să căutăm a-i înțelege sensul. Cuvîntul ar arăta astfel:

R E — — — — — — R E.

În plus, silaba a doua trebuie să fie identică cu a patra.

Cititorul poate acum ghici relativ ușor cuvîntul[1].

Analogia este un fel de asemănare. Obiecte sau lucruri asemănătoare concordă între ele într-o anumită privință, obiecte sau lucruri analoge *concordă prin anumite relații* ale părților lor corespunzătoare.

1. Un paralelogram dreptunghic este analog cu un paralelipiped dreptunghic. În adevăr, relațiile dintre laturile

[1] Exemplul a fost adoptat în traducere. S-a presupus că în acest joc de silabe încrucișate, silabele se citesc la fel într-un sens și în celălalt. Soluția este RETAPETARE. — *N.T.*

dreptunghiului seamănă cu cele dintre fețele paralelipipedului:

Fiecare latură a dreptunghiului este paralelă cu o altă latură și perpendiculară pe celelalte două.

Fiecare față a paralelipipedului este paralelă cu o altă față și perpendiculară pe celelalte.

Vom conveni să spunem că latura este un „element frontieră" al dreptunghiului, iar fața un „element frontieră" al paralelipipedului. Acum, putem reuni cele două propoziții de mai sus într-una singură, care se aplică în egală măsură ambelor figuri:

Fiecare element frontieră este paralel cu un alt element frontieră și perpendicular pe celelalte elemente frontieră.

Astfel, am exprimat anumite relații comune celor două sisteme de obiecte comparate, anume laturile dreptunghiului și fețele paralelipipedului dreptunghic. Analogia dintre aceste sisteme constă în această comunitate de relații.

2. Analogia este pretutindeni prezentă în gîndirea noastră, în vorbirea curentă, în raționamentele noastre banale, precum și în mijloacele de expresie artistice și în cele mai înalte realizări ale științei. Analogia este folosită la niveluri dintre cele mai diferite. Oamenii uzează adesea de analogii vagi, ambigue, incomplete sau incomplet clarificate, dar analogia poate să se ridice pînă la nivelul preciziei matematice. Toate genurile de analogie pot juca un rol în descoperirea soluției și, de aceea, nici unul dintre ele nu trebuie neglijat.

3. Putem considera că am avut noroc atunci cînd, încercînd să rezolvăm o problemă, reușim să dăm peste o *problemă analogă mai simplă*. La pct. **15**, problema noastră inițială se referea la diagonala unui paralelipiped dreptunghic; considerarea unei probleme analoge mai simple, privitoare la diagonala unui dreptunghi, ne-a condus la soluția problemei inițiale. Vom discuta acum un alt exemplu de același gen. Avem de rezolvat următoarea problemă:

Să se afle centrul de greutate al unui tetraedru omogen.

Dacă nu sîntem familiarizați cu calculul integral și nu avem suficiente cunoștințe de fizică, problema nu este de loc ușoară; ea a reprezentat o încercare științifică serioasă pe vremea lui Arhimede sau a lui Galilei. Așadar, dacă vrem s-o rezolvăm cu cunoștințe preliminare cît mai puține, trebuie să căutăm o problemă analogă mai simplă. Problema corespunzătoare în plan ne vine aici în minte de la sine:

Să se afle centrul de greutate al unui triunghi omogen.

Avem acum două chestiuni, în loc de una singură. Dar este posibil ca răspunsul la acestea să fie mai ușor de găsit decît la una singură, cu condiția ca cele două chestiuni să fie legate între ele într-un mod inteligent.

4. Lăsînd de o parte, pentru moment, problema noastră inițială cu tetraedrul, ne vom concentra atenția asupra problemei analoge mai simple, cu triunghiul. Pentru a rezolva problema, trebuie să știm cîte ceva despre centrele de greutate. Următorul principiu este plauzibil și se impune în mod natural:

Dacă un sistem S de mase este format din părți care își au toate centrul de greutate în același plan, atunci planul va conține și centrul de greutate al sistemului S.

Acest principiu cuprinde tot ce ne trebuie pentru cazul triunghiului. Întîi, el ne arată că centrul de greutate al triunghiului este situat în planul acestuia. Apoi, putem considera că triunghiul este format din fibre (din fîșii înguste, din paralelograme „infinit înguste") paralele cu una dintre laturile triunghiului (latura AB în fig. 7). Centrul de greutate al fiecărei fibre (al fiecărui paralelogram) este, evident, punctul său central și toate aceste puncte centrale sînt situate pe linia care unește vîrful C, opus laturii AB, cu mijlocul M al lui AB (vezi fig. 7).

Orice plan care trece prin mediana CM a triunghiului conține centrele de greutate ale tuturor fibrelor paralele care

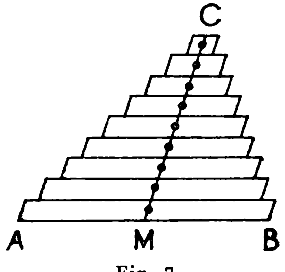

Fig. 7

formează triunghiul. Așadar, ajungem la concluzia că centrul de greutate al întregului triunghi se află pe aceeași mediană. Or, el trebuie să fie situat și pe celelalte două mediane, deci el trebuie să fie *punctul de intersecție comun al celor trei mediane.*

Este de dorit să verificăm acum pur geometric, independent de orice ipoteză mecanică, că cele trei mediane sînt concurente.

5. După ce am studiat cazul triunghiului, cazul tetraedrului devine extrem de ușor. Am rezolvat o problemă analogă cu a noastră și, odată ce am rezolvat-o, dispunem de un *model după care să ne călăuzim.*

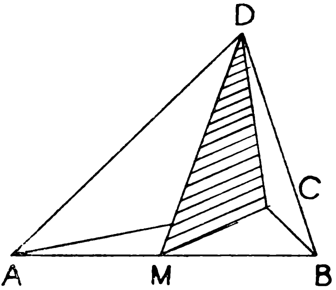

Fig. 8

La rezolvarea problemei analoge, pe care o utilizăm acum ca model, ne-am imaginat triunghiul ABC ca fiind compus din fibre paralele cu una dintre laturi, AB. Acum vom concepe tetraedrul $ABCD$ ca fiind constituit din fibre paralele cu una dintre muchii, AB.

Mijloacele fibrelor care constituie triunghiul sînt situate toate pe aceeași dreaptă, o mediană a triunghiului, care unește mijlocul M al laturii AB cu vîrful opus, C. Mijloacele fibrelor care constituie tetraedrul sînt situate toate în același plan, care unește mijlocul M al muchiei AB cu muchia opusă CD (vezi fig. 8); putem da acestui plan MCD denumirea de *plan median* al tetraedrului.

În cazul triunghiului, am avut trei mediane la fel cu MC, conținînd fiecare centrul de greutate al triunghiului. De aceea, aceste trei mediane trebuie să se întîlnească în același punct, care este tocmai centrul de greutate. În cazul tetraedrului avem șase plane mediane la fel cu MCD, care unesc mijlocul unei muchii cu muchia opusă și care conțin fiecare centrul de greutate al tetraedrului. De aceea, cele șase plane mediane trebuie să se întîlnească în același punct, care este tocmai centrul de greutate.

6. Am rezolvat, astfel, problema centrului de greutate al tetraedrului omogen. Pentru a completa soluţia, este de dorit să verificăm acum pur geometric, independent de orice consideraţii mecanice, că cele şase plane mediane menţionate trec prin acelaşi punct.

Cînd am rezolvat problema centrului de greutate al triunghiului omogen, am considerat că este de dorit să verificăm, pentru a completa soluţia, că cele trei mediane ale triunghiului sînt concurente. Această problemă este analogă cu cea de mai sus, dar cu mult mai simplă.

