E. KOLMAN

ISTORIA MATEMATICII ÎN ANTICHITATE

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ
București, 1963

E. KOLMAN, A. P. IUŞKEVICI

MATEMATICA PÎNĂ ÎN EPOCA RENAŞTERII

Traducere de
ANATOLIE HRISEV

Supracoperta şi coperta de
P. VULCĂNESCU

Э. КОЛЬМАН
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ДРЕВНОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1961

PREFAȚĂ

Obiectul lucrării de față îl constituie istoria matematicii pînă la începutul epocii Renașterii.

În problema periodizării istoriei matematicii, autorii se conduc după principiul ridicării acestei științe de pe o treaptă de abstractizare pe alta, mai înaltă, ținînd seama de varietatea condițiilor sociale, economice și geografice. Trăsăturile principale ale acestei periodizări sînt exprimate de A.N. Kolmogorov în articolul Matematica *tipărit în vol. 26 din ediția a 2-a a* Marii enciclopedii sovietice. *Conform acesteia, în prezenta lucrare sînt examinate: perioada apariției matematicii (în primele două capitole) și perioada matematicii elementare (în celelalte șapte capitole).*

Lucrarea constă din două cărți. Prima carte, scrisă de E. Kolman, este consacrată istoriei matematicii în antichitate. Aici se examinează apariția noțiunilor matematice și dezvoltarea matematicii la popoarele care au creat cele mai vechi civilizații (egipteni, babilonieni, fenicieni, evrei, maya, incași, azteci; despre matematica chinezilor și indienilor antici se vorbește în cartea a doua, care conține capitole consacrate în mod special acestor țări); mai departe, se examinează istoria matematicii în Grecia antică, în țările elenistice și în țările Imperiului Roman.

Cartea a doua, scrisă de A.P. Iușkevici, este consacrată istoriei matematicii din evul mediu — în China și India (începînd cu antichitatea), în țările Islamului (țările arabe, Asia Mică, Iran, Azerbaidjan) și în Europa. În expunerea istoriei matematicii în Orient sînt utilizate recentele cercetări care, nu numai că au dezvăluit multe fapte înainte necunoscute, dar au și condus la o nouă imagine a acestei epoci din istoria matematicii. Natural, aceste capitole au un volum mai mare decît s-a prevăzut mai înainte. Mici părți izolate din textul primei cărți îi aparțin lui A.P. Iușkevici, iar din a doua — lui E. Kolman.

Expunerea merge pînă la începutul secolului al XVI-lea. Deşi perioada matematicii elementare se încheie abia în secolul al XVI-lea, autorii au crezut de cuviinţă să se oprească la secolul precedent, deoarece în secolul al XVI-lea, în sînul noii algebre, începe pregătirea calculului cu infiniţii mici şi a geometriei analitice, şi activitatea unei serii de învăţaţi, în special a lui Viète, a contribuit direct la fundarea matematicii mărimilor variabile, a teoriei funcţiilor şi a transformărilor geometrice.

Autorii şi-au propus drept scop, în special, să lămurească dezvoltarea istorică a noţiunilor matematice fundamentale, a metodelor şi a algoritmilor, ţinînd seama pe cît posibil de tendinţele dezvoltării actuale a ştiinţei. Noile probleme ce stau în faţa ştiinţei duc la schimbarea perspectivei istorice asupra trecutului; de exemplu, dezvoltarea impetuoasă a matematicii calculatorii pune acum în faţa istoricilor problema elucidării mai complete a metodelor de calcul prin aproximaţie, începînd cu antichitatea.

Realizarea scopului amintit a fost urmărit şi în elucidarea creaţiei diferiţilor savanţi. Dezvoltarea matematicii poate fi studiată pe diferite planuri. Se poate pune accentul pe legăturile interne în creaţia unui singur om, se poate urmări istoria unei probleme lăsînd total sau parţial la o parte legăturile ei cu alte probleme, se poate vorbi despre istoria unei şcoli ştiinţifice ş.a. În cartea noastră, consacrată dezvoltării matematicii ca un tot unitar, căutînd să nu ne depărtăm de scopul indicat, am menţinut totodată în centrul atenţiei legăturile dintre matematică şi ştiinţele naturii, dintre matematică şi tehnică, dintre matematică şi filozofie, precum şi legăturile internaţionale, fără a pierde din vedere particularităţile naţionale ale dezvoltării ştiinţei într-o perioadă sau alta. Aceasta a determinat, fără voia noastră, o anumită stratificare pe mai multe planuri a expunerii în diferite părţi şi capitole ale lucrării; nu mai vorbim de particularităţile pur individuale, proprii autorilor. Cu toate acestea, principiul conducător a fost următorul: caracterul specific al matematicii ca ştiinţă constă într-o generalizare şi abstractizare deosebită a noţiunilor şi metodelor ei; matematica, dezvoltîndu-se sub influenţa activităţii practice a oamenilor şi a necesităţilor societăţii (uneori această influenţă manifestîndu-se nemijlocit, alteori numai în ultimă instanţă), are posibilitatea într-o măsură sau alta să dezvolte în mod independent abstracţiile o dată create.

Literatura referitoare la istoria matematicii este enormă, însă lucrări generalizatoare, scrise de pe poziţiile marxismului, deocamdată aproape că nu există. De aceea, autorii au trebuit să rezolve *multe probleme pentru prima dată. Se înțelege că nu considerăm răspunsurile și soluțiile noastre drept definitive.*

Cîteva observații asupra caracterului expunerii. Trimiterile bibliografice din text sînt indicate în paranteze drepte, bibliografia, ca atare, inclusiv edițiile surselor originale, este dată la sfîrșitul fiecărei cărți sub denumirea de „Bibliografie". Cuvintele puse în paranteze drepte din citate ne aparțin nouă sau traducătorilor textelor respective.

Autorii sînt recunoscători profesorului B.A. Rozenfeld, care a citit întregul manuscris și corecturile respective, dîndu-ne o serie de indicații foarte prețioase.

Autorii roagă pe cititori să trimită observațiile și sugestiile lor pe adresa: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Moscova
24 februarie, 1948.

E. KOLMAN
A. P. IUȘKEVICI

APARIȚIA MATEMATICII

Nașterea matematicii. Nașterea celor mai simple noțiuni matematice — a noțiunilor legate de forme spațiale și de relații cantitative — s-a petrecut la începuturile istoriei omenirii. Ea este indisolubil legată de timpul cînd, la începutul perioadei cuaternare, omul începe să-și procure mijloacele de existență cu ajutorul uneltelor de muncă.

Datorită muncii și totodată vorbirii articulate, creierul și organele de simț ale omului au atins o perfecțiune apreciabilă. Creierul a căpătat capacitatea de a crea abstracții, necesare pentru măsurare și numărare.

Studiul apariției și dezvoltării noțiunilor de întindere și de număr, atît de importante pentru gîndirea umană, are o însemnătate imensă nu numai pentru istoria matematicii, ci și pentru istoria cunoașterii în ansamblu, deoarece el confirmă teoria materialist-dialectică a cunoașterii, fapt asupra căruia a atras atenția V.I. Lenin, arătînd că „Continuarea operei lui Hegel și a lui Marx trebuie să constea în prelucrarea *dialectică* a istoriei gîndirii omenești, a științei și a tehnicii“ [8, p. 116].

În știința burgheză este răspîndită concepția după care chiar la animale ar exista cele mai simple reprezentări matematice. Astfel, cunoscutul istoric al matematicii M. Cantor a scris că „numărarea, în măsura în care prin aceasta se înțelege doar o reunire conștientă a unor anumite obiecte într-un ansamblu, nu constituie o particularitate a omului, căci rața de asemenea își numără bobocii săi“ [21, vol. I]. Unii se referă, de exemplu, la faptul că forma fagurilor de albine rezolvă în modul optim problema dotării spațiului cu prisme hexagonale de înălțime constantă și de volum maxim, cu cheltuială minimă de material. Or, pentru rezolvarea acestei probleme sînt necesare cunoștințe de matematici superioare, pe care chiar și adepții concepției criticate șovăie să le atribuie albinelor. După cum a remarcat însă Marx, „Păianjenul efectuează operații care seamănă cu cele ale țesătorului, iar albina, prin construcția celulelor ei de ceară, face de rușine pe mulți arhitecți din rîndurile oamenilor. Ceea ce distinge însă din capul locului pe cel mai prost arhitect de albina cea mai perfectă este faptul că el a construit celula în capul său, înainte de a o construi din ceară“ [1, p. 208].

Învățătura lui I.P. Pavlov [35, p. 490] a demonstrat că animalele nu sînt capabile să creeze abstracții, capacitatea ce se observă uneori la ele de a face distincție între noțiunile cantitative de „mult“ și „puțin“ și între formele spațiale de „dreaptă“ și „curbă“ fiind generată fie de instincte ereditare, fie de reflexe condiționate datorite exercițiilor îndelungate. Atribuind animalelor capacitatea de a forma reprezentări matematice și chiar noțiuni, știința burgheză urmărește prin aceasta să întărească concepția idealistă despre așa-numita origine pur spirituală a acestor noțiuni. Conform acestei concepții, ele ar fi date omului de la naștere, ar fi conținute în sufletul său și nu ar fi apărut din experiența materială.

O dată cu apariția celei mai simple activități de producție s-au născut necesitatea de evaluare, oricît de grosolană, a mărimii obiectelor și aceea de numărare a lor — fie ea oricît de imperfectă și mărginită. Și într-adevăr, monumentele arheologice dovedesc incontestabil că omul a elaborat noțiunile primare de aritmetică și de geometrie chiar în epoca de piatră.

Apariția timpurie a noțiunilor matematice ne-o dovedesc și limbile triburilor care au păstrat — datorită marii stabilități, proprie limbii — rămășițe ale terminologiei culturii primitive. Astfel, de exemplu, la tribul indian de vînători abiponi din Argentina, pe cale de dispariție, călătorii au descoperit la începutul secolului trecut numerele 1 — *initara* și 2 — *inioaka*. Numărul 3, ei îl exprimau ca *inioaka-initara*, numărul 4 — degetele struțului, 5 — degetele mîinii, 10 — degetele ambelor mîini, 20 — degetele mîinilor și ale picioarelor [36].

Călătorii (printre ei au fost mulți misionari), plecînd însă de la concepția lor preconcepută asupra „sălbaticilor“, ajungeau la concluzia că, din moment ce la aceste triburi nu există numerale mai mari de 2, ele nu știu să numere. Astfel, s-a răspîndit în literatura burgheză afirmația că germenii numărării ar fi apărut doar pe o treaptă relativ înaltă a culturii, afirmație tot atît de greșită ca și cealaltă opusă, care atribuie capacitatea de a număra animalelor. Sociologul francez Lévy-Bruhl [37, 38] și adepții lui atribuie omului primitiv o gîndire „prelogică“, „haotică“, „complexă" și mistică, incapabilă să efectueze operații matematice, chiar cele mai simple. Nu este greu de înțeles că asemenea raționamente justificau în mod obiectiv relațiile de colonizare față de „sălbatici".

Primele numerale. Explicația științifică, materialistă, a apariției matematicii pornește de la examinarea condițiilor social-economice în care au apărut și s-au dezvoltat noțiunile matematice, trecînd prin diferite stadii în diferite etape ale istoriei societății. „Pentru a număra e nevoie nu numai de obiecte care se pot număra, dar și de capacitatea de a face abstracție în considerarea acestor obiecte de toate celelalte însușiri ale lor în afară de număr, iar această capacitate este rezultatul unei îndelungate dezvoltări istorice bazate pe experiență" [2, p. 47].

Urmele materiale ale muncii ne permit să ne facem o părere nu numai asupra culturii materiale primitive, ci și asupra lumii spirituale a oamenilor primitivi.

Chiar cele mai simple unelte — ca toporul de piatră — nu au putut să apară fără gîndire. Gîndirea omului primitiv a fost săracă, mărginită și cuprindea un cerc îngust de obiecte și acțiuni; ea nu a fost abstractă și cu atît mai mult fantastică. În limbile triburilor care se află pe o treaptă inferioară a dezvoltării, vocabularul este mărginit la noțiuni ce reflectă aproape exclusiv activitatea lor de producție; el este extrem de bogat în denumiri concrete (de exemplu, a diferitelor specii de animale), însă nu conține termeni generali (de exemplu, „animal").

Chiar atunci cînd omul primitiv a reușit să acumuleze destul de multe informații științifice și tehnice, cunoștințele sale matematice au fost foarte mărginite în comparație cu acestea. Omul primitiv avea rareori cu adevărat nevoie să numere, și cu atît mai mult cantități mari. De aceea, numărarea și numerele se aflau în stare embrionară, ajungînd numai pînă la 2 sau pînă la 3; tot ce era mai mult decît atît, omul primitiv își reprezenta ca „mult". Această mărginire în noțiunile asupra numărului s-a manifestat în însăși apariția numeralelor. Inițial, omul a format doar numeralele „1" și „2" care avea sens de „mult". Numeralul „2" avea o origine calitativă: el reprezenta o pereche naturală concretă oarecare, de exemplu mîini, picioare, ochi, aripi, rîndul superior și inferior de dinți etc. Că numărul 2 ocupa odinioară un loc deosebit, putem constata după faptul că, într-o serie de limbi, alături de forma plural, s-a păstrat forma gramaticală binară (de exemplu, în limbile greacă, celtă, în limbile semitice, în slava veche); de exemplu, în limba rusă se spunea 2, 3, 4 *руки* (genitiv singular de la cuvîntul *рука* [mînă]), ceea ce reprezintă o rămășiță a formei binare, spre deosebire de 5, 6,... *рук*, unde substantivul este la forma plural (genitiv plural). În limba cehă se spune 4 *ruky*, însă 2 *ruče*. Originea inițială concretă a numeralului „2" în limbile semitice arată clar înrudirea cuvintelor „doi" și „dinți" (rîndul superior și inferior de dinți) — *şinaim*. În limba egipteană antică a existat, iar în limbile unor triburi australiene există încă, alături de forma binară, și forma ternară. Pe această treaptă de dezvoltare, numeralele au fost pur și simplu adjective, formate de la denumirile obiectelor care se întîlneau totdeauna în anumite cantități.

Cu cît activitatea productivă a omului primitiv se complica și se lărgea tot mai mult, cu atît mai des el era nevoit să numere și cu atît mai mari erau cantitățile de numărat. Astfel a apărut necesitatea de a lărgi din ce în ce mai mult domeniul numerelor. La început, în acest scop, a servit o simplă repetare a numeralelor inferioare existente. Pe această cale se exprima inițial numărul multiplu în general, ceea ce s-a păstrat și pînă astăzi în unele limbi. Astfel, și astăzi multe triburi australiene, de exemplu cele care locuiesc în golful Cooper, exprimă numeralele astfel [39, p. 26]: 1 — *guna*, 2 — *barkula*, 3 — *barkulaguna*, 4 — *barkula-barkula*. În unele limbi, forma plural se formează prin simpla repetare, de exemplu în limba hindi: *bhai* — frate, *bhai-bhai* — frați.

În astfel de cazuri de exprimare a numeralelor și în altele analoge, are loc o simplă repetare; nu există motive să vorbim despre „adunare", așa cum o fac unii cercetători burghezi ai istoriei matematicii, înclinați spre o „modernizare" neistorică — substituire a noțiunilor inițiale prin cele contemporane.

O necesitate mult mai mare în evaluări cantitative au impus-o formele de schimb, care au apărut mai tîrziu. Schimbul cu produse alimentare, cu obiecte de silex, iar apoi cu podoabe, cît timp a existat ginta matriarhală, cu forme embrionare de agricultură și de creștere a vitelor, a purtat mai întîi doar un caracter sporadic. Mai tîrziu, cînd matriarhatul a fost înlocuit prin patriarhat, în timpul păstoritului și al agriculturii, s-a stabilit un schimb regulat între grupuri, atît între ginți separate, cît și între triburi. Inițial schimbul nu comporta încă tocmeala. Numai treptat schimbul a început să se bazeze pe aprecierea valorii produselor schimbate.

În aceste etape, care în trăsături generale pot fi urmărite, chiar la popoarele actuale aflate pe o treaptă inferioară de dezvoltare socială, compararea obiectelor pentru schimb a fost pur intuitivă și se făcea prin simpla alăturare în șiruri a obiectelor, unul în fața celuilalt. Astfel, de exemplu, J. Morgan descrie un procedeu de schimb cu țipari și rădăcini între două triburi australiene din sud-estul continentului. Doi bărbați, de fiecare parte, aduceau țipari și rădăcini pe bucăți lungi de scoarță. Apoi ei le transportau pe cap dintr-o parte în cealaltă, pînă cînd întreaga cantitate era schimbată [40]. Rămășițe ale acestui procedeu s-au păstrat și la unele triburi africane, care se află pe o treaptă mult mai înaltă de civilizație decît australienii [41, p. 52].

Aceste exemple arată că inițial în timpul schimbului, cînd se comparau cantitățile schimbate, nu era numărată cantitatea acelor elemente, ci se stabilea, pe cale directă senzorială, o corespondență biunivocă între aceste elemente (de exemplu, între țipari și rădăcini sau între pîini și grupuri de cîte 5 bețe). Se înțelege că noțiunea de corespondență biunivocă ca atare nu era în acest caz sesizată. A fost necesară o dezvoltare îndelungată a matematicii și întreaga capacitate de abstractizare a omului pentru ca noțiunea de corespondență biunivocă între două mulțimi (din punct de vedere *istoric* — una dintre primele noțiuni) să fie pusă, în timpul nostru, la baza definiției logice a numărului cardinal.

Numai după o dezvoltare ulterioară, care a durat zeci de mii de ani, s-a fixat o valoare de schimb mai mult sau mai puțin stabilă, dar și în acest caz calitatea obiectelor schimbate, masa, dimensiunile, greutatea lor etc. nu jucau încă un rol hotărîtor. Astfel, de exemplu, în *Iliada* se indică următoarea relație: 1 trepied de aramă = 12 tauri = 3 sclave:

„Repede Ahile mai scoate și alte osebite cîștiguri.
Pentru al treilea joc, e vorba de-amarnica trîntă.
Dăruie, oricui va învinge un vas încercat de jeratic,
Mare trepied, socotit după preț ca de doisprezece tauri,
Pentru bărbatul învins, la mijloc aduce-o femeie
Meșteră mare la lucru de mînă, în preț ca de patru
Boi prețuită; și apoi sculîndu-se-aheilor zice:“
[42, p. 437]

Variația valorii în funcție de calitate a devenit cunoscută și mai tîrziu și a contribuit în mod direct la progresul ulterior al numărării și al ideii de număr. Dar dacă apariția și dezvoltarea numărării au lărgit posibilitățile de schimb, și cerințele schimbului au contribuit la dezvoltarea capacității de numărare a omului.

Dezvoltarea ulterioară a numerelor. Necesitatea de a număra cantități mari, și în special de a le ține minte, a făcut ca procedeul vechi de numărare cu ajutorul repetării numeralelor inferioare să devină inaplicabil. Numerelor superioare le-au fost date denumiri speciale. Apar astfel numeralele superioare. Acest proces de formare de noi numerale continua pînă la o anumită limită, iar apoi se oprea. Numărul maximal nu mai era 2 sau 3, ci 5, 6 sau 10, 12 și chiar 20. Cantitățile situate dincolo de numărul maximal erau percepute ca indefinitul „mult"; la nevoie numărarea acestor cantități se făcea cu ajutorul repetării noilor numerale inferioare. La unele popoare, acest proces s-a produs de două, uneori chiar de trei ori: la început numeralul cel mai mare a fost, de exemplu, 2, mai tîrziu 5 și, în sfîrșit, 10.

Rămîne de lămurit de unde se luau denumirile noilor numerale și de ce anume era determinată limita numărării.

După cum s-a mai spus, omul primitiv, individualiza obiectele, dădea o denumire, de exemplu, fiecărui cap de vită. De aceea și numărul era perceput inițial de către el ca o reprezentare directă a mulțimii, inseparabilă de alte reprezentări, în special spațiale, de exemplu „pumn", „braț", „grămadă" și altele. Aceasta ne-o arată limbile triburilor încă slab dezvoltate. Dar și într-o serie de limbi mai dezvoltate, cum sînt chineza, japoneza, persana și altele, există cuvinte speciale, folosite la numărarea obiectelor în funcție de clasa căreia îi aparțin aceste obiecte. Astfel, în limba chineză între denumirea obiectului și numeral se introduce *tou* — cap pentru numărarea vitelor și ca terminație a denumirii obiectelor rotunde; *bi* — mîner pentru instrumente; *jen* — rădăcină pentru sfori, ațe, brîuri, curele; *lin* — pentru alice, picături, obiecte mărunte etc. [43]. În limba rusă, de asemenea s-au păstrat cuvinte de numărare în alocuțiuni ca шесть душ детей (6 suflete de copii), пять штук яблок (5 bucăți de mere), четыре куска сахару (4 bucăți de zahăr) ș.a.

Aici se vede clar că, în timpul formării ei, noțiunea de număr, care a devenit apoi baza aritmeticii, nu numai că avea un caracter concret, dar nu putea fi separată de noțiunea de măsură care a stat mai tîrziu la baza geometriei. În procesul dezvoltării ulterioare a matematicii, aceste noțiuni se diferențiază tot mai mult și în același timp, de fiecare dată în noua etapă superioară, se produce o unificare a lor.

Caracterul concret al primelor reprezentări de mulțime numerică este confirmat și de datele psihologiei copilului, deoarece în procesul dezvoltării psihice a copilului, la fel ca și în procesul dezvoltării istorice a psihicului, se produce o trecere de la un psihic mai puțin dezvoltat la unul mai mult dezvoltat. Din observațiile asupra copiilor în primele luni din cel de-al doilea an de viață, rezultă că o mulțime numerică este percepută de ei în ansamblu ca un întreg, ca o reuniune constantă, dată de natură sau de practică.

Caracterul concret al primelor reprezentări de mulțime numerică arată clar că disputele asupra faptului dacă numărul era perceput la început ca număr ordinal (de exemplu, „al patrulea") sau ca număr cardinal (de exemplu, „patru") sînt scolastice. Se știe că elementele primare ale gîndirii pot fi cu același drept considerate atît ca judecăți, cît și ca noțiuni. Elementele primare ale limbii au fost în mod egal și substantive, și adjective, și verbe. Analog, și reprezentările numerice primare au fost atît ordinale, cît și cardinale.

Perceperea concretă a cantității numerice face parte încă din preistoria numărării. Istoria propriu-zisă a numărării începe numai atunci cînd numărarea este însoțită de o manipulare materială a separării, mutării, adăugării ș.a.m.d., efectuată în mod concret cu obiectele înseși. Astfel, se știe despre unele triburi din Africa de sud că cel care numără obiectele atinge fiecare dintre ele pe rînd cu degetele, începînd cu degetul mic al mîinii stîngi. Analog procedează și alte triburi în alte părți ale lumii.

N.N. Mikluho-Maklai [44, p. 280] a descris un procedeu de numărare la locuitorii din Noua Guinee:

„Papuașul îndoaie degetele mîinii unul după altul, emițînd un anumit sunet, de exemplu, *be, be, be*... Ajungînd la 5, el spune *ibon-be* (mînă). Apoi el îndoaie degetele celeilalte mîini, repetînd din nou *be, be*... pînă cînd ajunge la *ibon-ali* (două mîini). Apoi el merge mai departe murmurînd *be, be*... pînă cînd ajunge la *samba-be* și *samba-ali* (un picior, două picioare). Dacă trebuie să numere mai departe, papuașul folosește mîinile și picioarele unui alt ins".

Fiecare numărare are astfel, la bază, o numărare mecanică, efectuată cu ajutorul extremităților degetelor și al articulațiilor. Numărarea cu mîna a jucat în dezvoltarea numărării un rol tot atît de important ca și descoperirea focului în dezvoltarea generală a omului primitiv.

Degetele mîinilor și picioarelor, care au servit inițial doar pentru a indica și a stabili o corespondență biunivocă în timpul schimbului unui obiect pe un alt obiect, s-au transformat apoi în semne pentru a ține minte cantitatea pusă deoparte — în „înlocuitorii" obiectelor numărate. Astfel a fost deschisă calea pentru formarea și a altor asemenea „înlocuitori". Cu timpul au început să se folosească pietricele, scoici, care erau puse în procesul numărării deoparte în grămezi, sau crestăturile după numărul animalelor omorîte, sau nodurile pe o sfoară etc. La triburile de vînători, acest procedeu de numărare a lăsat urme pînă în zilele noastre. El s-a păstrat și sub forma de jetoane, fise, boabe (mătănii), precum și de răboaje; nodul la batistă „pentru a ține minte" este și el moștenire a acestei epoci.

Numărarea pe degete, crearea unor „înlocuitori" senzorial-intuitivi ai noțiunilor, a fost un prim exemplu, din punct de vedere istoric, de modelare a unor procese cu ajutorul altora, inclusiv modelarea operațiilor logice. Această idee — existentă, desigur, doar în germene în procedeul numărării pe degete și în răboaje — a devenit mai tîrziu o metodă fertilă, care a contribuit la dezvoltarea științelor naturii. În prezent, o dată cu crearea mașinilor electronice de calcul cu acțiune rapidă, care controlează și dirijează pe cale automată, aceasta a devenit una dintre ideile fundamentale ale ciberneticii, aducînd o remarcabilă raționalizare a muncii intelectuale, o adevărată revoluție în tehnică.

Se știe că o serie de limbi utilizează pentru denumirea unor numerale termeni asemănători cu aceia ai mîinii, piciorului ș.a.: de exemplu, în limba rusă пять și пясть (pumn în limba slavă veche); *lima* în limba malaieză înseamnă în același timp și mînă și cinci etc. Se știe, de asemenea, că cele mai răspîndite sisteme de numerație sînt sistemele cu bazele 10 și 5. Toate acestea au contribuit la formarea unei concepții greșite, larg răspîndită, care identifică apariția numărării pe degete cu apariția noțiunilor cantitative în general. După cum am văzut, însă, au fost necesare zeci de mii de ani pentru ca omul să se ridice de la primele noțiuni referitoare la cantitate pînă la numărarea pe degete.

O altă explicație greșită a originii numeralelor o propune teoria subiectiv-idealistă a lui Lippert [45]. Acesta afirmă că numeralele „unu", „doi", „trei" provin de la pronumele personale „eu", „tu", „el"; explicația ar fi că omul primitiv și-ar fi concentrat toate gîndurile sale asupra lui însuși, opunîndu-se pe sine ca „unitate" noțiunii indefinite de mulțime ș.a.m.d. Lipsa de fundament a acestei concepții, care atribuie omului primitiv o înclinație — improprie lui — de autoobservare, se vede și din faptul că în nici una dintre cele o mie de limbi cunoscute nouă nu se poate urmări pretinsa înrudire dintre numerale și pronume.

Tot greșită este și teoria „biologică" a lui Wundt [46], care afirmă că sistemele de numerație cu bazele 2, 4 sau 8 ar fi apărut ca rezultat al înmulțirii, atunci cînd tribul, răspîndindu-se pe o regiune mai întinsă, se împărțea în mod firesc în două părți ce se deosebeau între ele prin totemul lor. Or, necesitatea numărării exista deja de mult în sînul tribului; ea era determinată de posibilitatea de a face provizii și de priceperea de a păstra produse, de existența producției pentru desfacere, a schimbului primitiv și a unei cantități suficiente de produse de același tip, și nicidecum nu era legată doar de împărțirea tribului, care a apărut — după cum se știe — mult mai tîrziu.

În sfîrșit, Cajori „explică" deosebirile în sistemele de numerație la diferite popoare, pornind de la „teoria" pseudoștiințifică a raselor „superioare" și „inferioare". El declară că „sistemele cu baza 5 și 20 se întîlnesc cel mai frecvent la rasele inferioare, în timp ce popoarele aflate pe o treaptă mai înaltă, de obicei, evitau primul dintre aceste sisteme ca fiind prea sărac, iar al doilea ca fiind prea greoi" [11]. După cum vom arăta mai departe, această afirmație contrazice faptele istorice.

O dată cu dezvoltarea condițiilor social-economice a crescut tot mai mult și capacitatea de gîndire abstractă a omului. Totodată, se pierdea treptat caracterul concret inițial al numeralelor. Cuvîntul care însemna pînă atunci atît obiectul concret, cît și numeralul păstra acum numai cea de-a doua semnificație. În același timp, diversitatea extremă în denumirile numeralelor, care a existat în economia primitivă, se ștergea treptat. Ca rezultat, denumirile numeralelor au devenit univoce (cu excepția fenomenului amintit mai sus al cuvintelor de numărare și a genurilor numeralelor după clase, nu se observă sinonime printre numerale); în limbile popoarelor etnic înrudite numeralele constituie, de regulă, elementul cel mai net exprimat, comun acestor limbi (de exemplu, în limbile indo-europene) [46, p. 82; 49, p. 409].

Astfel s-a stabilit, deși foarte lent, în limitele tribului sau ale unei reuniuni de triburi, o anumită ordine printre numerale legate între ele, datorită existenței în acest sistem a unui număr maximal. Este vorba de numărul care a reprezentat inițial limita numărării în general. El însuși, sau numărul ce urma, neavînd o denumire, sau fiind denumit „pulbere", „stele", era inițial echivalent cu noțiunea de „mult". Această unitate superioară s-a transformat apoi în baza sistemului de numerație. Numerele ce depășeau această bază se exprimau cu ajutorul acesteia și cu ajutorul numeralelor inferioare. Aceasta se putea realiza în mai multe feluri. În unele cazuri, de exemplu în limba franceză, pentru 17, 18, 19 se numea mai întîi baza, iar după ea numeralul inferior corespunzător (18 — *dix-huit*, adică „zece-opt"). În alte cazuri, la început se numeau numeralele inferioare, iar apoi baza, așa cum aceasta se întîmplă și în limba rusă: *восемнадцать* — din „opt spre zece"[1]. Cele două cazuri citate diferă nu numai prin ordinea succesiunii numeralelor (cea de-a doua ordine, cînd unitatea superioară precede pe cea inferioară este mai răspîndită), ci și prin aceea că în primul caz numeralele se pun pur și simplu unul lîngă altul, în timp ce în al doilea caz ele sînt legate prin conjuncția „spre" (sau, de exemplu, în limba germană prin *und* — „și"). În toate aceste cazuri, cu ajutorul cuvintelor se exprimau aici operații pe care omul le efectua pe degetele uneia sau ambelor mîini, uneori și ale picioarelor.

De obicei, în timpul numărării pe degete, fiecare deget reprezenta o unitate și numărarea se făcea mai întîi pe degetele mîinii stîngi cu ajutorul degetelor mîinii drepte, și numai după ce degetele mîinii stîngi erau epuizate, numărarea trecea la mîna dreaptă, unde ea începea cu degetul mare. Astfel, de exemplu, cînd un zuluș vrea să exprime cifra 6, el spune *tatizitupa*, ceea ce înseamnă „a lua degetul mare al mîinii". Nu este greu să ghicim că cel în cauză a numărat toate degetele de la mîna stîngă și a început acum cu degetul mare al mîinii drepte. Pentru a comunica faptul că stăpînul său a cumpărat șapte bivoli, el spune *u combile*, adică „el a arătat". Aceasta înseamnă că în timpul numărării stăpînul a ajuns pînă la degetul arătător [49, p. 184].

Deși procedeul de numărare cu mîna — indicat aici — era predominant, existau totuși popoare la care drept unități ale operației de numărare au fost (și chiar s-au păstrat parțial pînă astăzi) utilizate articulațiile degetului. Astfel, de exemplu, coroadoșii din Brazilia numără din trei în trei după numărul articulațiilor de pe fiecare deget al mîinii stîngi (fără degetul mare), adică pînă la 12. Apoi fiecare deget al mîinii drepte (inclusiv degetul mare) înseamnă 12, datorită cărui fapt numărarea merge pînă la 60.

În cazurile în care numărarea se făcea pe degetele întregi — și acest procedeu de numărare a fost cel mai răspîndit — limita temporară a numărării a fost, firește, numărul degetelor fie de

---

[1] Analog ca în limba romînă — *N.T.*

la o singură mînă (uneori fără degetul mare), fie de la ambele mîini, iar uneori de la mîini și de la picioare luate împreună. În modul acesta, ca bază a numerației deveneau cel mai frecvent numerele 5, 10 sau 20 și mult mai rar 4 sau 9. Uneori, după terminarea numărării pe degetele mîinii stîngi, se adăuga și mîna întreagă; astfel a putut să apară sistemul cu baza 6. Nu este exclusă și o altă posibilitate: s-ar putea ca acest sistem să provină din încrucișarea a două sisteme mai vechi cu bazele 2 și 3, la fel cum sistemul cu baza 12 putea fi obținut prin încrucișarea sistemelor cu bazele 3 și 4.

Dacă după terminarea numărării pe degetele ambelor mîini se includea și întreaga mînă (dreaptă), atunci apăreau sisteme cu baza 11, de exemplu, la locuitorii din Noua Zeelandă, în limba cărora există cuvinte pentru 11, 11^2 și 11^3 și unde 12 se exprimă ca „11 cu 1". 13 ca „11 cu 2". 22 ca „de două ori 11" etc. Însă sistemele cu baza 9 și 11 se întîlnesc rar.

Se înțelege că sistemele de numerație cu bază mai mare au apărut mai tîrziu decît cele cu bază mai mică. Datorită dezvoltării legăturilor între diferite triburi, datorită dezvoltării schimbului dintre ele, denumirile numeralelor și sistemele de numerație s-au unificat. S-a constatat că sistemele cu bază mai mică (cu baza 2 sau 5) sînt mai puțin utile decît sistemul zecimal, deoarece în ele chiar numere relativ mici se exprimă destul de greoi. Pe de altă parte, și sistemele cu bază mare, ca sistemul cu baza 20, n-au găsit o justificare în practică, deoarece ele necesitau memorarea unui mare număr de cuvinte — denumiri ale numerelor inferioare. În modul acesta, în procesul selecției naturale, în marea majoritate a cazurilor a triumfat sistemul de numerație cu baza de mărime „mijlocie" — sistemul de numerație zecimal. Aceasta înseamnă că răspîndirea mai mare a acestui sistem nu constituie de loc o mărturie că popoarele care îl folosesc aparțin rasei „superioare". Dimpotrivă, în limbile acestor popoare există dovezi că pe vremuri ele au folosit sisteme de numerație proprii doar așa-numitelor rase „inferioare".

Observăm, de asemenea, că deși sistemul zecimal este mai comod decît sistemul cu baza 5 sau 20, el este inferior sistemului cu baza 12. Din punct de vedere pur matematic acesta din urmă este mai avantajos, deoarece baza sa (12) se împarte prin 3 și 4 și datorită acestui fapt este ușor de făcut operații cu împărțirile frecvent întîlnite ale cercului și timpului. Sistemul cu baza 12 se întîlnește la unele triburi din Africa centrală; o rămășiță a lui este numărarea în duzini, în duzini de duzini — *grosse*, duzini de grosse — *masse*, pentru lenjerie, veselă, mărfuri de papetărie. În prezent, sistemul binar, complet incomod pentru viața de toate zilele, este folosit cu avantaje enorme în construcția mașinilor electronice de calcul cu acțiune rapidă. Deși scrierea unui număr în sistemul binar necesita în medie de trei ori mai multe semne (0 și 1) decît scrierea aceluiași număr cu ajutorul celor zece semne ale sistemului zecimal, acest neajuns este compensat de faptul că mașina nu scrie semnele. În mașină, cifrei 0 îi corespunde absența impulsului electric, iar cifrei 1 — prezența lui, și astfel numărul impulsurilor care se formează în tubul electronic se ridică la sute de mii pe secundă.

Prin reunirea sistemelor de numerație apăreau uneori sisteme mixte cu două baze, ca, de pildă, la unele triburi de indieni din America de nord — sistemul cu baza 5 și 10. Urmele trecerii treptate de la sistemele de numeratie cu bază mică la sistemele cu bază mai mare sînt vizibile și în limbile popoarelor civilizate actuale. Astfel, în limba rusă, o mărturie a faptului că numeralele „unu", „doi" au o origine mai veche este faptul că, spre deosebire de celelalte numerale care nu se schimbă după gen, primele au genul masculin, feminin și neutru (în limba latină aceasta se referă și la numeralul „trei"), adică sînt privite ca adjective.

Faptul că în limba rusă numeralul „40" (*сорок*) nu se formează prin analogie cu numeralele „30", „50" etc., ci se exprimă printr-un cuvînt aparte, arată că înainte în Rusia a fost răspîndită numărarea din patruzeci în patruzeci și o reminiscență a acestui obicei s-a păstrat în numeralele actuale. În adevăr, se știe că sobolii (samurii) se vindeau cîte patruzeci, și nenumăratele alocuțiuni ce s-au păstrat arată că *сорок* („40"), fiind baza numerației, era folosit totodată și ca „număr maximal" în sensul unei mulțimi nedefinite [50, p. 28]. În legătură cu faptul că la alte popoare slave nu există această particularitate legată de numeralul 40, precum și din cauză că ea se întîlnește în limbile unor popoare în contact cu rușii, se presupune că sistemul de numerație cu baza 40 a pătruns în Rusia dinafară. Alocuțiunile păstrate, care atribuie numărului 7 semnificația unei mulțimi nedefinite, de exemplu, *семеро одного не ждут* (șapte nu-l așteaptă pe unul), dovedesc (dacă ele nu sînt împrumutate) că și numărul 7 era privit cîndva de către vechii slavi ca situat dincolo de limitele sistemului de numerație, probabil cu baza 6.

Uneori, dar pe trepte mai înalte de dezvoltare, în sistemul de numerație, pentru formarea numeralelor ce depășesc baza, se folosea nu adăugarea, ci scăderea numerelor infertoare. În numerația rusă există și această particularitate, deoarece numeralele 21, 30,..., 80 se formează prin adunare, în timp ce 90 cu ajutorul scăderii. Nu se spune *девятьдесят*, ci *девяносто*, adică „nouă (al nouălea zece) pînă la sută". În multe limbi uralo-altaice, de exemplu, „nouă" se înțelegea ca „unu din zece"; în limba latină 19 este *unadeviginti*, adică „unu din douăzeci". La fel în sanscrită și greaca veche. Dezvoltarea mai departe a sistemului de numerație este legată de reprezentarea lui cu ajutorul semnelor, în particularitățile scrisului.

Studiul răspîndirii geografice a diferitelor sisteme de numerație ne permite să descoperim unele legități. Dacă ținem seama de orînduirile social-economice ce domneau într-o regiune sau alta, atunci ipoteza că sistemele cu baza 5 au apărut în perioada matriarhatului, iar cele mai complexe — cu baza 10 și 20 — în perioada patriarhatului, devine mult mai probabilă. Materialele arheologice, etnografice și lingvistice nu ne dau însă, deocamdată, baze suficient de sigure pentru a lega diferite etape de dezvoltare a sistemelor de numerale, și a noțiunii de număr în general, de perioade mai scurte de dezvoltare a societății.

Exprimarea grafică a numerelor. Încă pe treptele relativ timpurii de dezvoltare a culturii primitive, alături de vorbirea sonoră, omul a folosit nu numai gesturile ce o însoțeau și care exprimau în primul rînd emoțiile sale, ci a existat și un limbaj sui-generis al semnalelor. Prin semne pe nisip sau prin însemnări pe trunchiurile și ramurile copacilor, vînătorul care urmărea vînatul arăta semenilor săi direcția. Sunetul tobei, fumul focului și altele transmiteau informații uneori pe distanțe foarte mari. Un *tomahawk*[1] ori o sfoară cu noduri pe care o aducea un vestitor dintr-un grup tribal în altul anunța războiul, vînătoarea sau altele. În toate aceste cazuri, de altfel ca și în vorbirea orală, unde între expresia sonoră de „piatră" și obiectul piatră nu există nici o asemănare, ideea se transmitea cu ajutorul semnelor convenționale, al simbolurilor.

Obișnuința cu un astfel de „limbaj al simbolurilor" a provocat destul de timpuriu apariția diferitelor procedee de înregistrare grafică a numerelor. Fără aceasta nu se mai putea face față cerințelor. O dată cu dezvoltarea economiei, cu posibilitatea și necesitatea de a face rezerve, precum și cu dezvoltarea schimbului,

---

[1] Securea de război a pieilor roșii. — *N.R.*

trebuiau nu numai numărate, ci şi ţinute minte cantităţile numărate. Iniţial, cel mai bun procedeu pentru a ţine minte numerele era număratul pe degete.

Să ne imaginăm omul primitiv. Iată, el a numărat pînă la 6, adică pînă la degetul mare al mîinii drepte. Pentru a memora acest număr, era suficient să ţină minte acest deget şi atunci el putea restabili totdeauna, repetînd numărarea pînă la acest deget, numărul numărat. Însă degetele nu erau singurii „înlocuitori" ai obiectelor numărate. Crestături pe un băţ sau os, o legătură de nuiele, o grămadă de pietricele sau scoici puteau reprezenta numărul fiarelor ucise.

În 1937, în Cehoslovacia (satul Vestoniče din Moravia), săpăturile arheologice au scos la iveală un os radius al unui lup tînăr, provenind din epoca paleolitică, avînd o lungime de 18 cm pe care sînt 55 de crestături adînci, paralele. Primele 25 dintre ele sînt grupate cîte 5, după care şirul se termină cu o crestătură de două ori mai lungă decît celelalte. Apoi, iarăşi printr-o crestătură lungă începe un al doilea şir de 30 de crestături. Acest document matematic — cele mai vechi înregistrări numerice ale omului de peşteră — este un prototip al răbojului, al beţişoarelor de numărat care sînt larg folosite pînă astăzi de către triburile de vînători din extremul nord al Siberiei şi Americii. Se înţelege că de la gruparea crestăturilor cîte 5 nu era greu de trecut la introducerea unui semn special pentru 5, care, iniţial, a şi servit ca reprezentare acestor trăsături. În alte cazuri, de exemplu, la incaşi (vechi popor cult din Peru), locul răbojului îl deţineau nişte şnururi colorate cu noduri (*quipos*). Din acestea se alcătuiau în statul incaşilor colecţii întregi, corespunzătoare registrelor noastre de contabilitate. Un şnur roşu servea pentru numărarea ostaşilor, alb — pentru număratul argintului, verde — pentru număratul pîinii. Nodurile aveau semnificaţia 1, 10, 100 şi 1 000 după gradul de complicare a lor.

Nu totdeauna este posibil să indicăm în mod sigur originea fiecărui semn numeric în parte. La fel ca şi în problema originii denumirilor diferitelor numerale într-o limbă sau alta, ne aflăm aici în domeniul ipotezelor. Astfel, de exemplu, se afirmă că cifra patru din limba arabă *arba* a provenit de la cuvîntul ce exprima noţiunea de „patruped". Ca dovadă a acestui fapt, se citează înrudirea acestui cuvînt cu verbul *raba' a* care înseamnă „a paşte" şi „a merge la trap". Puterea de convingere a acestor ipoteze depinde de certitudinea tezelor unei direcții sau alta a lingvisticii comparate, care se află la baza lor: de aceea este destul de îndoielnică.

Nu toate sînt însă atît de incerte. Putem, de exemplu, afirma cu certitudine că cifrele noastre 1, 2 și 3, independent de căile istorice prin care ele au ajuns la noi (despre aceasta va fi vorba mai tîrziu), au apărut din scrierea prescurtată a una, două și trei trăsături. Cifrele romane pentru aceleași numere reproduc trăsăturile fără vreo schimbare. Cunoaștem exemple ce arată o altă origine a cifrelor: probabil că cifra romană „cinci" a apărut prin simplificarea hieroglifei ce reprezenta mîna. În sfîrșit, un exemplu de-al treilea fel de origine a cifrelor ni-l dă cifra romană „100" (*C*), care reprezintă inițiala numeralului latin *centum*. Cele trei moduri de proveniență a numeralelor — din însemnări, din hieroglife și din litere (care, după cum se știe, ele însele au apărut din hieroglife) — se întîlnesc la diferite popoare din diferite etape istorice. Uneori, așa cum arată exemplul cu cifre romane, în sistemul definitiv stabilit de notație a numerelor sînt reprezentate toate cele trei moduri citate mai sus.

Fig. 1. Oase cu crestături

O hieroglifă care înseamnă un număr nu diferă prin nimic esențial de o hieroglifă care înseamnă orice altă noțiune. Semnele numerice au apărut în majoritatea cazurilor împreună cu o altă scriere hieroglifică, mai exact pe baza ei. Aceasta înseamnă că ele sînt de o origine mai tîrzie decît acele cifre ce au provenit din însemnări. Aproape la toate popoarele (în afară de chinezi), scrierea hieroglifică inițială, în care fiecare semn reprezenta o noțiune, a fost înlocuită în limbaj printr-o scriere pe sunete: silabică, ca în limba japoneză (folosită aici împreună cu hieroglife), sau pe litere, ca în limba rusă. Unii cercetători, de exemplu M. Cantor, se miră că scrierea cifrelor a rămas hieroglifică — fiecare cifră înseamnă o noțiune întreagă. Aceasta se explică însă foarte simplu prin faptul că hieroglifa — semn al numărului — servește nu numai pentru notația lui, ci este legată și de operații asupra numerelor. Pentru operațiile matematice însă o hieroglifă scurtă, ușor vizibilă, este incomparabil mai folositoare decît cuvîntul scris cu litere. Din aceeași cauză, în matematică, în dezvoltarea ei ulterioară, se observă chiar — după cum vom mai vedea — o tendință direct opusă dezvoltării celeilalte scrieri: dacă mai înainte operațiile matematice se scriau prin cuvinte, mai tîrziu ele au început să fie notate prin simboluri speciale, în genul semnului de egalitate =, a semnului + pentru adunare etc.

Apariția operațiilor matematice. Posibilitatea de a nota și de a ține minte numerele — fie cu ajutorul degetelor, al pietricelelor sau, cu atît mai mult, cu cel al scrierii — a contribuit extrem de mult la dezvoltarea gîndirii matematice în general și a operațiilor matematice, în special. Nu este întîmplător faptul că cuvîntul latin *calculare* (a socoti), de unde își trage originea cuvîntul nostru „a calcula", provine de la *calculus* — pietricică, de la care mai provin: denumirea latină a varului (*calcum*) și denumirea elementului chimic calciu. Dar chiar însuși cuvîntul „număr", după cum afirmă lingvistica comparată, este înrudit cu cuvîntul latin *ciselare* (a cizela, a grava) și are cu acesta o origine comună de la „a face crestături, însemnări".

Însăși operația de numărare reprezenta multă vreme o operație grea și istovitoare. Pînă astăzi unele popoare, aflate și în prezent pe treptele inferioare de dezvoltare, fac numărarea numerelor mari astfel: un om marchează pe degetele ambelor mîini unitățile, al doilea — zecile, al treilea — sutele.

Timp de milenii, singurele operații matematice au fost adunarea și scăderea (cînd descăzutul este mai mare decît scăzătorul) a unor numere mici. Treptat, a apărut și înmulțirea, la început ca dublare, ceea ce este clar indicat de matematica egipteană în care înmulțirea se reducea la o combinație între dublare și adunare.

Înmulțirea, ca adunare repetată, dădea un rezultat echivalent cu cel al „rotației“ multiple, cu cel al produsului dintre lungime și lățime. Nu este întîmplător faptul că la sumerieni drept măsură a ariei servea, alături de o bandă pătrată, și o bandă dreptunghiulară avînd un cot în lungime și un țol în înălțime. În modul acesta, apariția înmulțirii a fost condiționată de nașterea agriculturii și era inițial legată de reprezentările geometrice. Aceste reprezentări geometrice își puneau amprenta și pe noțiuni pur aritmetice, de exemplu, „numerele pătratice“, „numerele triunghiulare“ și altele. Analog s-au petrecut lucrurile și la egipteni și babilonieni: ultimii denumeau, de exemplu, produsul *a-šà*, adică arie. Autorii operelor matematice în limba arabă din evul mediu numesc, de asemenea, produsul „suprafață“ (*sath*), avînd în vedere un dreptunghi.

Mult mai tîrziu decît înmulțirea a apărut împărțirea. Desigur noțiunea de 1/2 a apărut relativ timpuriu. Ea nu a fost însă legată de numărul 2. Aceasta se poate verifica ușor: aproape în toate limbile, la fel ca și în limba rusă[1], cuvintele „jumătate“ și „doi“ nu au rădăcină comună. Faptul că împărțirea este o operație inversă înmulțirii s-a stabilit numai ca rezultat al unei îndelungate dezvoltări a gîndirii matematice.

O dată cu operația de împărțire au apărut și sistemele de numerație care o foloseau alături de înmulțire și adunare. Astfel se face numărarea în limba daneză, unde pînă la 49 se folosește sistemul zecimal, iar mai departe sistemul cu baza 20, un număr impar de zece exprimîndu-se ca jumătate din numărul par vecin de 20. De exemplu, 20—*tyve*, 60—*trensindstyve* (adică „de trei ori 20“), 50—*halvtrensindstyve* (adică „jumătate din al treilea 20“). Ceva analog există și în limba rusă, cînd se spune *полтора* (adică *пол втора*, „jumătatea numărului doi“). Se spunea de asemenea *полтретья* $= 2\frac{1}{2}$, *полчертверта* $= 3\frac{1}{2}$, *полпята* $= 4\frac{1}{2}$ etc. Astăzi aceasta s-a păstrat în denumirile timpului. De exemplu în expresiile *пол второго* (ora unu și 30 min), *пол третего* (ora două și 30 min) etc.

Din această perioadă mai tîrzie face parte și apariția noțiunii de fracție $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc. După cum se vede din cuvintele care exprimă aceste noțiuni, ultimele, spre deosebire de $\frac{1}{2}$, erau deja le-

[1] Și în limba romînă. — *N.T.*

gate de noțiunile de numere întregi corespunzătoare 3 și 4. Apariția operației de împărțire și a noțiunii de fracție este strîns legată de procesul de măsurare, care s-a dezvoltat din necesitățile materiale ale societății deja apreciabil dezvoltată.

Apariția noțiunilor geometrice. Gînditorii idealiști afirmă, de obicei, că reprezentările și noțiunile geometrice, fiind mai concrete decît noțiunile pur cantitative, ar fi apărut datorită faptului că noțiunea abstractă de număr, dată omului apriori (înaintea oricărei experiențe materiale), a început ulterior să fie aplicată pentru măsurarea mărimii. În realitate, la fel ca și noțiunea de număr și o dată cu ea, cele mai simple reprezentări geometrice au apărut din practica materială. Condițiile de producție chiar ale celei mai primitive producții, iar mai tîrziu și ale schimbului, cereau măsurarea mărimilor spațiale, în primele stadii, fie și cea mai imprecisă. Drept unități de măsură, foarte grosolane și instabile, se foloseau frecvent unele părți ale corpului uman. Denumiri ca „cot", „talpă" (a piciorului), „stînjen" (ceea ce poate fi cuprins: distanța dintre extremitățile degetelor mîinilor întinse lateral), „țol"(în germană *Daumen* — degetul mare, lățimea acestui deget), „picior" (în englezește este *foot* — picior, talpă) etc. ne conving cît se poate de bine de aceasta.

Încă în epoca celei de-a doua perioade de glaciație omul fabrica unelte „geometrizate" — plăci de silex avînd forma unui triunghi, romb sau trapez. Aceste forme regulate au apărut treptat, ca fiind cele mai potrivite, cele mai adaptate unui proces de muncă sau altul, efectuat de cuțitul de silex, răzuitor, topor ș.a.m.d.

Dezvoltarea reprezentărilor geometrice a înaintat cu adevărat o dată cu nașterea olăritului și a țesutului, a tehnicii construcțiilor, o dată cu apariția artelor. Rămășițe ale vaselor din epoca paleolitică, coșuri, vîrșe, plase și țesături ne conduc la convingerea că, la oamenii primitivi din această epocă, simțul geometric era deja puternic dezvoltat. Ei își ornamentau produsele cu combinații complicate de triunghiuri, spirale dreptunghiulare repetate (meandre); cercuri, spirale. Analizînd unele dintre aceste ornamente geometrice, recunoaștem în ele figuri stilizate de animale și oameni; probabil că aceasta avea o legătură cu concepția animistă asupra lumii, ce s-a născut în acea epocă. S-ar părea curios că în ornamente găsim egalitatea, asemănarea și simetria figurilor. Doar sub formă abstractă, aceste noțiuni nu existau încă, desigur, la oamenii primitivi. O asemenea construcție armonioasă a figurilor nu era rezultatul raționamentelor, ci o consecință a spiritului de imitare; aici s-ar putea să-și fi exercitat influența repetarea mișcărilor ritmice ale activității de producție (de exemplu, săpatul, semănatul și altele), ale jocurilor, imitarea formelor variate ale naturii, ritmul net repetat al dansului. În perioada mai tîrzie, în ornamentele geometrice au apărut și raporturi numerice, de exemplu, sub forma împărțirii unui triunghi mare în triunghiuri mai mici sau sub forma umplerii unui triunghi cu cerculețe, așezate regulat pe rînduri. Astfel sînt imprimate, de exemplu, „numerele triunghiulare" 1; $3 = 1 + 2$; $6 = 1 + 2 + 3$; $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ etc., cărora li se atribuie un sens „magic".

Transformarea numerelor în fetișuri a urmat aceeași cale cu cea descoperită de Marx pentru apariția fetișismului în general — formă inițială, din punct de vedere istoric, a credinței religioase. Noțiunea de număr — rod al activității de abstractizare a creierului uman — a fost transformată apoi într-o esență de sine stătătoare, suprasenzorială. Mai întîi omul a căpătat noțiunea de număr ca abstracție a lucrurilor individuale. Pe urmă a rupt numărul de lucruri și l-a opus acestor lucruri. Și cînd numărul a apărut în fața lui ca o abstracție lipsită de element senzorial, omul s-a mirat și i-a atribuit capacitatea fantastică de a aduce fericire sau nefericire.

Istoriografia burgheză a matematicii cultivă „teorii" asupra provenienței noțiunilor matematice din gîndirea „magică" și asupra interpretării misticii ca motor al dezvoltării matematicii. În realitate, fetișizarea noțiunilor matematice a apărut nu la originea lor, ci o dată cu apariția schimbului. Ea rămînea întotdeauna un produs secundar al dezvoltării matematicii — influența ei asupra acestei dezvoltări nu a jucat nici un rol hotărîtor.

Construcția locuințelor palustre în Europa de nord, a marilor locuințe ale indienilor americani și alte construcții nu se puteau efectua fără cunoașterea practică a germenilor de mecanică (statică), fără priceperea de a duce drepte și linii verticale, de a trasa drepte sub un unghi drept. Aceste operații s-au efectuat cu ajutorul întinderii unor sfori: grecii antici chiar îi denumeau astfel pe geometrii egipteni: *harpedonaptai* — întinzători de sfori. Denumiri analoge existau și în limbile asiriană și arabă. Concepția despre linia dreaptă este strîns legată și de împletit, și de țesut, ceea ce ne indică, de exemplu, înrudirea cuvîntului *linia* (limba latină) cu denumirea inului (cuvîntul latin *linum*, care însemna și fir de in, și pînză, de unde *linoleum*).

Dar o influență deosebit de puternică asupra dezvoltării concepțiilor geometrice a exercitat-o, atunci cînd a apărut, agricultura. Dacă tehnica olăritului, țesutului, precum și tehnica construcțiilor cereau, în primul rînd, măsurarea lungimilor, pentru agricultură era necesară măsurarea ariilor și a volumelor. Erau măsurate ariile parcelelor de teren, capacitatea vaselor și a hambarelor, volumul pămîntului scos cu ocazia săpăturilor. Știm, din documentele cuneiforme ale sumerienilor și babilonienilor, că unitățile de măsură ale ariei și ale volumului au fost, în timpul apariției lor, strîns legate de necesitățile materiale ale societății. Se constată că hieroglifa noțiunii de „arie" este identică cu hieroglifa „cantitate de grăunțe" (necesară pentru semănat pe aria respectivă); hieroglifa noțiunii de „volum" — identică cu hieroglifa „grămadă de pămînt" (scoasă în timpul lucrărilor de irigare). Măsura de volum rusă *ведро* (căldare, baniță) de asemenea arată caracterul practic concret al originii măsurilor spațiale.

Astronomia primitivă și importanța ei pentru matematică. Chiar triburile de nomazi crescători de vite, primitivi, aveau nevoie de orientare în timpul migrațiunii pe cîmpii întinse. Astfel au început observațiile lor asupra mișcării stelelor. Schimbarea zilei și a nopții, precum și a anotimpurilor a fost incontestabil observată încă de omul din epoca de piatră. Ea le-a permis, datorită repetării (alternanței) sale regulate, să prezică măcar aproximativ apariția timpului rece, nefavorabil, sau a timpului cald, favorabil. E drept că, așa cum arată observațiile asupra locuitorilor din pădurile tropicale, ei atribuie o importanță relativ mică alternanței zilei și nopții, care nu este bine sesizată acolo. De aceea, nu putem fi de acord cu afirmațiile după care determinarea și măsurarea timpului ar fi jucat un rol hotărîtor chiar în apariția noțiunii de număr. Influența lor s-a manifestat abia pe treptele mai înalte ale dezvoltării sociale. O dată cu trecerea la agricultură, germenii cunoștințelor despre mișcarea aparentă a Soarelui, a Lunii și a stelelor au devenit necesari pentru programarea lucrărilor de cîmp. Astfel, încă în epoca primitivă a păstoritului, a apărut calendarul lunar. Dezvoltarea schimbului, și în legătură cu aceasta și a navigației, a dus la o perfecționare mai departe a cunoștințelor astronomice, extrem de importante pentru orientarea pe mare.

Cunoștințele astronomice nu sînt însă de imaginat fără dezvoltarea cunoștințelor matematice. Observarea bolții cerești, la început întîmplătoare, iar ulterior tot mai sistematică, a dus la cunoașterea proprietăților sferei, cercului și a direcțiilor unghiulare. E drept că cercul, sub forma discului olarului și a roții de căruță, a fost cunoscut și mai înainte de multe popoare. Înțelegerea astronomică a cercului însă, ca o linie imaginară, împărțită apoi în părți egale, în care au fost trasate coarde etc., a fost incontestabil mai profundă. O dată cu nașterea astronomiei, noțiunile geometrice s-au extins asupra întregului spațiu tridimensional, în timp ce înainte, dacă facem abstracție de măsurarea volumelor celor mai simple, ele se mărgineau în esență numai la plan (bidimensional).

În modul acesta s-a încheiat prima perioadă de dezvoltare a matematicii legată de societatea primitivă fără clase — perioada de apariție a noțiunilor ei fundamentale, cele mai simple. Apariția și dezvoltarea matematicii în acest stadiu inițial au fost confirmate pe deplin de teza expusă de Engels în *Anti-Dühring*: „Ca și toate celelalte științe, matematica s-a născut din *necesitățile practice* ale oamenilor: din măsurarea loturilor de pămînt și a capacității vaselor, din calcularea timpului și din mecanică" [2, p. 48].

CAPITOLUL II

MATEMATICA ÎN SOCIETATEA SCLAVAGISTĂ PREMERGĂTOARE VECHILOR GRECI

Societatea sclavagistă timpurie. Începînd cu mileniul al VI-lea î.e.n. pe o regiune enormă, din Egipt (în apus) pînă în China (în răsărit), avea loc treptat descompunerea orînduirii comunei primitive. O dată cu trecerea de la uneltele de piatră la uneltele de aramă şi bronz, iar apoi la uneltele de fier, o dată cu perfecţionarea agriculturii, s-au separat de la aceasta din urmă meşteşugurile ca o ocupaţie de sine stătătoare. A apărut proprietatea particulară asupra mijloacelor de producţie, a început formarea societăţii împărţită în clase. Din mileniul al IV-lea î.e.n. în Egipt şi în Mesopotamia, în China şi în India, iar mai tîrziu în Transcaucazia şi în Asia Mică, s-au format şi s-au dezvoltat ţările sclavagiste despotice. Un proces analog, deşi mult mai tîrziu, s-a produs şi în emisfera occidentală, la triburile indiene maya, incaşi şi azteci.

Această formă nouă, mai evoluată, a societăţii s-a născut în condiţii climatice favorabile, cel mai adesea pe malurile marilor fluvii, unde terenul fertil dădea o recoltă bogată. Aceste oaze enorme, cuprinse între munţi şi deşerturi, nu se puteau extinde. Revărsările periodice ale fluviilor distrugeau rezultatele muncii. De aceea, aici s-au dezvoltat larg construcţia digurilor şi a canalelor, asanarea mlaştinilor, construcţia rezervoarelor de apă. Mai tîrziu, cînd pămîntul a devenit proprietate particulară, conducerea lucrărilor de irigare, la fel ca şi controlul aprovizionării cu apă, era concentrată în mîinile organelor de conducere locală sau de stat. Simultan cu dezvoltarea meşteşugurilor şi a comerţului se întemeiau oraşe ce se distingeau printr-o remarcabilă dezvoltare a tehnicii construcţiilor, în special a fortăreţelor, a palatelor şi a templelor. Nenumăratele războaie au dus la crearea tehnicii militare.

Baza economică a societății sclavagiste din această epocă o constituia economia naturală a obștilor sătești, exploatate de proprietarii de sclavi, conducători militari, preoți. Totodată, orașele s-au transformat în centre ale comerțului, care se făcea atît prin caravane, cît și prin căile maritime.

Întreagă această activitate complexă de producție, economică și tehnică, necesita o mare cantitate de cunoștințe multilaterale. Ele au fost concentrate la un grup special de oameni, funcționari, cunoscători ai calendarului și ai agrimensurii, ai bazelor tehnicii construcțiilor și metalurgiei, ai medicinei și ai stringerii impozitelor. În unele dintre societățile sclavagiste din Orient, această latură a activității administrative de stat se afla în mîinile slujitorilor cultului. Din casta conducătorilor făceau parte și scribii, care, în afară de efectuarea a tot felul de evidențe, mai aveau drept obligație pregătirea și instruirea succesorilor lor.

Războaiele permanente duceau la faptul că țările care apăreau în urma învingerii diferitelor principate se descompuneau. Valorile culturale, acumulate timp de secole, piereau. Pe ruinele țărilor învinse apăreau apoi altele noi.

Cu toate aceste schimbări, ce alternau de nenumărate ori de-a lungul mileniilor, baza agricolă a societății se schimba foarte lent. Forța producătoare de bază a societății — sclavii și țăranii sclavi — nu era interesată în ridicarea productivității muncii. De aceea, progresul cultural se producea aici aproape neobservat, știința și tehnica cunoscînd lungi perioade de stagnare.

Conservatorismul culturii societății sclavagiste timpurii se întărea în special acolo unde puterea preoților se contopea cu puterea de stat. Același conservatorism a fost cauza datorită căreia, cu toată larga dezvoltare a comerțului între diferitele popoare care populau teritoriul imens, ce se întindea de la Nil pînă la Ianțzî-Tzian, cultura fiecăruia dintre ele diferea mai pronunțat de cultura altor popoare aflate pe treptele mai evoluate ale istoriei [51, p. 6; 52, pp. 24—31].

Matematica societății sclavagiste timpurii. Condițiile economice și politice ale societății sclavagiste au determinat și caracterul matematicii ce se dezvolta în această societate. Aici ea era, în primul rînd, o știință practică, creată pentru efectuarea calculelor și a măsurătorilor, pentru satisfacerea necesităților economice ale statului. Numai prin aceasta se poate explica caracterul, în esență empiric, al matematicii. Propozițiunile matematice au fost în cea mai mare parte obținute prin încercări, prin dibuiri.

Cunoștințele matematice erau expuse de preferință sub forma unor probleme concrete și nu sub forma unor reguli generale. Expunerea avea un caracter dogmatic: problemele pe care le-am fi numit tipice trebuiau reținute; rar se dădea o explicație care ar fi putut reprezenta un fel de demonstrație în germene.

Dar caracterul dogmatic al matematicii din această epocă era determinat într-un grad și mai mare de modul de gîndire bazat pe principiul autorității, inerent acestei societăți, caracterizată prin predominarea puterii personale, avînd la baza sa o economie numită, de Marx și Engels, metoda asiatică de producție. În această societate, unde voința despotului era considerată lege, nu exista loc pentru gîndirea care să meargă pînă la cauzele și fundamentele fenomenelor și, cu atît mai puțin, pentru o discuție liberă.

Datorită însă faptului că, în decurs de secole, o castă deosebită se ocupa în mod special cu calcule și măsurători, aplicîndu-le nu numai practic în scopuri tehnice și economice, ci și învățînd pe începători — matematica a început să îmbrace contururile unei științe abstracte. În locul vechilor denumiri ale numerelor, obiectul studiului l-au constituit apoi numerele abstracte. Au început să fie sesizate regulile generale ale operațiilor. Ulterior, alături de regulile aritmetice stabilite, s-au născut procedeele generale de rezolvare a problemelor de un tip determinat. Deși nu se foloseau formule, așa cum se face acum, procedeele utilizate conțineau și unii germeni ai algebrei. Analog, din problemele concrete de măsurătoare au apărut treptat germenii geometrici teoretice.

Izvoarele istorice. Studiul istoriei matematicii din această epocă sclavagistă se bazează, spre deosebire de istoria matematicii din societatea comunei primitive, pe studiul monumentelor scrise. Caracterul stagnant al întregii culturi din această epocă pune însă în fața istoricilor probleme foarte dificile. De multe ori este greu sau chiar imposibil de stabilit timpul cînd s-a făcut o descoperire sau alta, deoarece un procedeu o dată stabilit se transmitea prin tradiție, neschimbat, timp de veacuri, iar uneori și milenii; documentele sînt de cele mai multe ori fără dată și datele de apariție nu pot fi determinate decît pe cale indirectă. Descoperirile făcute în comunitățile închise puteau rămîne necunoscute în afara limitelor lor și se pierdeau pentru totdeauna în timpul războaielor pustiitoare.

Neomogenitatea și incompletitudinea cunoștințelor noastre asupra matematicii diferitelor popoare evoluate din acea epocă depind, în mare măsură, de calitatea și cantitatea monumentelor scrise ce s-au păstrat. În Mesopotamia, scrierea fiind aplicată pe plăci de argilă, care apoi erau arse, monumentele scrise au supraviețuit timp de milenii. În Egipt, unde se scria pe papirus, acesta, fără a fi atît de rezistent, s-a conservat relativ bine într-o climă uscată. În India însă și în China se scria pe scoarța de copac și pe bambus (hîrtia a fost descoperită de chinezi abia în secolul al II-lea e.n.) — materiale ușor perisabile. Aceasta a dus la faptul că principalele noastre cunoștințe se referă la matematica egipteană și în special la matematica din Mesopotamia, în timp ce matematica Chinei și a Indiei antice este studiată mult mai puțin. În ceea ce privește matematica perioadei sclavagiste timpurii a popoarelor din Orientul Apropiat, la fel ca și a popoarelor americane precolumbiene maya, incași și azteci, informațiile noastre sînt și mai incomplete.

Matematica egipteană. Colosalele morminte regale — piramidele — construite în perioada Vechiului Imperiu (aproximativ 3600—2700 î.e.n.), sînt nu numai martori materiali ai puterii despotice a faraonilor, ci ele ne întăresc ideea că încă în acea perioadă cunoștințele matematice ale egiptenilor trebuiau să se găsească pe un nivel foarte înalt. Construcția unor asemenea piramide necesita o mare măiestrie în efectuarea calculelor aritmetice cu numere mari și a măsurătorilor geometrice simple. Aceleași cunoștințe erau necesare și conducătorilor canalelor construite de puterea regilor, ai digurilor și ai bazinelor de apă, erau necesare contabililor moșiilor regale și ale templelor. Letopisețele ne comunică date despre socoteli legate de proprietatea funciară, de vie, oameni și aur, efectuate periodic pe întreaga țară, începînd cu primele dinastii, pe baza căreia se stabileau impozitele adunate în vistieria regelui.

În sfîrșit, nu se putea lipsi de cunoștințe matematice nici astronomia: „necesitatea de a calcula perioadele de revărsare a Nilului a dat naștere astronomiei egiptene și, o dată cu ea, stăpînirii castei preoților ca îndrumătoare a agriculturii" — a scris Marx [1, p. 523]. Necesitatea calendarului pe care egiptenii l-au folosit încă în mileniul al IV-lea î.e.n. a exercitat, de asemenea, o serioasă influență asupra dezvoltării matematicii egiptene.

În perioada Vechiului Imperiu, cunoștințele matematice ale egiptenilor se aflau la o înălțime apreciabilă. S-a păstrat numele legendarului arhitect și matematician Imhotep, primul nume în istoria matematicii. Din această perioadă s-au păstrat însă numai însemnări ce nu conțin nici un fel de date matematice, în afară de notarea unor numere sau a unor măsuri. Aceasta ne permite să stabilim numai forma semnelor numerice și sistemul de numerație la egipteni, precum și informații asupra unităților de măsură folosite.

Sistemul de numerație la egipteni. Egiptenii antici aveau un sistem de numerație zecimal și existau semne numerice distincte începînd cu unu, pentru puterile lui 10 pînă la 10^7. Unitatea se scria ca  (imaginea unui băț de măsurat), zece  (hieroglifa ce reprezenta „piedici" pentru împiedicarea vacilor, sau un „val"), o sută  („sfoară de măsurat" ce servea pentru măsurat cîmpuri și se împărțea în o sută de coturi), o mie  („floare de lotus"), zece mii  („degetul arătător"), o sută de mii  („mormoloc"), un milion  („om mirat"), zece milioane  („Soare"). Repetînd aceste semne și punîndu-le unul lîngă altul, egiptenii exprimau toate celelalte numere. Ei scriau de la dreapta la stînga și în același sens scriau și numerele începînd cu ordinele inferioare. Semnele de același fel se reuneau în grupuri, conținînd cel mult patru semne. Astfel, de exemplu, numărul 15 377 se scria astfel:

În dezvoltarea ulterioară a culturii egiptene, scrierea hieroglifică, care a apărut din desen încă în cea mai veche epocă, a fost înlocuită prin scrierea hieratică (prescurtări ale hieroglifelor), iar apoi prin scrierea demotică (alfabetică). În mod corespunzător se schimbau și semnele grafice ale numerelor. O dată cu trecerea la scrierea hieratică, egiptenii au început să scrie cifre pornind de la ordinele superioare și terminînd cu cele inferioare, în același sens ca și celelalte noțiuni. Merită atenție faptul că în scrierea hieratică și demotică, alături de semnele pentru numerele cardinale, existau semne speciale pentru numerele ordinale de la 1 la 30, utilizate pentru indicarea zilelor unei luni. Progresul în scrierea numerelor se vede pe următoarele exemple: 3 se scria

cu ajutorul hieroglifelor  hieratic , demotic ,

80 — respectiv 

Vedem astfel că, cu tot caracterul stagnant al matematicii egiptene, ea a suferit totuși unele schimbări de-a lungul mileniilor.

Măsurătorile executate pe piramide au arătat că dimensiunile lor fundamentale se exprimă în numere întregi de „coți". Construind edificiile lor din blocuri întregi, egiptenii nu aveau nevoie pentru măsurarea lungimilor de fracții, care erau însă necesare la măsurarea terenurilor.

Matematica în școlile de scribi. Informații mult mai complete le avem despre matematica perioadei Imperiului Mijlociu (2000—1710 î.e.n.), marcată printr-o intensificare a statului centralizat și printr-o înflorire a culturii țării. Pînă la noi au ajuns nu numai diferite însemnări cu caracter economic, socoteli etc. ce conțin calcule matematice, ci și un mic număr de documente matematice speciale ce reprezentau un fel de manuale de învățămînt pentru școlile egiptene de scribi. Importanța acestor școli pentru casta privilegiată a scribilor se vede din *Învățămintele lui Duau* [53, p. 25], în care tatăl îl învață pe fiul său care intră într-o astfel de școală „să-și îndrepte inima către cărți" și îl previne asupra necazurilor ce-l așteaptă pe oricine care nu a reușit să devină scrib.

Dintre papirusurile matematice, cele mai importante sînt două: cel de la Londra al scribului Ahmes (papirusul Rhind, numit astfel după primul său proprietar), care conține 85 de probleme, datînd aproximativ din anul 2000 î.e.n. [54], [55] și cel de la Moscova care conține 25 probleme, socotit a fi cu două secole mai vechi. Papirusul de la Moscova ce se păstrează în Muzeul de Stat al Artelor a fost descifrat de academicienii B.A. Turaiev și V.V. Struve și editat de acesta din urmă în 1930 [56].

Operațiile aritmetice (vezi [57], [58]). Din papirusurile matematice aflăm în primul rînd cum efectuau egiptenii cele patru operații aritmetice asupra numerelor (întregi pozitive). Adunarea și scăderea (întotdeauna a unui număr mai mic dintr-un număr mai mare) nu prezentau pentru ei dificultăți. Ele erau ușurate de sistemul zecimal de numerație și se efectuau, propriu-zis, prin aceeași metodă pe care o aplicăm și noi astăzi; de exemplu, pentru adunare se adunau unitățile din același ordin (adică reprezentate prin aceleași semne), iar în cazurile în care numărul acestor unități ajungea la zece, se adăuga o unitate la ordinul următor superior. Efectuarea acestor operații era ușurată de folosirea unor pietricele. Adunarea și scăderea erau notate prin hieroglifele  și , care reprezentau inițial „mersul" într-un sens sau în celălalt.

Altfel stau lucrurile cu înmulțirea. Păstrînd deprinderile, care își aveau rădăcinile în trecutul îndepărtat, cînd la egipteni exista încă sistemul binar de numerație, ei reduceau înmulțirea la două operații: dublarea și adunarea. Dacă, de exemplu, se înmulțeau 15 cu 13, egiptenii alcătuiau tabloul următor:

/1	15
2	30
/4	60
/8	120
total	195.

În acest tablou fiecare rînd următor se obține din cel precedent prin dublare (prin adunarea numărului din rîndul precedent cu el însuși). Ultimul număr din coloana stîngă nu trebuie să depășească factorul 13. Apoi în coloana stîngă ei căutau acele numere care în sumă dau 13 și le notau printr-o trăsătură înclinată, notînd mai întîi ultimul număr din coloană și de la acesta mișcîndu-se în sus. Se înțelege că egiptenii nu au demonstrat că descompunerea oricărui număr dintr-o sumă de puteri ale numărului 2 este întotdeauna posibilă, și anume într-un mod unic — o astfel de problemă nici nu putea apărea la ei. Alegerea termenilor din coloana stîngă se putea face ușor mișcîndu-se de jos în sus și lăsînd deoparte numere a căror adăugare, la suma celor precedente, dădea un număr ce depășea factorul dat (13). După marcare se adunau numerele din coloana dreaptă aflate în dreptul rîndurilor marcate, și suma se scria dedesubt.

După aceeași schemă se făcea și împărțirea, de exemplu 195 cu 15. În acest caz 15 era dublat pînă cînd în coloana din dreapta numerele din rîndurile marcate dădeau în sumă 195 și atunci răspunsul se obținea sub forma sumei numerelor marcate din coloana stîngă, adică în exemplul dat a numerelor 1, 4, 8. În cazul general însă (împărțirea cu rest), trebuia apelat la fracții. Observăm că dublarea și înjumătățirea, ca operații aritmetice speciale, s-au păstrat în manualele din Europa occidentală chiar pînă în secolul al XVIII-lea.

Fracțiile egiptene (vezi [59], [60]). Modul de înțelegere și de exprimare a fracțiilor în matematica egipteană este specific. După cum am mai spus, fracțiile apăreau în procesul de măsurare: împărțirea suprafeței cîmpului în părți. De aceea, fracția era prezentată ca o parte a unității, inițial ca o parte a unității concrete de arie — *setata*, și așa se și nota. Cele mai vechi au fost fracțiile binare $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ *setata*, pentru care existau semne speciale. Mai tîrziu, li s-au adăugat fracțiile $\frac{1}{3}$ și $\frac{2}{3}$. Și mai tîrziu, au fost examinate în general fracțiile de forma $\frac{1}{n}$, care erau notate cu hieroglifa *rà* , ce avea inițial valoarea lui $\frac{1}{32}$ — *hekata* (măsura fundamentală a capacității — aproximativ 4,5 *l*), sub care se punea un semn ce exprima numitorul. De exemplu, $\frac{1}{10}$ se scria astfel: , o dată cu trecerea la scrierea hieratică în locul hieroglifei *rà* se scria pur și simplu un punct, astfel încît $\frac{1}{10}$ se scria astfel

Necesitatea întocmirii calendarului a exercitat de asemenea o influență asupra dezvoltării ulterioare a calculului cu fracții. Egiptenii împărțeau anul în 12 luni de cîte 30 zile și adăugau, după scurgerea lor, 5 zile suplimentare. Zilele lunii se numărau ca fracțiuni ale sale, iar această numărare se extindea apoi și la alte cazuri. Astfel ziua 1 se considera $\frac{1}{30}$ din lună, a treia — $\frac{1}{10}$, a 20-a — $\frac{2}{3}$; prin urmare, ziua a 24-a, adică $\frac{4}{5}$ din lună, se reprezenta prin suma $\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{2}{3}$ din lună, iar apoi în general $\frac{4}{5}$ ca $\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{2}{3}$.

Avînd astfel fracțiile alicvote și fracția $\frac{2}{3}$, egiptenii efectuau împărțirea numerelor întregi folosind schema de mai sus a înjumătățirii. Pentru aceasta ei aveau însă nevoie să reprezinte încă o fracție de forma $\frac{2}{n}$, ca sumă a fracțiilor alicvote. Dacă n era număr par, atunci $\frac{2}{n}$ era înlocuită prin fracția simplificată. Pentru n impar, au fost alcătuite tabele speciale. Un astfel de tabel există în papirusul de la Londra pentru toți n impari, începînd cu $n = 3$ și terminînd cu $n = 101$.

Astfel, de exemplu, $\frac{2}{3}$ se descompunea în $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, iar $\frac{2}{101}$ ca $\frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$. Toate tabelele sau fragmente de tabele care apar în papirusul de la Moscova și în diferitele alte papirusuri dau aceleași descompuneri, de unde se vede că numai acestea erau folosite. Descompunerea fracției $\frac{2}{n}$ în fracții alicvote se poate însă realiza pe mai multe căi diferite de procedeul „standard" dat în tabele. Problema, de ce egiptenii au ales această descompunere și în ce fel au alcătuit tabelele lor, nu se poate considera deocamdată definitiv rezolvată.

Să dăm un exemplu de cum se făcea împărțirea cu ajutorul tabelului descompunerilor fracțiilor $\frac{2}{n}$ în fracții alicvote. Pentru a împărți, de exemplu, 28 cu 5, egiptenii începeau să construiască, ca și mai înainte, tabelul:

/1	5
2	10
/4	20,

unde constatau că $5 + 20 = 25$ nu este însă egal cu deîmpărțitul 28 ($28-25=3$), prin urmare și în coloana din stînga $1+4=5$ nu dă încă cîtul complet. Atunci ei continuau să completeze tabelul, dar în loc de a dubla mai departe numerele din coloana dreaptă (ceea ce ar fi inutil), ei formau în coloana stîngă mai întîi $\frac{1}{5}$, iar apoi prin dublare $\frac{2}{5}$, pentru care în tabelul descompunerilor fracţiilor $\frac{2}{n}$ găsim expresia în fracţiile alicvote $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$, adică ei continuau tabelul astfel.

$$/\frac{1}{5} \qquad 1$$

$$/\frac{2}{5} \qquad 2.$$

Adunînd toate numerele marcate din coloana stîngă (unde în locul lui $\frac{2}{5}$ se scria $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$), obţineau cîtul $5+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$.

Observăm încă o particularitate: folosirea unor numere auxiliare scrise cu tuş roşu. Dacă, de exemplu, trebuia luat $1\frac{2}{3}$ din $\frac{1}{5}$, egiptenii scriau:

$1\frac{2}{3}$ (cu tuş negru),

3 2 (numere ajutătoare scrise cu tuş roşu),

ceea ce însemna că 1 conţine trei treimi, iar $\frac{2}{3}$ conţine două treimi, prin urmare $1\frac{2}{3}$ conţine cinci treimi care trebuie luate din $\frac{1}{5}$, ceea ce dă $\frac{1}{3}$.

Probleme de aritmetică. Problemele conţinute în papirusul de la Londra sînt grupate în trei „cărţi". Prima carte conţine probleme de aritmetică; în a doua întîlnim probleme de arii şi volume, iar în a treia sînt adunate diferite probleme cu caracter economic aplicativ.

În papirusul matematic de la Moscova, problemele nu sînt ordonate în mod sistematic. Unele dintre ele sînt asemănătoare cu problemele din papirusul londonez, însă printre ele se disting trei probleme diferite de cele amintite. Acestea sînt: calculul unei părţi de vas (care nu este încă complet descifrată, deoarece textul este deteriorat), calculul volumului unui trunchi de piramidă și, în sfîrșit, determinarea ariei, fie a unei emisfere, fie a unui semicilindru (nu s-a stabilit definitiv ce anume suprafață).

Să facem cunoștință mai întîi cu problemele de aritmetică în care apare așa-numitul „calcul al grămezii", oprindu-ne la un exemplu concret. Dacă îl vom scrie în notațiile actuale, obținem o ecuație liniară cu o necunoscută:

$$x + \frac{1}{7} x = 19.$$

Egiptenii nu aveau, desigur, noțiunea de „ecuație" în sensul nostru. Dar ei căutau totuși să determine valoarea necunoscutei denumită: „grămada", expunînd problema în cuvinte. Ei rezolvau problema pe două căi: fie prin împărțire directă a lui 19 cu $1+\frac{1}{7}$, fie printr-un procedeu care a căpătat ulterior denumirea de *regula falsi* (regula falsei ipoteze). Ea consta în următoarele: să presupunem că se cere să se rezolve ecuația (în notația actuală):

$$\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} + \cdots + \frac{p_n}{q_n}\right) x = r.$$

Mai întîi se ia ca soluție expresia

$$x_1 = q_1 \cdot q_2 \ldots q_n.$$

Substituind în locul lui x această valoare, se obține, în general, desigur nu r, ci r_1. Pentru a obține rezultatul corect, trebuie înmulțită „valoarea falsă" inițială x_1 cu raportul $\frac{r}{r_1}$, adică $x = x_1 \frac{r}{r_1}$.

În exemplul dat (problema 24 din papirusul de la Londra), matematicianul egiptean a luat ca soluție „falsă" inițială numărul 7 ca cel mai potrivit pentru înmulțire cu $1 + \frac{1}{7}$.

Printre problemele de aritmetică întîlnim și probleme referitoare la progresii aritmetice și geometrice (exprimîndu-ne în terminologia actuală). În problemele de primul tip se cere să se distribuie o cantitate dată, de exemplu, de grăunțe sau pîini, între un număr dat de persoane astfel „ca diferența dintre fiecare om și vecinul lui" să fie egală cu o mărime dată.

Ultima problemă era formulată ca o problemă distractivă: „opisul inventarului gospodăriei": „7 case, 7 pisici, 7 şoareci, 7 spice de orz, 7 măsuri de grăunţe, cîte în total?", adică în fiecare casă există 7 pisici, fiecare pisică mănîncă 7 şoareci, fiecare şoarece — 7 spice, fiecare spic fiind semănat ar da 7 măsuri de grăunţe; se cere să se găsească suma: $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$.

Probleme de geometrie. Una dintre cele mai remarcabile probleme egiptene este problema 14 din papirusul de la Moscova, relativ la calculul volumului unui trunchi de piramidă. „Modul de calcul al piramidei fără vîrf; dacă ţi se dă o piramidă fără vîrf de 6 [coturi] în înălţime, 4 [coturi] pe latura inferioară şi 2 pe latura superioară; calculează cu acest 4 ridicînd la pătrat, se obţine 16; dublează pe 4, se obţine 8; calculează cu acest 2, ridicînd la pătrat, se obţine 4 [1]; adună împreună aceşti 16 [2] cu aceşti 8 şi cu aceşti 4 [3], se obţine 28. Calculează [4] $\frac{1}{3}$ din 6, se obţine 2; calculează [5] 28 de două ori, se obţine 56 [6]; vezi: ea va fi 56. Ai găsit corect" (în original nu există, desigur, semne de punctuaţie; trunchiul de piramidă este reprezentat sub forma unui mic trapez, iar operaţia de „ridicare la pătrat" este dată prin hieroglifa „a trece lîngă", aşa cum se obişnuia în matematica egipteană; originea acestei notaţii nu este elucidată).

Papirusul conţine, alături de textul citat, şi o figură cu o schemă de calcul, pe care le reproducem aici. Astfel, calculul se face după acelaşi procedeu pe care-l urmăm aplicînd formula:

$$v = \frac{1}{3} h\,(a^2 + ab + b^2).$$

Este posibil ca egiptenii să fi cunoscut faptul că un triunghi cu laturile 3, 4, 5 este dreptunghic. În acest caz, cu ajutorul unei sfori divizate prin noduri în $12=3+4+5$ părţi, ei puteau construi un unghi drept. Un alt triunghi dreptunghic cu laturi întregi 20, 21, 29 le putea permite să obţină nu numai un unghi drept, ci dintr-o dată şi un triunghi dreptunghi care la prima vedere pare a fi isoscel. Van der Waerden [61] consideră incertă afirmaţia referitoare la cunoştinţele egiptenilor privind triunghiurile dreptunghice cu laturi întregi. Ei calculau corect aria triunghiului şi a trapezului, volumul cubului, paralelipipedului şi cilindrului circular. Aria unui cerc ei o considerau egală cu aria unui pătrat cu latura egală cu $\frac{8}{9}$ din diametrul cercului. De aici se obține $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}16$; adica eroarea comisă era de 0,63%.

Nivelul general al matematicii egiptene. Ar fi însă greșit să se considere, așa cum o fac unii istorici ai matematicii, că cunoștințele egiptenilor s-ar fi mărginit la ceea ce este conținut în papirusurile matematice pe care le posedăm. Aceste papirusuri reprezintă îndreptare elementare pentru școli. Deoarece însă învățarea se reducea la învățarea pe de rost, este firesc că în ele erau expuse numai prescripții de-a gata și nu căile prin care aceste prescripții au fost descoperite. Este incontestabil că, deși egiptenii au descoperit multe reguli pe cale empirică, la unele din ele ei au ajuns printr-un raționament abstract. Este de asemenea clar că, în matematica lor, se întrezărea și un interes teoretic. Căci procedeul corect pentru calculul volumului unui trunchi de piramidă nu se putea obține pe cale pur empirică, pentru aceasta erau necesare și considerații teoretice. Mai departe, probleme privind progresiile aritmetice și geometrice nu se întîlneau desigur sub această formă în practică, ci au fost imaginate pentru a servi ca exerciții. În sfîrșit, deși la vechii egipteni nu existau formule algebrice, ei au elaborat unele tipuri de procedee generale pentru rezolvarea problemelor tir. Aceste procedee pot fi privite pe drept cuvînt ca germenii metodei algebrice.

În perioada Noului Imperiu, plin de răscoale și războaie, matematica egipteană nu putea să progreseze. Este însă pe deplin posibil ca în această epocă să se fi schimbat orientarea ei; realizările acestei epoci trebuie căutate în lucrările de astronomie care conțin tabele trigonometrice în germeni. Oricum ar fi, luată în ansamblu, de-a lungul întregii sale dezvoltări multimilenare, matematica egiptenilor, la fel ca și întreaga cultură egipteană, a exercitat o puternică influență asupra științei țărilor cu care Egiptul antic se găsea în relații, în special asupra matematicii grecești. Asemănarea diferitelor metode și chiar a problemelor matematicii egiptene și a matematicii babiloniene face foarte probabilă ipoteza unor schimburi științifice; lipsa unor materiale istorice și studiul insuficient al celor existente însă nu ne permit deocamdată să avem certitudinea deplină a acestei afirmații.

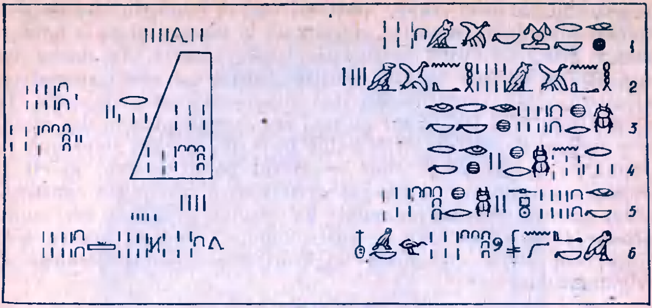


Fig. 2. Transcrierea hieroglifică a două coloane din papirusul din Moscova, efectuată de I.I. Perepiolkin. Textul hieroglific se citește de la dreapta la stînga. Lungimea laturii superioare 2 cu pătratul ei 4 este scrisă deasupra figurii, lungimea inferioară 4 sub figura, înălțimea 6 și volumul 56 — în interiorul figurii, iar înmulțirea lui 28 cu 2 — în stînga figurii.

Matematica în Mesopotamia antică. Condițiile sociale. În mileniul al IV-lea î.e.n. pe șesul întins dintre Tigru și Eufrat au apărut țările sclavagiste: Sumerul la sud și Akkadul la nord. Agricultura, bazată în special pe irigarea artificială și pe folosirea plugului și a semănătoarei, marile orașe cu templele lor în trepte, construite din cărămizi mari, tehnica ce a cunoscut roata grădinarului („dulap") și sistemul de căldări care alunecă pe o sfoară și este pus în mișcare de animale, înflorirea meșteșugurilor și a comerțului — toate acestea au condiționat nașterea științei, printre care și a matematicii. Nenumăratele însemnări cuneiforme cu caracter economic, ce s-au păstrat din epoca sumero-akkadiană, privind predarea grînelor și vitelor, evidența marilor gospodării de la palate și temple ne dau un tablou clar asupra sistemului de calcul existent în acea vreme, care a fost moștenit de cuceritorii Mesopotamiei — babilonienii.

Majoritatea tăblițelor cuneiforme găsite în săpături, care conțin texte pur matematice, se referă la epoca imperiului babilonian antic, în special la timpul domniei dinastiei Hammurapi și a cassiților, adică aproximativ de la 1800 la 1600 î.e.n. După o întrerupere îndelungată, provocată de cuceririle și răscoalele popoarelor învinse, reapar mărturii asupra cunoştinţelor de matematică ale babilonienilor, referitoare la intervalul de la aproximativ 300 î.e.n. pînă la începutul erei noastre. În marea lor majoritate, acestea nu sînt tăbliţe cuneiforme pur matematice, ci astronomice, care cuprind însă şi un conţinut matematic. În acest timp, cînd Babilonul nu mai era centrul politic, dar rămăsese focarul de cultura al Marelui Imperiu, în care împreună cu populaţia locală veche s-au amestecat perşii, evreii, grecii şi indienii, matematica a început să servească mai puţin construcţiilor şi mai mult astronomiei. Ea rezolva probleme mai complicate şi opera cu numere „astronomice", enorme pentru acel timp, cuprindea măsurarea unghiurilor şi primii germeni ai trigonometriei.