Putem utiliza iarăşi, pentru a soluţiona problema referitoare la tetraedru, problema analogă mai simplă privitoare la triunghi (pe care o putem presupune rezolvată). În adevăr, să considerăm cele trei plane mediane care trec prin cele trei muchii DA, DB, DC, cu vîrful comun D; fiecare dintre ele trece şi prin mijlocul muchiei opuse (planul median prin DC trece prin M, vezi fig. 8). Aceste trei plane mediane intersectează planul triunghiului ABC după cele trei mediane ale acestuia. Cele trei mediane sînt concurente (acesta este rezultatul problemei analoge mai simple) şi acest punct, la fel ca D, este un punct comun al celor trei plane mediane. Dreapta care uneşte cele două puncte comune este comună tuturor celor trei plane mediane.

Am demonstrat că cele trei plane mediane (din cele şase) care trec prin vîrful D au o dreaptă comună. Acelaşi lucru trebuie să fie valabil pentru cele trei plane mediane care trec prin A, de asemenea pentru cele trei plane mediane care trec prin D, precum şi pentru cele trei care trec prin C. Reunind în mod corespunzător aceste fapte, putem demonstra că cele şase plane mediane au un punct comun. (Cele trei plane mediane care trec prin laturile triunghiului ABC determină un punct comun şi trei drepte de intersecţie care sînt concurente. După cum am demonstrat însă, prin fiecare dreaptă de intersecţie trebuie să mai treacă încă un plan median.)

7. Atît la 5 cît şi la 6 ne-am folosit de o problemă analogă mai simplă, referitoare la triunghi, pentru a rezolva o problemă despre tetraedru. Cele două cazuri diferă însă dintr-un punct de vedere important. La 5 am recurs la *metoda* unei probleme analoge mai simple, a cărei soluţie am imitat-o punct cu punct. La 6 am folosit *rezultatul* problemei analoge mai simple, fără să ne preocupe în ce fel fusese obţinut acest rezultat. Cîteodată, avem posibilitatea de a utiliza *atît metoda, cît şi rezultatul* problemei analoge mai simple. De altfel,

exemplul nostru precedent ne arată acest lucru, dacă considerăm cele expuse la 5 și la 6 ca părți diferite ale soluției aceleiași probleme.

Exemplul nostru este tipic. Rezolvînd o anumită problemă, putem folosi adesea soluția unei probleme analoge mai simple; putem recurge la metoda ei sau la rezultatul ei sau la amîndouă. Natural, în cazurile mai dificile pot apărea complicații care nu sînt prezentate în exemplul nostru. În special, se poate întîmpla ca soluția problemei analoge să nu fie imediat aplicabilă problemei noastre inițiale. În aceste condiții, merită să reconsiderăm soluția, să o variem și să o modificăm pînă cînd, după ce am încercat diferite forme ale soluției, o găsim eventual pe cea care permite o extindere la problema noastră inițială.

8. Este de dorit să prevedem, cu un anumit grad de plauzibilitate, rezultatul sau, cel puțin, anumite caracteristici ale rezultatului. Asemenea prevederi plauzibile sînt adesea bazate pe analogie.

Astfel, este posibil să știm că centrul de greutate al unui triunghi omogen coincide cu centrul de greutate al vîrfurilor sale (adică al celor trei puncte materiale de masă egală situate în cele trei vîrfuri ale triunghiului). Știind aceasta, putem face conjectura că centrul de greutate al unui tetraedru omogen coincide cu centrul de greutate al celor patru vîrfuri.

Această conjectură este „un raționament prin analogie". Cunoscînd că triunghiul și tetraedrul seamănă în mai multe privințe, conjecturăm că ele mai seamănă și într-o altă privință. Ar fi o prostie să considerăm drept certitudine plauzibilitatea unor astfel de conjecturi, dar ar fi o prostie tot atît de mare, dacă nu chiar mai mare, să disprețuim astfel de conjecturi plauzibile.

Raționamentul prin analogie este cel mai uzual, poate chiar și cel mai important. El ne conduce la conjecturi mai mult sau mai puțin plauzibile, care pot să fie sau să nu fie confirmate de experiență sau de un raționament mai riguros. Biochimistul care face experimente pe animale pentru a prevedea influența pe care preparatele sale o exercită asupra oamenilor, trage concluzii prin analogie. Tot așa proceda și un băiețaș pe care l-am cunoscut cîndva. Cățelușul său trebuia dus la veterinar, și el s-a interesat: „Cine este veterinarul?"

„Doctorul animalelor".

„Și care animal este doctorul animalelor?"

9. O concluzie prin analogie obținută de la mai multe cazuri paralele este mai puternică decît una obținută din mai puține cazuri. Or, calitatea este mai importantă decît cantitatea. Analogii nete și clare au mai multă greutate decît asemănări vagi, fapte ordonate sistematic contează mai mult decît colecții de cazuri întîmplătoare.

În cele de mai sus (la 8) am făcut o conjectură despre centrul de greutate al tetraedrului. Conjectura se întemeia pe o analogie; cazul tetraedrului este analog cu cel al triunghiului. Putem întări conjectura, examinînd și un alt caz analog, cel al unei bare omogene (adică al unui segment de dreaptă de densitate uniformă).

Analogia dintre

segment triunghi tetraedru

are mai multe aspecte. Segmentul este conținut într-o dreaptă, triunghiul în plan, iar tetraedrul în spațiu. Segmentele de dreaptă sînt cele mai simple figuri unidimensionale cu frontieră, triunghiurile sînt cele mai simple poligoane, iar tetraedrele cele mai simple poliedre.

Segmentul are două elemente frontieră de dimensiune zero (cele două extremități), iar interiorul său este unidimensional.

Triunghiul are trei elemente frontieră de dimensiune zero și trei elemente frontieră unidimensionale (trei vîrfuri, trei laturi), iar interiorul său este bidimensional.

Tetraedrul are patru elemente frontieră de dimensiune zero, șase unidimensionale și patru bidimensionale (patru vîrfuri, șase muchii, patru fețe), iar interiorul său este tridimensional.

Numerele de mai sus pot fi sintetizate într-un tabel. Coloanele succesive conțin numerele pentru elementele zero, uni-, bi- și tridimensionale, iar liniile succesive conțin numerele pentru segment, triunghi și tetraedru:

2	1		
3	3	1	
4	6	4	1

Chiar o cunoaștere superficială a coeficienților binomiali ne dă posibilitatea să recunoaștem aici o porțiune din triunghiul lui Pascal. Am găsit o regularitate remarcabilă care leagă între ele segmentul, triunghiul și tetraedrul.

10. Dacă ne-am convins că există o legătură strînsă între obiectele pe care le comparăm, „raționamentele prin analogie" de tipul celor de mai jos pot avea o anumită greutate pentru noi.

Centrul de greutate al unei bare omogene coincide cu centrul de greutate al celor două extremități. Centrul de greutate al unui triunghi omogen coincide cu centrul de greutate al celor trei vîrfuri. Nu este oare cazul să bănuim că centrul de greutate al unui tetraedru omogen coincide cu centrul de greutate al celor patru vîrfuri?

De asemenea, centrul de greutate al unei bare omogene împarte distanța dintre extremitățile ei în raportul 1 : 1. Centrul de greutate al unui triunghi împarte distanța dintre fiecare vîrf și mijlocul laturii opuse în raportul 2 : 1. Nu este oare cazul să ne închipuim că centrul de greutate al unui tetraedru omogen împarte distanțele dintre fiecare vîrf și centrul de greutate al laturii feței opuse în raportul 3 : 1?