Şcolile de scribi sumero-babiloniene. Izvoarele. La fel ca şi egiptenii, sumerienii şi babilonienii aveau o castă specială de scribi. Ca şi meşteşugurile, profesia de scrib se transmitea din tată în fiu, iar pregătirea se făcea într-o şcoală de scribi, în „casa tăbliţelor". Aici se învăţau cititul, scrisul şi socotitul; predarea şi reducerea la învăţarea pe de rost aveau, ca şi întreaga viaţă a societăţii sclavagiste timpurii, un caracter extrem de dogmatic.

Din epoca sumeriană, cu 2000 de ani î.e.n., s-a păstrat o lucrare foarte populară în acel timp (au fost regăsite din ea 21 de tăbliţe şi fragmente; lucrarea este citată în catalogul literaturii sumeriene contemporane cu ea), care descrie viaţa unui elev din „casa tăbliţelor" [62]. Din acest document aflăm că principala preocupare în şcoală erau calculul, socotitul şi evidenţa; că, mai departe, elevul transcria pe tăbliţe modele de exerciţii, care erau apoi aruncate; că acesta căpătînd o lecţie trebuia să „rezolve pătrate" (probabil să rezolve probleme în care necunoscutele intrau la pătrat — după terminologia actuală, ecuaţii pătratice) şi, în sfîrşit, că în şcoală se ocupau şi de desen.

Primele tăbliţe cuneiforme cu conţinut matematic, descoperite la mijlocul secolului trecut, au permis să se stabilească numai trăsăturile principale ale matematicii din Mesopotamia antică.

La început savanţii din Europa occidentală au interpretat cu totul greşit aceste texte ca fiind religioase, conţinînd „numere magice". În realitate însă, majoritatea covîrşitoare a acestor texte — sute de mii de tăbliţe — aveau directă legătură cu activitatea economică a vechilor popoare din Mesopotamia. A fost descoperită biblioteca regelui asirian Assurbanipal (secolul al VII-lea î.e.n.) care conţine printre 20 000 de diferite tăbliţe

Fig. 3. Text cuneiform din colecţia babiloniană a Universităţii Yale. Figura reprezintă un pătrat cu diagonalele sale. Latura este egală cu 30 (numărul este scris deasupra laturii superioare din stînga). Pe diagonală este scris numărul ce exprimă raportul dintre diagonală şi latura 1, 24, 51, 10; sub diagonală este scrisă lungimea ei 42, 25, 36.

şi tăbliţe matematice datînd din mileniile III—II î.e.n. Începînd cu 1916, asiriologul francez F. Thureau-Dangin [63], iar din 1929 specialistul german în istoria matematicii O. Neugebauer [64], [65] au descifrat şi au publicat un mare număr de texte matematice cuneiforme, care dau o imagine mai completă asupra matematicii sumerienilor, akkadienilor şi babilonienilor şi totodată mai completă decît aceea pe care ne-o putem face asupra matematicii egiptenilor antici. Dacă ţinem seama că din circa o jumătate de milion de tăbliţe, existente în muzeele diferitelor țări (și care formează numai o parte din ceea ce este îngropat sub ruine), au fost descifrate numai aproximativ 300 ce conțin texte matematice, ne vom convinge cît de departe sîntem încă de o imagine completă a gîndirii matematice a vechilor popoare din Mesopotamia.

Sistemul de numerație. Sistemul de numerație al sumerienilor și scrierea numerelor se dezvoltau împreună cu întreaga lor cultură, concomitent cu dezvoltarea întregii lor scrieri. Ei scriau cu un bețișor de trestie ascuțit, apăsîndu-l pe o tăbliță de argilă. Inițial cifrele erau reprezentate prin apăsarea unui capăt rotund: cînd stiletul se punea sub un unghi ascuțit, se obținea elipsa  — semnul unității; sub un unghi drept rezulta cercul  — semnul pentru zece. Mai tîrziu au început să folosească un capăt ascuțit al stiletului și semnul unității a devenit semnul cuneiform simplu , semnul lui zece , semn cuneiform obținut prin apăsarea unui stilet prismatic înclinat.

Sumerienii foloseau în calcule sistemul sexagesimal; în unele cazuri foloseau și sistemul zecimal. În afară de aceasta, notarea numerelor prin cifre se făcea consecvent numai în textele de matematică și de astronomie, în timp ce pentru indicarea datelor, a cantităților de greutate, a mărimii ariilor ș.a., foloseau un procedeu mixt, scriind de exemplu 225 ca „2 *me* 25", unde *me*[1] însemna „o sută".

La început, pentru notația ordinelor superioare, ei foloseau semnele ordinelor inferioare scrise în formă mărită. Astfel, un semn mare pentru 10 însemna 100, iar în sistemul sexagesimal — 60. Două astfel de semne, puse unul alături de celălalt,  însemnau 120, iar dacă la mijloc stătea încă semnul 10, atunci  însemnau 1 200. În sfîrșit, un semn foarte mare

[1] Transcrierile din sumeriană se dau cu caractere antiqua, cele din akkadiană cu italice, iar ideogramele a căror citire nu este dezvăluită cu majuscule. — *N.T.*

pentru 10 însemna 3 600. În textele nematematice, folosind sistemul zecimal, 100 se scria prin semnul , 1 000 ca , iar 10 000 ca . Treptat însă, o dată cu simplificarea ulterioară și stabilirea uniformității scrierii, deosebirea dintre semnele mari și mici s-a pierdut și în cele din urmă au rămas numai două semne  și . În modul acesta, faptul că diferitele ordine au încetat să mai fie scrise prin simboluri deosebite a dus la apariția sistemului pozițional, care a jucat un rol enorm în dezvoltarea culturii umane.

Cu ajutorul repetării semnelor  și , se făcea scrierea tuturor numerelor. Astfel 21 se scria  adică se foloseau adunarea și înmulțirea. De altfel, uneori se folosea și scăderea; de exemplu, în locul lui 19 se scria 20—1 ; aici  se citea ca *lal* avînd semnificația termenului „fără“. Mai tîrziu, babilonienii, la fel ca și egiptenii, au început să grupeze semnele, însă nu cîte 4, ci cîte 3, scriind 19 ca ; și mai tîrziu încă, în epoca Seleucizilor, același semn s-a redus la  Sensul scrierii era inițial de sus în jos, iar mai tîrziu de la stînga la dreapta. Mai întîi se puneau ordinele superioare, iar apoi cele inferioare.

Astfel, se notau toate numerele pînă la 59 =  inclusiv. Numărul 60 se nota prin același semn ca și 1 =  și nu prin repetarea de 6 ori a semnului  = 10. Pentru a scrie, de exemplu, 65 se adăuga, la semnul lui 60, în dreapta semnul lui 5 și pentru a nu citi toate acestea ca 1 + 5 = 6, se lăsa între aceste semne un interval: . Analog numărul 120 = 2 × 60 se scria prin acelaşi semn ca şi 2, numărul 180 — ca 3 ş.a.m.d.; în acelaşi mod se scriau şi numerele ce depăşeau $60^2 = 3\,600$, de exemplu numărul $10\,921 = 3 \times 60^2 + 2 \times 60 + 1$ se scria astfel .

Evident, acest procedeu de scriere nu era univoc; expresia cuneiformă de mai sus reprezintă şi un număr de 60 de ori mai mare, adică 655 260 şi în general valoarea $60^k \times 10\,921$. Mai mult, acelaşi procedeu servea şi la notarea fracţiilor, deşi pentru fracţiile $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ şi $\frac{2}{3}$ existau şi semne speciale: ,  şi .

Prin urmare, semnul  putea să însemne şi $\frac{1}{60}$, şi în acest caz o succesiune de cifre reprezenta numărul $3 \times 60 + 2 \times 1 + \frac{1}{60} = 182\frac{1}{60}$; însă semnul  putea însemna şi $\frac{1}{60^2}$, şi în acest caz aceeaşi succesiune de cifre reprezenta numărul $(3 \times 60^2 + 2 \times 60 + 1) : 60^2$. Valoarea reală a numărului se determina după sensul problemei. Astfel, în acest sistem nu se putea exprima semnificaţia absolută a numerelor şi deci el nu poate fi considerat ca un sistem poziţional riguros. În fară de aceasta, deoarece în acest sistem nu exista un semn pentru ordinele absente, numărul

 putea fi citit nu numai ca $13 \times 60 + 6 = 786$,

ci şi ca $13 \times 60^2 + 6 = 46\,806$ sau ca $13 + \frac{6}{60}$ etc. Acest neajuns nu apare în scrierea numerelor de la 1 la 59, iar pentru numerele pînă la 3 600 semnul ordinului absent era necesar numai de 59 de ori.

Ulterior, în textele de mai tîrziu ordinele absente au început să fie notate prin semnul . Acest semn a fost utilizat analog punctului nostru, care se punea între propoziţii. Astfel, numărul $13 \times 60^2 + 6$ se scria, spre deosebire de $13 \times 60 + 6$, astfel: . Semnul , care se întîlneşte numai în textele mai recente decît anul 1500 î.e.n., nu se punea nici mai tîrziu la sfîrşitul numerelor. Cu tot caracterul său semipoziţional, sistemul sexagesimal al sumerienilor şi babilonienilor prezenta mari avantaje în efectuarea calculelor: în particular, împărţirea se efectua în acest sistem la fel ca în sistemul nostru zecimal. Nu erau necesare nici un fel de reguli speciale pentru operaţiile cu fracţii. La fel ca şi cu fracţiile zecimale, toate operaţiile cu fracţiile sexagesimale se făceau la fel ca şi cu numerele întregi, doar în rezultatul obţinut trebuia indicat ordinul[1].

Sistemul de numeraţie sexagesimal babilonian a ajuns să fie folosit, după cum vom vedea, de către astronomii statelor elenistice chiar şi mai tîrziu. De aici, el a trecut la noi şi se foloseşte şi în prezent la măsurarea unghiurilor şi a timpului.

Cu privire la cauza apariţiei sistemului de numeraţie babilonian au fost mai de mult emise ipoteze variate. Unii presupuneau că numărul 60 a fost ales drept bază a sistemului de numeraţie, deoarece el are mai mulţi divizori decît alte numere mai mici. Alţii afirmau că acest sistem are o origine astronomică: babilonienii ar fi introdus pentru comoditatea calculului anului lor de 360 zile, sistemul sexagesimal, care le servea şi pentru împărţirea comodă a cercului. La această ipoteză însă a trebuit să renunţe chiar autorul ei — M. Cantor [21, vol. I], cînd s-a lămurit că sumerienii cunoşteau numai anul solar de 365 zile şi anul lunar de 354 sau 355 zile. Apoi a fost emisă ipoteza conform căreia sistemul sexagesimal a apărut prin fuziunea a două sisteme: unul cu baza 6 şi altul cu baza 10, dintre care primul ar fi existat la sumerieni, celălalt la akkadieni. Dar această ipoteză nu a fost confirmată de faptele istorice.

Neugebauer [66] a propus o variantă a acestei ipoteze, plecînd de la sistemul de măsuri care exista la babilonieni, şi anume: 1 talant = 60 mine, 1 mină = 60 şekeli. Acest sistem de greutăţi (şi împreună cu el şi sistemul monetar, deoarece greutatea argintului servea ca unitate monetară), conform ipotezei lui Neugebauer, a apărut din reunirea a două sisteme zecimale de greutăţi (al sumerienilor şi al cuceritorilor lor — akkadienii), avînd fiecare unitatea sa fundamentală proprie de greutate: unul — mina *(ma-na)*, celălalt — şekelul *(šiqlu)*. O dată cu apariţia statului unic, între cele două unităţi s-a stabilit raportul 60 : 1, care corespundea aproximativ greutăţilor lor, iar apoi acest sistem de măsuri s-a generalizat în toate procedeele de calcul.

---

[1] Ceea ce corespundea la stabilirea locului virgulei zecimale în sistemul actual. — *N.R.*

Dar nici această ipoteză nu poate fi susținută cu certitudine. I.I. Timcenko (vezi [11]) și I.N. Veselovski [67] considerau că originea numărului 60 ca bază a sistemului de numerație trebuie căutată în număratul pe degete. În ceea ce privește modul de scriere pozițional, Vaselovski explică originea lui prin tehnica calculelor. Dar și această ipoteză este o simplă conjectură.

Recent, H. Lewy [68] a emis o nouă ipoteză. Studiul textelor sumeriene cu caracter economic, recent descoperite, a arătat că ei aveau un sistem sexagesimal de numerație și un sistem de măsuri (lungimi, arii și capacități), zecimal; măsurile de greutate lipseau complet. Schimbul nu se făcea prin compararea greutăților, ci pe baza comparării capacităților. Măsurile de volum și de arie sînt cele mai vechi, primele serveau la măsurarea proviziilor; celelalte — la măsurarea terenurilor agricole. Era nevoie de măsurarea ariilor pentru determinarea cantității de grîne necesare la semănat și la evaluarea recoltei. Fiecare măsură de arie era considerată ca bază a unui paralelipiped dreptunghiular cu înălțimea de un cot. Această măsură de capacitate avea aceeași denumire ca și măsura ariei, ce stătea la baza ei.

Chiar din momentul apariției agriculturii, cîmpurile dreptunghiulare erau măsurate cu ajutorul pașilor, iar cîmpurile de formă neregulată, prin lungimea perimetrului lor. Mai tîrziu, s-a introdus circumscrierea unui dreptunghi în jurul cîmpului și, măsurîndu-se și înmulțindu-se între ele lungimea și lățimea acestuia, se scădea din rezultat aria fîșiilor de prisos. Aceasta din urmă nu era măsurată direct, ci calculată din cantitatea de grîne folosită pentru semănarea ei, ceea ce era ușurat de existența plugului-semănătoare și de normele cantității de semințe raportate la unitatea de lungime a brazdei și a distanței dintre brazde, stabilite în decurs de milenii. La baza sistemului zecimal al măsurilor de capacitate stătea inițial un *ku* (aproximativ 871 g), rația de orz pe zi a unui sclav matur. Celelalte măsuri se raportau la aceasta în rapoartele 1 : 10 : 100.

Mai tîrziu însă, la baza sistemului măsurilor de capacitate a fost pusă rația pe o lună, și deoarece luna era considerată egală cu 30 zile, această rație lunară era egală cu 30 *ku* = 1 *simdu*. Ambele serii de măsuri s-au reunit apoi într-una singură: 1 *ku*, 10 *ku*, 30 *ku*, 100 *ku*, 3 000 *ku*. În acest șir, în afară de 10, exista deja o a doua unitate, 30, care nu este o putere a lui 10. Mai tîrziu, în timpul regilor akkadieni, cea de-a doua unitate, 30, a fost înlocuită prin alta — 60. Această înlocuire era cerută de trecerea de la alimentarea cu grăunțe coapte la cele măcinate, un aliment mai fin, dar mai puţin hrănitor: de aceea, sclavii căpătau acum raţia lunară de 60 *ku*, normă care înainte era dată numai meseriaşilor şi membrilor societăţii sclavagiste timpurii aflaţi mai sus din punct de vedere social, respectiv s-a dublat în mod corespunzător şi norma semănatului. Astfel, s-a obţinut acum seria de măsuri: 1, 10, 60, 600, 6 000 din care, în afară de înlocuirea lui 30 cu 60, a dispărut măsura 100. În sfîrşit, cea de-a doua unitate 60 a început să fie considerată drept „marea unitate" şi seria s-a transformat în sistemul de numeraţie sexagesimal babilonian 1, 10, 60, 600, 3 600 cu două unităţi 10 şi 60. Cercetările lingvistice arată că trecerea de la sistemul zecimal la cel sexagesimal s-a încheiat încă înainte de epoca sumeriană.

Operaţiile aritmetice. [57], [69], [70]. Spre deosebire de egipteni care, după cum am văzut, în îndreptarele lor pentru şcoală treceau schemele de calcul, babilonienii indicau numai rezultatele calculelor. Astfel, de exemplu, ei scriau: „1 10 şi 26 40 sînt adunate şi se obţine 1 36 40", ceea ce în notaţia noastră trebuie citit astfel: $1\times60^2+10\times60+26\times60+40=1\times60^2+36\times\times60+40$. Scăderea se efectua la fel ca adunarea.

Spre deosebire de egipteni, care reduceau înmulţirea la dublare, babilonienii o efectuau direct, operînd la fel ca şi noi, ordin cu ordin. Deoarece însă în acest scop trebuiau să ţină minte tabla de înmulţire de la 2×2 pînă la 59×59, formată din 1 711 produse, ceea ce este practic imposibil, ei recurgeau la table de înmulţire, gata confecţionate. Fiecare dintre aceste table conţinea produsul unui număr dat „cap de coloană" cu toţi factorii de la 1 pînă la 20, precum şi cu 30, 40 şi 50. Tablele nu erau alcătuite pentru toate numerele date drept capete de coloană de la 1 la 59, ci numai pentru numerele ce nu aveau alţi divizori în afară de 2, 3, 5, cu o singură excepţie: numărul 7 era de asemenea cap de coloană, datorită cărui fapt toate numerele din primul 10 erau capete de coloană. În afară de tablele de înmulţire, erau larg răspîndite tabelele valorilor reciproce. Dăm primele două şi ultimele două rînduri dintr-un astfel de tabel, înlocuind semnele cuneiforme cu semnele noastre:

2	30
3	20
....	
1 20 45	
1 21 44 26 40	

sau în transcriere actuală:

$$\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$$

. . . .

$$\frac{1}{80} = \frac{45}{60^2}$$

$$\frac{1}{81} = \frac{160\,000}{60^4}$$

Este remarcabil faptul că pentru valoarea reciprocă a lui 7 tabelul indică valoarea aproximativă de 8 34 17 8 34 17, adică fracția sexagesimală periodică $\frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{17}{60^3} + \frac{8}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{17}{60^6}$, care nu era întreruptă la nimereală, ci numai după două perioade. Alături de aceasta s-a găsit un tabel care conține expresiile aproximative ale valorilor reciproce ale numerelor 7, 11, 13, 14 și 17 cu ajutorul unei fracții sexagesimale finite; în tabel este indicat, de exemplu, că 8 34 16 59 este mai mic, iar 8 34 18 mai mare decît valoarea reciprocă a numărului 7. Pe de altă parte, într-o serie de tabele de valori reciproce, se menționa pur și simplu că numărul 7 nu are valoare reciprocă (adică nu se exprimă printr-o fracție sexagesimală finită). Este evident că aceste tabele aparțin diferitelor nivele istorice de dezvoltare a matematicii babiloniene, care la sfîrșit a izbutit să ajungă la ideea procesului aritmetic periodic infinit.

Tabelele de valori reciproce serveau la efectuarea împărțirii: se căuta în tabel valoarea reciprocă a împărțitorului, iar apoi se înmulțea cu aceasta deîmpărțitul. În cazul în care tabelul nu conținea valoarea reciprocă, rezultatul era calculat cu aproximație. Mai tîrziu, babilonienii au început să aplice și metoda împărțirii ordin cu ordin, asemănătoare celei de astăzi.

Alături de tablele de înmulțire și tabelele de valori reciproce, existau tabelele de pătrate și de rădăcini pătrate, de cuburi și de rădăcini cubice, de sume de pătrate și de cuburi, de puteri ale unui număr dat, și chiar tabele de valori pentru o anumită putere.

Probleme de aritmetică și rezolvarea lor. Problemele ce se întîlnesc în textele matematice cuneiforme se referă la perioade istorice diferite dintr-un interval de aproximativ 1 500 de ani. Ele sînt eterogene atît prin conținutul lor, cît și prin felul expunerii și prin nivelul gîndirii matematice. Unele tăblițe conțin problema împreună cu rezolvarea ei completă, altele însă numai condițiile problemelor. Uneori, datorită caracterului înghesuit al scrierii cuneiforme și a conciziei extreme a expunerii, circa 200 de astfel de probleme încap pe cele două fețe ale unei tăblițe de 8×4 cm^2. Datele numerice în problemele luate din practică, sau care imită probleme practice, sînt astfel alese, încît să ușureze calculul cu ajutorul tabelelor. Problemele cu numere abstracte sînt, de regulă, grupate astfel încît încep cu cele simple și trec la cele mai complicate referindu-se totuși la un același tip. De exemplu, este dat un șir întreg de probleme în care se cere să se determine două numere, astfel încît produsul lor, $x \cdot y = 600$ și să satisfacă o a doua condiție, care este dată prin expresii din ce în ce mai complicate începînd cu $x + y = 50$ și pînă la

$$(3x + 2y)^2 + \frac{2}{13}\left\{ 4\left[\frac{1}{2}(x + y) - \left(\frac{1}{2} + 1\right)(x - y)\right]^2 + (x+y)^2\right\} = 17\,100.$$

toate aceste probleme avînd soluția $x = 30$, $y = 20$. De aici se vede că pentru autor era neesențial dacă elevul știa rezultatul, atenția principală fiind acordată însușirii metodei de rezolvare.

În toate problemele, la fel ca și la egipteni, apar numai numere concrete, însă incontestabil autorul viza cazul general. Această tratare generalizatoare este indicată și de faptul că înmulțirea se făcea și în cazul în care factorul era egal cu unu și că acolo unde noi scriem $x + y$ babilonienii scriau, de exemplu, „5 + 3 — suma lățimii și a lungimii".

La acest procedeu abstract, generalizator de gîndire, contribuia întregul caracter al scrierii babilonienilor. Împrumutînd scrierea cuneiformă de la sumerieni, folosind limba lor în știință și în activitatea economică în decurs de multe secole, babilonienii pronunțau totuși hieroglifele sumeriene în felul lor, păstrînd însă sensul acestora. Datorită acestui fapt, din moment ce un același simbol putea avea diferite semnificații fonetice (sumeriană și babiloniană), nu era greu de însușit ideea că, de exemplu, „lățimea" este nu numai lățime, ci, în general, și orice mărime abstractă necunoscută. În modul acesta, nu mai rămînea mult pentru a se ridica pînă la treapta următoare de abstracție, pînă la algebră, însă au trebuit să se creeze condiții istorice cu totul diferite pentru ca această posibilitate să se transforme în realitate.

Printre problemele de aritmetică există multe relative la calcularea dobînzii (mai tîrziu, în Roma antică, apoi în Veneția, cînd dobînda era raportată la suta, s-a început să se vorbească de „procente"), pe care cămătarii babilonieni o calculau la fiecare 60 de unități, și anume pe an: 12 șekeli la 1 mină (adică la 60 de șekeli). În probleme se cere ca, fiind dată valoarea dobînzii pe un an, să se determine mărimea capitalului inițial; să se găsească capitalul după adaugarea dobînzii și, în raport cu dobînda, determinarea numărului de ani în care capitalul inițial crește pînă la o sumă dată etc. Astfel de probleme erau rezolvate aritmetic, pas cu pas, utilizîndu-se construirea și compararea unor progresii aritmetice și geometrice.

Asemenea progresii, la fel ca și la egipteni, au apărut și în probleme relativ la împărțirea sumelor de bani. Astfel, de exemplu, se cerea să se împartă $1\frac{2}{3}$ mine de argint între 10 frați, astfel încît cotele-părți ale fraților să formeze o progresie aritmetică, știind că cota celui de-al optulea frate este egală cu 6 șekeli.

Problema era rezolvată astfel: la început se determina cota-parte ce revenea fiecărui frate în medie, adică 10 șekeli; apoi suma cotelor fraților 8 și 3 (20 de șekeli). Mai departe, surplusul cotei fratelui 3 asupra cotei fratelui 8 (8 șekeli) și, în sfîrșit, surplusul căutat, adică diferența cotelor progresiei date. Rezolvarea care se făcea pe cale aritmetică, după un plan gîndit, presupunea cunoașterea proprietăților progresiei aritmetice, însă nu se foloseau formule algebrice sub formă explicită. Problemele de progresie geometrică, precum și cele în care este determinată suma pătratelor numerelor, prescripția după care se făcea calculul, indică cu toată claritatea că matematicianul babilonian cunoștea regulile generale de sumare a progresiilor aritmetice și geometrice, precum și a pătratelor numerelor.

Probleme de geometrie. Printre problemele pe care babilonienii le rezolvau de asemenea pe cale aritmetică, fac parte și cele privind determinarea lungimilor și ariilor de împărțirea parcelelor de teren, sau a volumelor excavate la săpături, a dîmburilor și a construcțiilor și calculul numărului de oameni necesari pentru lucrările de teren sau lucrări de construcție. Acestea sînt probleme de geometrie pe care apoi le rezolvăm cu ajutorul ecuațiilor de gradul întîi (liniare) cu o singură necunoscută sau sisteme de ecuații liniare cu mai multe necunoscute. Însă babilonienii operau, chiar atunci cînd numărul necunoscutelor ajungea pînă la 5, numai cu mărimile cunoscute date și nu cu mărimile necunoscute, așa cum se obișnuiește în algebră. Aceasta metodă (algebrică) era folosită de ei în probleme, luate tot din geometrie, care duceau, exprimîndu-ne în limbajul actual, la ecuații pătratice sau la ecuații de grad mai înalt.

Așa-numita „teoremă a lui Pitagora" era cunoscută babilonienilor cu peste 1 000 de ani înaintea lui Pitagora. Babilonienii o foloseau larg și ea servea drept sursă de probleme pentru „ecuații pătratice". De exemplu, se calcula cantitatea de grăunțe necesară pentru însămînțarea unui cîmp de forma unui triunghi isoscel cu laturi date; se determina deplasarea orizontală a capătului inferior al unei bare verticale de lungime dată, atunci cînd capătul ei superior se lăsa cu o cantitate dată, se determina lungimea coardei după săgeata segmentului care o subîntinde și a perimetrului circumferinței luînd $\pi = 3$; se căutau dimensiunile figurilor geometrice (de exemplu, ale unui triunghi dreptunghic, ale secțiunii unui val de apărare, ale împărțirii triunghiului în benzi, „canale", paralele cu baza și altele). S-au găsit și multe tăblițe cu probleme pur geometrice care nu erau îmbrăcate în forma „aplicativă".

Însuși faptul că babilonienii cunoșteau „teorema lui Pitagora" demonstrează că ei aveau cunoștințe geometrice destul de solide. Ei foloseau larg asemănarea figurilor geometrice, de aceea nu este exclus ca această teoremă să fi fost dedusă tocmai cu ajutorul asemănării. Cazurile particulare puteau fi găsite fie pe cale pur aritmetică, examinînd tabelele de pătrate, fie pe cale geometrică intuitivă. De exemplu, din examinarea pătratului format prin adăugarea la un pătrat dat a patru triunghiuri dreptunghice isoscele în care este împărțit pătratul de diagonalele sale (această figură se întîlnea de mult în ornamente, de exemplu, la parchetarea podelelor cu plăci).

Ca exemplu, amintim tăblița care conține figura unui pătrat a cărui latură este notată cu 30, iar diagonalele sînt egale cu $42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$, adică cu produsul lui 30 prin $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$.

Aici ultimul număr este egal cu $\sqrt{2}$ cu o eroare mai mică decît $\frac{22}{60^4}$, adică cu 5 zecimale exacte.

În alte cazuri, se folosea aproximaţia $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{25}{60}$, corectă pînă la 2 zecimale. Un mare interes îl manifestau babilonienii faţă de triunghiurile „pitagoreice", adică triunghiuri dreptunghice, ale căror laturi sînt măsurate de numere întregi. S-a găsit o tabliţă care conţine 15 astfel de triunghiuri (în ea sînt date $\frac{c^2}{a^2}$, b, c, unde $a^2 + b^2 = c^2$), în primul triunghi raportul catetelor fiind egal cu $\frac{59}{60} + \frac{30}{60}$, adică aproapiat de unu, iar ultimul triunghi fiind apropiat de triunghiul cu unghiurile 30 şi 60°. Este evident că astfel de triunghiuri serveau pentru scopuri practice. Totodată, căutarea lor arată profunzimea remarcabilă a babilonienilor în înţelegerea problemelor pe care le considerăm azi ca făcînd parte din teoria numerelor.

„Ecuaţiile" babilonienilor. În rezolvarea „ecuaţiilor pătratice" (aşa cum numim astăzi aceste probleme), babilonienii aplicau procedeul de rezolvare a problemelor abstracte în care necunoscutele erau numite fie „lungime", „lăţime", şi produsul lor „arie", fie „deînmulţit" *(igi)*, iar valoarea reciprocă a acesteia „înmulţitorul" *(igi-bi)*. Dăm un exemplu de astfel de problemă şi de rezolvare a ei.

„Deînmulţitul şi înmulţitorul 2 0 0 33 20. Înmulţeşte cu [0] 30, 1 0 0 16 40. Înmulţeşte 1 0 0 16 40 cu 1 0 0 16 40. 1 0 0 33 20 4 37 46 40. Scade 1 de aici. Rămîne [0 0 0] 33 20 4 37 46 40. Ce trebuie înmulţit cu ce pentru a obţine [0 0 0] 33 20 4 37 46 40? Înmulţeşte [0 0] 44 43 20 cu [0 0] 44 43 20. [0 0 0] 33 20 4 37 46 40; adaugă [0 0 0] 44 43 20 la 1 0 0 16 40·1 0 45 deînmulţitul. Scade [0 0] 44 43 20 din 1 0 0 16 40: [0] 59 15 33 20 înmulţitorul".

Dacă exprimăm această problemă şi cele asemănătoare ei, precum şi rezolvarea lor în notaţia algebrică actuală, obţinem

$$x + \frac{1}{x} = a; \quad x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1}\,; \quad \frac{1}{x} = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1}.$$

Un alt tip de probleme ia în limbajul actual forma $x + y = a$, $x \cdot y = b$; la această „formă normală" se reduc toate problemele babiloniene, chiar şi cele mai complicate pe care le rezolvăm cu ajutorul ecuaţiilor pătratice. Soluţia se obţine în acest caz cu ajutorul unei necunoscute ajutătoare. Din faptul că $x + y = a$, rezultă că cu cît una dintre necunoscute este mai mare decît $\frac{a}{2}$, cu atît cealaltă este mai mică decît $\frac{a}{2}$. Punînd, de aceea, $x = \frac{a}{2} + z$, $y = \frac{a}{2} - z$, obţinem $\left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = b$, de unde $z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.

În modul acesta, deşi babilonienii nu foloseau simboluri algebrice, ei rezolvau totuşi probleme prin metoda algebrică, deoarece rezolvarea urma un anumit plan şi problemele diverse sau reduse prin diferite procedee la un tip unic şi pentru rezolvarea mecanică a acestuia existau reguli generale (jucînd rolul formulelor noastre.) Şi în cazurile în care problemele erau formulate ca probleme geometrice, babilonienii operau cu mărimile ca şi cu numere, adunau „lungimi" şi „arii" fără ca semnificaţia acestora să fie limitată la imaginile spaţiale, fără să lege fiecare transformare separată de interpretarea concretă ce reieşea din datele problemei.

După ipoteza lui Neugebauer [71], procedeul de a introduce o necunoscută ajutătoare a servit babilonienilor şi pentru a obţine regulile de formare a „numerelor pitagoreice".

Deoarece babilonienii nu indicau, în probleme, procedeele de calcul, ci treceau numai rezultatele de-a gata, împreună cu prescripţia, „fă aşa", putem formula ipoteze mai mult sau mai puţin fundamentate asupra felului cum extrăgeau ei rădăcina pătrată din numere. Este posibil ca ei să fi procedat după regula corespunzătoare formulei noastre $\sqrt{a^2 + b^2} \approx a + b^2/2a$, unde a este pătratul perfect cel mai mare cuprins în numărul de sub radical. Este posibil, de asemenea, ca, încercînd să determine valoarea lui $\sqrt{2}$, ei să fi luat ca primă aproximaţie mai întîi pe $\frac{3}{2} = 1 + \frac{30}{60}$ şi verificînd $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 + \frac{15}{60}$ să observe că ea este mai mare; prin urmare $2 : \frac{3}{2} = 1 + \frac{20}{60}$ este mai mică. Atunci ei luau valoarea medie a celor două valori $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{30}{60} + 1 + \frac{20}{60}\right) = 1 + \frac{25}{60}$, care reprezintă una dintre valorile aproximative utilizate de babilonieni. Iterarea acestui proces dădea $\left(1 + \frac{25}{60}\right)^2 =$

$= 2 + \frac{25}{60^2}$, iar aceasta arăta că $1 + \frac{25}{60}$ este o aproximație prin exces; împărțind $2 : \left(1 + \frac{25}{60}\right) = 1 + 2\frac{24}{60} + \frac{42}{60} + \frac{21}{60^3}$, ei obțineau o aproximație prin lipsă și luînd media acestor două obținem $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{25}{60} + 1 + \frac{24}{60} + \frac{42}{60^2} + \frac{21}{60^3}\right) = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$, adică cea de-a doua valoare aproximativă utilizată de babilonieni. Pe aceeași cale a fost obținută posibil aproximația $\sqrt{3} = 1 + \frac{45}{60}$. Aceeași metodă a fost folosită 2 000 de ani mai tîrziu de către Ptolemeu pentru calculul celebrelor sale tabele.

Trebuie să remarcăm că această „metodă babiloniană" de extragere a rădăcinii pătrate poate fi aplicată și pentru determinarea valorii lui $\sqrt[n]{a}$. Dacă b_1 este prima aproximație (găsită prin încercări), atunci scriem $c_1 = \frac{a}{b_1^{n-1}}$, și aproximația a doua va fi $b_2 = \frac{1}{n-1}[(n-1)b_1 + c_1]$. Iterînd acest proces, care — după cum se poate arăta ușor — este convergent, se poate extrage rădăcina cu o precizie oricît de mare, deși pentru scopuri practice chiar b_2 poate furniza o valoare satisfăcătoare.

La babilonieni se întîlneau, de asemenea, probleme pe care noi le rezolvăm cu ajutorul ecuațiilor de gradul trei și tipuri speciale de ecuații de gradul 4, 5 și 6 care pot fi ușor reduse la ecuații pătratice sau cubice. În problemele de acest gen se cere, de obicei, să se determine „lungimea", „lățimea", „adîncimea", „volumul pămîntului săpat", aceste noțiuni fiind însă percepute abstract, ceea ce se vede din faptul că „volumul" sau produsul xyz se adună fără restricții cu „secțiunea", adică cu produsul xy.

Problemele de genul $ax^3 + x^2 = c$ erau reduse la „forma normală" $x^3 + x^2 = d$ și apoi x era determinat cu ajutorul tabelelor de rădăcini ale acestui tip de ecuații. În prezent este încă imposibil a decide după ce s-au ghidat babilonienii realizînd această reducere dacă ei se bazau pe imagini geometrice, așa cum presupun unii istorici ai matematicii, sau dacă judecau pur „algebric", după cum presupun alții. Deocamdată a rămas complet nedescifrat procedeul de rezolvare de către babilonieni a unor ecuații și mai grele, de forma $ax^3 + bx^2 + cx = d$. De asemenea nu este clar cum foloseau ei tabelele rădăcinilor ecuațiilor $x^3 + x^2 = d$.

Nivelul general al matematicii babiloniene. Pînă nu de mult, se considera că cunoştinţele de geometrie ale vechilor babilonieni erau mai prejos decît cunoştinţele lor de aritmetică şi de algebră. Din faptul că în tabelele numerice ale coeficienţilor tehnici datele asupra „cărămizilor", „aramei", „vasului comercial", „orzului", „moştenirii" ş.a.m.d. alternează cu cuvintele „triunghi" şi „segment circular", Neugebauer trăgea concluzia că geometria nu era considerată ca o teorie de sine stătătoare, ci numai ca o sumă de procedee pentru măsurători practice. Se amintea faptul că, alături de formule exacte, se întîlnesc formule doar aproximative. Se credea, de asemenea, că babilonienii considerau lungimea circumferinţei egală cu 3 diametre, ceea ce este mult inferior preciziei cu care lucrau egiptenii.

În anul 1939 însă, în Suza (vechea capitală a Elamului), au fost găsite noi texte cuneiforme cu conţinut matematic, descifrate şi publicate în 1950 de către Bruins. Această nouă descoperire a arătat că cunoştinţele de geometrie ale vechilor babilonieni erau la un nivel înalt. Pe una dintre tăbliţe era rezolvată problema de calcul a razei cercului circumscris unui triunghi isoscel cu baza egală cu 60 şi cu laturile egale cu 50; raza este egală cu $31+\frac{15}{60}$. Pe o altă tăbliţă se caută raza cercului înscris într-un hexagon regulat, de unde rezultă că aici $\sqrt{3}$ este luat egal cu $1+\frac{45}{60}$. Interesul cel mai mare îl prezintă o tăbliţă care conţine o listă a unor coeficienţi tehnici printre care există şi date ce caracterizează un triunghi echilateral, un pătrat, pentagon, hexagon şi heptagon şi cerc. Din tăbliţă rezultă că babilonienii foloseau aici următoarea valoare aproximativă:

$$\pi \approx 3+\frac{17}{60}+\frac{30}{60^2}, \text{ adică } \pi \approx 3{,}125.$$

Într-una dintre probleme se cere să se împartă un triunghi dreptunghic într-un triunghi asemenea lui şi într-un trapez, astfel încît produsele părţilor laturilor, precum şi produsele părţilor ariilor să fie mărimi date, ipotenuza triunghiului mai mic fiind dată. Este remarcabil faptul că produsul ariei cu o arie nu putea fi nicidecum prezentat senzorial-intuitiv, ceea ce înseamnă că afirmaţia asupra gîndirii algebrice abstracte dezvoltate a babilonienilor nu poate fi contestată. Una dintre tăbliţe conţine de asemenea o problemă care conduce, exprimîndu-ne în limbajul modern, la o ecuaţie de gradul 8, în timp ce înainte ne erau cunoscute numai probleme conducînd cel mult la ecuaţii de gradul 6.

Noile documente, al căror număr creşte mereu, arată clar că nivelul cunoştinţelor de matematică ale babilonienilor a fost mult mai înalt decît a părut mai înainte, pe baza doar a unui număr mic de descifrări corect interpretate.

Comparînd matematica Mesopotamiei antice cu matematica Egiptului antic, observăm că o dată cu specificul său — deosebirea în sistemul de numeraţie şi în tehnica de calcul — în ştiinţa celor două ţari existau multe trăsături comune, datorită condiţiilor economice şi sociale asemănătoare ce domneau în ele. În ambele state se rezolvau probleme cerute de necesităţile irigaţiei, agriculturii, construcţiilor, evidenţei contabile şi relaţiilor de proprietate, precum şi de măsurare a timpului. Problemele erau expuse dogmatic, fără fundamentări şi fără demonstraţii, deşi este absolut evident că rezultatele nu puteau fi obţinute în mod exclusiv pe cale empirică, ci presupuneau o gîndire teoretică. Astfel, pe măsură ce s-au găsit noi documente istorice, necunoscute înainte, s-au schimbat şi concepţiile noastre asupra nivelului cunoştinţelor de matematică al babilonienilor. Acest nivel s-a dovedit a fi cu mult mai înalt decît se considera înainte, inclusiv în domeniul geometriei. Există, de aceea, temei pentru a admite că şi aprecierea noastră asupra matematicii egiptene, bazată pe izvoare foarte sărace, va fi găsită incompletă atunci cînd vor fi descoperite noi date.

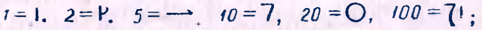
Metoda algebrică de gîndire, pregătită încă în sînul aritmeticii şi geometriei elementare în societatea sclavagistă timpurie, a trecut apoi, împreună cu alte moşteniri culturale, de la cele două mari popoare ale Orientului antic la indieni şi greci (posibil şi în China), iar de aici, prin mijlocirea arabilor şi a popoarelor Asiei Mijlocii, la popoarele Europei.

Matematica altor popoare din Orientul Apropiat. Arheologii au descoperit în partea de nord-est a Mesopotamiei monumente datînd din cel de-al patrulea mileniu î.e.n., aparţinînd unei culturi vechi pentru care sînt caracteristice ornamente geometrice pe vase de argilă. Mai tîrziu s-a format aici un puternic stat sclavagist asirian, care şi-a atins înflorirea la mijlocul celui de-al doilea mileniu î.e.n. şi în secolele IX-VII. Asiria, stat mare, care şi-a supus nenumărate popoare vecine şi a făcut comerţ cu ţări îndepărtate, dispunea de o tehnică puternic dezvoltată, arhitectură, armate de geniu speciale, o organizare a comunicațiilor de stat, o tehnică admirabil organizată a construirii șoselelor, un sistem minuțios elaborat de impozite pentru care se făcea periodic un recensămînt al populației și al averii. Este clar că fără cunoștințe matematice dezvoltate aceste realizări culturale ar fi fost imposibile. Asirienii foloseau moștenirea sumerienilor și cultura babiloniană, inclusiv în domeniul matematicii. Problema contribuției proprie asirienilor în matematică nu a fost încă îndeajuns studiată.

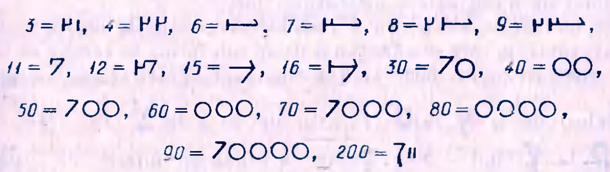
La fel stau lucrurile și cu alte popoare vechi care au format state sclavagiste timpurii în Orientul Apropiat. Astfel sînt hitiții care populau partea de răsărit a Asiei Mici și Siria de nord, unde, începînd cu al treilea mileniu î.e.n., ei au format un mare stat sclavagist cu orașe mari. Documentele hieroglifice, iar apoi cuneiforme ale hitiților, descifrate de cunoscutul savant ceh B. Hrozný, ne arată că în legislația secolului XIV î.e.n. exista echivalentul, stabilit de stat, al unităților în greutate de metal, și anume:

„240 unități de greutate de aramă = 4 mine de aramă = 1 șekel de argint", ceea ce ne arată clar că hitiții foloseau sistemul de numerație sexagesimal preluat de la sumerieni și babilonieni.

În Siria și Fenicia, unde au apărut în al treilea mileniu î.e.n. state sclavagiste cu meșteșuguri dezvoltate, cu comerț maritim și comerț pe uscat, existau scrierea alfabetică și sisteme de numerație nepoziționale. În sistemul sirian existau semnele speciale:



prin combinația lor se formau semnele celorlalte numere, de exemplu:



În numerația fenicienilor existau semnele speciale:

din care se formau semnele celorlalte numerale, acestea fiind grupate cîte 3; astfel se scriau:

2 = ||, 3 = |||, 4 = \|||, 5 = || |||, 6 = ||| |||, 7 = \||| |||,

8 = || ||| |||, 9 = ||| ||| |||, 11 = |¬, 12 = ||¬, 15 = || |||¬,

16 = ||| |||¬, 30 = ¬H, 40 = HH, 90 = ¬HHHH, 200 = P||

Sistemul fenician de numerație are, se pare, origine comună cu cel babilonian. Aceasta o arată asemănarea semnelor pentru 1 și 10 (faptul că semnele pentru 10 sînt orientate în sensuri diferite se explică prin aceea că babilonienii scriau de la stînga la dreapta, iar fenicienii de la dreapta la stînga), sistemul fenician fiind probabil mai vechi. Semnul lui 1 reprezenta, se pare, un deget, iar semnul lui 10 cele două mîini, semnul lui 20 „un om întreg“ (acest semn era părăsit de babilonieni). Este posibil ca la babilonieni să fi existat un semn analog semnului fenician pentru 100, care poate însemna 60 (dacă în sistemul de numerație fenician excludem semnul pentru 100, se obține un sistem pozițional).

Scrierea pozițională (ca și în alte limbi semitice, în limba feniciană se scriau numai consoanele) a provenit din scrierea hieroglifică care a apărut sub influența scrierii egiptene. Din literele feniciene au apărut apoi literele evreiești, arabe și grecești, iar din acestea din urmă literele latine și slavone. În modul acesta, fenicienilor le aparține una dintre cele mai mari contribuții la cultura mondială: crearea alfabetului.

Fenicienii și vechii evrei (înrudiți cu primii), în statele cărora scribii jucau un rol important, foloseau împreună cu scrierea alfabetică și notația alfabetică a numerelor, bazată pe sistemul zecimal de numerație a alfabetului lor.

În numerația alfabetică a vechilor evrei cele 22 de litere ale alfabetului (la care se adăugau 5 litere sub forma în care se scriau la sfîrșitul cuvintelor), erau tocmai suficiente pentru notația cifrelor: de la א la ט (1 — 9), de la י la צ (10 — 90), de la ק la ץ (100 — 900); pentru a distinge cifrele de litere, deasupra literelor cu semnificație numerică se punea un punct. Numerele 1 000 și mai mari ca 1 000 erau notate cu aceleași litere ca 1 și 2, adică א, ב, ș.a.m.d., însă deasupra lor se puneau două puncte sau ↓ –litera inițială a cuvîntului *șinaim* (doi); de exemplu א̌. Astfel, de exemplu, numărul 1 119 se scria, ținînd seama de scrierea de la dreapta la stînga, astfel ט י ק א̌

Acest procedeu de scriere a numerelor permitea să se asocieze fiecărui cuvînt o anumită valoare numerică, fapt pe care a fost construită mai tîrziu mistica cabalistică a numerelor *(gematria)*. Astfel, de exemplu, coincidența întîmplătoare: suma semnificațiilor numerice ale literelor cuvîntului *an* ה נ ש dădea 355, ceea ce coincidea cu numărul de zile din anul lunar antic al evreilor, era considerată ca o manifestare a providenței divine.

Vechii evrei au împrumutat cunoștințele matematice de la babilonieni și egipteni. Π, așa cum arată Vechiul Testament, era considerat ca fiind egal cu 3. Astfel, povestind despre palatul regelui Solomon, cartea a treia a Împăraților (cap. VII, versetul 23) spune: „Și a făcut mare turnată din aramă — de la marginea ei pînă la margine sînt zece coți, și un șnur de treizeci de coți o cuprinde de jur împrejur". Despre aceeași „mare de aramă", dar acum nu la palatul lui Solomon, ci la templul construit de acesta, se vorbește aproape cu aceleași cuvinte și în a doua carte Paralipomenon (cap. IV, versetul 2).

Matematica babiloniană a fost preluată și de vechii locuitori ai Iranului. Vechii locuitori ai Peninsulei Apeninilor (etruscii) aveau, alături de scrierea obișnuită, o notație specială pentru numere. Existau și germeni ai matematicii elementare, însă latura matematică a culturii lor este puțin studiată.

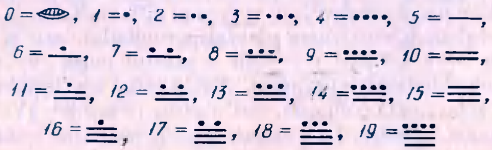
Pentru a păstra integritatea expunerii vom omite aici matematica din India și China antică, care sînt tratate în a doua carte. Ne vom opri încă asupra poporului maya, care ajunsese la o remarcabilă cultură.

Matematica și numerația la poporul maya [72, 73, 74]. În America centrală, în Peninsula Yukatán din Golful Mexic, poporul indian maya a trecut cam în primul mileniu î.e.n. la agricultură extensivă, la cultivarea plantei porumbului, care a devenit adevărata bază a vieții materiale a acestui popor, de unde își trage și numele [maïs—porumb]. Mai tîrziu, s-a format aici o societate sclavagistă timpurie, care a atins în secolele IV—VI e.n. cea mai mare înflorire. Ea a existat pînă la cuceririle spaniole din

1527—1697. Statul Maya era condus de către preoți supremi, suverani ereditari. Uneltele lor erau de lemn și de piatră, iar metalul servea numai pentru ornamente. Roata nu era folosită nici în olărit, nici la căruțe. Meșteșugurile, comerțul și alte îndeletniciri ale poporului maya au realizat însă mari progrese și s-au acumulat remarcabile cunoștințe științifice. Existau circa zece mari orașe cu palate și temple din piatră sub forma unor piramide în trepte, ce atingeau 45 m înălțime, servind și ca observatoare. A fost mult dezvoltată medicina și, în special, astronomia. Forma deosebită a agriculturii poporului maya necesita o determinare precisă a timpului lucrărilor agricole: tăierea pădurilor, arderea (aceasta trebuia să coincidă cu anotimpul uscat care apărea acolo în martie-aprilie) ș.a.m.d. Cu patru milenii î.e.n., la poporul maya exista un calendar și numărarea zilelor se făcea cu o mare precizie. Scrierea poporului maya era hieroglifică, însă — păstrînd încă unele trăsături ale scrierii iconografice — se găsea pe o treaptă de dezvoltare mai primitivă decît scrierea egipteană, care trecea deja la o scriere fonetică.

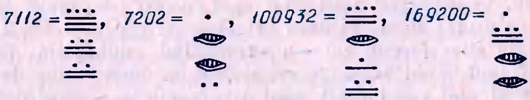
În secolul al IV-lea î.e.n., adică cu 1600 ani înainte de secolul al XII-lea, cînd în Europa a început să se răspîndească sistemul pozițional — poporul maya preda un sistem pozițional de numerație cu baza 20 avînd un semn special pentru zero. Numeralele erau scrise în două moduri: fie sub forma unor hieroglife, fie cu ajutorul unor puncte și liniuțe. Acest al doilea mod servea pentru numărare și, în primul rînd, pentru efectuarea calculelor calendaristice; el avea un semn pentru zero avînd baza 20 și păstrînd încă urmele unui sistem mai vechi cu baza 5. Etnografii citează ultimul fapt ca unul dintre argumentele care demonstrează că poporul maya, ca și în general indienii, a migrat din timpuri imemorabile în America, trecînd strîmtoarea Bering, din Asia de nord-est, unde locuitorii au păstrat pînă astăzi în limbile lor sistemul de numerație cu baza 5.

Semnul zero era reprezentat în sistemul maya sub forma unei scoici (și nu sub forma unui „ochi închis“, așa cum era interpretat greșit înainte acest semn) și primele 19 numere se scriau astfel:



Erau folosite, așadar, numai trei semne și dintre operații numai adunarea. Ca și întreaga scriere maya, numerele se scriau în coloane care mergeau de la dreapta la stînga, și anume de jos în sus, plecînd de la ordinele inferioare la cele superioare. În fiecare ordin, aceleași semne aveau o valoare de 20 de ori mai mare decît în cel precedent; prin urmare scrierea se făcea, de exemplu, astfel:

În al treilea ordin însă, dar numai la calcularea timpului, se făcea o excepție: unitatea a treia se lua nu de 20 de ori, ci de 18 ori mai mare decît a doua, deci de 360 ori mai mare decît prima unitate, ceea ce era mai apropiat de durata anului, decît de 20^2. Astfel se obținea, de exemplu:

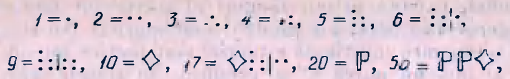


Cel mai mare număr notat în acest procedeu și regăsit în puținele monumente scrise ale culturii poporului maya (majoritatea lor scrise pe scoarță de copac au fost arse în mod barbar de către cuceritorii spanioli, care considerau toate valorile culturale ale poporului maya drept o vrăjitorie satanică, păgînă) este egal cu 1 841 641 600 de zile sau 5 042 277 de ani. Pentru scrierea fracțiilor, poporul maya fie că nu avea semne, fie că ele nu au ajuns pînă la noi.

Semnele numerice hieroglifice erau reprezentate sub forma unor capete de zei a 13 luni ale anului sfînt *tțolkin* care număra $13 \times 20 = 260$ zile, spre deosebire de anul civil *haab* care avea $18 \times 20 = 360$ plus 5 zile de încheiere. În afară de aceasta exista și o hieroglifă pentru zero. Acest sistem era într-un anumit sens zecimal; hieroglifa numărului 10 reprezenta un craniu, al cărui maxilar inferior, în formarea semnelor numerice superioare următoare, se adăuga pur și simplu la semnele inferioare corespunzătoare. Pentru a scrie 16, la capul ce reprezenta 6, se desena dedesubt acest maxilar, adică $6 + 10 = 16$.

Cu toate că nu s-au păstrat nici un fel de documente directe cu privire la cunoştinţele matematice ale poporului maya, nu ne putem îndoi asupra faptului că ele se găseau la un nivel apreciabil. Calculul complicat şi exact al timpului la maya n-ar fi putut apărea fără cunoştinţe matematice largi şi suficient de solide. La maya unitatea de timp era ziua + noaptea: *kin*, 20 *kin* alcătuiau *uinal*, 18 *uinal* — *tun*, 20 *tun* — *katun*, 20 *katun* — *baktun*, 20 *baktun* — *piktun*, 20 *piktun* — *kalabtun*, 20 *kalabtun* — *kinciltun*, 20 *kinciltun* — *alautun* = 23 040 milioane de zile şi nopţi (adică o unitate de ordinul al 8-lea). Maya combinau calculul timpului după calendarul religios *tţolkin*, probabil mai vechi, cu calculul după calendarul civil *haab*, dînd zilelor o dublă numerotaţie. Ei aveau era lor proprie: originea convenţională a numărului anilor, şi ştiau că repetarea datelor calendaristice (coincidenţa zilelor lunii şi a începutului anului) putea apărea numai după 374 440 ani. Deşi nu foloseau roata în tehnică, pentru recalcularea zilelor de la un calendar la altul ei foloseau „roata de calcul" *(uazaklom katun)* — o reprezentare grafică a zilelor pe un cerc. Considerînd anul civil egal cu 365 zile, maya corectau abaterea dintre acesta şi anul astronomic, egal cu 365, 2 422 de zile, aşa cum facem noi — introducînd anul bisect. Datorită acestui fapt, anul la maya era numai cu două zecimi de miimi dintr-o zi mai scurt decît anul astronomic — o precizie impresionantă, care depăşeşte precizia calendarului iulian. Maya cunoşteau Steaua polară şi o serie de constelaţii. Ei dispuneau de o tabelă a viitoarelor eclipse de Soare, făceau observaţii asupra răsăritului şi apusului planetei Venus şi cunoşteau cu o mare precizie perioada revoluţiei sale sinodice; ştiind că aceasta este mai mică decît 583,935 de zile (în realitate, ea este egală cu 583,920 de zile), ei o luau totuşi egală cu 584 de zile, deoarece $5 \times 584 = 8 \times 365$. Datorită acestui fapt, calculele se simplificau. Evident că astfel de calcule presupun nu numai o mînuire sigură a numerelor mari, ci şi cunoaşterea proprietăţilor lor aritmetice.

Matematica la azteci şi incaşi. Pe continentul american în afară de popoarele maya, posedau cunoştinţe matematice dezvoltate de asemenea şi aztecii, care au format în secolul al XII-lea e.n., în Mexic, un stat sclavagist, precum şi incaşii care au atins aceeaşi treaptă de dezvoltare socială în Peru, în secolele XI-XIII e.n. Aztecii aveau o scriere hieroglifică şi un calendar solar; ei foloseau un sistem de numeraţie nepoziţional, cu baza 20, scriind numerele astfel:



Unitatea următoare, superioară, era 400 = , din care prin înjumătăţire se obţinea 200 = , 100 =  şi 300 = , apoi se notau, de exemplu, 500 = , 1000 = , iar pentru 800 era un semn special: . Incaşii aveau, după cum am mai menţionat, o scriere nodală, *quipos*, cu ajutorul căreia nu numai că au efectuat însemnarea cronologică a evenimentelor importante, ci şi calculul impozitelor, evidenţa contabilă ş.a.m.d., existînd pentru aceasta funcţionari instruiţi în şcoli speciale (vezi [75]). Nivelul dezvoltării cunoştinţelor matematice ale aztecilor şi incaşilor poate fi apreciat însă, în esenţă, numai indirect, pe baza vestigiilor culturii lor materiale, a remarcabilei lor arhitecturi, a sistemului de irigaţie, a construcţiilor de drumuri, a meşteşugurilor şi a artelor, deoarece cuceritorii spanioli — fanatici catolici — au distrus în mod barbar, la începutul secolului al XVI-lea, tot ce au putut.

Concluzii generale asupra dezvoltării matematicii în societatea sclavagistă timpurie. Comparînd între ele dezvoltarea matematicii în diferite state sclavagiste timpurii, observăm că, cu toate particularităţile specifice pe care le lua la ele această dezvoltare, trăsăturile ei principale au fost peste tot asemănătoare. Din germenii calculului, existenţi încă în societatea comunei primitive, sub influenţa necesităţilor sociale, a apărut aici treptat matematica elementară, care folosea sub o formă implicită metode algebrice, atingîndu-se o mare măiestrie în calculele cu numere mari. Matematica de atunci purta într-o măsură însemnată un caracter empiric. Majoritatea propoziţiilor şi a procedeelor ei au fost găsite probabil prin încercări și în predare erau expuse fără demonstrații, chiar dacă astfel de demonstrații existau. Și totuși, chiar atunci, existau primii muguri ai metodelor teoretice abstracte, generalizatoare, ale gîndirii matematice. Nu s-a produs însă aici o separare conștientă a teoriei matematice într-un sistem de idei, și nici nu putea să se producă. În statele sclavagiste, despotice, preocuparea matematică era o activitate supusă nemijlocit intereselor utilitariste ale statului, în primul rînd strîngerii impozitelor și măsurării pămînturilor, și se afla în mîinile unei caste de mici funcționari, care adunau impozitele și măsurau pămîntul, și ale scribilor, care aveau un orizont limitat. La astfel de oameni interesele abstracte puteau apărea, de regulă, doar în procesul didactic, din tendința de a simplifica și a ușura predarea. De aceea, matematica a devenit știință teoretică numai atunci cînd societatea sclavagistă a intrat într-o nouă fază, cînd ea s-a transformat în democrație sclavagistă și a generat totodată o ideologie socială și clasele, care au făcut matematica teoretică posibilă și necesară. Aceasta s-a întîmplat în Grecia antică.

MATEMATICA ÎN GRECIA ANTICĂ

Condițiile sociale în Grecia antică. Statele sclavagiste ale Greciei antice au apărut în secolele VIII-VI î.e.n., în urma unui proces îndelungat de descompunere a orînduirii comunei primitive. Acestea au fost polisurile — orașele-state cu autoconducere. Cele mai importante dintre ele au aparut în zona mijlocie a coastei apusene a Asiei Mici, în Ionia, ca centre comerciale pe căile ce legau Egiptul, Mesopotamia și Sciția. Printre ele, Miletul a ocupat mult timp o poziție dominantă. Mai tîrziu, pe coasta Greciei însăși, rolul conducător a fost jucat de Corint, și apoi de Atena; în Italia, de Crotona și Tarent, iar în Sicilia — de Siracuza. Eliberîndu-se treptat de rămășițele orînduirii gentilice, polisurile grecești treceau apoi de la forma tiranică a sclavagismului timpuriu la democrația sclavagistă — cel mai progresist sistem social al acelor timpuri. În statul atenian, acest proces s-a încheiat în preajma anului 500 î.e.n. Mai tîrziu, democrația sclavagistă ateniană, care și-a supus, în urma războaielor greco-persane, nenumărate orașe din Balcani și din Asia Mică, s-a transformat într-un centru politic, economic și cultural al lumii antice. În anii 40 și 30 ai secolului V î.e.n., în timpul lui Pericle, democrația sclavagistă a atins culmea înfloririi sale și a acordat drepturi politice egale tuturor cetățenilor săi. Aceștia reprezentau însă numai minoritatea privilegiată a populației; sclavii, femeile și metecii (cei care nu erau originari din regiunea Aticii) erau lipsiți de drepturi politice.

Democrația sclavagistă a apărut ca urmare a unei înverșunate lupte seculare dintre demos — meseriași și comercianți mărunți — și aristocrația de sînge — moșierii, precum și oligarhia — comercianții bogați. În ea, cetățenii liberi participau activ la viața politică, la alegerile organelor legislative ale statului, la procesele cu jurați, la numeroase dispute publice ale partidelor politice. În secolul IV î.e.n., în urma războaielor îndelungate și a decăderii ce începuse a economiei sclavagiste, democrația sclavagistă a trăit o criză adîncă. Caracterul democratic al gîndirii sociale grecești s-a păstrat însă și sub puterea perșilor și în perioada elenismului.

Spre deosebire de societatea sclavagistă timpurie, care dispunea numai de aramă, bronz, argint și aur, democrația sclavagistă s-a născut în epoca fierului. Perfecționarea armelor și a uneltelor de muncă a făcut ca războaiele să fie mai distrugătoare, dar a dus în același timp la o creștere apreciabilă a produsului social suplimentar, la creșterea nivelului de viață al poporului, la o diferențiere a meșteșugurilor, la o lărgire a comerțului și, totodată, a navigației. Această nouă economie a dus la introducerea — ca echivalent universal de schimb — a monedelor bătute, în locul vechilor măsuri de greutate. Alfabetul, ușor de însușit, a înlăturat definitiv scrierea hieroglifică greoaie. Cultura, care la egipteni și babilonieni era accesibilă numai birocrației, se răspîndea printre păturile mai largi. O importanță primordială a avut-o schimbarea caracterului stăpînirii de sclavi, care purta în Atena timpurie un caracter patriarhal, „de casă“, și care s-a transformat apoi în fundamentul existenței societății. Stăpînii de sclavi duceau un mod de viață parazitar și priveau cu dispreț munca sclavilor, ceea ce a dus la o ruptură între munca fizică a sclavilor și munca intelectuală, cu care se îndeletnicea numai o mică parte: vîrfurile stăpînilor de sclavi și alte pături ale populației libere. Cetățenii liberi ai polisurilor, folosind munca sclavilor, dispuneau de un anumit timp liber care le permitea să gîndească asupra problemelor abstracte, să se ocupe de știință nu numai în scopuri practice nemijlocite, ci și pentru construirea unei imagini filozofice a lumii. Lupta politică neîntreruptă — în urma căreia ei au cucerit și au păstrat libertatea lor —, lărgirea orizontului, în urma descoperirilor geografice, au făcut ca concepția despre lume a cetățenilor greci să fie mobilă, să nu semene cu concepția stagnantă asupra lumii a egiptenilor și babilonienilor. Doborînd în repetate rînduri domnia tiranilor, ei nu s-au oprit nici de la a dărîma pe stăpînitorii cerești mitici — zeii, creîndu-și sistemele lor filozofice proprii: idealiste, care reflectau interesele aristocrației reacționare, și materialiste, care exprimau interesele demosului.

Caracterul matematicii antice grecești. Izvoare. Necesitățile producției meșteșugărești și ale construcțiilor, ce se dezvoltau în polisurile antice grecești, progresul agriculturii și al navigației cereau în mod insistent și dezvoltarea cunoștințelor științifice. În orînduirea sclavagistă, principala forță motoare rămînea forța musculară a sclavilor și a animalelor și se foloseau aproape exclusiv numai uneltele de mînă. Cu toate acestea, în arta militară au apărut mașini aruncătoare și mașini de asediat; și nici arhitectura greacă monumentală și nici construcția vaselor de comerț si de război nu puteau sa se lipsească de aplicatia invențiilor tehnice. O dată cu secolul al VII-lea î.e.n., în Grecia și în primul rînd în Ionia, la încrucișarea culturilor egiptene și babiloniene, începe să se nască o știință nediferențiată, în care cunoștințele astronomice, meteorologice, matematice, mecanice și medicale formează un tot unitar cu concepțiile filozofice, politice, geografice și economice.

În această epocă grecii își luau cunoștințele din izvoare egiptene, babiloniene și feniciene. Caracterul acestor cunoștințe a fost de preferință practic. Istoricul grec antic Herodot (aproximativ 484—425 î.e.n.) descrie aceasta în următoarele cuvinte [76, p. 109]: „Preoții însă povesteau că acest rege (Sesostris) a împărțit țara între toți egiptenii, toți aceștia căpătînd cîte o porțiune dreptunghiulară egală de pămînt; prin aceasta el a creat pentru sine venituri, ordonînd să fie plătit anual un anumit impozit. Dacă rîul (Nilul) rupea o parte a unei parcele oarecare, proprietarul ei se prezenta la rege și anunța cele întîmplate. Regele trimitea cîțiva oameni pentru a controla și măsura cu cît parcela respectivă s-a micșorat, pentru ca în viitor proprietarul ei să plătească totuși corespunzător impozitului inițial stabilit. Mi se pare că aceasta a fost originea geometriei care a trecut din Egipt în Elada. În ceea ce privește ceasornicul solar, indicatorul solar *(gnomon)* și împărțirea zilei în 12 părți, toate acestea elenii le-au împrumutat de la babilonieni". Isocrate (aproximativ 390 î.e.n.) arată că cunoștințele de matematică au fost preluate de greci de la egipteni, ai căror preoți, „disprețuind plăcerile, îndeplineau cele mai importante sarcini, instruiau tineretul, se ocupau cu astronomia, cu calculele și cu geometria". Cel mai mare gînditor al antichității, Aristotel (384—322 î.e.n.), remarcă, de asemenea, în *Metafizica* originea egipteană a geometriei grecești [77, p. 20 (982 a)]. O părere asemănătoare exprimă și Proclus (410—485 e.n.) în succinta istorie a geometriei grecești inclusă în comentariile sale la *Elementele* lui Euclid [78, p. 67]. Comentariile lui Proclus, scrise în secolul al V-lea e.n., reproduc istoria geometriei elaborată de Eudem din Rodos — în secolul al IV-lea î.e.n.

Continuitatea în succesiunea cunoştinţelor matematice nu poate fi astfel pusă la nici o îndoială. Matematica egipteană şi babiloniană purta, după cum am văzut, un caracter practic concret, însă conţinea primii germeni ai teoriei. Este evident că acești germeni ai gîndirii abstracte matematice au fost iniţial transmişi în Grecia din aceste ţări de cultură antică. Printre unii dintre istoricii şi filozofii burghezi predomină însă o altă concepţie. Mulţi dintre ei neagă complet că matematica Orientului antic a exercitat o serioasă influenţă asupra dezvoltării matematicii greceşti, deoarece prima ar fi fost „magică" şi nu ştiinţifică, aşa cum a fost a doua [vezi 79, 80]; alţii recunosc că grecii au împrumutat cîte ceva de la egipteni şi babilonieni, dar susţin că acestea au fost numai cunoştinţele aplicative [vezi 81]. Ca ştiinţă teoretică, matematica ar fi în întregime o creaţie a grecilor antici. Ea ar fi generată de „spiritul lor elin" deosebit, acelaşi care a creat şi arta greacă şi care ba ar fi inerent sîngelui lor, ba ar fi rod al naturii arhipelagului egeean. Pentru întărirea acestei concepţii idealiste, ei se referă la o părere atribuită marelui filozof materialist grec, Democrit (aproximativ 460—370 î.e.n.), care a făcut o călătorie prin Egipt, Persia şi Mesopotamia: „Am fost în multe ţări... am discutat cu mulţi oameni învăţaţi, însă în ceea ce priveşte combinarea liniilor cu demonstraţii, nimeni nu m-a întrecut, chiar şi aceia care în Egipt sînt numiţi harpedonapţi" [vezi 82].

Dar această părere tocmai recunoaşte că harpedonapţii puteau să facă demonstraţii geometrice. Aceasta înseamnă că acest citat nu este în favoarea acelora care afirmă că demonstraţiile ar fi un produs al „spiritului grecesc deosebit". Din ea rezultă doar că grecii au reuşit să parcurgă în domeniul matematicii în decurs de două veacuri (Democrit a trăit la hotarul dintre secolele V şi IV) un drum pentru care egiptenii au avut nevoie de două milenii. Şi această accelerare se explică, desigur, nu prin particularităţile de rasă sau particularităţile geografice, ci prin deosebirea în orînduirile sociale ale celor două popoare.

La început matematica greacă antică nu era principial diferită de cea egipteană sau babiloniană. Dar o dată cu dezvoltarea democraţiei sclavagiste, începînd cu secolul al VI-lea î.e.n., în gîndirea matematică a grecilor se intensifică tot mai mult latura teoretică. Sclavilor le era încredinţată partea „de salahor" a activităţii intelectuale: transcrierea cărţilor, efectuarea calculelor — ceea ce în cele din urmă a dus şi la separarea matematicii teoretice de cea practică. Din aritmetica practică, numită „logistică", şi din geometria aplicată care a căpătat la Arhimede denumirea de „geodezie", încep să se separe aritmetica teoretică şi geometria teoretică, deşi ele, analog celorlalte ştiinţe, nu erau atunci încă discipline de sine stătătoare, ci intrau ca părţi componente în ansamblul filozofiei. Spre deosebire de aritmetica şi geometria practică, cea teoretică nu conţinea numai prescripţii pentru rezolvarea problemelor, dar dădea şi o justificare soluţiei. Şi după cum s-au şi convins repede de aceasta, introducerea în matematică a demonstraţiilor a creat posibilitatea de a generaliza rezultatele particulare şi de a obţine noi consecinţe. În matematică, la fel ca şi în disputele politice şi judecătoreşti, a devenit necesar să se dea noţiunilor definiţii precise, să se dezvolte demonstraţii riguroase. Nu este întîmplător faptul că pitagoreicii care au introdus demonstraţia au constituit nu numai o şcoală filozofică, ci şi un partid politic al aristocraţiei sclavagiste reacţionare. Argumentaţia logică a marilor retori a intrat în matematică. Democrit care a adus o contribuţie remarcabilă la dezvoltarea matematicii greceşti a fost totodată şi autorul primei lucrări de logică. *Elementele* lui Euclid şi logica *(Analiticele)* lui Aristotel sînt legate între ele prin spiritul lor şi au rădăcini istorice comune.

Eliberarea matematicii teoretice de la supunerea ei faţă de unele probleme îngust aplicative, crearea în cadrul ei, în locul prescripţiilor simple, a unor metode logice riguroase ce permiteau largi generalizări şi deducerea unor noi consecinţe fără vreun apel direct la realitate, toate acestea au reprezentat cauza directă a accelerării extraordinare a dezvoltării ei, condiţionată, în ultimă instanţă, de necesităţile materiale ale societăţii. Filozofii care se ocupau cu matematica au început să înţeleagă importanţa ei ca ştiinţă care, ca şi celelalte ştiinţe, trebuie să explice omului fenomenele pentru ca el să le poată folosi în scopurile sale.

Delimitarea definitivă a matematicii într-o ştiinţă teoretică de sine stătătoare s-a produs în Grecia la mijlocul secolului al V-lea î.e.n., găsindu-şi desăvîrşirea chiar în epoca elenistică în *Elementele* lui Euclid, în preajma anului 300 î.e.n. Evenimentul acesta a fost pregătit în decursul celor trei secole premergătoare, în perioada clasică, prin acumularea cunoştinţelor elementare şi în special prin intensificarea tot mai accentuată a momentelor teoretice, logice în matematica greacă. Demonstraţiile, iniţial disparate şi referitoare numai la teoreme izolate, au devenit generale. Au început să fie delimitate în mod clar noţiunile şi propoziţiile primare — şi, pe cît posibil, apelul la intuiţie a fost înlocuit prin deducții logice. Toate cunoștințele obținute erau grupate într-un sistem armonios.

La fel ca și științele naturii, matematica, începînd cu însăși formarea sa ca știință, a constituit o arenă de luptă a două lagăre filozofice: materialismul și idealismul. Luptînd împotriva fanteziilor mitologice religioase, filozofii greci antici, care împărtășeau concepții materialiste spontane și dialectice naive, căutau în natura însăși principiul existenței, iar matematica servea ca un procedeu care îi ajuta în aceste căutări. Pe de altă parte, filozofii idealiști vedeau în numere principiul tuturor lucrurilor, iar în matematică — baza întregii științe, pe care ei au transformat-o treptat într-o speculație cu aparență științifică, într-o „aritmologie", într-un joc cu proprietățile „mistice" ale numerelor întregi. În modul acesta, cît timp matematica nu s-a separat de filozofie, lupta materialismului împotriva idealismului avea loc nemijlocit în interiorul matematicii însăși.

Atît pentru întreaga literatură clasică greacă, cît și pentru cea matematică, este caracteristică sărăcia extremă a izvoarelor originale. Din secolul al VI-lea î.e.n. s-au păstrat numai cîteva propoziții atribuite autorilor antici, citate împreună cu diferite legende în operele de mai tîrziu. Din secolul al V-lea î.e.n. au rămas numai cîteva fragmente, și numai începînd cu secolul al IV-lea î.e.n. există texte, la început parțiale, iar apoi complete. Restabilirea tabloului istoric real este îngreuiat nu numai de raritatea documentelor și de împrăștierea lor în diferite opere, ci în special și de incertitudinea acestora. Ele sînt alcătuite de către comentatori și compilatori, care de cele mai multe ori nu cunoșteau originalele, ci foloseau transcripții, de mîna a doua sau a treia. Astfel, de exemplu, filozoful neoplatonician Proclus, în comentariile sale la Euclid [78], a redat *Istoria geometriei și astronomiei* a lui Eudem din Rodos (a doua jumătate a secolului al IV-lea î.e.n.), lucrare pierdută, bazîndu-se la rîndul său pe expunerea lui Geminus (secolul I î.e.n.). Însă Proclus — și așa au procedat și alții — expunea istoria în mod părtinitor, el trecea sub tăcere pe materialiști și exagera importanța direcției pitagoreice idealiste. Informații cu privire la studiul cunoștințelor matematice din timpurile străvechi pot fi obținute și din operele filozofice ale lui Platon și Aristotel în care adesea sînt atinse diferite probleme de matematică, în special cele cu caracter principial. Datorită faptelor, menționate mai sus, informațiile cu privire la matematica greacă conțin numeroase momente legendare, incerte. Prin cercetările susținute, cuprinzătoare și profunde ale savanților, printre care și ale celor sovietici, a fost însă în esență reconstruit tabloul formării matematicii grecești. E drept că acest tablou nu este lipsit de propoziții ce necesită noi precizări și uneori și o revizie radicală.

Logistica greacă [83, 84]. În școlile de gramatică din Atena, fiilor cetățenilor liberi li se preda de la vîrsta de 7 ani, alături de citire și scriere, și socotitul. Nu s-au păstrat însă nici un fel de manuale asupra aritmeticii practice, a logisticii. Cunoștințele noastre asupra logisticii se bazează numai pe date indirecte. Aceasta se explică prin aceea că socotitul se făcea oral, cu ajutorul abacelor, predarea se făcea după o ordine stabilită o dată pentru totdeauna și nu se foloseau manuale.

În logistică intra arta socotitului, adică cunoașterea sistemului de numerație și regulile de efectuare pe abac a celor patru operații aritmetice cu numere pozitive întregi, apoi operațiile cu fracții și aplicarea tuturor acestor cunoștințe la măsurarea terenurilor și la problemele practice ale vieții cotidiene. Mai tîrziu au intrat aici și calculul rădăcinii pătrate și cubice, precum și rezolvarea unor probleme, care se refereau la început la mărimi concrete, apoi la Diofant și la mărimi abstracte, probleme pe care astăzi noi le includem în aritmetică și algebră.

Datorită ruperii claselor stăpînitoare ale democrației sclavagiste de munca productivă, deosebirea dintre matematica practică și matematica teoretică s-a transformat ulterior în opoziția lor. Această opoziție dintre logistica practică și matematica teoretică era exprimată în faptul că idealiștii pitagoreici (secolul al V-lea î.e.n.) și platonicienii (secolul al IV-lea î.e.n.) vedeau o prăpastie de netrecut între numere și obiectele numărate. Numerele *(aritmoi)* erau pentru ei „idei pure“. O astfel de idee a fost și „unitatea“ indivizibilă — și matematica trebuie să se ocupe cu ele. Lucrurile efectiv numărate aparțineau însă obiectelor senzorial perceptibile; aici intra și „unitatea“ divizibilă: toate acestea constituiau obiectul logisticii. Aici numerele erau, după expresia lui Platon, „numere care au corpuri“ *(aritmoi somata echontes)* [85, 52 5 D]*. Se considera de asemenea că, spre deosebire de geometrie care se ocupă cu drepte imaginate, geodezia folosește numai drepte senzorial perceptibile „uneori subțiri, ca razele solare, uneori groase ca sforile“ [vezi 78, p. 39].

---

* Vezi nota traducătorului V.I. Karpov la această filă din ediția rusa a operelor lui Platon (vol. III. Sankt Petersburg, 1863, p. 370). — *N.R.*

Grecii înțelegeau prin număr *(aritmos)* un număr pozitiv întreg care era privit ca o mulțime de unități. Unitatea însăși nu era considerată ca număr. Deși această concepție inițială asupra numărului domnea oarecum în întreaga matematică greacă, totuși ea nu a putut să se mențină în întregime. Alături de numere, practica i-a obligat pe greci să se ocupe în geometrie de rapoarte *(logoi)* de segmente, a căror valoare numerică se exprima (atunci cînd ea putea fi stabilită) nu numai în numere (adică în numere întregi), ci și în fracții. Și deoarece operațiile asupra rapoartelor se reduceau de fapt la operații asupra valorilor lor cantitative, distincția riguroasă ce se făcea între rapoarte și numere se ștergea treptat.

Asupra acestei deosebiri insistau în special idealiștii, adepții învățăturii pitagoreice cu privire la caracterul ales al numerelor întregi care alcătuiau esența existenței, precum și cu privire la indivizibilitatea unității ș.a.m.d. Matematicienii materialiști însă, de exemplu Arhimede, Heron, Eutokios sau Diofant, nu împărtășeau această învățătură. Ei aplicau larg, după cum vom vedea mai tîrziu, procedee și demonstrații aritmetico-algebrice în geometrie, utilizau fracții și calcule prin aproximație, se ocupau de aplicațiile matematicii la științele naturii și la tehnică, referindu-se, pentru a dezarma pe adversarii lor, la faptul că asemenea procedee erau folosite de „cei vechi".

Numărarea la grecii antici. Grecii utilizau un sistem zecimal de numărare, în care se mai păstrau urmele unui sistem mult mai vechi cu baza 4: numeralul „octo" — 8 — are forma gramaticală a unui număr binar. Numerele mici grecii le numărau pe degete, iar numerele mari — cu ajutorul pietricelelor *(psephos)* așezate pe pămînt, iar mai tîrziu pe o scîndură, căreia cu timpul i s-a aplicat o liniatură pentru a distinge ordinele, transformîndu-se în abac. În comedia lui Aristofan *Viespile* (422 î.e.n.), se spune: „Pentru început voi evalua nu ca la judecată, nu pe abace, ci simplu, pe degete" [vezi 86, p. 382]. Numărătoarea pe degete se făcea din 5 în 5; astfel în *Odiseea*, Homer (aproximativ secolele IX—VIII î.e.n.) pune pe zeul mărilor Proteu „să numere cîte 5" *(pempázestai)* foci.

În timpul lui Homer, grecii dispuneau de numerale pînă la 1 000, însă nu peste această valoare. Cuvîntul *mirioi* (miriadă) avea atunci încă semnificația de „foarte mult" (ca de altfel și la noi) și numai mai tîrziu a început să fie folosit ca 10 000. De altfel, și numeralul *hekaton* — 100 — era folosit aici adesea în sens de cantitate mare nedefinită. Reprezentarea numerelor mari și operațiile cu ele erau destul de dificile. Abia în secolul al III-lea î.e.n. Arhimede a scris celebra *Numărătoare a firicelelor de nisip (Psammit)*, care a risipit ideea eronată a existenței unui „ultim și cel mai mare număr" și care conținea un procedeu cu ajutorul căruia se putea exprima un număr oricît de mare.

Pentru calcul grecii foloseau abace, care au parvenit la ei probabil de la egipteni, prin intermediul fenicienilor. Herodot ne informează că egiptenii, spre deosebire de greci, deplasau pietrele nu de la stînga la dreapta, ci de sus în jos. Pe abac existau zece coloane duble mari și alături patru coloane simple mai mici. În coloane se așezau pietre, înlocuite mai tîrziu prin jetoane speciale de calcul. Coloanele mari serveau pentru distingerea ordinelor ce mergeau de la dreapta la stînga și de la cele inferioare la cele superioare, pentru fiecare ordin erau prevăzute două coloane alăturate. Raportul dintre coloane depindea însă de sistemul monetar, deoarece abacul servea în primul rînd pentru calculele cu caracter financiar în tranzacțiile comerciale.

Cea mai mare unitate monetară a grecilor a fost talantul egal cu 6 000 drahme. O drahmă era egală cu 6 oboli și 1 obol egal cu 8 halce. Primele două coloane mari din dreapta serveau pentru reprezentarea unităților drahme, a treia și a patra coloană aveau o valoare de zece ori mai mare decît prima și a doua; a cincea și a șasea de o sută de ori, iar a șaptea și a opta de o mie de ori. Coloanele nouă și zece serveau pentru reprezentarea talanților. Împărțirea coloanelor în jumătatea superioară și inferioară era folosită pentru operațiile aritmetice: astfel, de exemplu, la adunare în jumătatea superioară se scria rezultatul ei — suma. Coloanele mici din dreapta erau folosite pentru însemnarea numărului de oboli și halce și, începînd de la dreapta, fiecare coloană vecină din stînga avea o valoare dublă. Faptul că socotitul pe abac era procedeul de bază al calculului îl arată însuși cuvîntul „a calcula" — *psephizein* care înseamnă literal „a așeza pietricele". Efectuînd calculele pe abac, grecii scriau, de regulă, numai rezultatul final. În calculele complicate ei, ca și noi, își însemnau și rezultatele intermediare.

Numerația. În secolul al X-lea î.e.n. a apărut la greci prin intermediul fenicienilor scrierea. Concomitent a început să fie folosit calculul scris. La început s-a utilizat o numerație herodiană, numită astfel după gramaticianul Herodian (secolul al II-lea e.n.)

care a descris-o. Ea exista în două variante: atică și beotică, numite astfel după regiunile Greciei. Unitatea se nota simplu prin bară I (deget), 5 în varianta atică Γ (reprezentarea mănunchiului celor 5 degete de la mînă), iar în beotică Π (care era privit mai tîrziu ca o prescurtare a cuvîntului *pente* — 5), 10 — respectiv Δ și ▷, 100 — H și HE, 1 000 — X și ↓, 10 000 — M. Aceste semne erau inițialele numeralelor respective: *deka* (10), *hekaton* (100), *hilias* (1 000), miriadă (10 000). Prin combinarea lor, se obțineau și numeralele intermediare: pentru 50 în atică 𐅄, iar în beotică ΓΔ, pentru 500 — respectiv 𐅅, ΠHE, pentru 5 000 — 𐅆 și Π↓. Celelalte numere se exprimau la fel ca pe abac, de exemplu, 9 821 se scria (în atică) ca 𐅆XXXX𐅅HHHΔΔI

Numerația herodiană poate fi întîlnită în monumentele atice datînd chiar din secolul I î.e.n., deși cu mult înainte (cînd anume precis — nu s-a stabilit), în celelalte regiuni ale Greciei ea a fost înlăturată de numerația ionică. În aceasta din urmă numerele erau reprezentate prin literele alfabetului, ca la evrei și la fenicieni, înrudiți cu aceștia, de la care grecii au împrumutat acest procedeu. Numerele erau notate astfel:

1-9	ᾱ, β̄, γ̄, δ̄, ε̄, ς̄, ζ̄, η̄, θ̄
10-90	ῑ, κ̄, λ̄, μ̄, ν̄, ξ̄, ō, π̄, ϙ
100-900	ρ̄, σ̄, τ̄, ῡ, φ̄, χ̄, ψ̄, ω̄, ϡ.

Aici, în afara literelor alfabetului care a devenit general admis, sînt folosite încă trei litere arhaice: ϛ — *vau*, mai tîrziu litera care a înlocuit litera σ la sfîrșitul cuvintelor, pentru 6; ϙ — *koppa* pentru 90; ϡ — *sampi* pentru 900. În modul acesta, cu ajutorul a 27 de semne se puteau scrie toate numerele pînă la 999. Miile se notau ca unități cu virgulă în fața literei; de exemplu, $,\alpha$, $,\beta$ etc. Pentru a distinge cifrele de litere, deasupra lor se punea fie o bară, fie un accent, de exemplu, $\bar{\alpha}$, α'. Numerele mari, care au intrat în uz relativ mai tîrziu, se scriau în miriade, de exemplu 54 321 se scria ca $\overset{\varepsilon}{M},\delta\tau\varkappa\alpha$ sau $\varepsilon, \delta\tau\varkappa\alpha$; mai tîrziu miriadele se scriau cu două puncte deasupra literei, de exemplu

$$5 \times 10^4 = \ddot{\varepsilon} \quad , \; 5 \times 10^8 = \ddot{\ddot{\varepsilon}}\,.$$

În sistemul ionic care a apărut din necesitățile comerțului care lua amploare, notația numerelor era sensibil mai scurtă decît cea herodiană; numărul de mai sus — 9 821 se scria astfel: $\theta\omega\varkappa\alpha$. Semnele cifrelor se pronunțau nu ca litere, ci ca numerale. De aceea, pentru operația rapidă cu ele trebuiau numai ținute minte pe de rost tablele de înmulțire și de adunare gata existente. În afară de aceasta, deoarece la înmulțirea și împărțirea numerelor cu mai multe ordine trebuiau determinate ordinele cifrelor din rezultat, a fost introdusă noțiunea de „bază“ *(pitmen)*, de exemplu 700 avea „baza“ 7, la fel ca și 7 000 și 70 000 etc.

În modul acesta, în pofida părerii unor istorici ai matematicii, de exemplu a lui M. Cantor și H. Hankel, că numerația alfabetică ar fi un pas înapoi în comparație cu cea atică, noi considerăm că prin concizia și ușurința scrierii și prin comoditatea calculelor cu numerele mici, prin ușurința însușirii și posibilitatea scrierii în ea a unor numere oricît de mari, ea era numai cu puțin mai prejos decît sistemul nostru pozițional zecimal. În 1882, P. Tannery și-a însușit în mod special numerația ionică și s-a convins prin calcule concrete de avantajele ei practice pe care noi, din obișnuință, sîntem înclinați să le negăm.

Făcînd adunarea sub forma scrisă, grecii nu puneau aceleași ordine unul sub altul și nu aveau nici semnul adunării și nici nu aplicau linia cu care sîntem obișnuiți s-o trasăm sub termenii de adunat — ci în locul semnului egalității ei scriau cuvîntul *gomoi* (împreună). Cel mai frecvent termenii și suma lor se scriau pur și simplu într-un rînd. La fel se scriau și celelalte operații. Uneori, de altfel, în fața sumei se punea un semn special — prescurtarea cuvîntului *gignestai* — în sensul „se obține“.

Tabelele. Pentru ușurința adunării, precum și pentru scădere serveau tabele speciale, din care reproducem aici o parte:

α	ι	θ	adică	1	10	9
α	θ	η		1	9	8
α	η	ζ		1	8	7

Scăderea era efectuată cu ajutorul tabelelor învățate sau al tabelelor și abacelor la îndemînă sau pur și simplu cu ajutorul degetelor. Matematica greacă nu cunoștea numerele negative și numărul zero.

Înmulțirea se făcea fie după procedeul „egiptean" pe care îl cunoaștem, fie după procedeul grecesc, folosind tabla înmulțirii care trebuia memorată sau avută la îndemînă.

Astfel de table existau pînă la 10 000. Neopitagoreicul Nicomah (aproximativ 100 e.n.), a cărui *Introducere pitagoreică în aritmetică* a ajuns pînă la noi, avea un tabel pătratic construit la fel ca tabla noastră de înmulțire utilizată în școlile noastre.

O astfel de tablă era folosită pentru calcule, deși însuși Nicomah a destinat-o cercetării proprietăților de divizibilitate a numerelor întregi, care-l interesa. În timp ce noi facem înmulțirea numerelor cu mai multe ordine, începînd de la ordinele inferioare (procedeu preluat de la indieni prin intermediul popoarelor din țările Islamului), grecii porneau de la ordinele superioare. Mai întîi se înmulțeau „bazele", iar apoi se stabilea ordinul. Ca exercițiu se dădeau probleme de înmulțire a valorilor numerice ale literelor din rînduri întregi de versuri, ceea ce ducea la numere foarte mari. Procedeul alfabetic de notație a numerelor dădea peste tot unde se întîlnea (de exemplu, la evrei, la indieni) posibilitatea de a se înrădăcina o mistică a numerelor, deoarece oricărui cuvînt i se putea atribui o valoare numerică. Prin urmare, în raporturile dintre numere se căutau legăturile „tainice" dintre cuvintele și noțiunile exprimate de ele. Pierre Bezuhov a aplicat o asemenea mistică a numerelor atunci cînd și-a prevăzut soarta cu ajutorul „valorilor numerice" ale literelor din cuvintele „L'Russe Besuhof" (rusul Bezuhov). În primul cuvînt, contrar regulilor gramaticii franceze, Pierre a lăsat la o parte litera „e" și atunci s-a obținut în sumă același „număr cabalistic" 666 pe care îl dau cuvintele „l'empereur Napoléon" (împăratul Napoleon), de unde el a tras concluzia că lui — Pierre Bezuhov — îi este hărăzit din veci să ia parte la „marea faptă de a pune capăt domniei diavolului, care vorbește măret și defăimător", evenimentul, cică, prezis de Apocalips [vezi 87, p. 79].

În același timp numerația alfabetică a creat baza pentru apariția mnemotehnicii — învățătura despre procedeele artificiale de memorare care s-au păstrat sub o altă formă și în zilele noastre. Astfel, pentru a reține cifrele numărului π în Rusia prerevoluționară liceenii învățau pe de rost versetul «Кто и шутя и скоро пожелаеть пи узнать, число ужь знает» („cine și în glumă și repede dorește să cunoască pi, știe deja numărul"). Aici nu se folosește valoarea numerică a fiecărei litere individuale, ci numărul de litere din fiecare cuvînt (împreună cu semnul tare), ceea ce corespunde cifrelor numărului $\pi = 3.1415926536$.

Operele păstrate nu ne dau o imagine clară a procedeului prin care grecii făceau împărțirea. Cel mai probabil pare să fi fost, în special în perioada mai tîrzie, un procedeu asemănător cu cel folosit de noi. În cazul în care împărțirea se făcea cu rest, grecii mergeau fie la o aproximație, fie la fracții. Acestea din urmă erau exprimate în trei feluri.