Pare foarte puțin probabil ca conjectura sugerată de aceste întrebări să fie falsă, ca o regularitate atît de frumoasă să se prăbușească. Sentimentul că ceea ce este armonios și simplu nu poate să inducă în eroare îl călăuzește pe cel ce face descoperiri atît în matematică, cît și în alte științe și își găsește expresia în proverbul latin: *simplex sigillum veri* (simplitatea poartă pecetea adevărului).

[Cele de mai sus ne sugerează o extindere la cazul cu n dimensiuni. Pare puțin probabil ca ceea ce este adevărat pentru primele trei dimensiuni, pentru $n = 1, 2, 3$, să înceteze de a mai fi egal pentru valori mai mari ale lui n. Această conjectură este „un raționament prin inducție"; el ilustrează că inducția este bazată în mod firesc pe analogie. Vezi *Inducția și inducția matematică*.]

[11. Vom încheia prezentul articol, considerînd pe scurt cazurile cele mai importante în care analogia atinge precizia ideilor matematice.

(I) Două sisteme de obiecte matematice, să le denumim S și S', sînt în așa fel legate între ele încît anumite relații dintre obiectele sistemului S sînt guvernate de aceleași legi ca și relațiile dintre obiectele lui S'.

Acest tip de analogie dintre S și S' este ilustrat de cele discutate de noi la 1. Nu avem decît să considerăm drept S laturile dreptunghiului, iar drept S' fețele paralelipipedului dreptunghic.

(II) Avem o corespondență biunivocă între obiectele celor două sisteme S și S', care conservă anumite relații. Aceasta înseamnă că dacă are loc o astfel de relație între obiectele unui sistem, aceeași relație este valabilă între obiectele corespunzătoare ale celui de-al doilea sistem. O astfel de legătură între cele două sisteme este un tip de analogie dintre cele mai precise; aceasta se cheamă izomorfism (sau izomorfism oloedral).

(III) Să presupunem că avem o corespondență uni- multivocă între obiectele celor două sisteme S și S', care conservă anumite relații. O astfel de legătură (importantă în diverse capitole ale matematicii superioare, în special în teoria grupurilor și pe care nu este cazul să o discutăm aici în amănunt) se numește izomorfism meroedral (sau omomorfism). Izomorfismul meroedral poate fi considerat ca un alt caz de analogii dintre cele mai precise.]

Au fost utilizate toate datele? Dat fiind că pe măsura rezolvării problemei cunoștințele noastre sînt mobilizate într-o tot mai mare măsură, înțelegem problema la sfîrșit mult mai bine decît la început (*Progrese și reușită*, 1). Dar care este situația acum? Am ajuns oare la ceea ce ne trebuia? Înțelegem oare acum în mod adecvat problema? *Au fost utilizate toate datele? A fost utilizată întreaga condiție?* Întrebarea corespunzătoare pentru „problemele de demonstrat" este: *A fost utilizată întreaga ipoteză?*

1. Ca ilustrare, vom reveni la „problema paralelipipedului" de la pct. **8** (și urmărită apoi la punctele **10, 12, 14, 15**). Se poate întîmpla ca un elev să aibă ideea de a calcula diagonala unei fețe, $\sqrt{a^2+b^2}$, după care se oprește. Profesorul îl poate ajuta, întrebîndu-l: *Ai utilizat toate datele?* Este greu să ne închipuim că elevul nu va băga de seamă că expresia $\sqrt{a^2+b^2}$ nu conține a treia dată, c. De aceea, el va trebui să facă ceva pentru a introduce pe c. Astfel, el are șanse mari de a observa triunghiul dreptunghic decisiv, ale cărui catete sînt $\sqrt{a^2+b^2}$ și c și a cărui ipotenuză este diagonala căutată a paralelipipedului dreptunghic. (Vezi altă ilustrare în *Elemente auxiliare*, 3).

Chestiunile pe care le discutăm aici sînt foarte importante. Contribuția lor la construirea soluției reiese clar din exemplul precedent. Ele ne pot ajuta să găsim punctul slab în modul nostru de a înțelege problema. Ele ne pot îndrepta atenția spre un element omis. Odată ce știm că un anumit element a fost omis, căutăm în mod natural să-l introducem în joc. Avem astfel o cheie, avem o linie de cercetare bine definită pe care s-o urmăm și o șansă importantă de a ajunge la ideea decisivă.

2. Chestiunile pe care le-am discutat sînt utile nu numai în construirea unei argumentări, ci și în verificarea ei. Pentru a fi mai concreți, vom presupune că avem de verificat demonstrația unei teoreme a cărei ipoteză constă din trei părți, toate trei esențiale pentru adevărul teoremei. Cu alte cuvinte, dacă eliminăm una dintre părțile ipotezei, teorema încetează de a mai fi adevărată. De aceea, dacă demonstrația neglijează vreo parte a ipotezei, demonstrația este în mod necesar falsă. *A utilizat* demonstrația *întreaga ipoteză*? A utilizat ea prima parte a ipotezei? Unde anume? Unde a folosit demonstrația partea a doua a ipotezei? Dar pe a treia? Răspunzînd la toate aceste întrebări, ne verificăm demonstrația.

Acest gen de verificare este eficient, instructiv și absolut indispensabil pentru o înțelegere completă, dacă argumentarea este lungă și grea, cum știe foarte bine *Cititorul inteligent*.

3. Chestiunile pe care le-am discutat urmăresc examinarea completitudinii concepției noastre asupra problemei, a înțelegerii ei. Înțelegerea noastră este cu siguranță incompletă, dacă nu luăm în considerare o dată esențială sau o condiție sau o ipoteză. Dar ea este de asemenea incompletă, dacă omitem să înțelegem sensul unui anumit termen esențial. De aceea, pentru a ne analiza concepția, trebuie să ne punem întrebarea: S-a ținut oare seama de toate noțiunile esențiale care intervin în problemă? Vezi *Definiția*, 7.

4. Observațiile de mai sus sînt însă susceptibile de anumite restricții și obiecții. În adevăr, aplicarea lor directă este limitată la probleme „bine enunțate“ și „cu sens“.

O „problemă de aflat“ bine enunțată și cu sens trebuie să aibă toate datele necesare și să nu cuprindă nici o dată inutilă; de asemenea, condiția ei trebuie să fie suficientă, — nici contradictorie, nici redondantă. Natural, la rezolvarea unei astfel de probleme trebuie să facem uz de toate datele și de întreaga condiție.

Obiectul unei „probleme de demonstrat“ este o teoremă matematică. Dacă problema este bine enunțată și are înțeles, fiecare clauză a ipotezei teoremei trebuie să fie esențială pentru concluzie. Natural, la demonstrația unei astfel de teoreme trebuie să utilizăm fiecare clauză a ipotezei.

Se presupune că problemele de matematică din manualele tradiționale sînt bine enunțate și au toate înțeles, sens. Totuşi nu trebuie să avem prea multă încredere în aceasta; în cazul în care intervine cea mai mică îndoială, trebuie să ne întrebăm: *Poate fi satisfăcută condiția?* Încercînd să răspundem la această întrebare sau la una similară, ne putem convinge, cel puţin pînă la un anumit punct, dacă problema noastră este chiar atît de corectă cum am presupus.

Întrebarea din titlul acestui articol și întrebările legate de ea pot și trebuie să fie puse fără modificări numai atunci cînd ştim că problema pe care o avem în faţă are înțeles și este bine enunţată sau, cel puțin, dacă nu avem motive să bănuim contrariul.