Înainte de toate, erau folosite fracțiile „egiptene" pe care le cunoaștem. Fiecărei fracții alicvote $\frac{1}{n}$ îi corespundea „fracția ei complementară" $\frac{n-1}{n}$, suma cărora este egală cu unitatea. Fracțiile alicvote se scriau mult timp prin cuvinte, și relativ tîrziu prin simboluri, de exemplu $\frac{1}{3} = \gamma^{ov}$ sau γ' sau γ'' sau, în sfîrșit, $\gamma^{\varkappa}$. Pentru $\frac{1}{2}$ se folosea cel mai frecvent un semn special.

În al doilea rînd, se foloseau fracții generale — în scrierea noastră $\frac{m}{n}$ — care erau privite ca multiplii de ordinul m ai fracției alicvote $\frac{1}{n}$ și ca împărțirea $m : n$. Fracțiile generale erau notate în mod diferit. Sub forma cea mai perfecționată, ele se notau astfel, încît numitorul se scria deasupra numărătorului, de exemplu, $\overset{\theta}{\xi\varepsilon}$ însemna $\frac{65}{9}$. Prin aceasta s-a făcut aici un important pas către notația modernă a fracțiilor care a apărut, probabil, la vechii indieni. Pentru fracția $\frac{2}{3}$ care ocupa și la egipteni o situație specială, existau diferite notații speciale.

Pentru calculul cu fracţii, grecii foloseau transformarea lor în fracţii de acelaşi tip, prin simplificare şi „mărire", adică prin înmulţirea numărătorului şi a numitorului cu factori suplimentari. Pentru uşurarea adunării şi scăderii fracţiilor subunitare, se utilizau tabele ajutătoare speciale. Numeroasele tabele păstrate din diferite perioade reflectă clar urmele tradiţiei egiptene.

Alături de fracţii, grecii studiau, după cum am menţionat, şi rapoarte *(logoi)* înţelese ca rapoarte de segmente. Ei le împărţeau în zece tipuri, ca: „multiple" $n : 1$, de exemplu $4 : 1$; „submultiple" $1 : n$, de exemplu $1 : 4$; „supracît" $(n + 1) : n$, $4 : 3$ ş.a.m.d.

Şcoala din Milet. Naşterea matematicii greceşti este legată de figura legendară a lui Tales (aproximativ 600 î.e.n.) care a fundat în Grecia cea mai veche şcoală filozofică de materialism spontan. Filozofia şcolii mileziene, la fel ca şi a şcolii din Efes, întemeiată de Heraclit (aproximativ 530—470 î.e.n.), a fost orientată împotriva ideologiei idealiste şi metafizice a aristocraţiei gentilice. Conform afirmaţiilor lui Herodot, Democrit şi Platon [vezi 88 p.7], Tales a fost de origine feniciană. El a fost negustor în Milet — centrul comerţului peste mări, de pe ţărmul ionic. De aici, Tales a întreprins o călătorie, în prima jumătate a secolului al VI-lea î.e.n., vizitînd Egiptul unde a şi făcut cunoştinţă cu matematica.

Combinarea germenilor de ştiinţe ale naturii cu filozofia a dus, o dată cu rezolvarea problemelor practice, la încercările unei explicaţii moniste a lumii. Tales a încercat să explice varietatea naturii dintr-un principiu unic, să găsească în haosul aparent al fenomenelor o legitate. Acest principiu Tales îl putea găsi în mitologia culturii insulare egee antice a Egiptului şi, în special, a Mesopotamiei. Importanţa excepţională pe care au avut-o aici pentru viaţa economică marea şi fluviile a contribuit la născocirea legendelor asupra creării lumii din apă şi de aceea Tales a luat drept bază primară a întregii existenţe — apa. Spre deosebire însă de credinţele religioase, învăţătura lui Tales nu considera lumea creată de zei, ci veşnică şi în veşnică schimbare legică. „Astfel se conturează aici pe deplin materialismul spontan iniţial, care la începuturile lui consideră în chip foarte firesc, ca de la sine înţeleasă, unitatea fenomenelor naturii în infinita lor varietate şi care caută această unitate în ceva special, aşa cum Tales o căuta în apă" [vezi 3, p.16].

Încercînd să dea explicații raționale, logice ale fenomenelor, Tales a început să abordeze și propozițiile matematice cu cerința nu numai de a le expune, ci și de a le demonstra. Lui i se atribuie demonstrația următoarelor teoreme: 1) diametrul împarte cercul în două părți egale; 2) egalitatea unghiurilor de la bază în triunghiul isoscel; 3) egalitatea unghiurilor drepte; 4) egalitatea triunghiurilor care au o latură și unghiurile adiacente egale (așa-numitul al doilea caz de egalitate a triunghiurilor); 5) faptul că unghiul înscris într-un semicerc este drept. Este posibil ca Tales să-și fi „demonstrat" teoremele sale asupra egalității semicercurilor, a unghiurilor sau a celorlalte trei elemente ale triunghiului prin suprapunere, realizată în primele trei teoreme prin simpla îndoire a figurii, la care se adaugă în teorema a 5-a și o rotație a figurii în jurul centrului cercului, cu 180°.

Generalizînd cunoștințele egiptenilor și babilonienilor, școala mileziană a căutat să găsească răspuns la problema fundamentului existenței și, în conformitate cu creșterea elementului logic în gîndirea socială, căuta și o fundamentare a diferitelor propoziții ale geometriei. Și dacă geometria egipteană rămînea în esență o geometrie a ariei, păstrînd prin aceasta o legătură directă cu proveniența ei din agrimensură, la greci ea a devenit acum mai abstractă. Într-o măsură și mai mare decît la egipteni, erau folosite desene; liniile drepte erau privite numai ca margini ale parcelelor de pămînt. Proprietățile triunghiurilor, ale unghiurilor, ale cercului, erau studiate pe figură. Un rol important a început să-l joace noțiunea de asemănare (similitudine).

La fel ca și în patria învățătorilor grecilor, — egiptenii și babilonienii — studiul matematicii a fost și în Elada strîns legat de necesitățile practice. Construcția enormelor temple a lui Apolo din Milet, a Herei pe insula Samos și a Artemidei în Efes datează din secolele VII și VI î.e.n. Construirea acestor temple dura timp de decenii: ele necesitau calcule și plane exacte, precum și aplicarea unor mecanisme simple. Cunoștințele de matematică erau necesare și pentru construcția de vase, ce se dezvolta, și pentru navigație.

Nu vom reproduce legendele care îi atribuie lui Tales diferite cunoștințe astronomice. Observăm numai că lui Tales i se atribuie prima aplicație a compasului și a vasometrului, măsurarea înălțimii unei piramide (sau a obeliscului?) după lungimea umbrei sale și după propria sa umbră, precum și procedeul de a determina distanța unei corăbii de la țărm. Prima dintre aceste probleme era probabil rezolvată astfel: dintr-un turn sau de pe o stîncă de pe țărm, era măsurat cu cel mai simplu instrument unghiul dintre verticală și direcția în care se vedea vasul. Apoi situația era reprodusă pe un desen la scară redusă. În sfîrșit, distanța măsurată pe desen era înmulțită cu coeficientul respectiv. Rezolvarea se baza pe noțiunea de asemănare a triunghiurilor, pe proporționalitatea laturilor opuse unghiurilor egale. Analog se rezolva și cea de-a doua problemă.

Școala mileziană a numărat o serie întreagă de filozofi-matematicieni, dar asupra activității științifice a majorității lor s-au păstrat extrem de puține informații. Continuatorul remarcabil al lui Tales a fost compatriotul, ruda sau elevul său, Anaximandru (aproximativ 610—543 î.e.n.), autorul operei *Despre natură*. Anaximandru considera drept bază a întregii existențe *apeiron*-ul — „nelimitatul“ — o nemărginită în spațiu și timp, fără calități, care veșnic se schimbă, se mișcă, delimitează contrariile și le absoarbe din nou. Emițînd pentru prima dată ipoteza infinității lumilor în universul infinit și a originii naturale a omului, el a pus prin aceasta pe primul plan ideea legității obiective, idee care a stimulat apreciabil dezvoltarea științei raporturilor cantitative și a formelor spațiale ale realității.

Lui Anaximandru i se atribuie: determinarea eclipticii; reprezentarea Pămîntului ca un cilindru circular al cărui diametru se raportează la înălțime ca 3 : 1; construirea primelor hărți geografice ale Greciei și Pămîntului, în care a fost folosită pentru prima dată proiecția ortogonală; fabricarea cadranului solar și a altor aparate astronomice. Se consideră, de asemenea, că Anaximandru a fost autorul unei lucrări de geometrie elementară.

Din școala mileziană făcea parte și Las din Hermion. Las a scris în preajma anului 500 î.e.n. o lucrare de muzică, prima lucrare grecească de acest gen. El efectua experiențe de acustică. Din mai multe vase identice, unul rămînea gol, altul era umplut cu lichid pînă la jumătate ș.a.m.d. Lovind fiecare dintre aceste vase, el a stabilit că raportul volumelor goale se exprimă „pentru octavă ca 2 : 1, pentru cvintă ca 3 : 2, pentru cvartă ca 4 : 3“. Filozofii școlii pitagoreice au folosit această experiență pentru învățătura lor mistică asupra „armoniei numerelor“, — atribuind-o lui Pitagora. După cum a arătat însă Tannery [89], experiențele lui Las precizau doar faptele, incontestabil cunoscute de mult de către constructorii de lire și flaute. Astfel, încă de pe atunci, filozofia idealistă parazita pe realizările științelor naturii și matematicii — fenomen caracteristic pentru ea de-a lungul întregii istorii și devenit deosebit de izbitor în zilele noastre.

Școala pitagoreică. La sfîrșitul secolului al V-lea î.e.n. în urma războaielor greco-persane, centrele de cultură ale Greciei s-au deplasat de la răsărit spre apus, în coloniile ei din sudul Italiei. În această țară agricolă, înapoiată în comparație cu Ionia, au apărut școlile idealiste ale pitagoreicilor și eleaților. Lupta lor împotriva materialismului și a dialecticii școlilor din Milet și Efes era un reflex al luptei politice ascuțite dintre aristocrația agricolă reacționară și demosul, luptă care bîntuia atunci în toate polisurile din Italia de sud.

Întemeietorul școlii denumită după numele său, legendarul Pitagora (aproximativ 570—500 î.e.n.), era, conform tradiției, originar de pe insula Samos. Uniunea organizată de el a fost nu numai o școală filozofică, ci și un partid politic și o confrerie religioasă, care lupta înverșunat împotriva demosului. După victoria acestuia din urmă, Pitagora ar fi fugit în Crotona (în Italia de sud), iar apoi în Metapont unde a și murit. Filozofia pitagoreicilor căuta să fundamenteze ordinea universală veșnică și neschimbată și, împreună cu aceasta, și puterea aristocrației și supunerea oarbă a demosului. Ea căuta baza acestei ordini în numere. Pitagoreicii și-au împrumutat cultul lor religios de la preoții egipteni și babilonieni, împreună cu cunoștințele de aritmetică, geometrie, armonie și astronomie, pe care ei le-au dezvoltat mai departe.

Filozofia pitagoreică pornea de la critica monismului materialist naiv al școlii mileziene, afirmînd că „nelimitatul" lui Anaximandru necesită o definiție la fel precum *limita* necesită acel ceva care este definit de ea. Ei considerau că la baza lucrurilor stă concordanța a două principii — armonia contrariilor „nelimitat" și „limită", întruchipată în „legile misterioase ale numerelor". Aristotel expune procesul însuși al fetișizării numerelor de către pitagoreici astfel: „Așa-numiții pitagoreici, ocupîndu-se de științele matematice, le-au împins înainte pentru prima dată și, educîndu-se pe baza lor, au început să considere principiile acestora drept principiile tuturor lucrurilor" [77, pp.26—27; 985 b].

Desigur, preocuparea de matematică, ca atare, nu duce la fetișizarea matematicii. La pitagoreici însă, însăși poziția lor, ca partid al aristocrației reacționare, îi împingea la o ruptură între abstract și concret, matematica transformîndu-se din știință într-o învățătură mistică a unei secte de aleși. Numerele — cele mai abstracte, elemente ale științei din acel timp, erau cel mai puțin accesibile înțelegerii cercurilor largi. Pitagoreicii le opuneau lucrurile senzoriale, atribuind numerelor o existență de sine stătătoare. Producția de mărfuri sub forma simplă a valorii, ce exista la greci încă în epoca lui Homer, iar din secolul al VI-lea î.e.n și sub forma bănească, a creat condițiile care au făcut posibilă această fetișizare a matematicii, la fel ca și a tuturor relațiilor dintre oameni și ideologia lor [1, pp.31—32].

Unii istorici și filozofi burghezi însă, de exemplu, E. Frank [90], consideră drept cauză care a generat mistica numerică a pitagoreicilor preocuparea lor de muzică. Legile numerice ale consonanțelor muzicale deduse pe cale speculativă și bazate doar puțin pe fapte stabilite empiric, ar fi fost ridicate de pitagoreici la rangul armoniei numerice absolute a întregii existențe. E drept că pitagoreicii puteau folosi studiul bazelor acustice ale muzicii pentru a conferi filozofiei lor idealiste o formă științifică. Și cu toate acestea mistica numerelor avea la ei nu o origine științifică, ci una social-politică.

O serie de elemente separate ale pitagoreismului era atribuită lui Pitagora de către adepții săi numai pentru a conferi învățăturii lor o mai mare autoritate. Din aceasta nu rezultă însă că învățătura privind matematica și științele naturii din cadrul pitagoreismului este în întregime rodul secolelor de mai tîrziu. Unitatea ideilor fundamentale ale tuturor învățăturilor pitagoreice indică clar izvorul mistic-religios unic al originii lor, supunerea lor unui scop politic unic, legătura cu epoca descompunerii orînduirii gentilice, cu epoca lui Pitagora.

Pentru pitagoreici propoziția „lucrurile sînt numere“ exprimă însăși esența lucrurilor. Nu atomii materiali, ci punctele geometrice constituie unitățile, părțile nelimitatului. Explicația pitagoreică a întregii existențe prin legile numerelor întregi duce la o contradicție logică prin faptul că înșiși pitagoreicii au descoperit existența segmentelor incomensurabile. Este posibil ca la început pitagoreicii să nu fi observat consecința dezastruoasă a acestei descoperiri revoluționare pentru propria lor filozofie a naturii. Mai tîrziu însă ei o ascundeau minuțios. La noi a ajuns legenda despre pedepsirea pitagoreicului Hippas din Metapont (secolele VI—V î.e.n.) de către zei care l-au lovit pe acesta pentru faptul că „el a descoperit ca nedemnă includerea în învățăturile despre natură a proporției și incomensurabilității“. Ei căutau să rezolve apoi această contradicție admițînd existența infinitului unic actual (adică a unei mărimi, indivizibilă mai departe, și mai mică decît oricare mărime finită), ca măsură comună a laturii și diagonalei pătratului. Mai tîrziu aceeași contradicție era rezolvată prin aceea că raportul acestor lungimi era exprimat cu ajutorul unui proces nesfîrșit de aproximații succesive.

Ideea fundamentală a cosmogoniei pitagoreice consta în rotația circulară a tuturor corpurilor cerești situate pe zece sfere și în periodicitatea fenomenelor astronomice care se repetă cu precizie matematică după intervalul unui „an cosmic", despre a cărui durată diferiți autori emit diferite ipoteze. Pentru a atinge sacrul „zece", cerut de mistica numerelor, în afară de sfera stelelor fixe, a sferelor lui Saturn, Jupiter, Marte, Mercur, Venus, Soare, Lună și Pămînt, pitagoreicii au imaginat și sfera „antipămînt", care împreună cu celelalte se rotește în jurul „focului central". Armonia acestor sfere este descrisă de Aristotel astfel: „Aceste zece sfere emit, ca și tot ce se mișcă, un sunet, însă fiecare sferă un sunet de tip special, în conformitate cu particularitățile mărimii și vitezei sale... Ultima este determinată de diferite distanțe, care se află într-un raport armonic între ele, conform intervalelor muzicale. Datorită acestui fapt apare un sunet armonios, muzica sferelor în mișcare [91, 293 a, 290 b].

În modul acesta, cosmogonia pitagoreică era legată de teoria lor muzicală. La baza acesteia stăteau două legi fundamentale: în primul rînd, legea proporționalității dintre înălțimea tonului și lungimea coardei vibrante sau a coloanei de aer, de exemplu, în cazul cîntatului din flaut. În al doilea rînd, legea consonanței conform căreia consonanțele se obțin numai cînd lungimile corzilor sau înălțimile coloanelor se află într-un anumit raport de numere întregi. Acestor legi, descoperite empiric, li s-a dat mai tîrziu o explicație, probabil de către Arhitas din Tarent (aproximativ 428—365 î.e.n.), care a suferit influența atomismului materialist al lui Democrit. Explicația consideră tonurile ca reflexe subiective ale mișcărilor obiective ale corpurilor, iar înălțimea tonurilor ca dependentă de frecvența mișcărilor. Euclid, expunînd această explicație în *Canoanele* sale, conchide că „tonurile sînt compuse din particule, deoarece ele, prin adăugare și scădere, ating o măsură corectă. Or, tot ce este compus din particule se raportă unul la altul ca numere întregi, aceasta înseamnă că și tonurile trebuie să fie în mod necesar în raporturi de numere întregi".

Teoria matematică a consonanțelor dusă pînă la ultimele sale consecințe logice sugera însă ideea existenței incomensurabilității și deci infirma propria sa bază — posibilitatea măsurării în numere întregi a tuturor lucrurilor. Intervalul dintre tonurile complete nu este constant, ci invers proporțional cu înălțimea tonului. De aceea, împărțirea intervalului complet trebuie să se facă după „principiul armonic“, adică astfel încît octava (lungimea corzilor se raportează ca 1:2) să se împartă în două intervale inegale — cvarta (3:4) și cvinta (2:3) — după legea $1/2 = 3/4 \times 2/3$. Împărțirea octavei în două intervale egale $\frac{x}{y}$ ar da, după aceeași lege, $\frac{1}{2} = \frac{x}{y} \times \frac{x}{y}$, prin urmare $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$. Or, la un raport $1 : \sqrt{2}$ al lungimilor corzilor nu se obține consonanță, ci zgomot (disonanță). De aici vine ideea că $\sqrt{2}$ nu poate fi exprimat prin raportul a două numere întregi.

Ideile pitagoreicenilor cu privire la științele naturii au fost supuse criticii „dinspre stînga“ și „dinspre dreapta“ încă în antichitate. Astfel, materialistul și dialecticianul Heraclit din Efes (aproximativ 530—470 î.e.n.) îi reproșa lui Pitagora eclectismul și misticismul. Între timp, idealistul militant Platon (429—348 î.e.n.) denigra pe pitagoreici pentru faptul că ei „măsoară și compară sunetele empirice așa cum noi le auzim în realitate și studiază numerele pe care este bazată consonanța lor, în loc de a studia care numere sînt consonante în sine și care nu, și de ce“.

Matematica și numerologia pitagoreicilor. Din cauza lipsei materialului documentar pentru următoarele două veacuri nu există posibilitatea de a stabili etapele succesive ale progreselor făcute de pitagoreici în matematică, împrumutată inițial de ei de la egipteni și babilonieni.

Pitagoreicii reprezentau numerele sub forma punctelor, grupate în figuri geometrice. Astfel a apărut noțiunea de „numere figurative“, în care și-a găsit reflecția legătura strînsă ce există între noțiunile de număr și de întindere spațială. De exemplu, „numerele patratice“ 1, 4, 9, erau reprezentate astfel:

„Numerele triunghiulare“ 1, 3, 6 erau reprezentate astfel:

La pitagoreici punctul care exprima unitatea nu era divizibil mai departe — el reprezenta un atom matematic; punctul ca atare era definit ca unitatea dotată cu poziție. Pentru a fi distincte între ele, unitățile—puncte trebuiau separate printr-un spațiu, fiecare punct trebuia să aibă în jurul lui un „cîmp". Datorită acestui fapt, fiecare număr putea fi reprezentat nu numai cu ajutorul punctelor, ci și cu ajutorul unor cîmpuri pătrate sau cu ajutorul ambelor, ca, de pildă, numărul 3 sub forma:

Numărul este deci aici noțiunea fundamentală; figura servește numai pentru a-l reprezenta; geometria este subordonată aritmeticii.

Numerele figurative reflectau prin forma lor procedeul prin care ele au fost generate pe cale aritmetică, adică dacă au fost obținute prin adunare sau prin înmulțire. Pitagoreicii și continuatorii tradițiilor lor studiau de preferință numerele-sume, în timp ce Euclid și școala sa admiteau reprezentări geometrice doar pentru numere-produse.

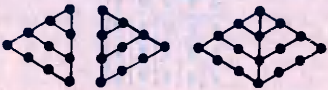
Cel mai simplu și mai vechi exemplu de noțiune aritmetică (reprezentată prin unități-puncte) este distincția dintre par și impar. Opoziția dintre par și impar reprezintă una dintre cele zece perechi de contrarii considerate de pitagoreici drept categorii filozofice.

Numerele-produse erau împărțite de către pitagoreici în numere „rectilinii", adică în numere simple care, întrucît nu se descompun în factori, erau reprezentate prin puncte situate de-a lungul unui segment: „numerele plane" care se descompun în doi factori și se reprezintă prin puncte ce formează un dreptunghi sau un pătrat și „numerele corporale" care se descompun în trei factori și se reprezintă prin puncte ce formează un paralelipiped sau un cub.

Printre numerele-sume pitagoreicii distingeau „numerele poligonale". Cele mai simple dintre ele au fost cele „triunghiulare":

$$1,\quad 1+2=3,\quad 1+2+3=6,\quad 1+2+3+4=10,\ldots$$

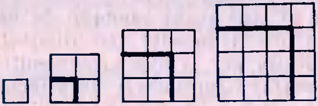
Din numerele triunghiulare pitagoreicii obțineau și toate numerele pătratice prin procedeul indicat mai jos în figură:



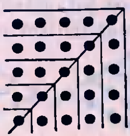
Pe aceeaşi cale, reunind trei numere triunghiulare egale, ei obţineau numere pentagonale şi aşa mai departe. Matematicianul Hipsicle din Alexandria (secolul al II-lea î.e.n.) a arătat că al n-lea număr m-gonal este egal cu $\frac{1}{2} n [2 + (n - 1) (m - 2)]$.

Mai departe, erau definite „numerele piramidale" formate prin adunarea numerelor poligonale. Cele mai simple dintre ele, „numerele tetraedrale", se obţin din numerele triunghiulare $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 6 = 10$, $1 + 3 + 6 + 10 = 20$... şi se reprezintă sub forma unor piramide cu baza triunghiulară. Se înţelege că toate numerele figurative şi proprietăţile lor nu au fost descoperite dintr-o dată, ci treptat, în decursul mai multor veacuri.

O dată cu dezvoltarea matematicii, numerele figurative şi-au pierdut importanţa, cu excepţia numerelor pătratice şi cubice care permiteau abordarea calculului ariilor şi volumelor, adică rezolvarea problemelor propriu-zis geometrice. Înlocuind unităţile-puncte prin cîmpuri, vedem că numerele pătratice, privite ca numere-sume, se reprezintă astfel:



Partea din figură, corespunzătoare numărului impar prin a cărui adăugare la numărul pătratic se obţine numărul pătratic următor, se numea *gnomon*. Iniţial acest cuvînt avea semnificaţia „cine ştie distinge". Mai tîrziu a însemnat cel mai simplu instrument astronomic — un par perpendicular pe planul orizontal (cadranul ceasornicului solar), formînd un unghi drept cu umbra sa — apoi cuvîntul *gnomon* a fost folosit în sens şi mai larg. Cu ajutorul lui se desemna acel adaos la o figură geometrică care o măreşte, dar nu o schimbă (de exemplu, gnomonul unui triunghi poate fi un trapez). Or, pitagoreicii, plecînd de la pătrat, identificau gnomon-ul cu o figură dreptunghiulară şi neapărat impară. Examinînd şirul de gnomoni,



pitagoreicii deduceau de aici o serie de proprietăţi ale numerelor, de exemplu, suma a două numere impare succesive este egală cu de 4 ori numărul (natural) corespunzător: $1 + 3 = 4\times1$, $3 + 5 = 4 \times 2$, $5 + 7 = 4 \times 3$ ş.a.m.d. În timp ce noi demonstrăm aceste proprietăţi şi altele analoge, de exemplu, cea din urmă, cu ajutorul unor transformări algebrice simple $(2n-1) + (2n + 1) = 4n$, pitagoreicii le verificau doar cu ajutorul unei figuri intuitive.

Un alt procedeu de reprezentare intuitivă a numerelor pătratice, sub forma de sumă a fost la pitagoreici *stadionul*, de exemplu, pentru a obţine 5^2 ca sumă, se scriau numerele de la 1 la 5 şi de aici înapoi la 1; în modul acesta, unităţile stăteau la intrarea şi ieşirea stadionului, iar numărul ridicat la pătrat — la cotitură:

$$\begin{matrix} 1 - 2 - 3 - 4 \\ 1 - 2 - 3 - 4 \end{matrix} > 5.$$

Examinînd figura stadionului se găseau o serie întreagă de proprietăţi ale numerelor între care şi cea dată mai sus.

Alături de numerele pătratice, o mare importanţă jucau la pitagoreici „numerele dreptunghiulare" — numerele de forma $n (n + 1)$. Se înţelege că numărul aparţinînd unei categorii putea totodată să aparţină şi unei alte categorii. Pitagoreicii mai cunoşteau şi numerele „asemenea", de exemplu $6 = 2 \times 3$, $24 = 4 \times 6$, $54 = 6 \times 9$,... reprezentate prin dreptunghiuri cu laturi proporţionale. Aceste numere posedă o serie de proprietăţi interesante: de exemplu produsul a două numere „asemenea" este un „număr pătratic".

Studiul numerelor-sume reprezentate prin figuri formate din unităţi-puncte a servit drept bază pentru sumarea seriilor numerice de care se ocupa cu succes Arhimede. Studiul „numerelor rectilinii" a dat un impuls apariţiei teoriei numerelor prime. În acest domeniu, rezultate importante au fost obţinute de Euclid, care a folosit în cărţile de teoria numerelor din *Elementele* sale multe noţiuni introduse de pitagoreici.

Deosebind, în afară de numerele prime, numerele compuse şi numerele relativ prime (adică neavînd factori comuni, de exemplu, 14 şi 55), pitagoreicii şi, cu unele excepţii, în general matematicienii greci acordau mai departe multă atenţie şi clasificării numerelor pare şi impare, distingînd (ca mai tîrziu Euclid) numerele par-pare, par-impare, impar-impare etc. Cei care respectau tradiţia lui Pitagora nu includeau printre numerele impare, şi în genere nici chiar printre numere, pe 1, iar printre cele pare — pe 2, considerîndu-le „principii" ale numerelor şi aşezîndu-le în afara şirului numeric.

Pitagoreicii se ocupau, de asemenea, cu problema raportului dintre număr şi suma divizorului lui. Prin divizorii unui număr se înţelegeau toţi divizorii săi, primi şi compuşi, inclusiv 1, însă exclusiv numărul însuşi. Dacă suma divizorilor era mai mare decît numărul dat însuşi, numărul se numea „supraperfect", dacă ea era egala cu el — „perfect" şi dacă era mai mică decît el — „imperfect".

Cu numerele perfecte s-au ocupat mult matematicienii din evul mediu; mai tîrziu Fermat şi Descartes au arătat legătura lor cu alte probleme ale teoriei numerelor.

În sfîrşit, pitagoreicii examinau „numerele prietene", adică două numere dintre care fiecare este egal cu suma divizorilor celuilalt. Neoplatonicianul sirian Iamblic (aproximativ 250—325 e.n.) îi atribuie lui Pitagora descoperirea numerelor prietene 220 şi 284, unica pereche cunoscută în antichitate. În evul mediu, se considera că talismanele cu numere prietene sînt capabile să întărească apropierea dintre oameni. Matematicianul arab Tabit Ibn Korra (826—900) a găsit regula de formare a numerelor prietene, care a fost uitată şi apoi redescoperită de Fermat şi publicată (fără demonstraţie) de Descartes (1638).

Medii, proporţii şi progresii. Din punct de vedere logic, studiul raportului a mai mult decît două numere trebuie să urmeze abia după studiul raportului a două numere de care sînt legate noţiunile de numere figurative, *logoi* etc. Cu toate acestea, istoriceşte proporţiile — rapoarte de trei şi patru numere — au fost studiate din cea mai adîncă antichitate greacă, deoarece ele au constituit obiectul de studiu al egiptenilor de la care au şi trecut la greci şi aceştia au creat apoi treptat o teorie armonioasă a proporţiilor ce şi-a găsit desăvîrşirea sa în cărţile V, VI şi VII ale lui Euclid. Prin proporţie se înţelegea în mod curent o proporţie geometrică cu patru termeni, în notaţia noastră: $a:b = c:d$, însă uneori şi una aritmetică: $a—b = c—d$. În ceea ce priveşte mediile, ele constau din trei termeni $a>b>c$, între care se pot stabili nouă relaţii, precum şi nouă relaţii între diferenţele $a—b$, $b—c$, $a—c$. Egalînd între ele aceste rapoarte şi lăsînd deoparte cele nepotrivite, obţinem 11 tipuri de medii: toate aceste medii au fost cunoscute grecilor antici.

Tradiția susține că epoca lui Pitagora cunoștea trei medii numite „vechi": media aritmetică $(a-b):(b-c) = a:a$, geometrică $(a-b):(b-c) = a:b$ și armonică $(a-b):(b-c) = a:c$. Media aritmetică $(a-b):(b-c) = a : a$ a fost cunoscută pitagoreicului Arhitas din Tarent. În afară de forma inițială a mediei geometrice $(a-b):(b-c) = a:b$, Arhitas o exprimă sub forma $a:b = b:c$ care decurge din prima.

Platon apela la mediile geometrice pentru a explica structura fizică a lumii, în timp ce media aritmetică și cea armonică erau folosite de el pentru a defini „spiritul universal".

Media armonică $(a-b):(b-c) = a:c$ era definită de Arhitas și Platon și în felul următor: dacă $a>b>c$, atunci b este medie armonică cu condiția ca $a = b + \frac{a}{n}$ și $b = c + \frac{c}{n}$ (unde $n>1$); de aici rezultă că $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$; astfel sînt, de exemplu, numerele 6, 4, 3, deoarece $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$. Media armonică era legată de legile consonanței muzicale, precum și de faptul că cubul are 12 muchii, 8 vîrfuri și 6 fețe, unde 8 este media armonică a numerelor 12 și 6.

Combinînd media aritmetică și media armonică, pitagoreicii obțineau proporția „muzicală" pe care Pitagora a preluat-o conform unei legende din Babilon. Dacă 12 și 6 sînt termenii extremi ai lungimilor coardelor octavei, aflați în raportul 2 : 1, atunci media aritmetică 9 formează cvarta (raportul 4 : 3), iar media armonică 9 cvinta (raportul 3 : 2); întreaga proporție are forma 12, 9, 8, 6.

„Teorema lui Pitagora" și mărimile incomensurabile. Învățătura pitagoreică care considera că numerele întregi reprezintă măsura tuturor lucrurilor s-a lovit de o contradicție insolubilă, datorită descoperirii iraționalității. Tocmai această descoperire reprezintă însă cea mai însemnată contribuție a pitagoreismului în matematică. În limba greacă, iraționalitatea se exprimă prin trei termeni: *asimmetron* cu semnificația: care nu are măsură comună; *arreton*, adică inexprimabil (prin numere întregi) care se întîlnește pentru prima dată la Platon, și *alogon* — care înseamnă ceea ce nu se exprimă prin *logos*, adică prin raportul a două numere întregi. Denumirea latină „iraționalitate" este o traducere literală a cuvîntului *alogon*, deoarece *ratio* înseamnă „raport".

În modul acesta, după cum se vede din denumirile înseși, pitagoreicii înțelegeau prin mărimi iraționale în primul rînd segmente rectilinii care nu au o măsură comună, fapt pentru care sînt inexprimabile printr-un raport de numere întregi. Prin urmare, nu avea sens să se vorbească de iraționalitatea unei mărimi decît raportată la alta.

Probabil că descoperirea iraționalității a fost legată de așa-numita „teoremă a lui Pitagora". După cum știm, această teoremă a fost cunoscută babilonienilor și, posibil, și egiptenilor cu mult înaintea lui Pitagora. Istoricii antici însă, Plutarh, Diogene Laerțiu și Proclus, atribuie această descoperire lui Pitagora, repetînd legenda după care Pitagora, drept mulțumire pentru această descoperire, a adus jertfă zeilor o sută de bivoli (*hecatomb*). Este posibil ca Pitagora sau elevii săi, cunoscînd anumite „triunghiuri sacre" (adică triunghiuri dreptunghice cu laturi numere întregi) ale egiptenilor și babilonienilor, pentru care teorema se verifică ușor, au generalizat pur și simplu această teoremă asupra tuturor triunghiurilor dreptunghice, fără a poseda încă o justificare satisfăcătoare. „Triunghiurile sacre" înseși puteau fi găsite prin studiul tabelelor de pătrate pe care le foloseau babilonienii. Numerele x, y, z care exprimă laturile unor astfel de triunghiuri erau numite „numere pitagoreice". Pitagoreicilor li se atribuie regula de obținere a numerelor pitagoreice prime între ele:

$$x = 2p + 1, \quad y = 2p^2 + 2p, \quad z = 2p^2 + 2p + 1,$$

care dau trei astfel de numere pentru orice p natural, aici y și z fiind două numere naturale, succesive.

Cu privire la forma inițială a demonstrației „teoremei lui Pitagora", trebuie să ne mulțumim numai cu ipoteze. Este posibil ca la început ea să fi fost demonstrată numai pentru un triunghi dreptunghic isoscel care se întîlnește de mult în ornamente într-o rețea de pătrate cu diagonale marcate. Pe o asemenea figură se observă că suma pătratelor $ABED$ și $EFJH$ construite pe catetele triunghiului DEH este egală cu pătratul $DBFH$ construit pe ipotenuza sa, deoarece toate aceste pătrate se descompun în triunghiuri egale (fig. 4). De la acest caz particular, trecerea la cazul general se putea face prin examinarea pătratului $ABCD$ împărțit în două pătrate inegale $AHJE$ și $JFCG$ și în două dreptunghiuri egale $EJGD$ și $HBFJ$ (fig. 5). Pătratul $EKLG$ este egal cu pătratul $ABCD$ micșorat cu triunghiurile

AKE, *KBL*, *LCG* și *GED* care în sumă sînt egale cu cele două dreptunghiuri. În același timp și suma pătratelor *AHJE* și *JFCG* este egală cu pătratul *ABCD* micșorat cu aceste două dreptunghiuri, de unde rezultă că pătratul *KLGE* este egal cu suma pătratelor *AHJE* și *JFCG*. Această demonstrație, la fel ca și demonstrația lui Euclid, nu folosește noțiunea de asemă-

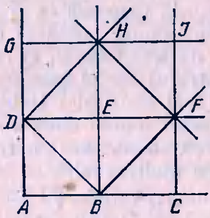


Fig. 4

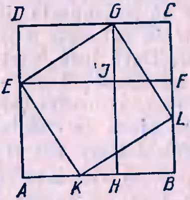


Fig. 5.

nare. Apelînd însă la ultima noțiune, care nu era necunoscută egiptenilor și babilonienilor, pe care a folosit-o cu succes, după cum am văzut, încă Tales, se putea demonstra această teoremă mult mai simplu.

„Teorema lui Pitagora“ ducea la problema determinării lungimii ipotenuzei, cunoscînd lungimea catetelor. Însă această problemă, nici în cazul cel mai simplu $a = b = 1$, nu se putea rezolva; nu reușeau încercările de a găsi raportul a două numere întregi $\frac{m}{n}$, astfel încît acesta să fie egal cu $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, sau, altfel spus, nu se putea găsi o măsură comună a laturii și a diagonalei unui pătrat, deși trebuie să presupunem că se făceau astfel de încercări mult timp, micșorînd tot mai mult unitatea de măsură. Imposibilitatea de a ajunge pe această cale la scop trebuie să fi uimit și tulburat: incomensurabilele erau percepute ca „inaccesibile gîndirii“, însuși termenul *alogon*, „irațional“, a căpătat acest al doilea sens. Nu este exclus, de asemenea, ca numărul irațional $\sqrt{2}$ să fi fost găsit în teoria armoniei în căutarea semioctavei, ceea ce este echivalent cu găsirea mediei geometrice a numerelor 1 și 2.

Imposibilitatea de a exprima pe $\sqrt{2}$ printr-un raport de două numere întregi a dus nu numai la căutarea calculului său prin aproximație, ci și la demonstrația acestei imposibilități. Una din demonstrații, care se întîlnește în unele copii ale *Elementelor* lui Euclid [92, vol. 2, pp. 503—505], procedează prin reducere la absurd. Ea se bazează pe următorul raționament. Fie latura pătratului egală cu a, diagonala lui egală cu b, unde numerele a și b le-am ales astfel, încît să nu aibă divizor comun (în afară de 1). Atunci, conform „teoremei lui Pitagora" trebuie să avem $b^2 = 2a^2$. Deoarece membrul II se împarte prin 2, urmează că și membrul I trebuie să se împartă prin 2, prin urmare numărul b trebuie să fie par și, deoarece a și b nu au divizor comun, el trebuie să fie impar. Dacă însă b este par, pătratul lui se împarte prin 4, ceea ce înseamnă că și membrul II al egalității trebuie să se împartă prin 4; acesta este însă posibil numai dacă a este par. Astfel am ajuns la concluzia absurdă că numărul a trebuie să fie în același timp par și impar, de unde rezultă că nu există numere care să satisfacă egalitatea dată. Așadar, $\sqrt{2}$ nu poate fi reprezentat ca un număr, adică așa cum făceau pitagoreicii cu ajutorul punctelor, dar el poate fi reprezentat cu ajutorul lungimii unui segment.

Un alt procedeu de demonstrație a iraționalității lui $\sqrt{2}$ se bazează pe metoda calculului prin aproximație al acestei rădăcini. Pentru a găsi rădăcina pătrată a unui număr, diferit de un pătrat perfect, Arhitas îl descompune în doi factori inegali (de exemplu $2 = 1 \times 2$), află media aritmetică și media armonică a celor doi factori $\left(\text{în cazul de față } \frac{3}{2} \text{ și } \frac{4}{3}\right)$ și formează din aceste patru numere o proporție „armonică" $\left(2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3} : 1\right)$. Aici produsul termenilor medii este egal cu numărul dat (2), și în același timp diferența $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$ este mai mică decît diferența $2 - 1 = 1$. Prin urmare, $\frac{3}{2}$ și $\frac{4}{3}$ pot fi privite ca valori aproximative ale lui $\sqrt{2}$, prima prin exces, iar a doua prin lipsă și continuînd același procedeu, drept aproximație de ordinul doi, obținem $\frac{17}{12}$ și $\frac{24}{17}$, care diferă între ele numai cu $\frac{1}{204}$ ș.a.m.d.

Descoperirea faptului că între latura și diagonala pătratului — două segmente ale căror mărimi relative ne sînt atît de familiare — nu există o măsură comună, fie oricît de mică, a provocat o adevărată criză a fundamentelor în matematica greacă. Învățătura pitagoreică asupra fundamentului numeric al întregii existențe, inclusiv și al mărimilor geometrice, nu mai putea fi recunoscută ca adevărată; a început căutarea unui nou fundament. Dar importanța descoperirii iraționalității a fost departe de a fi just apreciată de către toți. Astfel, Aristotel [77, p. 22, 982 b—983 a], arată că ea a provocat mirarea, pe care o produce orice descoperire științifică adevărată. Unii istorici idealiști ai matematicii văd în faptul incomensurabilității „un semn al antinomiei tulburătoare dintre gîndire și senzație, o prăpastie peste care nici calculul, nici logica nu sînt în stare să arunce o punte" [93, p. 522]. Alții însă, de exemplu, Abel Rey [94, pp. 326—327], afirmă că iraționalitatea lui $\sqrt{2}$ era privită mult timp ca o „excepție scandaloasă", că ea era ținută ascuns și se împiedica răspîndirea cunoștințelor asupra incomensurabilității. Se referă pentru aceasta nu numai la legenda pitagoreică a pieirii (în timpul unui naufragiu) a lui Hippas din Metapont, care a divulgat taina descoperirii incomensurabilității, precum și la faptul că, chiar după această descoperire, mult timp era dezvoltată o aritmetică care recunoștea exclusiv doar numerele întregi. Or, în incomensurabilitate, spre deosebire de mărimea continuă, cognoscibilă rațional, și de numărul discret cognoscibil intuitiv-senzorial, și-a găsit o expresie dialectica lumii materiale, a timpului și a spațiului, și a cunoașterii ei, cunoaștere a cărei esență, după cum a arătat Lenin ([8], p. 234), constă în faptul că reprezentarea atît cu ajutorul gîndirii cît și al senzației, a mișcării și a oricărei noțiuni, este întotdeauna o fragmentare, o mortificare a viului. Modul metafizic de gîndire nu le dădea însă matematicienilor antici, cum nu dă nici multor istorici ai matematicii, matematicieni și filozofi burghezi actuali, posibilitatea de a înțelege aceasta.

Aporiile lui Zenon. Punctul de vedere metafizic și-a găsit cea mai netă exprimare în școala eleaților, ideologi ai aristocrației sclavagiste, dușmani înverșunați ai dialecticii, care militau pentru învățătura despre existența unică, indivizibilă și imuabilă, împotriva dialecticii incipiente, ai cărei germeni erau prezenți chiar la pitagoreici și cu atît mai mult la materialiștii antici. Zenon (aproximativ 450 î.e.n.), elevul conducătorului școlii eleate, Parmenide, a emis o serie de „demonstrații" ale acestei învățături, printre care și cele patru renumite „aporii ale mișcării". Ele sînt următoarele:

1. *Dicotomia*. „Nu există mișcare, deoarece ceea ce se mișcă trebuie sa ajungă pînă la jumătatea drumului înainte de a ajunge pînă la capăt".

2. *Ahile*. „Cel ce aleargă mai lent nu va fi niciodată depăsit de cel iute, deoarece acel care urmărește trebuie să ajungă mai întîi în punctul în care se afla celălalt înainte, astfel încît cel lent va poseda întotdeauna în mod inevitabil un anumit avans.

3. *Săgeata*. „Dacă despre orice lucru se poate afirma că este fie în repaus, fie în mișcare ocupînd spațiul egal cu sine însuși, atunci, deoarece obiectul în mișcare există întotdeauna într-un moment (instantaneu), săgeata ce zboară este imobilă".

4. *Stadionul*. „Dacă există două șiruri de corpuri, fiecare format dintr-un număr egal de corpuri de volum egal ce trec unul în fața celuilalt pe o pistă de alergat (stadion), mișcîndu-se cu viteză egală în sensuri opuse, un șir începînd de la capătul stadionului, iar celălalt de la mijlocul lui, atunci aceasta duce la concluzia că jumătatea timpului dat este egală cu dublul acestui timp".

Aporiile, redate aici după Aristotel [95, pp. 143—144: 239 *b*], erau considerate de către acesta din urmă drept greșeli logice și drept sofisme comise față de logica formală tradițională. Or, după cum a remarcat Lenin [8, pp. 232—235], importanța filozofică a aporiilor lui Zenon consta în aceea că ele au dezvăluit adevărata contradicție a mișcării, a spațiului și timpului, pe care însă Zenon nu a reușit s-o exprime în logica conceptelor. În timp ce prima pereche de aporii pornește de la ipoteza divizibilității nelimitate a mărimilor continue și o infirmă, în a doua se face ipoteza opusă asupra mărimilor continue, construite din elemente indivizibile care este apoi de asemenea respinsă. Aceste ipoteze corespundeau celor două concepții opuse asupra spațiului — existente la greci: cea atomistă, care reducea spațiul la puncte discrete (ca la pitagoreici) și ipoteza ce admitea divizibilitatea nelimitată a spațiului, excluzînd ideea că spațiul este format din puncte (aceasta era și concepția lui Aristotel). Cea de-a doua aporie diferă de prima numai prin faptul că în ea se mișcă două corpuri și nu unul, adică „se demonstrează" imposibilitatea nu numai a mișcării absolute, ci și a mișcării relative, de asemenea nu numai imposibilitatea ca mișcarea să înceapă, dar și ca mișcarea, o dată începută, să continue. Aceeași relație există și între a patra și a treia aporie.

Pentru a înțelege importanța matematică a aporiilor lui Zenon, este suficient să analizăm una dintre ele, de exemplu prima.