5. Există anumite probleme nematematice care pot fi, într-un anumit sens, „bine enunțate". De exemplu, se presupune că problemele de şah corect puse nu au decît o singură soluție și nu cuprind nici o piesă inutilă pe tablă etc.

În schimb, *Problemele practice* sînt, de obicei, departe de a fi bine enunțate și necesită o reconsiderare radicală a chestiunilor discutate în prezentul articol.

Bolzano, Bernhard (1781—1848), logician și matematician, a consacrat o importantă parte din cuprinzătoarea sa expunere a logicii, *Wissenschaftslehre*, problemelor euristicii (vol. 3, pp. 293—575). Cu privire la această parte a lucrării sale Bolzano spunea: „Nu-mi închipui nicidecum că aş fi în stare să prezint în aceste pagini vreun proces de investigație pe care oamenii de talent să nu-l fi cunoscut de mult; și nu vă promit nicidecum că ați putea găsi aici ceva cu totul nou în acest gen. Dar îmi voi da osteneala să formulez în cuvinte clare regulile și căile investigației, pe care le urmează toți oamenii capabili, fără ca, în majoritatea cazurilor, să-și dea seama de aceasta. Deși nu-mi fac iluzia că voi reuși pe deplin să realizez chiar și numai atît, sper că puținul pe care-l înfățișez va putea să placă unora și să aibă anumite aplicații pe viitor".

Care este necunoscuta? Ce se cere? Ce căutăm? Ce trebuie să găsim?

Care sînt datele? Ce este dat? Ce avem?

Care este condiția? Prin ce condiție este legată necunoscuta de date?

Profesorul poate folosi aceste întrebări pentru a verifica măsura în care a fost înțeleasă problema; elevul trebuie să fie capabil de a da la ele un răspuns clar. Mai mult, ele orientează atenția elevului spre părțile principale ale unei „probleme de aflat“, adică necunoscuta, datele, condiția. Dat fiind că luarea în considerare a acestor părți se poate dovedi necesară în mai multe etape, întrebările pot fi repetate frecvent în fazele ulterioare ale soluției. (Vezi exemple la punctele **8, 10, 18, 20**; *Punerea în ecuație*, 3, 4; *Probleme practice*, 1; *Enigme și jocuri* etc.).

Aceste întrebări sînt de cea mai mare importanță pentru cel ce rezolvă probleme. El își verifică modul de a înțelege problema, își concentrează atenția asupra cutărei sau cutărei părți principale a problemei. Soluția constă esențialmente în a pune necunoscuta în legătură cu datele. De aceea, cel ce rezolvă problema trebuie să-și concentreze mereu atenția asupra acestor elemente, întrebîndu-se: *Care este necunoscuta*? *Care sînt datele*?

Problema poate avea mai multe necunoscute sau condiția poate fi formată din diferite părți care trebuie considerate separat; de asemenea, s-ar putea să fie oportun ca o anumită dată să fie considerată aparte. De aceea, putem utiliza diverse variante ale întrebărilor noastre, cum ar fi: Care sînt necunoscutele? Care este prima dată? Care este a doua? Care sînt diversele părți ale condiției? Care este prima clauză a condiției?

Părțile principale ale unei „probleme de demonstrat“ sînt ipoteza și concluzia, iar întrebările corespunzătoare sînt: *Care este ipoteza*? *Care este concluzia*? S-ar putea să avem nevoie de anumite variante de exprimare sau de modificări ale acestor întrebări adeseori utile, de exemplu: Ce presupunem? Care sînt diversele părți ale presupunerii noastre? (Vezi un exemplu la pct. **19**.)

Ce rost au demonstrațiile? Se spune că Newton, ca tînăr student, a început să învețe geometria, cum se obișnuia pe vremea aceea, citind *Elementele* lui Euclid. Citea teoremele, își dădea seama că sînt adevărate și sărea peste demonstrații. Se întreba pentru ce-și mai iau oamenii osteneala să demonstreze lucruri atît de evidente. După mulți ani, el și-a schimbat însă părerea și l-a lăudat pe Euclid.

Povestea aceasta poate fi adevărată sau nu, dar întrebarea rămîne: Ce rost are să învățăm demonstrațiile sau să le explicăm elevilor? Ce este de preferat: nici un fel de demonstrații, sau demonstrații pentru orice, sau numai anumite demonstrații? Și dacă numai unele dintre ele, atunci care anume?

1. *Demonstrații complete*. Pentru logicienii de o anumită factură nu există decît demonstrațiile complete. O adevărată demonstrație nu are voie să cuprindă nici o lacună, nici o capcană, nici o incertitudine; altminteri, nu merită numele de demonstrație. Putem oare găsi demonstrații complete care să satisfacă acest standard pretențios în viața de toate zilele sau în procedura judiciară sau în fizică? Nu prea. Este deci greu să înțelegem cum putem ajunge la ideea unei astfel de demonstrații riguros complete.

Putem spune, fără a exagera prea mult, că omenirea a preluat această idee de la un singur om și de la o singură carte; de la Euclid și de la *Elementele* sale. Oricum ar fi, studiul elementelor geometriei plane ne dă pînă astăzi cea mai bună ocazie de a înțelege ideea de demonstrație riguroasă.

Să luăm ca exemplu demonstrația teoremei: *Suma unghiurilor într-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte*[1]. Figura 9, pe care cei mai mulți dintre noi o cunoaștem, nu are nevoie de prea multe explicații. Prin vîrful A trece o dreaptă

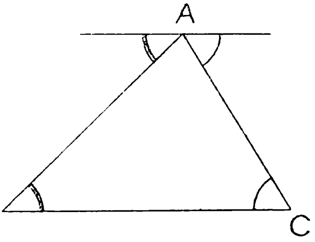

Fig. 9

paralelă cu latura BC. Unghiurile din B și din C ale triunghiului sînt egale cu unghiurile respective din A, marcate în figură, ca alterne interne. Cele trei unghiuri ale triunghiu-

[1] Este o parte din propoziția 32 din Cartea I a *Elementelor* lui Euclid. Demonstrația care urmează nu aparține lui Euclid, dar era cunoscută vechilor greci.

lui sînt egale cu cele trei unghiuri avînd vîrful comun în A, care formează un unghi de 180°, adică două unghiuri drepte: teorema este astfel demonstrată.

Dacă un elev a parcurs programa de matematică fără a fi înțeles în mod real cîteva demonstrații de felul celei de mai sus, el este îndreptățit să adreseze cele mai amare reproșuri școlii sale și profesorilor săi. În adevăr, trebuie să facem distincție între lucruri de mai mare și de mai mică importanță. Dacă elevul nu și-a însușit unele aspecte particulare din geometrie, el n-a pierdut prea mult; s-ar putea ca astfel de fapte să-i folosească prea puțin în viața sa de mai tîrziu. Dacă el nu a ajuns însă să cunoască demonstrațiile geometrice, el a pierdut cele mai bune și cele mai simple exemple de argumentare corectă, a pierdut cea mai bună ocazie de a ajunge la ideea de raționament riguros. Fără această idee, elevul este lipsit de un etalon valabil cu care să aprecieze argumentările care au pretenția de a fi adevărate și pe care le va întîlni mereu în viața de toate zilele.

Pe scurt, dacă educația are intenția de a-i da elevului noțiunile de evidență intuitivă și de raționament logic, ea trebuie să rezerve un anumit loc demonstrațiilor geometrice.

2. *Sistem logic.* Geometria, așa cum este expusă în *Elementele* lui Euclid, nu este o simplă culegere de fapte, ci un sistem logic. Axiomele, definițiile și propozițiile (teoremele) nu sînt înșirate la întîmplare, ci așezate într-o ordine desăvîrșită. Fiecare propoziție este astfel așezată, încît să poată fi fundată pe axiomele, definițiile și propozițiile precedente. Putem considera că ordonarea propozițiilor constituie principala realizare a lui Euclid, iar sistemul lor logic este cel mai mare merit al *Elementelor*.

Geometria lui Euclid nu este numai un sistem logic, ci și cel dintîi și cel mai mare exemplu pentru un astfel de sistem, pe care alte științe au încercat și mai încearcă încă să-l imite. Este oare cazul ca alte științe — în particular cele care sînt foarte departe de geometrie, ca psihologia sau dreptul — să imite logica rigidă a lui Euclid? Este o întrebare discutabilă; dar nimeni nu poate lua parte cu competență la această discuție, dacă nu este familiarizat cu sistemul euclidian.

Sistemul geometriei este cimentat prin demonstrații. Fiecare propoziție este legată printr-o demonstrație de axiomele, definițiile și propozițiile anterioare. Dacă nu înțelegem aceste demonstrații, nu putem înțelege esența autentică a sistemului.

Pe scurt, dacă educaţia are intenţia de a-i da elevului noţiunea de sistem logic, ea trebuie să rezerve un anumit loc demonstraţiilor geometrice.

3. *Sistem mnemotehnic.* Autorul nu este de părere că noţiunile de evidenţă intuitivă, de raţionament riguros şi de sistem logic ar fi inutile pentru cineva. Totuşi sînt cazuri în care studiul acestor noţiuni nu este considerat ca fiind absolut necesar, din cauza lipsei de timp sau din alte motive. Dar chiar şi în astfel de cazuri este de dorit să fie studiate demonstraţii.

Demonstraţiile ne oferă o argumentare clară; astfel, ele consolidează sistemul logic şi ne ajută să ţinem minte diversele elemente ale unui sistem închegat. Să luăm exemplul discutat mai sus, în legătură cu fig. 9. Această figură ne arată, evident, că suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°. Figura pune în legătură acest fapt cu un altul: că unghiurile alterne interne sînt egale. Fapte legate între ele sînt mai interesante şi se păstrează mai bine în memorie decît fapte izolate. Aşadar, figura noastră fixează cele două propoziţii geometrice legate între ele în mintea noastră şi, pînă la urmă, figura şi propoziţiile devin un bun inalienabil al intelectului.

Trecem acum la cazul în care dobîndirea unor noţiuni generale nu este considerată ca necesară, ci se recomandă doar acumularea unor anumite fapte. Chiar într-un astfel de caz, faptele trebuie prezentate într-o oarecare legătură şi într-un fel de sistem, deoarece lucruri izolate se învaţă greu şi se uită uşor. Orice gen de legătură care uneşte faptele într-un mod simplu, firesc şi durabil, este aici bine venit. Un astfel de sistem nu trebuie neapărat să fie întemeiat pe logică, el trebuie doar să ajute în mod efectiv memoria; el trebuie să fie ceea ce se cheamă un sistem *mnemotehnic.* Dar chiar din punctul de vedere al unui sistem pur mnemotehnic, demonstraţiile pot fi utile, îndeosebi cele simple. De exemplu, elevul trebuie să înveţe un fapt legat de suma unghiurilor unui triunghi, şi un alt fapt despre unghiurile alterne. Există oare vreun procedeu mai simplu, mai natural şi mai eficient pentru a memora aceste fapte decît fig. 9?

Pe scurt, chiar dacă nu se acordă o importanţă specială noţiunilor logice generale, demonstraţiile pot fi utile ca procedeu mnemotehnic.

4. *Sistemul cărţii de bucate.* Ne-am ocupat de avantajele demonstraţiilor, dar, bineînţeles, nu am susţinut că toate

demonstrațiile trebuie date *in extenso*. Dimpotrivă, există cazuri cînd aceasta este aproape imposibil; un exemplu important în această direcție este predarea calculului diferențial și integral studenților din școlile tehnice superioare.

Dacă acest calcul este expus conform normelor riguroase moderne, el necesită demonstrații de un anumit grad de dificultate și de subtilitate („demonstrații cu ajutorul lui ε"). Însă inginerii studiază calculul diferențial și integral în vederea aplicațiilor sale și nu au nici destul timp, nici destul antrenament sau interes pentru a se descurca în demonstrații lungi sau pentru a aprecia subtilități. Există astfel o puternică tentație de a suprima toate demonstrațiile. Dacă procedăm însă astfel, reducem calculul diferențial și integral la nivelul unei cărți de bucate.

Cartea de bucate dă o descriere amănunțită a ingredientelor și a procedeelor, dar nu și demonstrații pentru prescripțiile ei și nici argumente pentru rețetele ei; dovada pentru calitatea unei budinci o obținem mîncînd-o. Cartea de bucate poate servi perfect acestui scop. În adevăr, ea nu are nevoie de nici un fel de sistem logic sau mnemotehnic, deoarece rețetele sînt scrise sau tipărite și nu trebuie ținute minte.

Or, un autor al unui manual de calcul diferențial și integral sau un profesor nu vor putea face față sarcinilor lor dacă vor urma prea îndeaproape sistemul cărții de bucate. Dacă metodele sînt prezentate fără demonstrații, procedeele lipsite de motivare nu pot fi înțelese. Dacă regulile sînt predate fără justificare, regulile nelegate între ele vor fi repede uitate. Matematica nu poate fi verificată asemenea unei budinci; dacă se exclud toate raționamentele, cursul de calcul diferențial și integral se poate transforma ușor într-un inventar incoerent de date indigeste.

5. *Demonstrații incomplete*. Calea cea mai bună pentru a rezolva dilema dintre demonstrațiile prea dificile și nivelul cărții de bucate constă în folosirea rezonabilă a demonstrațiilor incomplete.

Pentru un logician riguros, o demonstrație incompletă nu este demonstrație. Și, bineînțeles, trebuie să facem o distincție netă între demonstrațiile incomplete și cele complete; este rău să le confundăm, este și mai rău să prezentăm una drept cealaltă. Este penibil cînd autorul unui manual prezintă într-un mod ambiguu o demonstrație incompletă, cu o evidentă ezitare între jenă și pretenția că demonstrația este completă. Dar demonstrațiile incomplete pot fi utile cînd sînt folosite la locul potrivit și cu bun simț. Rostul lor nu este de a înlocui demonstrațiile complete (ceea ce nu vor putea niciodată), ci de a face expunerea interesantă și coerentă.

Exemplul 1. *O ecuație algebrică de grad* n *are exact* n *rădăcini*. Această propoziție, denumită teorema fundamentală a algebrei (Gauss), trebuie expusă adesea unor elevi care nu sînt pregătiți să-i înțeleagă demonstrația. Ei știu însă că o *ecuație de gradul întîi are o rădăcină*, iar una *de gradul al doilea, două rădăcini*. Totodată, această propoziție dificilă are o parte care poate fi prezentată cu ușurință: *nici o ecuație de grad* n *nu are mai mult decît* n *rădăcini distincte*. Constituie oare aceste fapte o demonstrație completă a teoremei fundamentale? Nicidecum. Ele sînt totuși suficiente pentru a-i conferi oarecare interes și plauzibilitate și pentru a o fixa în mintea celor care trebuie s-o învețe și aceasta este principalul.

Exemplul 2. *Suma a oricare două dintre unghiurile plane formate de un triedru este mai mare decît al treilea*. Evident, teorema se reduce la afirmația că, *într-un triunghi sferic, suma a două laturi oarecare este mai mare decît a treia*. O dată ce am observat aceasta, ne gîndim natural la analogia dintre triunghiul sferic și cel rectiliniu. Constituie oare aceste observații o demonstrație? Nicidecum, dar ele ne ajută să înțelegem și să memorăm teorema.