Aci, punctul ce se mişca de la A la B trebuie să treacă mai întîi prin punctul C care împarte segmentul AB în două, apoi prin punctul D care împarte segmentul BC în două şi aşa mai departe. Dacă punem $AB = 1$, atunci avem $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$, însa această sumă este egală cu $1 - \frac{1}{2^n}$ şi, o dată cu creşterea lui n, ea se apropie indefinit de 1. Zenon presupunea însă că segmentul este întotdeauna mai mare decît punctul — fir de nisip, care are o măsură minimă finită. În acest caz, suma unui număr infinit de astfel de segmente va fi infinită, deci raţionamentul lui Zenon arată într-adevăr absurditatea acestei ipoteze. În modul acesta, aporia — dificultate logică aparent irezolvabilă — constă aici în faptul că suma unei mulţimi *infinite* de termeni este *finită* şi la baza ei stă renunţarea lui Zenon la ideea divizibilităţii infinite a materiei. Obiecţiile lui Aristotel pe care, în esenţă, le repetă şi Leibniz, împotriva „dicotomiei" lui Zenon, nu nimeresc ţinta, deoarece ele arată că nu numai spaţiul, ci şi timpul sînt divizibile la infinit. Stabilind însă că segmentul AB va fi parcurs în $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ unităţi de timp, nu rezolvăm de loc problema, care constă în a arăta de ce un şir de împărţiri, prin definiţie inepuizabil, se epuizează totuşi. Aceasta devine clar numai atunci dacă luăm în seamă ce anume şi în ce mod descreşte peste orice limită în această împărţire. Întregul raţionament al lui Zenon este legat de găsirea sumei unei progresii geometrice infinite, prin urmare trebuie să presupunem împreună cu Zeuthen [12, p. 56] că la mijlocul secolului al V-lea î.e.n. fie Zenon, fie adversarii săi se ocupau de sumarea ei. Nu putem fi nicidecum de acord cu aprecierea rolului lui Zenon, dată de Van der Waerden [96] care îl prezintă ca pe un dialectician care nu lua atitudine nici împotriva atomismului numeric al pitagoreicilor, nici împotriva ideii infinitului mic care atunci nu ar fi existat în matematica greacă.

Democrit. Din punct de vedere logic formal — respingînd în mod corect utilizarea infinitului, atît timp cît nu i s-a dat o definiţie mai cuprinzătoare decît aceea că el nu poate fi atins — Zenon a marcat începutul acelei linii de dezvoltare a matematicii greceşti care a căutat să evite operaţii cu mulţimi infinite şi mărimi infinit mici. Această linie nu a triumfat însă dintr-o dată.

Ea a trebuit să-şi croiască drum în lupta împotriva şcolii materialiştilor-atomişti greci, condusă de Democrit aproximativ (460—370 î.e.n.). Aporiile lui Zenon, la fel ca şi descoperirea incomensurabilităţii, au reflectat caracterul intern contradictoriu, obiectiv existent, al mişcării, spaţiului şi timpului, al continuităţii şi discontinuităţii materiei. Noţiunile logice ce au apărut pe baza raportului dintre mulţimile finite s-au dovedit a fi parţial inaplicabile mulţimilor infinite şi tocmai aceasta ducea la aporii, la paradoxe logice şi matematice. Mai tîrziu, acestea din urmă au fost examinate de către Galilei şi Bolzano. Ele nu sînt eliminate nici astăzi şi continuă să apară sub forma unor dificultăţi logice în fundamentarea teoriei mulţimilor ce stă la baza matematicii moderne.

Democrit, care exprima ideologia păturilor de negustori şi producători ai democraţiei sclavagiste din oraşul trac Abdera, a fost, după expresia lui Marx şi Engels, „cea dintîi minte enciclopedică la greci" [4, p. 140]. Diogene Laerţiu (secolul al III-lea e.n.), care a fost unul dintre primii istorici ai filozofiei, vorbeşte de 70 de opere originale ale lui Democrit îmbrăţişînd diferite probleme ale ştiinţelor naturii, matematicii şi filozofiei din care însă nu s-au păstrat decît fragmente. Fiind materialist, Democrit propovăduia eternitatea, necreabilitatea şi indestructibilitatea materiei, pe care o reprezenta ca fiind formată din atomi rigizi, indivizibili şi imuabili, care diferă ca formă şi, datorită diferitelor combinaţii de poziţie şi ordine, generează întreaga varietate infinită a materiei. Existenţa, alături de materie, a spaţiului absolut vid asigura automişcarea atomilor. Democrit considera mişcarea atomilor ca fiind mecanică şi nu admitea întîmplarea. Lui îi aparţine prima operă de logică, *Canoane*, în trei cărţi, orientată atît împotriva scepticismului şi relativismului sofiştilor, cît şi împotriva idealismului pitagoreicilor şi eleaţilor.

Democrit a călătorit mult; el a fost în Egipt, Persia, Babilon, posibil şi în India şi Etiopia, unde a avut ocazia să cunoască stadiul în care se găseau în acele ţări ştiinţele. Cu toate că cunoştinţele sale multilaterale şi profunde l-au făcut celebru în antichitate, materialismul său a provocat o ură înverşunată: Platon îl ignora pe Democrit şi ardea lucrările lui, atitudine care s-a păstrat, faţă de lucrările acestuia, timp de milenii pînă în zilele noastre la idealiştii — filozofi şi istorici, fapt remarcat de V.I. Lenin [7, pp. 117 şi 339—340]. Trecerea sub tăcere şi dispreţuirea lui Democrit s-au repercutat şi asupra atitudinii faţă de moştenirea sa matematică referitor la care — din această cauză, — nu ne-au parvenit decît informații sărace.

Diogene Laerțiu pomenește de șase opere matematice ale lui Democrit. Prima dintre ele este lucrarea intitulată *Despre deosebirea în vederi sau despre tangența dintre cerc și sferă* sau într-o altă citire *„Despre deosebirea în unghiuri sau despre tangența dintre cerc și sferă*. Mai departe sînt citate *Despre geometrie*, *Geometrice*, *Numere*, *Despre liniile incomensurabile* și *Ecpetasmata*. În lucrările sale geometrice, după mărturia lui Aristotel, a lui Arhimede și a altor învățați din antichitate, Democrit pleca de la faptul că punctele sînt atomi ai spațiului avînd un volum finit și considera că în fiecare segment există un număr finit, deși „incomprehensibil de mare" de puncte [97]. Această concepție a fost strîns legată de reprezentările geometrice ale pitagoreicilor sau ale lui Zenon. Cu ajutorul acestor concepții, Democrit determina ariile și volumele multor figuri, în particular volumul piramidei. Democrit își închipuia corpurile geometrice ca formate din plăci paralele a căror grosime este egală cu un atom, fapt prin care el a anticipat metoda de mai tîrziu a indivizibilelor și „principiul lui Cavalieri" (1635), după care două corpuri au volume egale dacă intersectîndu-le cu un plan oarecare, paralel cu un plan dat, ambele secțiuni au de fiecare dată arii egale. Democrit cunoștea, se pare, că o prismă triunghiulară poate fi descompusă în trei piramide cu baze și înălțimi egale — această propoziție a intrat în *Elementele* lui Euclid (cartea XII, propoziția 7) [92, vol. 3, p. 76]. Se pare că tocmai de aici a tras Democrit concluzia că volumul piramidei este egal cu o treime din volumul prismei cu aceeași bază și înălțime. Demonstrația riguroasă a acestei teoreme a fost dată de Eudoxus jumătate de secol mai tîrziu. Era firească pentru Democrit generalizarea acestei teoreme la piramide cu bază poligonală. Deoarece cercul era considerat de Democrit ca un poligon ale cărui laturi sînt formate fiecare din doi atomi, cilindrii circulari și conurile circulare erau pentru Democrit prisme și piramide, a căror bază avea un număr foarte mare de laturi și, din generalizarea teoremei lui Democrit asupra piramidelor cu bază poligonală, decurgea generalizarea acestei teoreme și asupra conurilor.

În prima dintre lucrările matematice ale lui Democrit (în cazul primei variante a titlului), citate de Diogene Laerțiu, era respinsă probabil părerea sofistului Protagora care afirma că, deoarece în natură nu există drepte și cercuri ideale cu care are de-a face matematica, rezultă că o dreaptă este tangentă la cerc nu într-un punct, ci într-o mulțime de puncte. După Democrit, dreapta care atinge cercul are cu acesta doi atomi comuni. În a doua variantă a titlului tratatului, putea fi vorba în el de unghiuri de contingență avînd forma unui „corn".

După cum se știe, unghiul dintre două curbe secante se măsoară prin unghiul format de tangentele lor în punctul de intersecție, de aceea unghiul dintre două curbe tangente este egal cu zero. Astfel stau lucrurile cu unghiurile formate de curbe. Un asemenea unghi se definește ca domeniul plan cuprins între două curbe secante (sau domeniul plan cuprins între două curbe tangente) în vecinătatea punctului de intersecție (de tangență) (fig. 6). Pentru a simplifica lucrurile să luăm drept una din curbe o dreaptă — axa X, iar pentru a doua o curbă — un cerc care să taie axa X în originea O (sau este tangent axei X în O). Dintre două unghiuri curbilinii AOX și BOX, vom considera mai mic unghiul a cărui latură A trece în vecinătatea punctului O dedesubtul laturii B a celuilalt. Este evident că unghiul de contingență al oricărui cerc tangent B este mai mic decît unghiul curbiliniu al oricărui cerc C care intersectează dreapta X. Să definim acum produsul unghiului de contingență a format de cercul tangent A de rază R, cu un număr pozitiv întreg n astfel încît acesta să fie egal cu unghiul de contingență format de cercul de rază $\frac{R}{n}$. Atunci este evident că oricît de mare ar fi n unghiul na va fi întotdeauna mai mic decît unghiul TOX (el coincide cu unghiul obișnuit) al dreptei T, tangenta cercului C. În sfîrșit, unghiul COX al cercului secant C îl vom considera ca sumă a unghiurilor $COT + TOX$ (fig. 7).

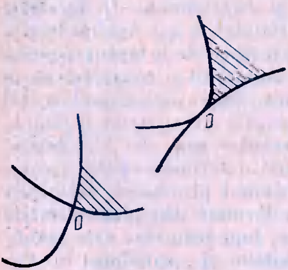


Fig. 6.

În *Elementele* lui Euclid (cartea III, propoziția 16) [92 vol. 1, p. 97] se demonstrează că „unghiul de contingență" este mai mic decît orice unghi ascuțit rectiliniu. Deși acest unghi este introdus sub denumirea de „unghiul segmentului" printr-o definiție separată (cartea III, definiția 7) [92, vol. 1, p. 81] enunțîndu-se teoreme despre el — de exemplu propoziția 31 din cartea III — Euclid nu folosește unghiuri de contingență pentru demonstrație. Or, din lucrările lui Aristotel rezultă că pînă la el unghiurile curbilinii erau folosite pentru demonstrații, de exemplu, pentru demonstrația teoremei egalității unghiurilor de la baza unui triunghi isoscel. În *Elemente* însă, această teoremă este demonstrată fără ajutorul unghiurilor de contingență: acestea au ieșit din uz din cauza disputelor legate de ele. Unghiurile de contingență constituie un exemplu de infinit mic actual ce nu se supun așa-numitului postulat al lui Eudoxus-Arhimede care afirmă că pentru oricare două mărimi a și b se poate găsi un număr n, astfel încît $na > b$.

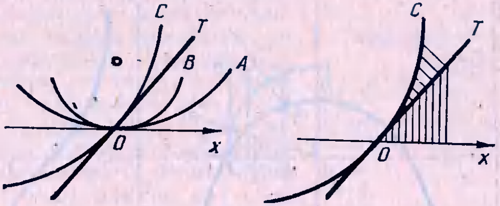


Fig. 7.

Prin „infinit mic actual", se înțelegea o mărime continuă indivizibilă mai departe, mai mică decît orice mărime finită. Este posibil ca interesul lui Democrit față de infiniții mici actuali să fi fost legat de concepțiile sale atomiste, deoarece atomii lui Democrit aveau multe trăsături comune cu aceste mărimi.

Disputele asupra unghiurilor de tangență au fost reluate în secolele XIII—XVI și aceste unghiuri au servit în secolul al XVII-lea drept prototip al indivizibililor pentru Kepler și Cavalieri.

Lucrarea lui Democrit *Ecpetasmata* a fost consacrată proiecției sferei armilare (a unuia dintre cele mai vechi instrumente astronomice) pe un plan. Conform mărturiei arhitectului și inginerului roman Vitruviu (a doua jumătate a secolului I î.e.n.), Democrit a scris și lucrări consacrate problemelor perspectivei.

Cercetătorii au atras atenția asupra faptului că ordinea în care Diogene Laerțiu enumeră operele matematice ale lui Democrit corespunde ordinii de expunere în *Elementele* lui Euclid: planimetria (cărțile I—VI), numerele (cărțile VII—IX), incomensurabilele (cartea X). Aceasta arată că lucrările lui Democrit, alături de altele, au pregătit apariția *Elementelor*. Cu toate că școala materialistă a atomiștilor a existat pînă în secolul al III-lea î.e.n., istoricii idealiști antici, de exemplu Proclus, treceau sub tăcere realizările ei matematice.

Hippias din Elis. Apariția *Elementelor* era pregătită și în lucrările sofiștilor, filozofilor și cercetătorilor naturii din secolele V—IV î.e.n., care s-au dezis de religie și căutau o explicație rațională pentru fenomenele naturii. Dintre aceștia unii „mai bătrîni" erau materialiști, în timp ce alții, în special cei de mai tîrziu, înclinau spre relativismul filozofic, scepticism și idealism. Dintre sofiști făcea parte și Hippias din Elis care s-a născut în

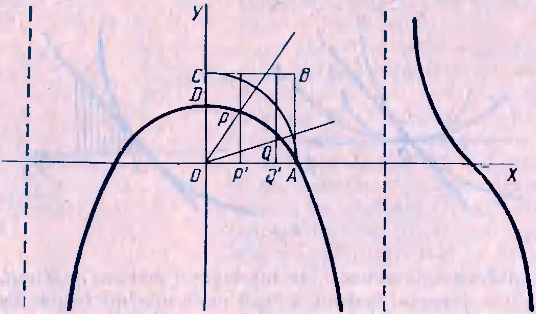


Fig. 8

jurul anului 460 î.e.n. Lui i se atribuie descoperirea unei curbe speciale care ulterior a fost denumită cvadratrice (fig. 8). Dacă dreapta AB se mișcă uniform rămînînd paralelă cu ea însăși, pînă la poziția OC și în același timp raza OA se rotește uniform în jurul lui O pînă la poziția OC, atunci locul geometric al punctelor de intersecție ale dreptei și razei va fi cvadratricea, mai exact o parte a ei, deoarece curba are ramurile infinite. Dacă punem $OA = a$, ecuația ei în coordonate rectangulare va fi $y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}$, de unde obținem că $y_0 = OD = \lim_{x \to 0} x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a} = \frac{2a}{\pi}$. Hippias a folosit această curbă pentru rezolvarea problemei (împărțirii unui unghi în trei părți egale): „trisecțiunea unghiului". Pentru a împărți un unghi $\sphericalangle POA$ în trei părți egale, coborîm o perpendiculară PP' pe OA, apoi construim $AQ' = \frac{1}{3} AP'$, construim $Q'Q$ paralel cu $P'P$ și pînă la intersecția Q cu cvadratricea, atunci $\sphericalangle QOA = \frac{1}{3} \sphericalangle POA$.

Alături de problemele „cvadraturii cercului" și de „duplicarea cubului", „trisecțiunea unghiului" a fost una dintre cele trei probleme celebre ale geometriei. Încercările de a rezolva exact aceste probleme cu ajutorul compasului și al riglei (și cu respectarea procedeelor permise de tradiție în folosirea acestor instrumente) au continuat timp de două milenii. Deoarece Hippias folosea pentru rezolvare curba sa, această rezolvare era considerată nepermisă. Dar, aproximativ în același timp, exista un alt procedeu de rezolvare care, deși folosește numai rigla, totuși nu corespunde numai procedeelor admise, procedeu ce a intrat apoi în *Elementele* lui Euclid (cartea I, postulatele 1,2) [92, vol. 1, p. 14]. Aceasta este așa-numita metodă a alunecării. Pentru a împărți unghiul ABC în trei părți egale (fig. 9), ducem AC perpendicular pe BC și AE paralel cu BC. Apoi marcăm pe riglă punctele D și E, astfel încît $DE = 2AB$ și rotim rigla în jurul punctului B deplasînd-o totodată pînă cînd E cade pe AE, D pe AC. Efectuînd astfel construcția lui DE, observăm că dacă F este mijlocul lui DE, atunci în triunghiul dreptunghic ADE avem $DF = AF = FE$, prin urmare, și $AF = AB$; aceasta înseamnă că ABF este un triunghi isoscel, de aceea $\sphericalangle ABF = \sphericalangle AFB$. Însă și triunghiul AEF este isoscel, de aceea $\sphericalangle AEF = \sphericalangle FAE$, prin urmare $\sphericalangle AFB = 2\sphericalangle AEF = 2\sphericalangle CBF$. În modul acesta $\sphericalangle CBF = \frac{1}{3}\sphericalangle CBA$.

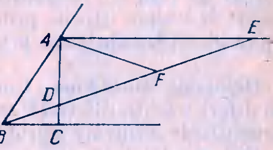


Fig. 9

Imposibilitatea trisecțiunii unghiului în cazul general cu ajutorul compasului și al riglei a fost demonstrată numai după ce Leonardo Pisano (Fibonacci, aproximativ 1170—1230) a arătat că o ecuație cubică cu coeficienți întregi (și la rezolvarea acesteia se reduce problema trisecțiunii unghiului), în cazul general nu poate fi rezolvată numai cu ajutorul numerelor raționale și al iraționalităților pătratice.

Cvadratricea lui Hippias, care putea desigur servi și pentru împărțirea unghiului nu numai în trei părți, ci și în orice număr de părți egale, a fost folosită de Dinostrate (aproximativ 350 î.e.n.) pentru rezolvarea problemei cvadraturii cercului. Acesta a fost fratele lui Menechmus despre care vom vorbi mai încolo. Dinostrate a demonstrat că $OD = \frac{2a}{\pi}$, nu cu ajutorul trecerii la limită, ci prin metoda reducerii la absurd a celor două ipoteze ce exclud această egalitate: $OD < \frac{2a}{\pi}$ și $OD > \frac{2a}{\pi}$, folosind o relație pe care noi o scriem astfel: $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, unde α este un unghi ascuțit. Plecînd de la $OA = a$ și $OD = \frac{2a}{\pi}$, este ușor de construit și lungimea πa, prin urmare, și pătratul a cărui arie este egală cu cercul de rază a. Demonstrația lui Dinostrate reprezintă, din punct de vedere istoric, primul exemplu cunoscut de demonstrație apagogică (demonstrație prin metoda reducerii la absurd).

Hipocrate din Chios. Cunoștințele de matematică împrăștiate în diferite școli, diferitele teoreme și demonstrațiile lor, diferitele procedee de rezolvare a problemelor au fost pentru prima dată adunate la un loc într-o expunere sistematică în *Elementele* pierdute ale lui Hipocrate din Chios (care a predat în Atena cam între anii 450 și 430 î.e.n.). Această lucrare conținea, după informațiile istoricilor din antichitate, propozițiile fundamentale ce au intrat mai tîrziu în primele patru cărți ale lui Euclid. Lui Hipocrate îi aparțin trei descoperiri. În primul rînd, conform lui Eudem, el a demonstrat că ariile cercurilor sînt proporționale cu pătratele construite pe diametrii lor — propoziție pe care Euclid (cartea XII, propoziția 2) [92, vol. 1, p. 64] o demonstrează prin metoda exhaustivă; probabil că demonstrația lui Hipocrate purta un caracter analog.

În al doilea rînd, ocupîndu-se de rezolvarea problemei cvadraturii cercului, Hipocrate a construit pentru prima dată figuri curbilinii — *lunule*, pentru care cu ajutorul compasului și al riglei se pot construi figuri echivalente, mărginite de drepte. Aceasta întărea speranța, e drept nejustificată, că se va putea rezolva și problema cvadraturii cercului. Cea mai simplă *lunulă* a cărei cvadratură este posibilă se construiește astfel: în semicercul ACB înscriem un triunghi dreptunghic isoscel ACB și descriem pe catetele lui semicercurile egale ADC și CEB (fig. 10).

Conform propoziției lui Hipocrate cu privire la proporționalitatea ariilor cercurilor față de pătratele diametrelor lor, aria semicercului ACB este de două ori mai mare decît aria fiecăruia dintre semicercurile ADC și CEB, prin urmare suma ariilor semicercurilor mici este egală cu aria semicercului mare, adică $ADC + CEB = ACB$. Scăzînd din ambele părți ariile $AFC + CGB$, comune celor două figuri, obținem $ADCF + CEBG = \Delta ACB$ sau $ADCF = \Delta ACO$.

Alături de această lunulă mărginită în exterior de un semicerc, Hipocrate a studiat încă alte două. Una are ca frontieră exterioară un segment de cerc, mai mare decît semicercul. Mai întîi se construieşte trapezul $ABCD$ cu laturile 1, 1, 1 şi $\sqrt{3}$ (fig. 11). Apoi se descrie în jurul lui un cerc şi pe coarda $AD = \sqrt{3}$ se construieşte segmentul AED, asemenea fiecăruia din segmentele AFB, BGC şi CHD. Este uşor de demonstrat că aria lunulei $AFBGCHD$

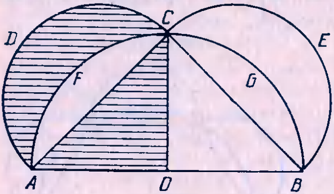


Fig. 10

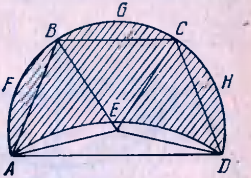


Fig. 11

este egală cu aria trapezului $ABCD$. Observăm că construcţia trapezului $ABCD$ necesită o apreciabilă îndemînare în folosirea metodelor geometrice.

O altă lunulă are ca frontieră exterioară un segment mai mic decît un semicerc. Deasupra diametrului AB se construieşte un semicerc cu centrul C (fig. 12). Apoi în punctul D care împarte pe CB în două, se duce o perpendiculară DE pe AB. Mai departe, pe semicerc se caută un punct F, astfel încît $BF = \sqrt{3}\ AC$, şi se uneşte intersecţia G a lui BF cu punctul C. Prelungirea acestei drepte CG intersectează în punctul H dreapta FH dusă din F şi paralelă cu AB. După aceasta, în jurul trapezului $FCBH$ se circumscrie un cerc, iar apoi un altul în jurul triunghiului FGH. Atunci fiecare din cele două segmente construite pe coardele FG şi GH va fi asemenea fiecăruia din cele trei segmente construite pe coardele FC, CB şi BH, fiecare din primele două segmente avînd o arie de $1\frac{1}{2}$ ori mai mare decît fiecare din ultimele trei. De aici rezultă că aria lunulei $FCBH$ este egală cu aria pentagonului $FCBHG$.

În sfîrşit, Hipocrate a arătat de asemenea că există lunule ale căror arii, împreună cu aria unui anumit semicerc, dau o arie a cărei cvadratură este posibilă. În semicercul cu diametrul AB (fig. 13) se înscrie trapezul $ACDB$, astfel încît $AC = CD = DB =$

$= \frac{1}{2} AB$. Apoi, pe coardele AC, CD și DB se construiesc semicercuri. Atunci suma ariilor celor trei trapeze egale împreună cu aria unuia dintre cele trei semicercuri va fi egală cu aria trapezului.

În afară de lunulele lui Hipocrate există încă două cazuri $\left(\text{cu raportul razelor cercurilor egal cu } 5 \text{ sau } \frac{5}{3}\right)$ care au fost găsite de către

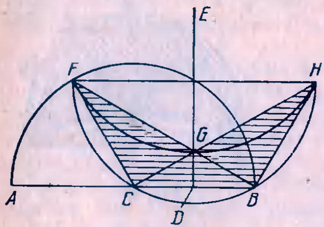


Fig. 12

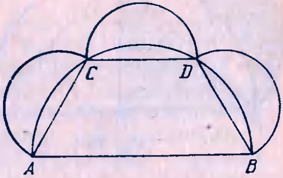


Fig. 13

matematicianul finlandez Wallenius (1766). Matematicienii sovietici Cebotarev și Dorodnov au demonstrat că aceste cinci cazuri reprezintă unicele lunule, patratele razelor arcului interior și exterior fiind într-un raport rațional.

A treia descoperire a lui Hipocrate a fost reducerea așanumitei „probleme din Delfi" — adică a problemei duplicării cubului — la o dublă proporție geometrică. Legenda a legat această problemă de cererea Pithiei de a se construi un altar cubic de volum dublu față de cel existent în Delfi. Hipocrate a găsit că dacă $a : x = x : y = y : 2a$, atunci $a^3 : x^3 = a : 2a$. Este posibil ca el să fi ajuns la această idee prin analogie cu rezolvarea problemei duplicării pătratului, unde are loc o proporție geometrică simplă

$$a : x = x : 2a, \text{ de unde } a^2 : x^2 = a : 2a.$$

Este de asemenea posibil, ca el să fi cunoscut teoremele ce au intrat mai tîrziu în *Elementele* lui Euclid (cartea VIII, propozițiile 11, 12) [92, vol. 2, p. 54] despre o singură medie între două numere pătratice și despre două medii proporționale între două numere cubice.

Deși *Elementele* lui Hipocrate nu ne-au parvenit, putem totuși presupune că ele conțineau în esență acele materiale care apoi au intrat în primele patru cărți ale lui Euclid, inclusiv construcțiile cu ajutorul compasului, de care pitagoreicii se pare că nu se ocupau.

Arhitas din Tarent. După ce problema duplicării cubului a fost redusă la găsirea a două medii proporționale, s-au ocupat mulți de rezolvarea ei, dintre care primul a fost Arhitas din Tarent. Arhitas a fost un om de stat, conducător de oști și filozof pitagoreic, prieten cu Platon și profesor al lui Eudoxus. El se ocupa de matematică și de aplicațiile ei la astronomie, mecanică și muzică. Din relatarea lui Simplicius [98, p. 467] — comentatorul lui Aristotel — se cunoaște argumentația lui Arhitas în sprijinul infinității universului; el a studiat raporturile numerice ale consonanțelor în cele trei școli muzicale existente în acea vreme; în mecanică lui i se atribuie inventarea scripetelui și a șurubului, construcția unui porumbel din lemn ce zbura și a unei hîrîitoare pentru copii, însă este posibil să fie vorba de o altă persoană cu același nume.

Din lucrările de matematică ale lui Arhitas se cunosc numai fragmente; din acestea face parte demonstrația teoremei după care între două mărimi ce se află în raportul $n : (n + 1)$ nu poate fi o medie aritmetică.

Dar cea mai mare realizare a lui Arhitas este rezolvarea curajoasă a problemei din Delfi cu ajutorul intersecției a trei supra-

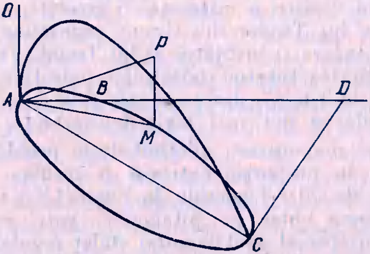


Fig. 14

fețe de rotație. Ea arată cît de departe a ajuns încă de pe atunci matematica greacă, pentru care reprezentările tridimensionale erau de mult lucruri obișnuite. Fie AB și AC segmentele între care se cere să se construiască două medii proporționale (fig. 14).

să construim un cerc pe AC ca diametru; fie AB o coardă a acestuia. Construim apoi un cilindru drept ce are drept bază acest cerc: aceasta este prima din suprafețele noastre. Mai departe, pe diametrul AC construim un semicerc în planul perpendicular pe cerc și îl rotim în jurul axei AO perpendiculară pe planul cercului. Astfel obținem un semitor (cu diametrul interior egal cu zero). Aceasta a doua suprafață se va intersecta cu cilindrul după o curbă strîmbă. În sfîrșit, să construim în punctul C tangenta CD la cercul ABC și s-o continuăm pînă la intersecția ei în punctul D cu prelungirea coardei AB; rotim triunghiul ACD în jurul lui AC. Astfel, obținem un con circular drept — cea de-a treia suprafață ce va intersecta curba strîmbă obținută mai înainte în punctul P. Este ușor de demonstrat că atunci are loc raportul $AC : AP = AP : AM = AM : AB$, unde punctul M este proiecția punctului P pe plan. În cazul particular cînd $AC = 2AB$, obținem $AM^3 = 2AB^3$, adică rezolvarea problemei din Delfi. Plutarh povestește că Arhitas ar fi obținut această soluție pe o cale mecanică, cu ajutorul unui aparat inventat de el: *mezograf*. Aceeași problemă a duplicării cubului a fost rezolvată mai tîrziu prin alte metode de către Eudoxus, Menechmus, Heron, Filon din Bizanț, Diocles, Sporus și Pappus.

Teodor din Cirene. Apariția *Elementelor* lui Euclid, operă care a constituit o încununare în secolul al III-lea î.e.n. a dezvoltării de trei veacuri a matematicii grecești, a fost pregătită și de lucrările lui Teodor din Cirene (aproximativ 410 î.e.n.) elev al lui Protagora și învățător al lui Teetet. Teodor a demonstrat iraționalitatea tuturor rădăcinilor pătratice ale numerelor nepătratice de la 3 la 17, dar nu se știe prin ce procedeu anume. Poate că Teodor a dat mai întîi demonstrația iraționalității lui $\sqrt{5}$ ca fiind mai ușoară, plecînd de la problema împărțirii unui segment în proporție extremă și medie — numită „secțiunea de aur" de către Leonardo da Vinci (1452—1519). Această problemă interesa chiar pe pitagoreici care acordau acestei proporții, și în special pentagonului stelat regulat (*pentagrama*) care se construiește cu ajutorul ei, o semnificație magică (reprezentarea acestui pentagon se întîlnește pe vasele din secolul al VII-lea î.e.n.).

Despre vechimea problemei împărțirii segmentului în proporție extremă și medie vorbește și faptul că ea se întîlnește în a doua carte a *Elementelor* lui Euclid, care prin conținut aparține, ca și primele patru cărți, celei mai vechi părți a *Elementelor*. Această problemă este formulată aici (cartea II, propoziția 11) [92, vol. 1, p. 75] fără a folosi noțiunea de raport, adică așa cum se face aceasta în toate primele patru cărți, în timp ce ca aplicare a noțiunii de raport ea este dată în cartea a șasea (propoziția 30) [92, vol. 1, p. 213]. În afară de aceasta, Euclid se ocupă de ea în cartea IV propozițiile 11—14 [92, vol. 1, pp. 133—138], unde ea este folosită pentru construirea unui pentagon regulat, și în cartea XIII unde se studiază proprietățile acestei proporții, ea fiind folosită pentru construirea poliedrelor regulate și compararea muchiilor lor.

După Euclid de „secțiunea de aur" s-au ocupat Hipsicle (secolul al II-lea î.e.n.), Pappus (secolul al III-lea e.n.), matematicienii din evul mediu, matematicienii din epoca Renașterii, în special în legătură cu folosirea ei în arhitectură. În sfîrșit, interesul pentru ea a crescut din nou la sfîrșitul secolului trecut, provocat de întărirea tendințelor mistice, caracteristice pentru perioada imperialismului.

Platon. Dezvoltarea matematicii, care a dus la crearea *Elementelor* lui Euclid, era apreciabil stimulată de lupta dintre școlile filozofice de științe ale naturii, existente atunci. Pentru Platon (427—347 î.e.n.), elev al lui Socrate și conducător al școlii filozofice reacționare, obiectiv-idealiste, al „Academiei" din Atena, orientată împotriva materialismului și a democrației sclavagiste, matematica prezenta un interes deosebit. Deși Platon însuși, contrar legendelor răspîndite de către elevii și adepții săi, care au căutat să-l glorifice, nu era matematician, totuși el și școala sa acordau matematicii o mare însemnătate. Dar ei vedeau importanța ei nu în aplicațiile practice, ceea ce era considerată o preocupare nedemnă, ci în primul rînd în faptul că preocuparea pentru matematică era socotită drept o cale ce duce spre lumea „ideilor pure", spre cunoașterea scopului final al filozofiei — a ideii de Dumnezeu; în al doilea rînd, în faptul că ea a fost inaccesibilă pentru popor, pentru *demos*, și era un privilegiu al aristocrației, că putea servi drept condiție de a fi admis la putere în statul ideal al lui Platon, această „idealizare ateniană a orînduirii de castă egiptene" după cuvintele lui Marx.

Dar, cu toate aceste măsuri reacționare, însuși faptul că Platon considera drept condiție pentru studiul filozofiei cunoașterea matematicii — deasupra intrării în „Academie" ar fi fost scris: „Cel care nu cunoaște geometria să nu intre aici" — a jucat un rol pozitiv, deoarece obliga la studiul matematicii.

Platon și platonicienii considerau că obiectele matematice ocupă un loc intermediar între lucrurile senzoriale și ideile pure. După cum se știe, ei atribuiau existență reală numai ideilor, considerîndu-le unice, eterne și imuabile, în timp ce lucrurile materiale percepute prin simțuri erau în ochii lor doar o umbră a ideilor, fiind multiple, trecătoare și variate. Orice obiect matematic, de exemplu un triunghi, poseda — analog ideilor — eternitate și imuabilitate, dar și pluralitate — existînd nu un singur triunghi, ci o infinitate de triunghiuri ce reprezintă doar imagini ale triunghiului absolut care se găsește în lumea ideilor.

Plecînd de la această înțelegere absolut idealistă a existenței matematice, platonicienii considerau că adevărurile matematice sînt teoreme, deoarece rezolvarea oricărei probleme stabilește doar ceea ce există independent de faptul dacă noi am stabilit sau nu, aceasta.

Direct opus acestei opinii era punctul de vedere al școlii naturalist-științifice și matematice a lui Eudoxus, despre al cărui rol vom vorbi mai departe, și în special al lui Menechmus, elev al lui Eudoxus. Menechmus considera că adevărurile matematice reprezintă probleme, că nu este suficient să dăm de exemplu definiția triunghiului echilateral, ci pentru a demonstra existența sa trebuie să-l construim verificînd apoi dacă el satisface aceste condiții.

Acest punct de vedere dus pînă la extrem sărăcește matematica, excluzînd studiul obiectelor pe care noi nu le putem construi deocamdată. Și deși în ultimă instanță el exista și în concepția subiectiv-idealistă pitagoreică — de care era legată școala lui Eudoxus — acesta avea față de punctul de vedere platonician avantajul eficienței. Și deși în traducerile latine ale *Elementelor* lui Euclid se folosesc ambii termeni — teoremă și problemă — în esență, acestea au urmat punctul de vedere al lui Menechmus; astfel, de exemplu, înainte de a folosi mijlocul unui segment, se demonstrează prin construcție că el există într-adevăr (cartea I, propoziția 10) [92, vol. 1, p. 24].

Datorită luptei împotriva platonismului, matematicienii din acel timp au început să treacă la rezolvarea problemelor nu numai pe cale speculativă, ci ducîndu-le și pînă la construcția reală care era impusă de aplicația în practică a matematicii. Pe acest teren s-a consolidat și noțiunea de *diorismós* — indicarea condițiilor necesare ce fac posibilă rezolvarea. Astfel, înainte de a rezolva problema construcției unui triunghi cu laturi date, se demonstrează condiția necesară: fiecare latură trebuie să fie mai mică decît suma celorlalte două (cartea I, propozițiile 20, 22) [92, vol. 1, pp. 32, 94].

Polemica dintre cele două școli a dus de asemenea la faptul că erau elucidate din punct de vedere filozofic metodele de rezolvare a problemelor, de mult practicate: analiza care studiază întregul prin descompunerea lui în părți și sinteza care pornește de la părți, reunite de ea în întreg. Raționamentele ce au apărut în școala lui Eudoxus cu privire la analiza și sinteza sînt incluse, în majoritatea copiilor *Elementelor* lui Euclid, în cartea XIII.

Lupta dintre școala platoniciană și cea naturalist-științifică a dus la faptul că s-a început să se acorde mai multă atenție definiției obiectelor matematice. Definițiile numerelor pare, impare ș.a.m.d. au fost preluate de platonicieni, aproape fără schimbare, de la pitagoreici. Altfel stăteau lucrurile cu definițiile obiectelor geometrice. Aceste definiții, care apelează la reprezentări senzorial-intuitive ce decurg din experiență, au suferit evident influența școlii naturalist-științifice sau au fost enunțate direct de adepții acesteia. Dintre acestea face parte și definiția dreptei, dată de Platon, ca „linia al cărei mijloc acoperă cele două capete", adică pentru un ochi așezat la oricare dintre capetele segmentului și privind de-a lungul lui, segmentul drept apare ca un punct.

Deși Platon însuși nu a făcut nici un fel de descoperiri matematice, în dialogurile sale filozofice și poetice sînt amintite multe probleme matematice.

Astfel, în dialogul *Republica*, Platon, enumerînd obiectele pe care trebuie să le învețe viitorul conducător de stat, numește pentru prima dată, în afară de cele patru discipline pitagoreice — aritmetica, geometria, astronomia și muzica —, ca disciplină aparte și stereometria. Aceasta nu înseamnă că pînă la Platon grecii nu se ocupau de stereometrie. Tot astfel, din faptul că cele cinci poliedre regulate erau numite „corpuri platonice" nu rezultă că aceste poliedre au fost descoperite de Platon. Ele au căpătat această denumire din cauză că în *Timeu*, Platon atribuie atomilor celor patru elemente forma primelor patru poliedre regulate, și anume tetraedrul — focului, icosaedrul — apei, octaedrul — aerului și cubul — pămîntului, în timp ce forma celui de-al 5-lea corp regulat — dodecaedrul, după părerea lui Platon, Dumnezeu a atribuit-o universului în întregul său. În Orientul medieval, aceste poliedre și-au păstrat chiar aceste denumiri — corpul focului, corpul pămîntului și așa mai departe.

Dintre pasajele matematice conținute în operele lui Platon, cea mai mare celebritate au căpătat-o două din *Menon*. Într-unul dintre ele [99, pp. 176—184; 82 a — 85 b], Socrate, dorind să demonstreze că cunoașterea s-ar reduce la reamintirea de către suflet a ceea ce îi era cunoscut din viața trăită înainte de naștere, pune unui copil, sclav al lui Menon, o serie de întrebări sugestive care cereau ca răspuns fie „da", fie „nu" și duceau la construcția geometrică a lui $\sqrt{2}$. La început, băiatul presupune (fig. 15) că $AKMP = 2ABCD$, apoi că dublarea patratului $ABCD$ se obține luînd patratul cu latură egală cu $\frac{3}{2}AB$, în sfîrșit că $BLND = 2ABCD$. După cum a observat Frajese [81], acest raționament repetă oarecum metoda încercărilor prin care se căuta inițial valoarea aproximativă a lui $\sqrt{2}$. Al doilea fragment matematic din *Menon* [99, pp. 186—187, 86e—87b] este atît de neclar, încît au fost publicate circa 50 de diferite tălmăciri. Probabil că aici este vorba de faptul că un triunghi de arie dată poate fi înscris în anumite condiții într-un cerc dat, iar în alte condiții nu. Lui Platon i se atribuie de asemenea regula numerelor pitagoreice prime între ele $x = 4p^2 - 1$, $y = 4p$, $z = 4p^2 + 1$, unde x și z sînt două numere impare vecine.

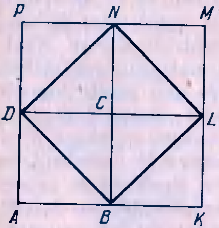


Fig. 15

În sfîrșit, lui Platon i se atribuie rezolvarea problemei duplicării cubului, care aparține, probabil, în realitate vreunui contemporan al lui Menechmus (secolul al IV-lea î.e.n.) sau unuia care a trăit după acesta. Menechmus a aplicat secțiunile conice definite de el pentru găsirea mediei proporționale duble și a dat două soluții ale problemei duplicării cubului. Fie (fig. 16) $AO = 2OB$, $AO : OM = OM : ON = ON : OB$; atunci avem $OB \cdot OM = ON^2 = PM^2$, prin urmare P se află pe o parabolă ce are vîrful O și distanța pînă la directoare egală cu OB; în același timp

$$AO \cdot OB = OM \cdot ON = PN \cdot PM;$$

aceasta înseamnă că P se află pe o hiperbolă avînd centrul O și asimptotele OM și ON. În modul acesta punctul P se obține ca intersecție a parabolei și hiperbolei. Aceasta este prima soluție a lui Menechmus. În a doua soluție (fig. 17), hiperbola este înlocuită de o a doua parabolă cu vîrful O și distanța pînă la directoare egală cu OA, deoarece are loc

$$AO \cdot ON = OM^2 = PN^2.$$

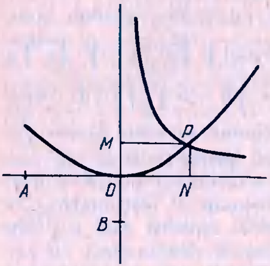


Fig. 16

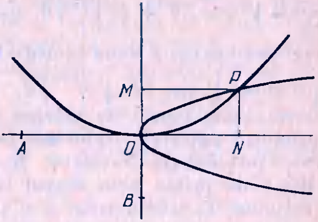


Fig. 17

De această soluție se leagă cea atribuită lui Platon. Dacă segmentele date și mediile proporționale le aranjăm în cruce (fig. 18), în aceeași ordine în care ele se succed în proporție, și ducem segmentele AM, MN, NB atunci este clar că unghiurile AMN și MNB vor fi drepte. Figura $AMNBO$ unde AO și BO sînt date, iar unghiul AOB este drept, poate fi construită cu ajutorul a două echere. Așezăm unul din ele astfel încît una din laturile sale să treacă prin B, iar vîrful să se găsească pe prelungirea lui AO. Apoi facem ca al doilea să alunece pe primul, astfel încît una din laturile sale să treacă prin A, și încercăm, rotind cu cît trebuie primul echer, să obținem ca vîrful celui de-al doilea echer să cadă pe OC.

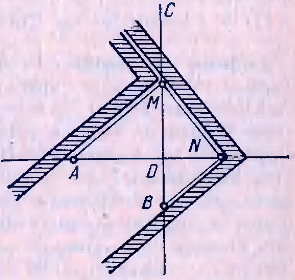


Fig. 18

Teetet din Atena (aproximativ 414—369 î.e.n.), elev al lui Teodor din Cirene, a adus două contribuții importante în matematică, care au intrat mai tîrziu în *Elementele* lui Euclid. În primul rînd, el a dat o clasificare a iraționalităților. În afară de segmentele comensurabile și incomensurabile cu $\sqrt{a}$, se introduce așa-numita medială (în notația noastră $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}$, unde a și b sînt comensurabile), apoi binomiala $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, prima bimedială $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{c}\sqrt{d}}$, unde produsul $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{c}\sqrt{d}}$ este rațional și a doua bimedială $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{c}\sqrt{d}}$, unde produsul $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}\sqrt{\sqrt{c}\sqrt{d}}$ este irațional, însă are forma $\sqrt{e}$. Aceste șase tipuri de mărimi formează prima hexadă, în care produsul pătratelor celor doi termeni ce formează mărimea dată este întotdeauna rațional. A doua hexadă a iraționalităților diferă de prima prin faptul că produsul amintit mai sus este irațional. Cea de-a treia și a patra hexadă sînt analoge cu primele două, diferind de ele numai prin faptul că în locul adunării avem o scădere; mărimea de forma $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (în scrierea noastră) se numește rest sau *apotemă*. În *Elementele* lui Euclid, clasificării și proprietăților iraționalităților le este consacrată a doua parte a cărții X (propozițiile 21—115) [92, vol. 2, pp. 124—254]. Lui Teetet îi aparține de asemenea, într-o măsură sau alta, construcția celor cinci poliedre regulate ce au intrat apoi în cartea XIII a *Elementelor* lui Euclid.

Eudoxus din Cnidos. Predecesorul direct al lui Euclid a fost Eudoxus din Cnidos (aproximativ 408—355 î.e.n.), elev al lui Arhitas din Tarent, șeful școlii cizice (din Cyzicus) care, cu toate legăturile sale cu pitagoreicii și platonicienii, s-a ridicat împotriva înțelegerii speculative a naturii, împotriva astrologiei și a altei mistici, și s-a pronunțat pentru observație și experiment, pentru o explicație pur științifică a fenomenelor. Eudoxus a fost nu numai un mare matematician, ci și un astronom care și-a însușit, în timpul șederii sale în Egipt (aproximativ 380 î.e.n.), cunoștințele de astronomie ale egiptenilor, a construit observatorul Cnidos și a creat prima teorie pur matematică a mișcării planetelor. Cea mai importantă contribuție a lui Eudoxus în matematică este teoria rapoartelor. După descoperirea incomensurabilităților, vechea teorie pitagoreică, bazată pe înțelegerea raportului a două segmente ca raport a două numere întregi — și de aceea aplicabilă numai pentru mărimi comensurabile — nu mai putea servi la rezolvarea problemelor de geometrie. De aceea geometrii căutau să evite rapoartele, înlocuindu-le, acolo unde era posibil, prin alte metode. Aceasta și-a găsit un reflex în *Elementele* lui Euclid ale cărui prime patru cărți operează fără rapoarte, în locul lor fiind folosite adesea procedee foarte ingenioase.

Dar aceleași probleme (și chiar sub o formă mai generală) se rezolvă în cartea VI a *Elementelor* cu ajutorul rapoartelor, după ce cartea V expune teoria generală a rapoartelor lui Eudoxus, în care lucrul cel mai esențial este faptul că noțiunea de „raport" este aplicată în cadrul și atît segmentelor comensurabile, cît și segmentelor incomensurabile.