Primul nostru exemplu prezintă un interes istoric. Căci timp de aproximativ 250 de ani, matematicienii au crezut în teorema fundamentală, fără să aibă o demonstrație completă, în fapt fără o bază mai mare decît cea menționată mai sus. Al doilea exemplu indică *Analogia* drept izvor important pentru conjecturi. În matematică, la fel ca în științele naturii, descoperirea ia adesea ca punct de plecare observația, analogia și inducția. Aceste mijloace, folosite cu bun simț la construirea unei argumentări euristice plauzibile, sînt deosebit de atrăgătoare pentru fizicieni și ingineri (vezi și *Inducția și inducția matematică*, 1, 2, 3).

Rolul și interesul demonstrațiilor incomplete sînt explicate într-o anumită măsură de studiul nostru asupra procesului de rezolvare a unei probleme. Oarecare experiență în rezolvarea problemelor ne arată că prima idee a unei demonstrații este de foarte multe ori incompletă. Observația cea mai importantă, conexiunea principală, germenele demonstrației pot fi conținute aici, dar detaliile trebuie obținute ulterior şi ele ne dau adesea destulă bătaie de cap. Unii autori, dar nu prea mulţi, au darul de a prezenta tocmai germenele demonstraţiei, ideea ei principală în forma cea mai simplă şi de a indica natura detaliilor care urmează a fi completate. O astfel de demonstraţie, deşi incompletă, poate fi mult mai instructivă decît o demonstraţie prezentată cu toate amănuntele.

Pe scurt, demonstraţiile incomplete pot fi utilizate ca un fel de procedeu mnemotehnic (însă, natural, nu ca ţinînd loc de demonstraţii complete), atunci cînd scopul urmărit este o suficientă coerenţă a expunerii, şi nu consistenţa logică riguroasă.

Susţinerea demonstraţiilor incomplete este foarte periculoasă. Abuzurile posibile pot fi însă îngrădite printr-un număr redus de reguli. Întîi, dacă o demonstraţie este incompletă, ea trebuie prezentată, într-un fel sau altul, ca atare. Al doilea, un autor sau un profesor nu are dreptul să prezinte demonstraţia incompletă a unei teoreme decît dacă el cunoaşte foarte bine demonstraţia completă.

Şi trebuie să mărturisim că prezentarea cu bun simţ a unei demonstraţii incomplete nu este de loc ceva uşor.

Cititorul inteligent al unei cărţi de matematică urmăreşte două lucruri:

1° să-şi dea seama că respectivul pas al argumentării este corect;

2° să înţeleagă scopul acestui pas.

Auditorul inteligent al unei lecţii sau conferinţe de matematică urmăreşte acelaşi lucru. Dacă el nu poate vedea că un anumit pas al argumentării este corect şi nici măcar să bănuiască, eventual, că pasul este incorect, el este îndreptăţit să protesteze şi să pună întrebări. Dacă nu poate să-şi dea seama de scopul acestui pas şi nici să-i bănuiască raţiunea, de obicei nu poate nici măcar să formuleze o obiecţie clară, nu poate protesta, ci este doar nedumerit şi plictisit şi pierde firul argumentării.

Profesorul inteligent sau autorul inteligent al unui manual trebuie să aibă în vedere aceste puncte. Fireşte, este necesar să scrie şi să vorbească corect; dar nu este suficient. O deducţie corect prezentată în carte sau pe tablă poate să fie inaccesibilă şi neinstructivă, dacă scopul paşilor consecutivi este ininteligibil, dacă cititorul sau ascultătorul nu-şi poate da seama cum a fost omeneşte posibil să se ajungă la o astfel de demonstrație, dacă el nu este capabil să extragă din prezentare o sugestie în legătură cu modul în care ar putea el singur să găsească o astfel de demonstrație.

Întrebările și recomandările din lista noastră pot fi utile autorului și profesorului pentru a sublinia scopul și motivarea demonstrației. În această privință, este deosebit de folositoare întrebarea: *Au fost utilizate toate datele*? Autorul sau profesorul poate arăta, cu ajutorul acestei întrebări, un motiv satisfăcător pentru a lua în considerare o dată nefolosită pînă atunci. Cititorul sau ascultătorul poate recurge la aceeași întrebare pentru a înțelege motivul autorului sau al profesorului de a considera cutare și cutare element și el poate să-și dea seama că, punînd această întrebare, ar fi fost în stare să descopere singur respectivul pas sau respectiva demonstrație.

Condiția este o parte principală a unei „probleme de aflat". Vezi *Probleme de aflat, probleme de demonstrat*, 3. Vezi și *Termenii vechi și noi*, 2.

O condiție se cheamă *redondantă*, dacă conține părți superflue. Ea se numește *contradictorie*, dacă părțile ei sînt opuse una alteia și inconsistente, astfel că nu există un obiect care să satisfacă condiția.

Așadar, dacă o condiție este exprimată printr-un număr de ecuații liniare mai mare decît numărul necunoscutelor, ea este fie redondantă, fie contradictorie; dacă ea este exprimată prin mai puține ecuații decît necunoscute, ea este insuficientă pentru a determina necunoscutele; în cazul în care condiția este exprimată prin tot atîtea ecuații cîte necunoscute avem, ea este, de regulă, tocmai suficientă pentru a obține necunoscutele, dar, în cazuri excepționale, ea poate fi contradictorie sau insuficientă.

Contradictorie. Vezi *Condiția*.

Corolar se numește o teoremă pe care o obținem ușor din analiza unei alte teoreme pe care tocmai am descoperit-o. Cuvîntul este de origine latină; o traducere mai apropiată de sensul original ar fi „gratificație" sau „bacșiș".

Cunoaștem vreo problemă înrudită? Ne putem cu greu imagina o problemă absolut nouă, care să nu fie asemănătoare și înrudită cu nici una dintre cele rezolvate anterior; dacă o astfel de problemă ar putea exista, ea ar fi de nerezolvat. În adevăr, cînd rezolvăm o problemă, profităm totdeauna de probleme rezolvate anterior, recurgînd la rezultatul sau la metoda lor sau la experienţa pe care am dobîndit-o rezolvîndu-le. Şi, natural, problemele de pe urma cărora profităm trebuie să fie în vreun fel înrudite cu problema noastră actuală. De aici şi întrebarea: *Cunoaştem vreo problemă înrudită?*

De obicei, nu este de loc greu să ne reamintim de probleme soluţionate înainte şi care sînt mai mult sau mai puţin înrudite cu cea prezentă. Dimpotrivă, s-ar putea să găsim prea multe probleme de acest fel şi să avem dificultăţi în alegerea uneia utile. Trebuie să căutăm probleme mai îndeaproape înrudite cu a noastră; *Să cercetăm necunoscuta* sau căutăm o problemă rezolvată anterior, care este legată de cea prezentă prin *Generalizare*, *Particularizare* sau *Analogie*.

Întrebarea de care ne ocupăm aici are scopul de a mobiliza cunoştinţele dobîndite înainte (*Progrese şi reuşită*, 1). O parte esenţială din cunoştinţele noastre de matematică este înmagazinată în memorie sub formă de teoreme demonstrate înainte. De aici întrebarea: *Cunoaştem vreo teoremă care ne-ar putea fi utilă?* Această întrebare se poate dovedi deosebit de potrivită în cazul unei „probleme de demonstrat“, adică atunci cînd trebuie să dovedim că o teoremă propusă este adevărată sau falsă.

Dacă nu puteţi să rezolvaţi problema, nu vă întristaţi prea mult, ci căutaţi să vă consolaţi obţinînd un succes mai uşor, *încercaţi să rezolvaţi întîi o problemă înrudită*; aceasta vă va da curaj să atacaţi din nou problema iniţială. Nu uitaţi că superioritatea omului constă în a ocoli un obstacol pe care nu-l poate înfrînge direct, în a inventa o problemă auxiliară adecvată, atunci cînd problema propriu-zisă este inaccesibilă.

Aţi putea să vă imaginaţi o problemă înrudită şi mai accesibilă? Trebuie acum *să inventaţi* o problemă înrudită, nu, doar *să vă reamintiţi* o astfel de problemă; sper că înainte aţi căutat răspunsul la întrebarea: *Cunoaştem vreo problemă înrudită?*

În paragraful din lista noastră, care începe cu titlul prezentului articol, întrebările celelalte au un scop comun: *Modificări ale problemei*. Există diverse mijloace de a atinge acest scop, cum sînt *Generalizarea*, *Particularizarea*, *Analogia* etc., care sînt diferite procedee de *Descompunere și recombinare.*

Definiția unui termen este o propoziție care îi stabilește înțelesul sau semnificația, cu ajutorul altor termeni despre care se presupune că sînt binecunoscuți.

1. *Termenii tehnici* ai matematicii sînt de două feluri. Unii sînt acceptați ca termeni primari sau fundamentali și nu se definesc. Alții se consideră termeni derivați și se definesc în forma cuvenită, adică înțelesul lor este prezentat prin termeni fundamentali și prin termeni derivați, pe care i-am definit anterior. Astfel, nu dăm definiția formală a unor noțiuni fundamentale cum sînt punctul, dreapta și planul[1]. În schimb, dăm definiții formale pentru noțiuni ca „bisectoarea unui unghi" sau „cerc" sau „parabolă".

Definiția acestui din urmă termen poate fi formulată astfel. Se numește *parabolă* locul geometric al punctelor echidistante de un punct fix și de o dreaptă fixă. Punctul fix este *focarul* parabolei, iar dreapta fixă este *directoarea* ei. Se subînțelege că toate elementele considerate se află într-un plan fix și că punctul fix (focarul) nu este situat pe dreapta fixă (directoarea).

Se presupune că cititorul nu cunoaște înțelesul termenilor definiți: parabolă, focarul parabolei, directoarea parabolei. Se presupune însă că este familiarizat cu semnificația tuturor celorlalți termeni, anume: punct, dreaptă, plan, distanța de la un punct la alt punct fix, loc geometric etc.

2. *Definițiile din dicționare* nu diferă prea mult ca aspect de definițiile matematice, dar sînt redactate într-un alt spirit.

Întocmitorul unui dicționar are de-a face cu sensul, cu înțelesul uzual al cuvintelor. Natural, el *acceptă* acest înțeles obișnuit și-l prezintă, cît poate de îngrijit, sub forma unei definiții.

Matematicianul nu are de-a face cu înțelesul obișnuit al termenilor săi tehnici sau, cel puțin, nu aceasta îl privește

[1] În această privință, concepțiile noastre sînt altele decît ale lui Euclid și ale urmașilor săi greci, care defineau punctul, dreapta și planul. „Definițiile" lor ar putea fi însă cu greu considerate ca definiții formale, ci sînt mai curînd un fel de ilustrări intuitive. Bineînțeles, ilustrările sînt permise și chiar foarte oportune din punct de vedere didactic.

în primul rînd. Îl interesează prea puțin ce pot însemna în vorbirea de toate zilele termeni tehnici ca „cerc" sau „parabolă" sau alții. Definiția matematică *creează* sensul, înțelesul unui termen matematic.

3. *Exemplu.* Să se construiască punctul de intersecție al unei drepte cu o parabolă, dată prin focarul și prin directoarea ei.

Felul cum abordăm o problemă trebuie să depindă de nivelul cunoștințelor noastre. Abordarea problemei de mai sus depinde mai ales de măsura în care sîntem familiarizați cu proprietățile parabolei. Dacă știm mult despre parabolă, încercăm să facem uz de cunoștințele noastre și să extragem de aici ceva util: *Cunoaștem vreo teoremă care ar putea fi utilă aici? Cunoaștem vreo problemă înrudită?* Dacă știm prea puțin despre parabolă, focar și directoare, acești termeni mai mult ne încurcă și dorim, în mod firesc, să scăpăm de ei. Cum putem scăpa de ei? Să urmărim dialogul dintre profesor și elev, care discută această problemă. Ei au ales deja *notații corespunzătoare*: P pentru oricare dintre punctele de intersecție necunoscute, F pentru focar, d pentru directoare, c pentru dreapta care taie parabola.

„Și, *care este necunoscuta*?"

„Punctul P".

„*Care sînt datele*?"

„Dreptele c și d și punctul F".

„*Care este condiția*?"

„P este un punct de intersecție al dreptei c și al parabolei de directoare d și de focar F".

„Așa este. Știu că ai avut prea puține ocazii de a studia parabola, dar cred că poți să spui ce este o parabolă".

„Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de focar și de directoare".

„Bine. Definiția este corectă. Este adevărat, dar trebuie s-o și folosim; *să revenim la definiții*. În virtutea definiției parabolei, ce putem spune despre punctul P"?

„P este pe parabolă. De aceea, P este egal depărtat de d și de F".

„Foarte bine! *Să facem un desen*".

Elevul marchează în fig. 10 segmentele PF și PQ, acesta din urmă fiind perpendiculara dusă din P pe d.

„Și, acum, *s-ar putea reformula problema*?"

...

„Ai putea da o altă enunțare condiției problemei, folosind segmentele introduse în desen?“

„P este un punct de pe dreapta c, avînd proprietatea că $PF = PQ$“.

„Bine. Dar te rog să-mi spui în cuvinte: Ce este PQ?“

„Distanța punctului P la dreapta d“.

„Foarte bine. Și acum, ai putea să formulezi altfel pro-

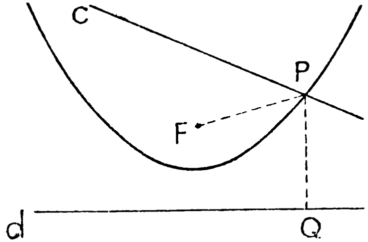

Fig. 10

blema? Dar te rog, să o enunți îngrijit, într-o frază închegată“.

„Să se construiască un punct P, pe o dreaptă dată c, egal depărtat de un punct dat F și o dreaptă dată d“.

„Observă cît am progresat de la enunțul inițial pînă la această nouă formulare. Enunțul inițial al problemei era plin de termeni tehnici puțin cunoscuți ca parabolă, focar, directoare; suna cam pompos și bombastic. Acum, n-a mai rămas nimic din acești termeni tehnici puțin cunoscuți; ai *simplificat* problema. Este foarte bine!“

4. *Eliminarea termenilor tehnici* este rezultatul muncii în exemplul precedent. Am pornit de la un enunț al problemei care conținea anumiți termeni tehnici (parabolă, focar, directoare) și am ajuns pînă la urmă la un nou enunț, care nu mai cuprinde aceste cuvinte.

Pentru a elimina un termen tehnic, trebuie să-i cunoaștem definiția; dar nu este suficient să-i cunoaștem definiția, trebuie s-o și folosim. În exemplul de mai sus nu a fost suficient să ne amintim de definiția parabolei. Pasul decisiv a constat în a introduce în figură segmentele PF și PQ a căror egalitate era asigurată în baza definiției parabolei. Acesta este procedeul tipic. Introducem elemente adecvate în înțelegerea problemei. Pe baza definiției stabilim relațiile dintre elementele pe care le introducem. Dacă aceste relații exprimă complet înțelesul, înseamnă că am utilizat definiția. O dată ce am utilizat definiția, am eliminat termenii tehnici.