Deoarece din punctul de vedere al anticilor, segmentele incomensurabile nu puteau fi comparate între ele cu ajutorul numerelor (deoarece lipsea noțiunea de număr irațional), trebuia creată o altă noțiune, diferită de număr, care era tocmai „raportul". Fără acesta nu putea fi examinată în cazul general proporționalitatea segmentelor, prin urmare nici asemănarea triunghiurilor etc.

Noțiunea de raport este explicată în trei definiții (Euclid, *Elemente*, cartea V, definițiile 3, 4, 5) [92, vol. 1, p. 142]. În primul rînd, se stabilește că condiția necesară pentru ca două mărimi să se găsească într-un raport este omogenitatea lor, iar ca bază a raportului servește cantitatea. În al doilea rînd, se stabilește că nu toate mărimile omogene au între ele un raport: pentru ca două mărimi omogene A și B să aibă un raport, este necesar ca, în cazul $A > B$, să existe un număr n, astfel încît $A < nB$. În modul acesta avem aici oarecum în germene o axiomă ce a căpătat denumirea de axiomă a lui Eudoxus-Arhimede, care postulează că oricare două mărimi trebuie să posede proprietatea indicată. În sfîrșit, în al treilea rînd, este dată definiția egalității rapoartelor, cea mai importantă, deoarece numai datorită ei rapoartele pot fi folosite în matematică. Raportul mărimilor A și B este egal cu raportul mărimilor C și D dacă pentru orice numere întregi m și n din $mA \geqslant nB$ rezultă că $mC \geqslant nD$ și din $mA \leqslant nB$ rezultă că $mC \leqslant nD$. Vom examina mai amănunțit teoria rapoartelor a lui Eudoxus mai jos (vezi pp. 143—144).

Teoria rapoartelor a lui Eudoxus a permis să se considere că două segmente se găsesc într-un raport chiar și atunci cînd ele sînt incomensurabile, adică atunci cînd raportul lor îl exprimăm printr-un număr irațional, noțiune ce nu exista la antici. Prin urmare, această teorie înlocuia, într-un anumit sens, teoria numerelor reale și dădea posibilitatea să se construiască teoria figurilor geometrice asemenea.

Teoria rapoartelor a lui Eudoxus este strîns legată de o altă contribuție a sa în matematică, și anume de metoda ce a căpătat

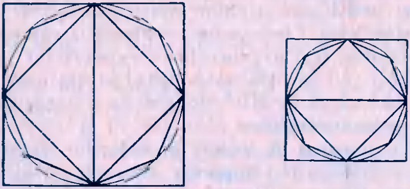


Fig. 19

în secolul al XVIII-lea denumirea de metoda exhaustiei. În prefață la prima carte a lucrării *Despre sferă și cilindru*, Arhimede observă că numai Eudoxus a demonstrat teoremele descoperite, dar nedemonstrate de Democrit asupra egalității dintre volumul piramidei și o treime din volumul prismei cu aceeași bază și înălțime și analog pentru con și cilindru. Iar în prefața la *Cvadratura parabolei*, Arhimede adăuga că această demonstrație a fost dată cu ajutorul unei leme asemănătoare cu axioma lui Eudoxus-Arhimede.

Metoda exhaustiei, aplicată în cartea XII a *Elementelor* lui Euclid, constă în următoarele. Pentru a demonstra că ariile cercurilor se raportează între ele ca pătratele construite pe diametrele lor (fig. 19), să înscriem în cercurile cu diametrele d și D pătrate avînd ariile a și A. Atunci vom avea raportul $\frac{a}{A} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$, care a fost demonstrat mai înainte. Pătratul înscris, de exemplu, a va fi mai mare decît jumătate din cercul k circumscris în jurul lui, deoarece pătratul a este egal cu jumătate din pătratul circumscris cercului k, care se înțelege este mai mare decît cercul k. Același lucru se referă și la pătratul A și la cercul K circumscris lui. Mai departe, înscriem în ambele cercuri octogoane regulate b și B, împărțind arcele respective în două. Printr-un rationament analog este ușor de demonstrat că fiecare din triunghiurile adăugate pătratului a va fi mai mare decît jumătate din segmentul cercului k circumscris acestuia, prin urmare aria b a octogonului este mai mare decît trei sferturi din aria cercului k. La fel vom avea și $B > \frac{3}{4} K$. Atunci pentru ariile b și B va avea loc de asemenea raportul $\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$. Continuînd acest proces, adică înscriind succesiv poligoane regulate cu 16 laturi c și C, cu 32 laturi e și E și așa mai departe, vom păstra, în primul rînd pentru ariile lor, același raport $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{e}{E} = \cdots = \left(\frac{d}{D}\right)^2$ și, în al doilea rînd, poligoanele înscrise vor epuiza tot mai mult cercurile k și K. Conform lemei lui Eudoxus, dacă dintr-o mărime M scădem mai întîi o mărime mai mare decît jumătatea lui M, iar apoi din rest — o mărime mai mare decît jumătatea lui și așa mai departe, atunci după un număr suficient de mare de pași restul poate fi făcut întotdeauna mai mic decît orice mărime m dată dinainte. Prin urmare, părțile rămase ale cercurilor pot fi făcute oricît de mici.

Deși foloseau practic trecerea la limită, grecii nu și-au creat o noțiune a acesteia, și cu atît mai mult nu dispuneau de o teorie a limitelor. De aceea, pentru a demonstra că nu numai poligoanele regulate, înscrise cu număr crescător de laturi și care epuizează tot mai mult cercul, se raportează între ele ca pătratele diametrelor, dar că același raport îl au și cercurile circumscrise lor, ei foloseau demonstrația prin reducere la absurd. Grecii arătau că ipotezele contrare, cum că raportul ariilor, cercurilor, $\frac{k}{K}$, ar fi mai mare sau mai mic decît raportul pătratelor diametrelor, duc la contradicții. Însăși metoda de demonstrație prin reducere la absurd poartă amprenta evidentă a originii sale din disputele politice și judecătorești — ea fiind utilizată pentru a demonstra că prin reducere la absurd partea adversă nu avea dreptate.

Inițial metoda exhaustiei era aplicată doar pentru demonstrarea teoremelor obținute cu ajutorul unor alte metode, în special cu ajutorul indivizibilelor, a căror aplicabilitate era pusă la îndoială. Un secol și jumătate mai tîrziu însă, Arhimede, care și el a aplicat metoda indivizibilelor ca metodă euristică, a perfecționat totodată metoda exhaustiei, rezolvînd foarte ingenios, cu ajutorul ei, diverse probleme de arii și volume.

Algebra geometrică. Aplicarea ariilor. Descoperirea incomensurabilității, imposibilitatea de a exprima raportul a două segmente arbitrare printr-un raport de numere întregi, a dus la faptul că grecii au început să folosească nu rapoarte aritmetice, ci rapoarte geometrice pentru exprimarea rapoartelor generale dintre mărimi. La ei s-a creat o „algebră geometrică" sui-generis. Tocmai din această cauză, și nicidecum din cauza unei predispoziții speciale a „spiritului grec" pentru forme geometrice, așa cum o afirmă idealiștii, geometria a început să joace la greci rolul algebrei. Pentru a rezolva ecuația $ax = b^2$, grecii considerau pe b^2 ca o arie dată, a — ca un segment dat, x — ca un segment necunoscut. Problema se reducea la construirea unui dreptunghi cu arie dată și cu o latură dată sau, după cum spuneau ei, la „aplicarea" (παραβολή) ariei segmentului dat. Dacă $AB = a$ și $ACDE = b^2$ este dreptunghiul construit pe prelungirea segmentului AB, atunci construcția lui x se face astfel (fig. 20): prelungim pe DE pînă la punctul F în care DE intersectează perpendiculara BF pe AB, apoi unim punctele F și A și prelungim pînă la intersecția cu prelungirea lui DC în punctul G, în sfîrșit ducem JH paralel cu AB pînă la intersecțiile J și H cu prelungirile EA și FB. Este ușor de observat că dreptunghiurile $ABHJ$ și $ACDE$ sînt egale, deoarece se obțin prin scăderea unor arii egale din triunghiurile egale FHG și FGD, prin urmare $x = CG = AJ = BH$. Astfel de probleme au fost incluse în *Elementele* lui Euclid (cartea I, propozițiile 44, 45) [92, vol. 1, pp. 55—56]; metoda aplicării ariilor dădea posibilitatea să se rezolve nu numai ecuații liniare, ci și ecuații pătratice.

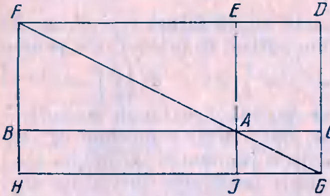


Fig. 20

Sub forma mai generală, metoda aplicării ariilor era folosită pentru rezolvarea problemelor ce duceau, în tălmăcirea lor modernă, la rezolvarea unei ecuații pătratice cu o necunoscută. Se distingeau aici două cazuri. În primul caz, se cerea să se construiască pe un segment dat $AB = a$ un dreptunghi $ABHJ$ cu arie ax, egal cu un pătrat dat b^2 $\left(b < \frac{a}{2}\right)$, astfel încît partea de arie care nu ajunge pînă la dreptunghiul $ABHJ$ să fie un pătrat ($AEFJ = x^2$). Altfel spus, se cere să se rezolve ecuația

$ax - x^2 = b^2$. Această construcție, denumită de antici aplicație eliptică a ariilor (de la ἔλλειψις — lipsă), se obține prin reducere la cea precedentă (fig. 21). Prin punctul C împărțim pe AB în două și construim perpendiculara $CD = b$. Apoi pe AC găsim punctul E astfel încît $DE = AC$. În sfîrșit, construim dreptunghiul $ABHJ$, astfel încît $AJ = EA$. Obținem demonstrația, completînd pe CA pînă la pătratul $ACKL$ și EA pînă la dreptunghiul $AEML$, la fel de mare ca și dreptunghiul $BCNH$. Atunci este evident că dreptunghiul $BEFH$ și gnomonul $CALMFN$ sînt egal de mari, prin urmare acest dreptunghi, egal cu b^2, este egal cu diferența pătratelor $ACKL - NFMK = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$. În modul acesta, $\frac{a}{2} - x$ se poate obține, cu ajutorul „teoremei lui Pitagora", drept catetă CE în triunghiul CED, unde $CD = b$ și $CE = \frac{a}{2}$, așa cum am și făcut.

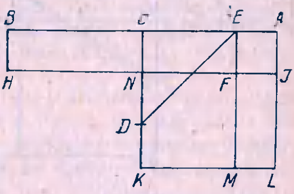


Fig. 21

O construcție analogă se folosea și în cazul aplicației hiperbolice a ariei (de la ὑπερβολή — exces), cînd se cerea să se construiască (fig. 22) pe un segment dat $AB = a$ un dreptunghi $ABHJ$ cu aria ax, egal cu un pătrat dat b^2, astfel încît partea excedentară a ariei față de dreptunghi să fie un pătrat ($AEFJ = x^2$). Această problemă corespunde rezolvării ecuației pătratice $ax + x^2 = b^2$. Aici $FM = BC$ și $CE = DA$.

Metoda aplicării ariilor care dă sub forma geometrică soluțiile pozitive reale ale ecuațiilor pătratice era aplicată în primul rînd pentru construirea unui poligon regulat înscris în cerc, al cărui număr de laturi este egal cu $5 \cdot 2^n$ sau $3 \cdot 5 \cdot 2^n$, și o rază sau o latură este dată.

Mai tîrziu cele trei cazuri de aplicare a ariilor au fost legate de secțiunile conice. Descoperirea acestora din urmă se atribuie lui Menechmus, fratele lui Dinostrate, care a trăit în mijlocul secolului al IV-lea î.e.n. Ca și fratele său, care a folosit pentru rezolvarea problemei trisecțiunii unghiului cvadratricea descoperită de Hippias din Elis (secolul al V-lea î.e.n.), Menechmus se ocupa de rezolvarea problemei duplicării cubului. După cum am văzut, această problemă se reducea la găsirea a două medii proporționale x și y între segmentele a și b din $a : x = x : y = y : b$, unde, prin urmare, $x^2 = ay$, $y^2 = xb$, $xy = ab$, pentru cazul particular $b = 2a$. După cum comunică Eutokios (aproximativ 500 e.n.), Menechmus a descoperit (aproximativ 350 î.e.n.) ca legătura dintre segmente, din primele două ecuații, exprimă o proprietate (așa cum am spune acum) a coordonatelor carteziene ale unei anumite curbe ce se obține prin secțiunea unui con circular dreptunghic printr-un plan perpendicular pe generatoare și analog pentru cea de-a treia ecuație — proprietatea curbei ce se obține prin secțiunea unui con cu unghi obtuz printr-un plan perpendicular pe generatoarea sa. Dacă OBC reprezintă secțiunea conului dreptunghic (fig. 23), care trece prin axa OK, și AH este urma secțiunii ce trece perpendicular pe OB și pe planul figurii, atunci punctul N de intersecție a lui BC și AH va fi urma punctului P al curbei. Deoarece BC este diametrul secțiunii circulare a conului, are loc egalitatea $NP^2 = BN \cdot NC$ sau, deoarece $BN = \sqrt{2}\, AN$ și $NC = \sqrt{2} \cdot CH = \sqrt{2} \cdot AO$, $NP^2 = 2 \cdot AO \cdot AN$; sau dacă notăm

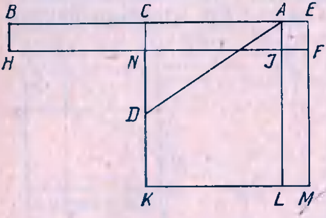


Fig. 22

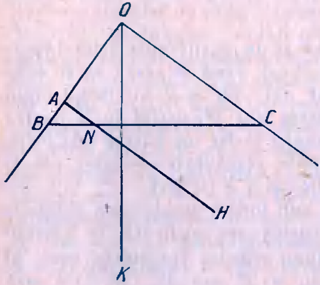


Fig. 23

$$AN = x,\ NP = y,\ AO = p,$$
$$y^2 = 2px.$$

Analog Menechmus a putut să obțină și ecuația respectivă (desigur în expresie verbală) a hiperbolei echilaterale, mai întîi în raport cu axele ei, iar apoi și în raport cu asimptotele. Menechmus construia cea de-a treia secțiune conică — elipsa care sub forma proiecției cercului sau a secțiunii înclinate a unui cilindru circular nu putea să nu fi fost cunoscută grecilor, prin același provedeu ca și secțiunea unui con circular drept cu unghiul ascuțit, printr-un plan perpendicular pe generatoarea sa.

În afară de teoria proporțiilor, lui Eudoxus îi aparține, după cum afirmă Arhimede în prefața la cartea I a lucrării sale *Despre sferă și cilindru*, demonstrația teoremelor că volumul piramidei este egal cu o treime din volumul prismei cu aceeași bază și înălțime, și că volumul conului este egal cu o treime din volumul cilindrului de aceeași bază și înălțime, precum și demonstrația teoremei cu privire la proporționalitatea dintre volumele sferelor și cuburile diametrelor lor.

Lucrarea pierdută de astronomie a lui Eudoxus *Despre viteze* conținea teoria sferelor concentrice — prima încercare de a da o explicație pur geometrică a iregularităților aparente în mișcările planetelor, precum și a mișcărilor aparente mai simple ale Soarelui și Lunii. Eudoxus, ca și toți pînă la Kepler, considera că mișcările corpurilor cerești sînt circulare, aceste mișcări circulare fiind realizate cu ajutorul unor sfere concentrice cu centrul comun situat în centrul Pămîntului. Ipoteza geometrică imaginată de Eudoxus, care era în bună concordanță cu faptele observate, reprezenta, pentru acel timp, o realizare remarcabilă a gîndirii abstracte.

Aristotel (384—322 î.e.n.), unul dintre cei mai mari gînditori ai antichității, nu a scris în mod special lucrări cu caracter matematic, sau despre matematică; în lucrările sale de filozofie și de științe ale naturii se întîlnesc totuși destule afirmații ce prezintă un mare interes pentru istoria matematicii și care caracterizează starea acestei științe în perioada imediat precedentă *Elementelor* lui Euclid. La Aristotel găsim expuse principiile fundamentale care trebuie respectate la construirea unui sistem deductiv. În lucrările sale este explicată esența axiomelor, a postulatelor, a definițiilor, a ipotezelor și a demonstrațiilor. Prin axiome, pe care el le numește „păreri comune", Aristotel înțelege propozițiile general admise în toate științele, în timp ce prin postulate, el înțelege ipotezele admise fără demonstrație în vreo știință oarecare particulară. Definițiile nu includ în sine, de regulă, afirmația despre existența obiectului definit; această existență (de exemplu, a triunghiului) mai trebuie încă demonstrată. O excepție o constituie definițiile noțiunilor fundamentale — unitatea, punctul, linia. Construcția servește drept demonstrație a existenței. Totuși, figurile construite de geometru servesc numai ca o ilustrație: el nu construiește demonstrația sa pe figura particulară dată și ipoteza sa nu va deveni greșită dacă linia desenată de el nu are exact lungimea pe care el a presupus-o [100, pp. 199—201, 76a—77a]. Aceste teze ale lui Aristotel îndreptate împotriva înțelegerii platoniene a obiectului matematicii și-au găsit un reflex la Euclid.

În legătură cu explicarea propoziției că obiectul filozofiei este existentul ca atare, Aristotel — dorind să arate că o aceeași știință poate avea de-a face cu o cantitate mai mare de conținut eterogen — se exprimă relativ la noțiunile matematice, subliniind că ele sînt abstracții ale obiectelor din lumea reală. El scrie: „Și în privința existentului, ca exemplu servește acea examinare careia matematicianul îi supune obiectele obținute pe calea abstractizării. El face această examinare eliminînd complet toate proprietățile senzoriale, de exemplu greutatea și ușurința, rigiditatea și opusul [ei], mai departe — căldura și frigul și toate celelalte contrarii senzoriale, și păstrează numai determinarea cantitativă și continuitatea, la unele într-o singură direcție, la altele în două, la altele — în trei, precum și proprietățile acestor obiecte, în măsura în care acestea din urmă sînt definite cantitativ și continuu, dar nu dintr-o altă latură oarecare; și la unele obiecte el analizează pozițiile în care ele se găsesc unele față de altele și ceea ce este legat de aceste poziții, la altele — comensurabilitatea și incomensurabilitatea lor, la altele — rapoartele lor [reciproce], însă noi admitem totuși o aceeași știință pentru toate aceste obiecte, și anume — geometria" [77, pp. 85—186; 1061 a —1061 b].

Aristotel dă următoarea definiție a continuității: «Continuul» este ca atare ceva adiacent; eu vorbesc de continuu cînd frontiera, după care se ating două obiecte ce urmează unul după altul, devine pentru amîndouă una și aceeași și, după cum arată denumirea, nu se întrerupe, iar aceasta este imposibil cît timp la ele există două margini" [95, p. 113; 227 a].

Formulînd conținutul noțiunii de „unic", ca atare, după natura sa logică și nu în sensul întregului legat în unitate, Aristotel dă definițiile unității, punctului, liniei, suprafeței, corpului. El spune: „Iar esența unității constă în aceea că ea reprezintă într-un anumit mod principiul numărului... Însă în acest caz unitatea nu este aceeași pentru toate genurile: într-un caz aceasta este intervalul minim, în altul sunetul, vocala și consoana; o unitate specială pentru greutate și o alta pentru mișcare. Și peste tot unitatea este indivizibilă fie după cantitate, fie după formă. Dacă luăm atunci ceea ce este indivizibil după cantitate (și întrucît este o cantitate], atunci indivizibilul în toate privințele și neînzestratul cu o [anumită] poziție se numește unitate, iar indivizibilul în toate privințele și avînd poziție — punct; dacă [ceva este divizibil] într-o anumită privință [el se numește] linie, [ceea ce este divizibil] în două privințe [se numește] plan, [ceea ce este divizibil] după cantitate oarecare, și anume în trei direcții — corp. Și dacă mergem în ordinea inversă, ceea ce este divizibil în două rapoarte este planul, ceea ce este divizibil într-un singur raport — linia, ceea ce nu este de loc divizibil după cantitate, punctul și unitatea, — unitatea neavînd poziție, iar punctul avînd poziție".

Aristotel opunea în mod metafizic continuitatea și discontinuitatea ca contrarii ce se exclud între ele. De aceea el considera că linia nu poate fi formată din puncte. El scrie: „Dacă există continuitate, tangență și succesivitate în sensul în care aceasta s-a definit mai sus, sînt anume continue acele obiecte ale căror margini se contopesc într-una; sînt tangente acelea la care ele sînt comune; sînt succesive, unul după altul acelea între care nu există nimic înrudit cu ele, — nici un continuu nu poate consta din părți indivizibile, de exemplu linia din puncte, dacă linia este continuă, iar punctul indivizibil. Doar marginile punctelor nu formează ceva unic, deoarece indivizibilul nu are nici margine și nici o altă parte; și frontierele extreme nu se găsesc în același loc, deoarece indivizibilul nu are o frontieră extremă, întrucît frontiera extremă și acel ceva căruia ea îi aparține sînt distincte. Mai departe, punctele din care s-ar compune continuul trebuie ori să fie continue, ori să se atingă între ele (același raționament este aplicabil și tuturor indivizibilelor) ... Este de asemenea evident că tot ce este continuu este divizibil în părți totdeauna divizibile (și cantitățile, și timpul, și mișcarea)" [95, p. 124; 131a].

Aristotel acorda o mare atenție noțiunii de infinit matematic [95, pp. 55—68; 202b—208a]. Infinitul este ceea ce nu poate fi parcurs, el nu stă pe loc, ci devine. Urmînd această concepție, Aristotel descoperă totodată și contradicții. Pe de o parte, el considera că infinitul în mic este indefinit divizibil, adică admitea numai infinitul în potență. Însă atribuia aceasta numai infinitului fizic, numai obiectelor senzoriale; pentru matematică el admitea și infinitul actual. Totodată, Aristotel remarca că infinitul nu este o simplă repetare a unui același lucru, ci duce întotdeauna la ceva nou, dar și aici el cade din nou în contradicție, declarînd că este imposibil de depășit orice mărime prin adăugare, chiar în mod potențial.

Aristotel considera că, întrucît matematica are drept obiect nu lucrurile reale, ci abstracţii ale acestora, în ea nu poate fi admisă folosirea mişcării. Analizînd învăţăturile filozofilor care şi-au propus ca problemă să cunoască obiectele imperceptibile prin simţuri, el scria: „În ceea ce priveşte aşa-numiţii pitagoreici, ei folosesc principii şi elemente mai puţin obişnuite decît filozofii naturii (cauza constă aici în aceea că ei au ajuns la aceste principii nu pornind de la lucrurile senzoriale, deoarece obiectele matematice sînt străine mişcării cu excepţia acelora ce se referă la astronomie); îşi concentrează asupra naturii însă toate raţionamentele şi preocupările lor..." [77, p. 33, 989b].

Totodată, din consideraţii de rigoare logică, ce nu admit ca demonstraţiile să treacă de la un gen la altul, Aristotel rupe geometria de aritmetică. El declară: „Prin urmare [propoziţiile] pe baza cărora se face demonstraţia pot fi aceleaşi, însă în [ştiinţele] al căror gen este diferit, ca de exemplu [genul] aritmeticii şi geometriei, nu este bună demonstraţia aritmetică a [proprietăţilor] întîmplătoare ale mărimilor, dacă [aceste] mărimi nu sînt numere" [100, pp. 195—196, 75b].

Descoperind în ele eroarea logică numită *petitio principi* [cînd se ia în mod greşit drept propoziţie demonstrabilă aceea care trebuie să servească drept premisă şi invers, se ia ca premisă (baza demonstraţiei) ceea ce este o consecinţă a tezei], Aristotel se exprimă asupra încercărilor de a da demonstraţia paralelismului dreptelor plecînd de la egalitatea unghiurilor corespondente: „Astfel procedează [de exemplu] acei care vor să ducă linii paralele. În adevăr, ei înşişi, fără să ştie aceasta, pun [la baza demonstraţiei] tocmai ceea ce nu poate fi demonstrat, dacă [liniile] nu sînt paralele" [100, p. 155, 65a]. În modul acesta, Aristotel consideră că egalitatea unghiurilor corespondente este o consecinţă a paralelismului şi nu invers.

În problema privind faptul că matematica nu trebuie să folosească în demonstraţiile sale mişcarea şi că geometria nu trebuie să folosească demonstraţiile aritmetice, concepţiile lui Aristotel şi Platon coincideau, însă ele se deosebeau în ceea ce priveşte originea şi esenţa noţiunilor matematice, care, după Platon, ba aparţin lumii de dincolo a ideilor, ba ocupă o poziţie intermediară între aceasta şi lumea lucrurilor senzoriale. Concepţiile lui Aristotel au fost însuşite în apreciabilă măsură de către Euclid, după cum ne vom convinge mai departe. E drept, acesta din urmă s-a îndepărtat puţin de Aristotel în definiţiile date unităţii şi punctului, păstrînd definiţiile liniei, suprafeţei şi corpului geometric; s-a depărtat complet de el în înțelegerea continuității, însă a admis în principiu cerința lui metodologică în ceea ce privește inadmisibilitatea aplicării în geometrie a mișcării și a aritmeticii, cu toate că în fapt Euclid însuși a încălcat acest principiu: de asemenea el a tratat liniile paralele ca Aristotel.

Pentru a nota mărimi, Aristotel a folosit literele alfabetului. Aceste notații le-a folosit pe larg Euclid, iar după ce între litere au început să fie scrise semnele aritmetice, această metodă a devenit metoda algebrei literale.

MATEMATICA ÎN ȚĂRILE ELENISTICE

Elenismul. La sfîrșitul secolului al IV-lea î.e.n. după campaniile lui Alexandru Macedon, a fost creat un imens imperiu, de scurtă durată, care includea Grecia, Egiptul, Mesopotamia, Persia, Asia Mică, țărmul Mării Negre și o serie de alte țări din jurul Mării Mediterane și din Orientul Apropiat și Mijlociu. Dupa moartea lui Alexandru, imperiul său s-a descompus în statul Ptolemeilor în Africa, statul Seleucizilor în Asia și o serie de state mai mici, însă relațiile reciproce dintre diferitele popoare ale imperiului lui Alexandru stabilite în timpul campaniilor sale au exercitat o influență excepțională asupra culturii acestor țări. Savanții acestor țări își însușesc reciproc rezultatele științifice și, în primul rînd, rezultatele științei antice grecești; limba greacă și multe obiceiuri ale grecilor se răspîndesc în cercurile culte din toate aceste țări. Aceste cercuri sînt supuse, după cum se spune, elenizării. Țările în care a avut loc această elenizare se numesc țări elenistice, iar întreaga perioadă de existență a acestor țări se numește perioada elenismului.

Baza economică a țărilor elenistice o constituia aceeași orînduire sclavagistă ce domnea în aceste țări înainte de campaniile lui Alexandru, însă pe primul loc se ridică în aceste țări elita militară, din mediul căreia provin și dinastiile regale a Ptolemeilor și Seleucizilor.

Perioada elenismului a durat pînă la cucerirea țărilor elenistice de către Roma, care s-a încheiat în primul secol î.e.n. Cele mai mari centre culturale ale țărilor elenistice au fost Alexandria, Antiohia, Pergamul și insula Rodos.

Școala alexandrină. Cea mai mare importanță o capătă în această perioadă Alexandria, întemeiată de Alexandru în 332—331 î.e.n. în Egipt, care a devenit mai tîrziu capitala statului Ptolemeilor. În Alexandria se adunaseră bogățiile jefuite în cursul războaielor. Orașul fiind situat la încrucișarea drumurilor comerciale dintre Orient și Occident, a luat cu timpul o mare dezvoltare comerțul maritim; pe baza exploatării crunte a muncii sclavilor, au înflorit meșteșugurile. S-au îmbogățit păturile privilegiate ale societății — proprietarii de sclavi și, în primul rînd, elita ptolemeică de la curte. Spre deosebire de cultura greacă clasică, cultura alexandrina era caracterizată printr-o mai mare specializare, prin particularitățile ei individuale. Centrul științei era Muzeul, unde se păstrau cîteva sute de mii de suluri de manuscrise. Ca niciodată, știința era subvenționată cu dărnicie de către dinastia Ptolemeilor care concurau cu celelalte monarhii elenistice.

Aici, în Alexandria, după cum remarcă Engels [2, p. 21], pentru prima dată, din știința inițial nediferențiată care reunea filozofia, matematica și științele naturii, au început să se separe științe de sine stătătoare. Acestea au fost astronomia, matematica și mecanica, ca germeni ai științelor naturii exacte și sistematice.

Înflorirea matematicii, la fel ca și a științelor naturii și a științelor tehnice, a fost provocată direct sau indirect de cerințele practice ale societății din perioada alexandrină. Acumularea de bogății materiale și de rezerve de arme a dus la trecerea de la armata de miliție la armatele de profesiune, permanente, cu un efectiv numeros, la mercenari, iar, în legătură cu aceasta, la noi procedee de ducere a războiului, prin urmare, și la o nouă tehnică militară. Dezvoltarea construcțiilor vaselor de război, a turnurilor și a berbecilor de luptă, a aruncătoarelor pentru asediere, ridicarea de cetăți și faruri, crearea de hărți geografice, ordonarea calendarului — toate acestea impuneau dezvoltarea mecanicii, astronomiei, deci și a matematicii. Ptolemeii, care tindeau la o imitație de paradă a culturii clasice grecești și a celei egiptene antice, ridicau palate, creau construcții hidrotehnice, ceea ce de asemenea a contribuit la dezvoltarea cunoștințelor tehnice, a cunoștințelor de științele naturii, prin urmare, și a cunoștințelor matematice.

Deși în condițiile societății sclavagiste, știința a atins în Alexandria o dezvoltare apreciabilă, ea purta pecetea acestei orînduiri sociale. Noile realizări ale tehnicii se mărgineau la domeniul artei militare și al construcțiilor, forța motoare de bază rămînînd munca fizică a oamenilor și a animalelor; în producție se foloseau unelte de mînă grosolane. Proprietarii de sclavi și ceilalți cetățeni liberi priveau cu dispreț activitatea productivă, munca, considerînd munca fizică ca nedemnă de un om liber și numai o mică parte a acestora se ocupa de munca intelectuală — de conducerea statului, de științe și de artă. Dar cunoștințele științifice și matematice erau folosite doar într-o măsură relativ mică în practică; în esență, ele ocupau timpul liber al amatorilor aleși.

Filozofia, care exprima ideologia clasei dominante a orînduirii sclavagiste în descompunere, se dezvolta în totală izolare de științele naturii. Aceasta era — în toate cele trei variante fundamentale ale sale, în neoplatonism, neopitagoreism și iudaismul alexandrin — filozofia degenerării și decăderii pătrunsă de ideile mistice ale celor mai variate secte religioase orientale.

În ceea ce privește matematica, raportul ei cu practica și cu filozofia avea întrucîtva un alt aspect decît cel al științelor naturii. Matematica găsea totuși mai multă aplicație în practică decît științele naturii slab dezvoltate și legătura ei cu filozofia a fost incontestabilă. Ruperea de munca productivă a acelor pături sociale din ale căror rînduri ieșeau matematicienii s-a manifestat în împărțirea menționată a matematicii în aritmetică și geometrie, pe de o parte, și în logistică și geodezie, pe de altă parte. Această împărțire asupra căreia a insistat încă Platon, precum și Aristotel, împărțire ce nu recunoștea matematica aplicată drept știință și o trecea printre meșteșuguri, începu să se manifeste și în matematica alexandrină. În concepțiile lui Arhimede și a lui Heron, însă, această discriminare a întîmpinat o rezistență. Abia mai tîrziu, în secolele I—II e.n., această împărțire a fost legalizată, transformîndu-se într-o tradiție dăunătoare. Acest fenomen era condiționat de subminarea bazelor orînduirii sclavagiste, de lichidarea ultimelor rămășițe ale formelor patriarhale ale sclavagismului, de lichidarea funcțiilor de conducere și de organizare a proprietarilor de sclavi, de transformarea acestora din urmă într-o clasă parazitară care disprețuia orice muncă, inclusiv cea intelectuală.

Cu toată această contradicție internă, matematica culturii alexandrine, cultură ce se extindea nu numai asupra Egiptului, ci și asupra tuturor țărilor elenistice, reprezenta treapta cea mai înaltă de dezvoltare a matematicii din lumea antică. În special, în primele timpuri, în secolul al III-lea î.e.n., Alexandria, care adunase de peste tot pe cei mai mari învățați, a dat matematicieni remarcabili cum sînt: Euclid, Eratostene și Apoloniu din Perga. Printre acești învățați se număra și Arhimede, cu toate că el nu a părăsit Siracuza unde se născuse. Prin nivelul său științific, prin lărgimea și caracterul cuprinzător al obiectului și prin fundamentarea profundă a tratării — matematica din această perioadă a lăsat mult în urmă realizările vechi, chiar cele mai înalte, ale babilonienilor, egiptenilor și ale grecilor înșiși.

Euclid. Deși încercări de a expune cele mai importante cunoștințe matematice ca un anumit întreg într-o anumită ordine, legătură și succesiune mai fuseseră întreprinse încă de Hipocrate din Chios (aproximativ 450—430 î.e.n.), despre care Proclus a scris că „el a fost într-adevăr primul despre care se vorbește că ar fi alcătuit în adevăr *Elemente*"— și deși în secolul al IV-lea î.e.n. ele au fost continuate de către Leon, iar apoi de Teudius din Magnesia, abia Euclid a desăvîrșit această operă. Ca și despre viața majorității matematicienilor mari ai antichității, despre viața lui Euclid s-au păstrat doar informații foarte sărace. Se știe că el a trăit în Alexandria în timpul lui Ptolemeu I a cărui domnie s-a desfășurat între anii 306 și 283 î.e.n. Proclus povestește că Ptolemeu l-ar fi întrebat pe Euclid dacă nu ar exista un drum mai scurt pentru înțelegerea geometriei, decît cel expus în *Elemente*, la care Euclid ar fi răspuns că „în geometrie nu există drumuri pentru regi"! [78, p. 68]. Se presupune că Euclid a învățat geometria la Atena, dar, deși majoritatea geometrilor atenieni au fost platonicieni, de aici nu rezultă că și Euclid ar fi fost adeptul lui Platon și, cu atît mai mult, că ar fi scris *Elementele* sale numai pentru a le încorona cu poliedrele regulate „platoniene", interpretate mistic.

După cum povestește Pappus (a doua jumătate a secolului al II-lea e.n.), Euclid a întemeiat în Alexandria școala sa proprie. Conținutul *Elementelor* dovedește respectul mare al autorului lor față de tradiție, deoarece el a păstrat în ele unele noțiuni care ieșiseră din uz în timpul său.

Deși Euclid este autor al unei serii întregi de lucrări, el a intrat în istoria matematicii ca creator al *Elementelor* [92], în greacă Στοιχετα, ceea ce înseamnă stihii, elemente (în limba latină această operă se numește *Elementa*).

Elementele lui Euclid sînt alcătuite din 13 cărți în conținutul cărora intră, în primul rînd, studiul figurilor geometrice plane și, întrucît pentru aceasta sînt necesare numerele, cuprind și învățătura despre numerele (pozitive) întregi și despre fracții. Deoarece însă raportul figurilor spațiale nu se exprimă întotdeauna prin numere raționale, sînt studiate de asemenea și mărimile geometrice incomensurabile. În sfîrșit, studiul se extinde și asupra spațiului, asupra poziției reciproce și a mărimii suprafețelor și volumelor corpurilor. Astfel, în *Elemente* se expun bazele planimetriei, stereometriei și aritmeticii.

Particularitatea principală a *Elementelor* constă în faptul că ele sînt construite după o schemă logică unitară, că toate teoriile conținute în ele sînt fundamentate riguros logic, după principiul construcției disciplinelor științifice care era schițat încă de Aristotel.

Propoziția geometrică, dacă este completă, constă din 6 părți: 1) formularea în termeni generali, 2) punerea problemei, care indică datele concrete, reprezentate de regulă sub forma unei figuri; 3) definirea sau indicarea (*diorismos*) în care, cu trimiterea la datele concrete, se indică ce trebuie făcut sau demonstrat; 4) construcția, în care intră adaosurile ce trebuie făcute la figură pentru a avea posibilitatea să obținem demonstrația; 5) demonstrația însăși; 6) concluzia care revine asupra formulării și, la fel cu aceasta, se exprimă în termeni generali. Concluzia nu depinde de figura particulară, care constituie doar un reprezentant al unei clase întregi de astfel de figuri. În unele propoziții pot lipsi unele dintre aceste 6 părți. Uneori, trebuie adăugat încă un *diorismos*, în sensul indicării condițiilor de posibilitate.

Elementele sînt considerate în mod just drept model al sistemului deductiv, care duce în mod riguros, pînă la capăt, expunerea, plecînd de la teze generale și mergînd de la acestea, la cele particulare. Dar acest fapt nu înseamnă de loc că cealaltă metodă elementară de cercetare, legată indisolubil de deducție — inducția — ar lipsi din *Elemente*. După părerea unor istorici ai matematicii și a unor filozofi-idealiști, *Elementele* ar fi construite „pur deductiv", fără ajutorul inducției. Dar inducția, mișcarea de la particular la general, de la datele singulare ale experienței senzoriale către generalizarea rațională, către abstracție, a participat inevitabil în formarea noțiunilor elementare, a definițiilor lor, a postulatelor și a axiomelor, la fel ca și în crearea procedeului logic însuși al deducției. Doar toate aceste noțiuni geometrice și procedee logice au apărut ca rezultat al experienței repetate de nenumărate ori, ca reflectare a obiectelor, proprietăților și legăturilor din lumea materială reală, existentă independent de conștiință. Mai mult decît atît, inducția intră sub formă implicită în orice demonstrație și construcție geometrică. Definițiile, postulatele și axiomele singure nu sînt capabile să sugereze ce trebuie demonstrat sau construit, nici calea prin care aceasta se poate realiza. Și prima și a doua ne sînt indicate de intuiția senzorială, atît prin examinarea directă a figurii și construirea liniilor ajutătoare, cît și cu ajutorul intuiției geometrice. Aceasta din urmă nu constituie o capacitate supralogică, misterioasă, înnăscută, ci se bazează pe deprinderile cîștigate. În afară de aceasta, se înțelege că inductivă este și concluzia de la cazul particular, de exemplu, de la un triunghi izolat, pentru care am demonstrat o teoremă sau alta la cazul general, la toate triunghiurile în general.

În aceeași situație cu deducția și inducția se află analiza și sinteza în *Elemente*. Deși *Elementele* nu aplică sub forma explicita metoda analitică de reducere a necunoscutului la cunoscut, cu toate acestea, fără analiză, ar fi fost imposibil să se descopere demonstrațiile. Analiza se aplică întotdeauna cînd trecem de la definiție la construcție. În afară de aceasta, o metodă atît de răspîndită în *Elemente* cum este metoda apagogică (reducerea la absurd sau demonstrația prin metoda reducerii la absurd), nu este decît o variantă a analizei.

Din structura logică a *Elementelor* fac parte de asemenea „cazurile", „obiecțiile", „consecințele" și „lemele". Prin „caz" se înțelege faptul că o propoziție poate lua mai multe forme (variante), în funcție de poziția reciprocă a elementelor figurii. „Obiecția" poate fi întîlnită atunci cînd s-a omis indicarea altor cazuri posibile. Aceasta se întîlnește de regulă la antici, care, cunoscînd existența acestor cazuri, dădeau totuși doar un singur caz, lăsîndu-i pe elevi să găsească și să le analizeze pe celelalte. „Consecința" sau „corolarul" (*porisma*) reprezintă o teoremă secundară, găsită oarecum întîmplător în procesul demonstrației propoziției principale. În sfîrșit, prin lemă se înțelegea o propoziție ajutătoare, necesară pentru demonstrație, fie demonstrată mai înainte, fie demonstrată ulterior (ceea ce era specificat), pentru a nu perturba mersul demonstrației teoremei fundamentale.

Elementele lui Euclid încep cu definiții, postulate și noțiuni comune.

Caracterul definițiilor la Euclid este diferit. În majoritate, ele sînt descriptive, de exemplu, definiția 1 din cartea I: „Punctul este ceva ce nu are părți" [92, vol. 1, p. 11]. Dar alături de definițiile descriptive se întîlnesc și definiții nominale (verbale), în genul definiției 19 din cartea I: „Figurile rectilinii sînt acelea care sînt mărginite de drepte..." [92, vol. 1, p. 12]; definiții genetice (care indică felul cum se obține obiectul), de exemplu, definiția 14 din cartea XI: „Sfera se obține dacă păstrînd imobil diametrul semicercului, semicercul ce se rotește revine în aceeași «poziție» din care a pornit, atunci figura cuprinsă «este tocmai sfera»" [92, vol. 3, p. 10] și, în sfîrșit, definițiile axiomatice (adică acelea ce pot fi formulate sub forma axiomelor). De exemplu, definiția 1 din cartea III: „Cercurile egale sînt acelea care au diametre egale sau raze egale" [92, vol. 1, p. 80]. Este evident că definițiile descriptive și cele nominale nu au legătura cu deducțiile care se fac apoi asupra obiectului acestor definiții, ele sînt logic ineficiente.

În timp ce definițiile preced aproape fiecare carte separat (în afară de cărțile VIII, IX, XII și XIII), postulatele (în număr de cinci) și noțiunile generale sau axiomele (nouă) sînt așezate înaintea întregii opere, în prima carte. Postulatele reprezintă cerințe de a construi anumite figuri, cele mai simple, în timp ce axiomele reprezintă tezele general admise ce nu necesită demonstrație și se află la baza demonstrațiilor.

Această concepție asupra postulatelor și axiomelor, împărtășită de traducătorul și comentatorul *Elementelor**, D.D. Morduhai-Boltovski, pornește de la faptul că această operă nu era pur logică, ci conținea în mod intenționat momente senzorial-intuitive. Euclid caută să convingă pe cititori nu numai cu ajutorul concluziilor bazate pe logica formală, ci și cu ajutorul construcțiilor, apelînd la riglă și compas, ceea ce corespundea concepțiilor ce tindeau către materialismul sofiștilor „mai vechi“, adepți ai lui Protagora. Concepția opusă, întîlnită la editorul textului grec al *Elementelor*, Heiberg, pleacă de la faptul că Euclid ar fi atribuit, analog lui Platon, obiectelor geometrice o existență ideală, de aceea el recunoștea numai evidența logică și nicidecum semnificația universală ce se poate baza și pe reprezentarea intuitivă. Nu este întîmplător că materialistul Hobbes în lucrarea *Despre corp* (1655) arată că postulatul constituie o bază nu a demonstrațiilor, ci a construcțiilor, nu a cunoașterii, ci a posibilității existenței, în timp ce idealiștii raționaliști, în special Leibniz, socotesc postulatele doar o varietate a axiomelor logice, concepție pe care o împărtășesc și pozitiviștii actuali care consideră, în același timp, că axiomele ar fi convenții condiționate.

Construcțiile admise de postulate presupun o riglă fără diviziuni care nu permite măsurarea distanțelor. Rigla poate fi folosită numai pentru unirea a două puncte sau prelungirea unui segment. Absența gradațiilor pe riglă nu permitea folosirea metodei „alunecării“, deși aceasta era aplicată încă din timpurile lui Hipocrate din Chios. Compasul era permis numai pentru descrierea dintr-un punct dat, drept centru, a unui cerc de rază dată și nu pentru transportarea unei lungimi date. Postulatele *Elementelor* sînt postulate relativ la un compas și o riglă ideale, deși rigla sau compasul nu sînt amintite aici direct.

---

* În limba rusă — *N.R.*

Restricțiile impuse utilizării riglei și compasului au fost legate probabil de faptul că aceste instrumente au înlocuit sfoara, ce servea inițial atît pentru trasarea dreptelor, cît și pentru descrierea cercurilor. Regulile ce s-au stabilit pentru utilizarea sforii și care nu admiteau (dacă trebuia respectată precizia construcției) o mînuire atît de liberă ca aceea posibilă cu instrumentele rigide, s-au păstrat apoi prin tradiție și cînd instrumentele au înlocuit sfoara. Aceste restricții nu numai că complicau efectuarea construcțiilor, dar, ceea ce este principal, au dus și la faptul că în *Elemente* nu au fost incluse acele teorii geometrice care cereau fie alunecări, fie alte linii, în afară de dreaptă și cerc. Tocmai din această cauză, aici nu era expusă teoria secțiunilor conice, deși ea era pe atunci bine fundamentată. În *Elemente* nu a intrat nici logistica — învățătura despre calculele practice — deoarece ea, după cum s-a amintit, era considerată mai degrabă un meșteșug decît știință. Mulți istorici ai matematicii explică selecția materialelor efectuată de Euclid prin aceea că el, urmîndu-l pe Platon, și o dată cu acesta și pe pitagoreici, considera numai dreapta și cercul drept linii „perfecte" și nu admitea alunecarea ca fiind mișcare mecanică, străină geometriei, ce are de-a face numai cu obiecte ideale. Euclid însă, nu a neglijat de loc studiul secțiunilor conice, deoarece a și scris despre ele o lucrare separată. În ceea ce privește alunecarea, mișcarea mecanică ce se cere pentru realizarea ei, nu diferă principial prin nimic de mișcarea mecanică ce se cere pentru unirea a două puncte printr-o dreaptă, și ambele operații nu diferă în mod esențial nici prin precizie. Cade și ipoteza cum că alunecarea n-ar fi fost inclusă în *Elemente*, întrucît pentru demonstrația construcțiilor realizate cu ajutorul lor sînt necesare cunoștințe ce depășesc limitele *Elementelor*. Pentru demonstrația trisecțiunii unghiului cu ajutorul alunecării, nu sînt necesare alte cunoștințe în afară de cele conținute în *Elemente*, cu toate că algebric rezolvarea acestei probleme duce la o ecuație de gradul 3.