Procedeul descris mai sus poate fi denumit *revenirea la definiții*.

Revenind la definiția unui termen tehnic, scăpăm de acest termen și introducem în locul său elemente noi și relații noi. Schimbarea care se produce astfel în concepția noastră asupra problemei poate fi importantă. Oricum ar fi, o reformulare o *Modificare a problemei* ne apropie de rezultat.

5. *Definiții și teoreme cunoscute.* Dacă cunoaștem numele „parabolă" și avem o idee vagă despre forma curbei, dar nu mai știm altceva despre ea, cunoștințele noastre sînt vădit insuficiente pentru a rezolva problema propusă ca exemplu sau orice altă problemă geometrică serioasă referitoare la parabolă. Ce fel de cunoștințe sînt necesare în acest scop?

Știința geometriei poate fi considerată ca fiind formată din axiome, definiții și teoreme. Parabola nu este menționată în axiome, care au de-a face numai cu noțiuni primare ca punct, dreaptă etc. Orice considerație geometrică privitoare la parabolă, soluția oricărei probleme legate de ea trebuie să folosească fie definiția ei, fie teoreme despre ea. Pentru a rezolva o astfel de problemă trebuie să cunoaștem cel puțin definiția, dar este preferabil să cunoaștem și anumite teoreme.

Firește, ceea ce am spus despre parabolă este valabil pentru orice noțiune derivată. Cînd ne apucăm de rezolvarea unei probleme care cuprinde o astfel de noțiune, nu putem ști încă la ce va fi mai bine să recurgem: la definiția noțiunii sau la vreo teoremă despre ea; este însă cert că trebuie să facem uz de una sau de cealaltă.

Există totuși cazuri în care nu avem de ales. Dacă nu cunoaștem decît definiția noțiunii, și nimic mai mult, sîntem nevoiți să folosim definiția. Dacă nu cunoaștem decît definiția, cel mai bun lucru pe care-l putem face este să revenim la definiție. Dacă însă cunoaștem mai multe teoreme despre respectiva noțiune și avem multă experiență în utilizarea ei, există o anumită probabilitate să ajungem la o teoremă utilă despre ea.

6. *Definiții diferite.* Sfera este definită, în mod obișnuit, ca loc geometric al punctelor egal depărtate de un punct dat. (Punctele sînt acum situate în spațiu, și nu cuprinse într-un plan.) Dar sfera mai poate fi definită ca suprafață descrisă de

un cerc care se rotește în jurul unui diametru. Se cunosc și alte definiții ale sferei și sînt posibile și multe altele.

Dacă avem de rezolvat o problemă legată de noțiuni derivate, cum ar fi cele de sferă sau de parabolă, și vrem să revenim la definiție, putem avea de ales între diferite definiții. În astfel de cazuri, alegerea definiției celei mai adecvate poate să fie de foarte mare utilitate.

Aflarea ariei suprafeței unei sfere era, pe vremea cînd a obținut-o Arhimede, o problemă importantă și dificilă. Arhimede putea să aleagă între definițiile citate mai sus ale sferei. El a preferat să conceapă sfera ca suprafață generată de un cerc care se rotește în jurul unui diametru fix. A înscris în cerc un poligon regulat cu număr par de laturi, în care diametrul fix unește două vîrfuri opuse. Poligonul regulat aproximează cercul și, rotindu-se împreună cu el, generează o suprafață convexă, compusă din două conuri cu vîrfurile în extremitățile diametrului fix între care se situează mai multe trunchiuri de con. Această suprafață compusă aproximează sfera și a fost folosită de Arhimede pentru a calcula aria suprafeței de sferă. Dacă vom concepe sfera ca loc al punctelor egal depărtate de centru, aceasta nu ne va sugera o aproximație atît de simplă a suprafeței ei.

7. Revenirea la definiții este importantă în inventarea unei argumentări, dar ea joacă un rol de seamă și în verificarea ei.

Să admitem că cineva prezintă o nouă soluție a problemei lui Arhimede, referitoare la aria suprafeței unei sfere. Dacă el nu are decît o idee vagă despre sferă, soluția lui nu va putea fi nicidecum bună. S-ar putea ca el să aibă o idee clară despre sferă, dar dacă nu va utiliza această idee în argumentarea sa, nu ne putem da seama dacă are sau nu vreo idee, și argumentarea sa nu este bună. De aceea, urmărind argumentarea, așteptăm momentul cînd el va spune ceva substanțial despre sferă, cînd va face uz de definiție sau de vreo teoremă despre ea. Dacă acest moment nu survine niciodată, soluția este proastă.

Bineînțeles, trebuie să verificăm în același mod nu numai argumentările altora, ci și pe ale noastre. *Am ținut seama de toate noțiunile esențiale care intervin în problemă?* Cum am utilizat această noțiune? I-am utilizat înțelesul, definiția? Am utilizat fapte esențiale, teoreme cunoscute despre ea?

Importanța acestei reveniri la definiții în analiza valabilității unei argumentări a fost pusă în evidență de Pascal, care a stabilit regula: *Substituer mentalement les définitions à la place des définis*, (să substituim în minte faptele definitorii pentru termenii definiți). J. Hadamard a subliniat și el importanța revenirii la definiții în construirea unui raționament matematic.

8. Revenirea la definiții este o importantă operație intelectuală. Dacă vrem să înțelegem de ce sînt atît de importante definițiile cuvintelor, trebuie să ne dăm seama mai întîi de însemnătatea cuvintelor. Cu greu am putea gîndi, dacă nu am folosi cuvinte sau semne sau simboluri de un anumit fel. Așadar, cuvintele și simbolurile au o anumită putere. Oamenii neinițiați își închipuie că cuvintele și simbolurile ar avea o putere magică. Noi putem înțelege această credință, dar nu trebuie s-o împărtășim. Trebuie să știm că puterea unui cuvînt nu rezidă în sunetul său, în *vocis flatus*, în „suflarea caldă" a vorbitorului, ci în ideile pe care ni le reamintește cuvîntul și, în ultimă instanță, în faptele ce stau la baza ideilor.

De aceea, este o tendință rațională să căutăm înțelesul cuvintelor și faptele care se ascund în dosul lor. Revenind la definiții, matematicianul caută să dezvăluie în spatele termenilor tehnici relațiile actuale dintre obiectele matematice, după cum fizicianul caută experimente bine definite îndărătul termenilor săi tehnici, iar omul obișnuit, care posedă o oarecare doză de bun simț, vrea să țină seama numai de fapte și să nu se lase prostit de vorbe goale.

Descartes, René (1596—1650), mare matematician și filozof francez, a vrut să dea o metodă universală pentru rezolvarea problemelor, dar lucrarea sa *Reguli pentru îndrumarea minții* a rămas neterminată. Fragmentele acestui tratat, descoperite în manuscrisele sale și tipărite postum, conțin materiale mai numeroase și mai interesante, referitoare la soluția problemei decît cele din lucrarea sa mai cunoscută *Discours de la methode*, deși, după toate probabilitățile, aceasta a fost scrisă după *Reguli*. Următoarele rînduri pe care le citām din Descartes par să ne dezvăluie originea *Regulilor*: „Ca tînăr, cînd auzeam vorbindu-se despre invenții ingenioase, încercam să le invent eu însumi, chiar fără să-l citesc pe autor. Procedînd astfel, mi-am dat seama treptat că făceam uz de anumite reguli".

Descompunerea și recombinarea sînt importante operații intelectuale.