Postulatele și axiomele lui Euclid. Primele trei postulate afirmă „Că de la orice punct pînă la orice punct <se poate> duce o linie dreaptă"; „Și că un segment de dreaptă <se poate> prelungi în mod continuu în linie dreaptă"; „Și că din orice centru și cu orice rază <poate fi> descris un cerc" [92, vol. 1, p. 14]. Aceste postulate presupun că rigla și compasul sînt ideale, posedă o lungime sau o deschidere infinită, permit construirea dreptelor și cercurilor ideale. Al patrulea postulat enunță condiția de egalitate a tuturor unghiurilor drepte între ele, propoziție ce nu mai este acum considerată postulat, ci se demonstrează. Al cincilea postulat afirmă: „Şi dacă dreapta ce cade pe două drepte formează unghiurile interioare și de aceeași parte, mai mici decît două unghiuri drepte, atunci aceste două drepte prelungite indefinit se vor întîlni de acea parte în care unghiurile sînt mai mici decît două unghiuri drepte [92, vol. 1, p. 15]. Sensul celui de-al cincilea postulat constă în faptul că punctul de intersecție a două drepte se consideră construit dacă intersectînd cu o a treia dreaptă unghiurile interne de aceeași parte dau în sumă un unghi mai mic decît două unghiuri drepte. Acest postulat a căpătat denumirea de postulatul paralelelor și, după mărturia lui Aristotel[1], se încercase demonstrarea lui, sau a altuia echivalent, încă cu o sută de ani înaintea lui Euclid. În aceste încercări se comitea însă eroarea logică *petitio principi*, folosind neexplicit o propoziție echivalentă cu cea care trebuie demonstrată, fapt asupra căruia a atras atenția Aristotel. Aceste încercări au mai continuat timp de două milenii pînă cînd genialul matematician rus, N.I. Lobacevski, a creat în 1826 teoria sa neeuclidiană, din care rezulta că cel de-al cincilea postulat nu poate fi demonstrat.

Primele șase axiome, folosind notația algebrică, pot fi exprimate astfel:

1. Dacă $A = C$ și $B = C$, atunci $A = B$
2. Dacă $A = B$, atunci $A + C = B + C$
3. Dacă $A = B$ atunci $A - C = B - C$
4. Dacă $A \neq B$ atunci $A + C \neq B + C$
5. Dacă $A = B$ atunci $2A = 2B$
6. Dacă $A = B$ atunci $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2} B$.

Se înțelege că la Euclid ele erau exprimate prin cuvinte. Se au în vedere aici mărimile geometrice — liniile, suprafețele și corpurile — și nu numerele abstracte. Axioma 7 afirmă: „Şi cele congruente sînt egale între ele" [92, vol. 1, p. 15], ceea ce Euclid înțelegea în sensul că, dacă figurile coincid prin suprapunere, ele sînt egal de mari, adică au arii egale. Admițînd această axiomă, Euclid a plătit se pare tribut tradiției vechi, deoarece utilizarea suprapunerii se întîlnea probabil la Tales. Platon și Aristotel considerau însă că „științele matematice sînt străine

[1] Vezi p. 126.

mişcării". Şi deşi Euclid însuşi folosea mişcarea (de exemplu, în definiţia sferei, el căuta s-o evite ca fiind o abatere inconsecventă. Axioma 8: „Şi întregul este mai mare decît părţile" şi axioma 9. „Şi două drepte nu închid un spaţiu între ele", au probabil o origine mai tîrzie.

Cărţile planimetrice ale Elementelor. Prima parte a *Elementelor* — învăţătura despre egalitatea figurilor în plan — este expusă în primele patru cărţi. Prima începe cu 23 de definiţii. Definiţia 1: „Punctul este ceva ce nu are părţi" este o definiţie negativă care spune doar ce nu este punctul şi nu ce este el, datorita cărui fapt orice obiect indivizibil satisface această noţiune. Această definiţie a lui Euclid diferă de definiţia punctului dată de Aristotel prin aceea că Euclid a lăsat deoparte cuvintele „înzestrat cu poziţie", datorită cărui fapt a desfiinţat deosebirea dintre punct şi unitate. Definiţia 2: „Linia este lungimea fără lăţime" exprima caracterul unidimensional al liniei. Definiţia 3: „Capetele liniei sînt puncte" reprezintă propriu-zis o axiomă enunţată despre un punct şi o linie deja definite şi nu o definiţie nouă a punctului. Definiţia 4: „Linia dreaptă este aceea care este egal situată faţă de punctele de pe ea" înseamnă probabil că dreapta îşi păstrează toate proprietăţile sale, inclusiv sensul, pentru orice punct al său. Definiţiile 5, 6 şi 7 sînt analoge cu cele trei precedente, definind suprafaţa, liniile ca margini ale suprafeţei, şi planul. Definiţiile 8—12 se referă la unghiuri, unghiul fiind definit ca „înclinarea între ele a două linii", care se intersectează într-un plan. Definiţia 13: „Frontiera reprezintă marginea a ceva", înseamnă: ceea ce mărgineşte ceva, definindu-l complet, este, în această privinţă, extremul. În definiţia 14, figura se defineşte ca domeniul plan din interiorul unei frontiere. Definiţiile 15—18 se referă la cerc, centrul său, diametrul şi la semicerc, cercul fiind definit ca linia ale cărei puncte sînt egal depărtate de centru, deşi era mai simplu de obţinut cercul prin rotaţia unei drepte în jurul unui punct fix. Definiţiile 19—22 vorbesc despre figuri rectilinii, scoţînd în evidenţă diferitele tipuri de triunghiuri şi dreptunghiuri. În cărţile stereometrice ale *Elementelor*, Euclid se abate în parte de la clasificarea adoptată aici. În sfîrşit, definiţia 23 spune: „Paralele sînt dreptele care, fiind în acelaşi plan şi fiind prelungite în ambele sensuri nemărginit, nu se întîlnesc între ele nici de o <parte> nici de cealaltă." Spre deosebire de celelalte, această definiţie nu poate fi verificată, deoarece ea necesită cunoaşterea planului nemărginit, în timp ce cunoştinţele noastre se referă întotdeauna doar la un domeniu mărginit al lui. Acest fapt probabil că a servit drept impuls pentru încercările de a crea teoria paralelelor, construind demonstraţii.

Cartea I constă din 48 de propoziţii ce se grupează în trei grupe. Prima (propoziţiile 1—26) este consacrată în special triunghiurilor şi perpendicularelor. În a doua grupă (propoziţiile 27—32) este dată teoria paralelelor, care în ultima propoziţie din această grupă este aplicată la demonstraţia faptului că suma unghiurilor unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte. A treia grupă (propoziţiile 33—48) se ocupă cu paralelograme, pătrate şi triunghiuri, comparînd ca arie figurile echivalente, însă neegale. Ultimele două propoziţii din cartea I conţin demonstraţia aşa-numitei teoreme a lui Pitagora şi a teoremei reciproce. Demonstraţia teoremei directe, care, după mărturia lui Proclus, aparţine lui Euclid însuşi, este bazată pe echivalenţa triunghiurilor cu baze şi înălţimi egale.

Cartea II, cea mai scurtă dintre toate, conţine 14 propoziţii precedate de două definiţii în care se introduce noţiunea deja amintită a gnomonului. Această carte — continuare a părţii a treia a primei cărţi — constituie algebra geometrică a grecilor. În propoziţiile, ca de exemplu $ab + a(a - b) = a^2$; $4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$, produsul a două segmente nu este produs a două numere, ci aria unui dreptunghi „cuprins între segmente“, adică avînd aceste segmente drept laturile sale.

Cartea III, formată din 37 de propoziţii, este consacrată în întregime cercului. Ea este precedată de 11 definiţii în care se introduc noţiunile de tangentă (ca dreaptă care întîlneşte, dar nu intersectează cercul), de tangenţă a două cercuri şi altele. Printre propoziţiile cărţii III, atrage atenţia propoziţia 16 unde se examinează unghiul dintre cerc şi tangentă, adică un unghi de contingenţă, şi se demonstrează că el este mai mic decît orice unghi ascuţit rectiliniu; la unghiuri mixte Euclid mai apelează numai o singură dată în propoziţia 31.

În cartea IV, formată din 16 propoziţii, Euclid examinează figurile înscrise într-un cerc sau circumscrise în jurul cercului, introducînd în prealabil aceste noţiuni în 7 definiţii. Este interesant de observat că printre poligoanele regulate înscrise în cerc, în afară de construcţiile pătratului, pentagonului (cu ajutorul secţiunii de aur) şi a hexagonului, este indicată şi construcţia unui poligon regulat cu 15 laturi. Această problemă a apărut în astronomie, deoarece unghiul de înclinare al eclipticii faţă de ecuator era considerat egal cu $\frac{1}{15}$ din unghiul complet (în realitate el este egal cu aproximativ $23°27'$).

Teoria proporțiilor si cărțile aritmetice ale Elementelor. Dacă primele patru cărți au epuizat în măsura posibilităților problemele de egalitate a segmentelor și ariilor, cărțile V și VI studiază inegalitatea lor, în măsura în care ea poate fi măsurată. La baza acesteia stă teoria proporțiilor, elaborată amănunțit de Eudoxus, însă expusă sistematic de Euclid în 25 propoziții din cartea V. La început sînt date 18 definiții, dintre care majoritatea se referă la tot felul de rapoarte și proporții.

Euclid reprezintă mărimile prin segmente, ale căror rapoarte — întrucît nu exista noțiunea de număr irațional — nu pot fi exprimate în cazul general prin numere. Propozițiile cărții V pot fi ușor transmise în notațiile actuale. Dacă notăm cu A, B, C... mărimile, iar prin m, n, p,... numerele întregi pozitive, atunci propoziția 1, de exemplu, spune: $mA + mB + mC + ... = m(A + B + C + ...)$; propozitia 6: $mA - nA = (m - n)A$ etc. Astfel, ultima propoziție, a 25-a, am fi scris-o astfel: dacă $A:B = C:D$ și $A>B>C>D$, atunci $A + D>B + C$.

Cartea VI, formată din 33 de propoziții, se ocupă de aplicația teoriei proporțiilor la planimetrie. Ea începe cu cinci definiții, dintre care două au fost probabil adăugate mai tîrziu; celelalte trei introduc noțiunile de asemănare a figurilor, de împărțire a segmentului în raportul extrem și mediu (secțiunea de aur) și de înălțime a figurii, prin care se înțelege perpendiculara coborîtă pe bază din punctul situat la cea mai mare distanță de la bază. În definiția 5 care afirmă: „Se spune că un raport *se compune* din rapoarte cînd cantitățile acestor rapoarte înmulțite între ele formează ceva" [92, vol. 1, p. 174], este introdusă sub formă neclară noțiunea de raport compus, prin care se înțelege raportul $\frac{A}{C} = \frac{A}{B} : \frac{B}{C}$. Deoarece Euclid nu tratează nicăieri rapoartele ca numere, el nu poate vorbi nici de produsul rapoartelor. Prin urmare definiția 5 trebuie considerată drept un adaos de mai tîrziu. Din critica provocată de această definiție s-a născut ideea extinderii noțiunii de număr pînă la numărul real. Rapoartele compuse sînt folosite pe larg în geometria antică. Dintre toate propozițiile se distinge în special propoziția 27: „Dintre toate paralelogramele aplicate aceleiași drepte și avînd lipsa sub forma paralelogramelor asemenea și așezate asemenea <cu paralelogra-

mul>, construit pe o jumătate, cel mai mare va fi <paralelogramul> aplicat jumătății și asemenea lipsei sale" [92, vol. 1, p. 208]. Această propoziție reprezintă din punct de vedere istoric prima care conține ideea unui maxim; noi am fi scris-o astfel: expresia $x(a-x)$ ia valoarea maximă pentru $x=\frac{a}{2}$. Propoziția 31 generalizează „teorema lui Pitagora" la orice figură rectilinie asemenea, construită pe laturile unui triunghi dreptunghic. În total cartea VI conține materialul cunoscut încă înainte de Euclid, însă expus cu ajutorul noii teorii a proporțiilor.

Următoarele trei cărți ale *Elementelor* — VII, VIII și IX — sînt de aritmetică. În timp ce cartea V se ocupă numai cu operații aritmetice, în cărțile VII, VIII și IX este elaborată aritmetica teoretica, pe baza cunoștințelor fundamentale acumulate asupra numerelor întregi, dobîndite pînă în timpul lui Euclid. După cum a arătat-o în mod convingător I.G. Bașmakova [101], H. Zeuthen și alți istorici ai matematicii au subapreciat importanța acestor cărți și nu au înțeles că ele constituie premisa necesară pentru cartea X care expune teoria iraționalităților. Prima carte, care cuprinde 39 de propoziții, este precedată de 23 de definiții referitoare, de data aceasta, la toate cele trei cărți. Aici sînt date definițiile unității, numărului, diferitelor tipuri de numere — pare, impare, par-pare, par-impare, impar-impare, apoi prime, prime între ele, compuse, și compuse între ele, (adică avînd divizor comun), multiple, plane, corporale, pătratice, cubice, de tip pătratic și de tip cubic. Aici se introduce, de asemenea, noțiunea de „parte" (partea este un număr mai mic conținut într-unul mai mare, dacă el măsoară pe cel mare), de exemplu, un segment egal cu doi este o „parte" a segmentului egal cu șase; apoi noțiunea de „părți" — același segment nu reprezintă o „parte" a segmentului egal cu cinci, ci „părțile" sale $\left(\text{adică } \frac{5}{6}\right)$ și, în sfîrșit, noțiunea de număr perfect ca număr care este egal cu suma „părților" sale (în interpretarea noastră — a divizorilor). Observăm că definiția unității ca „ceva ce prin ceva fiecare din cele existente se consideră unic" este extrem de neclară. Euclid, ca, în general și ceilalți antici, nu consideră unitatea drept număr, de aceea este nevoit să demonstreze fiecare propoziție, adevărată pentru numere, în mod special pentru unitate. Din definiția numărului ca o mulțime formată din unități, reiese clar că Euclid înțelege prin „număr" numai un număr întreg (fracțiile nu le consideră numere), mai departe că acesta este un număr cardinal și nu un număr ordinal și, în sfîrșit, că prin „mulțime" el înțelege pur și simplu un grup finit de obiecte. Euclid înțelege numerele nu în mod abstract, ci ca numere-segmente care sînt, am spune, multiplii întregi ai unui segment unitate. Propozițiile cărții VII se grupează în patru grupuri fundamentale. Primul (propozițiile 1—3) arată cum se determină măsura comună maximă (în înțelegerea noastră — cel mai mare divizor comun) a două sau trei numere. Aici se aplică algoritmul (adică un sistem finit de reguli de calcul pentru rezolvarea problemelor de același tip) care a căpătat denumirea de algoritmul lui Euclid și pe care îl folosim pentru același scop și astăzi, cu singura deosebire că Euclid folosește nu împărțirea unor numere abstracte, ci scăderea repetată a numerelor-segmente. În al doilea grup de propoziții (4—19) este dezvoltată teoria aritmetică a proporțiilor. De exemplu, în propozițiile 17, 18 și 19 se demonstrează teoremele $\frac{AB}{AC}=\frac{B}{C}$, $\frac{BA}{CA}=\frac{B}{C}$; dacă $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, atunci $AD=BC$ și reciproc. Ultima propoziție leagă această teorie aritmetică de teoria proporțiilor din cartea V. În propozițiile 23—32 sînt examinate tezele fundamentale ale teoriei divizibilității. Propoziția 31: „Orice număr compus este măsurat printr-un anumit număr prim" este demonstrată de Euclid printr-o metodă ce a căpătat mai tîrziu denumirea de metoda descinderii. Ea constă în următoarele: dacă A este un număr compus, atunci există un număr B, divizor al lui A. Dacă B este un număr prim, teorema este demonstrată. Dacă însă B este număr compus, atunci există un număr C divizor al lui B. Repetînd acest proces, obținem un șir de numere $A, B, C, D\dots$, dintre care fiecare, începînd cu B, este divizor al celui precedent, prin urmare, $A>B>C>D\dots$. Dar de aici rezultă că, după un număr finit de pași, ajungem la un divizor al tuturor numerelor precedente, prin urmare, și al numărului A, adică la un număr prim P. Căci în caz contrar, șirul A, B, C, $D\dots$ ar fi infinit, ceea ce este imposibil, deoarece atunci, după cum scrie Euclid, „numărul A va fi măsurat printr-un șir infinit de numere, dintre care fiecare va fi mai mic; aceasta este însă imposibil pentru numere". Metoda descinderii a fost pentru mult timp uitată; ea a fost utilizată din nou abia în secolul al XIII-lea.

Cartea VIII, formată din 27 de propoziții, se ocupă cu „proporții continue", altfel spus, cu progresii geometrice.

Cartea IX, ultima carte de aritmetică, constă din 36 de propoziții. Dintre ele, propozițiile 14—20 se referă la teoria numerelor prime. Prima dintre ele spune: „Dacă un număr este cel mai mic printre acelea pe care le măsoară anumite numere prime <date>, atunci el nu va fi măsurat de nici un alt număr prim în afară de cele ce l-au măsurat inițial“ [92, vol. 2, p. 83]. Prin aceasta este exprimată teorema fundamentală a teoriei numerelor prime, asupra unicității descompunerii unui număr compus în factori primi. Euclid scrie $A = BC$, unde B, C sînt numere prime și, presupunînd că există un număr prim E, distinct de B, C, prin care se divide A, arată că această propoziție duce la o contradicție. După cum remarcă I.N. Veselovski în comentariile la traducerea în limba rusă a *Elementelor* [92, vol. 2, p. 337], Euclid ia numai trei factori primi și nu examinează cazul în care ei intră la puteri mai mari decît întîia, deoarece grecii nu cunoșteau decît numerele plane și corporale. Propoziția 20, cunoscută ca propoziția de existență a unei mulțimi infinite de numere prime, spune: „Numerele prime există în număr mai mare decît orice cantitate de numere prime date de dinainte“ [92, vol. 2, p. 89]. Demonstrația lui Euclid se face prin metoda reducerii la absurd: Dacă admitem că A, B, C sînt numere prime, atunci produsul lor, mărit cu o unitate $(ABC + 1)$, va fi ori un număr prim, și în acest caz numărul de numere prime nu se mărginește la cele propuse, ori el nu va fi prim și atunci trebuie să se împartă la un număr prim oarecare H. Numărul H nu poate însă coincide cu nici unul dintre numerele A, B, C deoarece dacă el ar coincide, de exemplu, cu A, și întrucît el este un divizor și pentru numărul $(ABC + 1)$, și pentru numărul A, B, C el ar trebui să fie și divizor al unității, ceea ce este absurd. Prin urmare, în afară de A, B, C și numărul H este număr prim. Această propoziție a lui Euclid răspundea la întrebarea care a apărut în studiul empiric al șirului natural de numere: cu cît mergem mai departe, cu atît numerele prime se întîlnesc în acest șir tot mai rar, de aceea este firesc să bănuim că ar exista un număr prim oarecare maxim.

Propoziția 35 rezolvă problema sumării unei progresii geometrice pe care — transpus în limbaj algebric — Euclid o rezolvă astfel: fie A_{n+1}, A_n, A_{n-1}, ..., A_1 termenii unei astfel de progresii; atunci

$$A_{n+1} : A_n = A_n : A_{n-1} = \ldots = A_2 : A_1;$$

prin urmare și

$$(A_{n+1} - A_n) : A_n = (A_n - A_{n-1}) : A_{n-1} = \ldots = (A_2 - A_1) : A_1.$$

De aici, conform unei proprietăţi a proporţiei demonstrate mai înainte obţinem:

$$(A_{n+1} - A_1) : (A_n + A_{n-1} + \dots + A_1) = (A_2 - A_1) : A_1.$$

Ultima propoziţie, a 36-a, deduce o formulă pentru numerele perfecte: $2^{p-1}(2^p - 1)$ este un număr perfect dacă p şi $(2^p - 1)$ sînt numere prime. Euclid nu demonstrează că orice număr perfect par are această formă; aceasta a fost demonstrat mult mai tîrziu. Pînă acum numere perfecte impare nu au fost găsite, dar nici nu s-a demonstrat încă că ele n-ar exista. Anticii cunoşteau numai patru numere perfecte (pentru $p = 2, 3, 5, 7$); al cincilea număr perfect (pentru $p = 13$) egal cu 33 550 336 a fost găsit în secolul al XV-lea. Astăzi se cunosc în total 17 numere perfecte pentru $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1\,279, 2\,203, 2\,281$. Cel de-al nouălea număr perfect, avînd 37 de cifre, a fost găsit în 1883 de către preotul-matematician autodidact rus, I.M. Pervuşin; ultimele două numere perfecte, avînd respectiv 1 326 şi 1 372 cifre, au fost găsite în 1953 cu ajutorul maşinilor electronice de calcul rapide.

Să insistăm mai mult asupra teoriei proporţiilor a lui Euclid, care este expusă în *Elemente* de două ori: pentru mărimile continue în cartea V şi separat pentru mărimile comensurabile şi numerele întregi în cartea VII.

Două perechi de mărimi comensurabile sau de numere A, B şi C, D formează o proporţie, dacă are loc unul din următoarele trei cazuri:

1) $A = nB$ şi $C = nD$,

2) $nA = B$ şi $nC = D$,

3) pentru anumite mărimi N şi M, dacă în acelaşi timp $A = mN$, $B = nN$ şi $C = mM$, $D = nM$ sau dacă folosim fracţii, ceea ce Euclid nu făcea, $A = \frac{m}{n} B$ şi $C = \frac{m}{n} D$.

Euclid însuşi spunea în primul caz că A şi C sînt multipli egali ai lui B şi D, în al doilea că A şi C sînt o aceeaşi parte a lui B şi D, şi în al treilea că A şi C sînt „părţi" egale ale lui B şi D.

În cartea X, definiţia proporţiei se extinde asupra mărimilor comensurabile şi continue, adică se demonstrează că astfel de mărimi se raportează între ele ca numere şi reciproc, că mărimile ce se găsesc într-un raport numeric sînt comensurabile.

În teoria rapoartelor, rolul fundamental îl joacă algoritmul determinării celei mai mari măsuri comune. În particular, acest algoritm dă un sens real însăși definiției de „parte" și „părți". Algoritmul lui Euclid poate fi folosit direct pentru determinarea proporționalității a patru numere. Rapoartele $\frac{A}{B}$ și $\frac{C}{D}$ formează o proporție atunci și numai atunci cînd toate cîturile ce apar în determinarea celei mai mari măsuri comune $q_0, q_1, \ldots q_k$ pentru o pereche și cîturile respectiv $q'_0, q'_1, \ldots q'_k$ pentru cealaltă pereche sînt egale, adică $k = k'$ și $q'_j = q_j$. Cu alte cuvinte, egalitatea rapoartelor numerice poate fi determinată prin egalitatea tuturor cîturilor incomplete corespunzătoare ale descompunerilor lui $\frac{A}{B}$ și $\frac{C}{D}$ în fracții continue. La Euclid nu se spune nimic despre aceasta, însă este foarte probabil că o asemenea definiție firească, legată de procesul de măsurare, a existat în matematica greacă înainte de Eudoxus.

Definiția egalității rapoartelor a două perechi de mărimi continue A, B, și C, D, care verifică axioma lui Eudoxus-Arhimede, este esențial diferită. Algoritmul lui Euclid nu este presupus în această definiție (el este extins asupra mărimilor continue în cartea X). În definiție se compară anumiți multipli ai celor patru mărimi. După Euclid, mărimile continue A, B și C, D se găsesc în rapoarte de același tip, dacă pentru orice pereche de numere naturale m, n pentru care este îndeplinită una din următoarele trei condiții:

$$1)\ nA < mB,$$
$$2)\ nA = mB,$$
$$3)\ nA > mB$$

este îndeplinită totodată și condiția corespunzătoare dintre următoarele trei:

$$1')\ nC < mD,$$
$$2')\ nC = mD,$$
$$3')\ nC > mD.$$

Această definiție a egalității rapoartelor este, pe deplin, în spiritul matematicii contemporane: aceluiași tip de definiții îi aparține și definiția numerelor iraționale a lui Dedekind. Definind egalitatea rapoartelor segmentelor A și B cu ajutorul unei mulțimi infinite de inegalități, Eudoxus și Euclid împart de fapt mulțimea numerelor raționale $\frac{m}{n}$ în două clase ($mA > nB$ și

$mA < nB$ cu $mC > nD$ şi $mC < nD$), cărcia îi corespunde secţiunea lui Dedekind. Desigur că fracţiile ordinare pot fi privite ca perechi de numere (m, n), supuse anumitor legi ale operaţiilor. Este important de observat totodată că fracţiile ordinare servesc nu numai pentru definiţia abstractă a numerelor iraţionale, ci şi pentru aproximarea acestora cu orice grad de precizie în diferite calcule. În teoria lui Eudoxus-Euclid, problema aproximării rapoartelor incomensurabile nu se pune sub formă explicită: se compară între ei anumiţi multipli ai termenilor celor două rapoarte, dar nu rapoartele înseşi $\frac{A}{B}$, şi $\frac{C}{D}$ cu rapoartele de numere întregi $\frac{m}{n}$. Este caracteristic faptul că Euclid vorbeşte nu de egalitatea rapoartelor, ci de egalitatea tipului rapoartelor, demonstrînd în mod special că egalitatea tipului posedă, la fel ca şi egalitatea, proprietatea de tranzitivitate: două rapoarte de acelaşi tip cu un al treilea sînt de acelaşi tip între ele. Noţiunea de egalitate este raportată de Euclid numai la mărimi şi numere, pe cînd rapoartele nu sînt considerate mărimi şi numere.

Distincţia dintre numere ca mulţimi de unităţi şi rapoarte ale numerelor sau ale mărimilor, nu a fost în matematica antică clasică o simplă distincţie terminologică. Ea era condiţionată de acea funcţie pe care o îndeplinea teoria rapoartelor. Teoria rapoartelor de numere întregi a apărut din practica operaţiilor cu fracţii, însă era aplicată la studiul proprietăţilor numerelor întregi. Teoria generală a rapoartelor se afla la baza teoriei asemănării şi a metodei exhaustiei. Deşi în unele probleme ea juca acelaşi rol pe care în analiza modernă îl joacă numerele reale, ea nu era sau aproape că nu era folosită în calcule. Este semnificativ faptul că în cartea VII adunarea şi scăderea rapoartelor nu intră în consideraţie iar în cartea V aceste operaţii sînt introduse numai pentru cazul particular, necesar mai tîrziu, al rapoartelor cu termen succesiv comun. Abia în dezvoltarea de mai tîrziu a matematicii greceşti a început adaptarea teoriei rapoartelor la probleme ale matematicii calculatorii, iar fracţiile (nu însă iraţionalităţile) au început să fie denumite numere.

Cartea X a Elementelor. Partea a treia a întregii opere a lui Euclid este conţinută în întregime în cartea X, cea mai mare ca volum, remarcabilă, dar şi foarte dificilă şi cel mai puţin studiată. Această carte, care conţine 115 propoziţii, precedate de patru definiţii, conţine clasificarea iraţionalităţilor obţinute la rezolvarea ecuațiilor pătratice și a acelor ecuații bipătratice cu coeficienți raționali care se reduc la ecuații pătratice. La început este dată definiția mărimilor comensurabile și a celor incomensurabile, apoi a mărimilor comensurabile la putere (ale căror pătrate sînt comensurabile) și incomensurabile la putere, aceste noțiuni referindu-se la mărimi geometrice și nu la numere. Mai departe, Euclid numește o dreaptă dată rațională și segmentele comensurabile cu ea (atît liniar cît și la putere) — raționale, iar cele incomensurabile cu ea — iraționale. Prin urmare, el consideră ca segmente raționale nu numai acelea care în sensul nostru sînt multipli raționali ai unui segment A dat, de exemplu nA (unde n este un număr rațional), ci și segmente de forma $n\sqrt{A}$, deoarece segmentele sînt comensurabile la putere. Dacă însă B este o arie, vor fi raționale numai ariile de tip nB, deoarece ariile nu pot fi comensurabile la putere, pentru că pătratul ariei nu are sens geometric. Comensurabilității mărimilor le sînt consacrate primele 18 propoziții. Propoziția 9, denumită teorema lui Teetet, este echivalentă cu afirmația că rădăcina unui pătrat imperfect nu poate fi exprimată printr-un număr comensurabil. Propozițiile 10—16 studiază comensurabilitatea și incomensurabilitatea mărimilor pe baza unor rapoarte oarecare date ale unor alte mărimi legate de primele. Ele pregătesc propozițiile 17—18 ce demonstrează — exprimîndu-ne în limbaj modern — că rădăcinile ecuației pătratice $ax - x^2 = \frac{b^2}{4}$ sînt comensurabile sau incomensurabile cu a după cum expresia $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ este sau nu comensurabilă cu a. Cu propozițiile 19—21 începe a doua parte a cărții X. Aceste propoziții sînt consacrate dreptunghiurilor; dacă laturile dreptunghiului sînt liniar comensurabile, el este rațional. Dacă însă laturile lui sînt comensurabile numai la putere, el este irațional. Latura pătratului, egal ca mărime cu un dreptunghi irațional, Euclid o numește medială; prin aceasta se introduce prima noțiune de clasificare a iraționalităților, aparținînd lui Teetet.

Ca rezultat al unui asemenea studiu se obțin în total 13 tipuri de iraționalități. Ele toate sînt rădăcinile pozitive ale ecuațiilor

$$(x^2 \pm 2ax)\cdot(c \pm b\cdot c^2) = 0$$

sau

$$(x^4 \pm 2ax^2)\cdot(c^2 \pm b\cdot c^4) = 0,$$

unde c este un segment rațional, a și b coeficienți în funcție de proprietățile cărora rădăcinile pozitive ale primei ecuații sînt binomiale și apoteme de unul din cele șase tipuri, iar rădăcinile pozitive ale celei de-a doua ecuații reprezintă celelalte 12 iraționalități.

Munca de clasificare a iraționalităților a fost întreprinsă din cauză că soluțiile problemelor ce duc la ecuații pătratice și ecuații bipătratice reductibile la cele pătratice nu puteau fi exprimate cu ajutorul numerelor raționale și al segmentelor date. Deoarece grecii nu cunoșteau notația algebrică, ei erau nevoiți să exprime verbal rezultatele rezolvării ecuațiilor, care altfel nu puteau fi analizate. Clasificarea euclidiană este departe de a cuprinde toate iraționalitățile posibile; fără să mai vorbim de iraționalitățile de grad mai înalt, ce nu au fost incluse din motivul că ele nu puteau fi construite prin procedee permise, cu ajutorul compasului și riglei; această clasificare nu includea nici astfel de iraționalități ca de pildă, „trinomiala" $(c + \sqrt{mc} \pm \sqrt{nc})$.

Cărțile stereometrice ale Elementelor. Cărțile XI, XII și XIII sînt consacrate stereometriei. Ele sînt precedate de 28 de definiții. Mai întîi este dată definiția corpului ca „ceva ce are lungime, lățime și înălțime". Această definiție, analog definițiilor punctului, liniei și suprafeței, date în cartea I, este logic ineficientă; ulterior ea nu este nicăieri citată și nu se trag nici un fel de concluzii din ea. La fel este și cu definiția suprafeței ca frontieră a unui corp. Mai departe este dată definiția dreptei perpendiculare pe un plan și aceea a două plane perpendiculare; Euclid nu demonstrează însă că aceste perpendiculare există într-adevăr. Apoi se enunță definiția unghiului diedru, a planelor paralele, a asemănării și a egalității (înțeleasă în sensul egal de mare), a poliedrelor (peste tot presupuse convexe). Mai departe, se definesc piramida, prisma, sfera, conul, cilindrul, cubul, octaedrul, icosaedrul și dodecaedrul. Sfera, conul și cilindrul sînt definite aici cu ajutorul rotației, spre deosebire de cerc din cartea I. Această inconsecvență reprezintă, probabil, rezultatul suprapunerii diferitelor tradiții geometrice.

Cartea XI, formată din 39 de propoziții, este în esență construită analog cărții I. Ea începe, ca și manualele actuale de stereometrie, cu propoziții asupra dreptelor și planelor perpendiculare și paralele, precum și asupra unghiurilor formate de drepte și plane. Apoi este studiat paralelipipedul și, în sfîrșit, prisma.

Cartea XII conține 18 propoziții în care se aplică metoda exhaustiei pentru demonstrarea rapoartelor dintre volumele corpurilor, piramidelor, conurilor, cilindrilor, sferelor.

Trebuie să subliniem că Euclid nu dă nicăieri calculul ariei cercului sau al volumului sferei sau alte calcule. Desigur aceasta provine nu din faptul că lui nu-i erau cunoscute calculele prin aproximație, de mult existente, ci din faptul că — după cum am mai remarcat — aceste calcule erau trecute la geodezia practică și nu la geometria teoretică.

Cartea XIII, care numără 18 propoziții, revine în parte la obiectul cărții IV, la poligoanele regulate înscrise în cerc, în special la triunghiul și pentagonul regulat, pentru a trece apoi la problema construcției și „cuprinderii de o sferă dată" a fiecăruia din cele cinci poliedre regulate: în propoziția 13 — a piramidei (tetraedrului), în propoziția 14 — a octaedrului, în propoziția 15 — a cubului, în propoziția 16 — a icosaedrului și în propoziția 17 — a dodecaedrului. Înțelegînd prin expresia „a cuprinde de către o sferă" construcția sferei circumscrise, Euclid deduce pentru primele trei cazuri raportul dintre diametrul sferei și latura (muchia) poliedrului respectiv. Pentru celelalte două, el indică numai că latura icosaedrului va fi o irațională „mai mică", iar latura dodecaedrului — o apotemă. Propoziția 18 compară între ele lungimile muchiilor celor cinci poliedre regulate. Cartea se încheie printr-o anexă în care se demonstrează că în afară de cele cinci poliedre regulate nu se mai pot construi altele.

Din comparația *Elementelor* cu operele de matematică grecești mai timpurii, sau cu mărturiile despre acestea, s-au putut stabili acele părți ale lucrării în care Euclid a folosit descoperirile predecesorilor săi, le-a coordonat într-un sistem logic cît mai riguros. Astfel se consideră general admis că cartea V și probabil primele cinci propoziții din cartea XIII aparțin lui Eudoxus. Probabil o parte din cartea X provine de la Teetet. Cu toate acestea însă, și aceste cărți păstrează stilul general al *Elementelor*, inclusiv pînă la cuvintele „ceea ce trebuia demonstrat" sau „ceea ce trebuia construit", cu care se încheie propozițiile, după cum acestea sînt teoreme sau „probleme", adică probleme de construcție (cuvîntul „problemă" în textele latine ale *Elementelor* este folosit anume în această semnificație). După cum a observat M. Cantor [2, ed. a 4-a, vol. 1, p. 277], aceste formule de încheiere amintesc expresia antică egipteană „fă așa", prin care se încheiau în mod regulat problemele în cartea de exerciții a lui Ahmes, și de aceea ele au fost preluate, posibil, prin tradiție, de geometrii alexandrini, împreună cu multe alte cunoştinte de la egipteni. Trebuie sa se aibă în vedere că, datorită marii răspîndiri a *Elementelor* în antichitate, prin transcriere nu numai că se puteau strecura în ele greşeli, dar puteau fi incluse şi pasaje care reprezentau inițial observații pe margine, notate de copişti.

În concluzie, se poate spune că, deşi numai în cazuri rare există indicații concrete ca o propoziție sau alta, sau demonstrația ei, este rezultatul creației originale a lui Euclid însuşi, nu poate încăpea îndoială că autorul acestei lucrări remarcabile a fost un mare geometru. Chiar numai uriaşa problemă a sistematizării vastului material eterogen, pe care el a rezolvat-o atît de strălucit, era pe măsura puterilor unui savant foarte mare. Această lucrare care reprezintă una dintre cele mai răspîndite cărți, editată de-a lungul a mai mult de două milenii într-un număr foarte mare de ediții şi traduceri în nenumărate limbi, în variante prescurtate şi prelucrate, serveşte pînă astăzi, cu toată dezvoltarea enormă pe care a parcurs-o în această perioadă geometria, ca model pentru manualele de geometrie elementară după care se face predarea în şcoala medie. Valoarea sa înaltă nu este scăzută nici de faptul că din punct de vedere modern găsim neajunsuri logice atît în definiții, cît şi, în special, în sistemul de axiome. Aceste neajunsuri nu zdruncină soliditatea bazelor geometriei construite de Euclid în opera sa nemuritoare.

Nu există îndoială că una dintre cauzele cele mai importante ce a determinat valoarea lor ştiințifică, cît şi trăinicia *Elementelor*, care a rezistat încercărilor timp de două milenii, au constituit-o concepțiile metodologice ale autorului lor. Euclid considera că figurile geometrice există nu în imperiul ideilor, ci numai atunci cînd ele pot fi construite (cel puțin în principiu, făcînd abstracție de imposibilitatea construirii figurilor de mărime oricît de mare); el demonstra existența acestora prin construcția lor şi aplica mişcarea: suprapunerea şi rotația figurilor. Prin urmare, în pofida afirmației unor istorici ai matematicii[1], Euclid a urmat, în problema importantă a criteriului adevărului, nu pe Platon, ci pe Aristotel.

Lui Euclid i se mai atribuie cărțile considerate XIV şi XV ale *Elementelor*, consacrate geometriei, deşi el nu este autorul lor. Prima a fost scrisă de Hipsicle care a trăit aproximativ în anul 200 î.e.n., cunoscut şi prin lucrarea de astronomie *Despre*

---

[1] Vezi, de exemplu, articolul lui M.I. Vîgoski [102]. Critica acestui articol a fost făcută de V.N. Molodşi [103] şi L.E. Maistrov [104].

ascensie, ce ni s-a păstrat [prima carte în limba greacă care folosea împărțirea babiloniană a cercului în 360 de grade]. De asemenea, el este autorul unor lucrări pierdute asupra armoniei sferelor și a numerelor poligonale. Cea de-a doua dintre cărțile suplimentare ale *Elementelor* este atribuită lui Isidor, probabil arhitectul Isidor din Milet, unul dintre constructorii bisericii Sf. Sofia din Constantinopol (aproximativ 532 e.n.). În ultima sînt, de asemenea, examinate poliedrele regulate, însă această carte, alcătuită din trei fragmente slab legate între ele, este scrisă la un nivel mult mai scăzut decît cartea lui Hipsicle.

Alte opere ale lui Euclid. După cum am mai spus, Euclid a lăsat nu numai *Elementele*, ci și alte opere. Dintre operele pur matematice s-au păstrat numai două: *Datele* (denumirea latină *Data*) [105] și *Despre împărțirea figurilor*. Prin „date", Euclid înțelegea ariile, segmentele, unghiurile și rapoartele, dacă pot fi găsite egale cu ele. Spre deosebire de aceste „date ca mărime", figurile formate de drepte vor fi „date ca formă", dacă sînt date unghiurile și rapoartele reciproce ale laturilor lor. Punctele, liniile și dreptele sînt „date ca poziție", dacă ele „ocupă întotdeauna același loc", ceea ce este departe de a fi clar. După definiții, urmează 95 de propoziții în care se demonstrează că, dacă sînt date anumite obiecte geometrice, prin aceasta sînt date și altele. *Data* reprezintă o culegere sui-generis de repetiții ale primelor șase cărți ale *Elementelor*.

De numele lui Euclid este legată, de asemenea, o problemă conținută în epigramele aritmetice dintr-o antologie greacă de la începutul secolului al IV-lea e.n., care se reduce la rezolvarea unei ecuații liniare cu o necunoscută. Ea spune:

„Un catîr și un asin pășeau pe un drum cu o povară de saci.
Ofta jalnic asinul, strivit de povara prea grea pentru puterile lui.
Catîrul, care a observat aceasta, s-a adresat tovarășului său de drum cu cuvintele:
Ei ce, bătrîne, te-ai întristat și bocești ca o fetiță!?
Eu aș purta de două ori mai mult decît tine, dacă mi-ai da o măsură de la tine,
Iar dacă tu ai lua de la mine numai una, atunci am purta egal,
O geometre, spune-ne cît a purtat fiecare din ei".

Desigur este imposibil de stabilit dacă forma versificată a acestei probleme îi aparține într-adevăr lui Euclid sau nu. Este însă probabil că unora dintre probleme li se dădea forma de ghicitoare, deși ele puteau fi rezolvate, desigur, și pe cale pur geometrică. În cazul de față, dacă M este un segment ce măsoară povara catîrului, atunci $(M - 1)$ este egal cu povara asinului, mărită cu 1, prin urmare povara inițială a asinului era $M - 2$; pe de altă parte, $M + 1$ trebuie să fie de două ori mai mare decît povara asinului, micșorată cu 1, adică decît $M - 3$; în modul acesta obținem:

$$M + 1 = 2(M - 3) = 2M - 6,$$

de unde povara catîrului $M = 7$, deci povara asinului $M - 2 = 5$.

Cea de-a doua operă *Despre împărțirea figurilor*, pe care o amintește Proclus, arătînd că ea a fost consacrată împărțirii figurilor în alte figuri, fie de aceeași formă, fie de forme diferite, nu a ajuns pînă la noi în originalul grecesc, ci numai în traduceri ulterioare arabe și latine.

Despre lucrarea lui Euclid *Inferențe false*, s-a păstrat numai comunicarea lui Proclus care spune că în ea sînt analizate diferite inferențe false, ilustrate prin exemple concrete. Această lucrare era destinată celor care începeau să studieze *Elementele*.

O altă carte a lui Euclid care nu a ajuns pînă la noi o constituie *Pórismele*, despre care vorbește Pappus, precum și Proclus ca fiind formată din trei cărți și conținînd 171 de propoziții și 38 de leme. În cazul de față, prin *pórisme* trebuie înțelese propoziții incomplete cu privire la legăturile dintre obiecte geometrice ce admit diferite modificări ale caracteristicilor lor, datorită cărui fapt apare necesitatea de a demonstra sau construi ceva. Mai tîrziu, prin *porisme* se înțelegeau numai propozițiile care, exprimîndu-ne în terminologia actuală, se refereau la locurile geometrice ale punctelor. Trebuie însă avut în vedere că anticii considerau că linia reprezintă numai locul unde se află punctele, dar că nu este constituită din ele, în timp ce pentru noi „loc geometric al punctelor“ reprezintă „o mulțime conexă de puncte“. În modul acesta prin variația caracteristicilor obiectelor geometrice se înțelegea exclusiv doar variația poziției (locului) punctelor. După cum ne informează Pappus, în această lucrare se consideră numai cazurile în care locul geometric este format de o dreaptă sau cerc[1]. A treia lucrare de geometrie a lui Euclid pierdută este *Secțiunile conice* de care, de asemenea, amintește Pappus. Există motive să presupunem că în această lucrare, formată din patru cărți, Euclid ar fi sistematizat și, posibil, completat cunoștințele asupra

---

[1] În legătură cu pórismele și datele lui Euclid, vezi lucrarea lui D.D. Morduhai-Boltovski [106].

acestui obiect, acumulate pînă la el într-un volum egal cu al primelor trei cărți ale lui Apoloniu. Lucrarea lui Euclid a fost precedată de o altă lucrare, tot pierdută, a lui Aristeu.

Cea de-a patra lucrare pierdută a lui Euclid amintită de Proclus și de Pappus, este din domeniul geometriei teoretice. Ea constă din două volume și este intitulată *Locuri pe suprafață*. Nu este clar dacă ele sînt consacrate curbelor (secțiunilor conice, dar posibil și spiralelor) pe suprafața conului și cilindrului, sau suprafețelor de rotație, sau amîndurora.

S-au mai păstrat cîteva opere ale lui Euclid din domeniul matematicii aplicative. Dintre acestea fac parte *Fenomenele* astronomice ce conțineau partea matematică, *Sferica* — geometria suprafeței sferice, elaborată mai înainte de Autolykos din Pitana și, încă mai înainte, în germene, de Eudoxus. Un interes deosebit îl prezintă lucrarea *Optica*, care confirmă că autorul ei nu era de loc un platonician străin de aplicațiile practice. În această lucrare sînt expuse principiile perspectivei, la baza formării imaginii vizuale aflîndu-se concepția răspîndită pe atunci, după care razele rectilinii ale luminii, formînd un con, pleacă din ochi și se lovesc de obiect; baza conului o constituie contururile obiectului. Majoritatea propozițiilor studiază cazurile în care figuri egale sau inegale sînt văzute ca egale sau ca inegale. În această lucrare se găsesc însă și propoziții asupra determinării înălțimii obiectului pe baza umbrei sale și cu ajutorul oglinzilor.

Opera *Catoptrica* (învățătura despre reflexia în oglindă), atribuită lui Euclid, a fost elaborată mult mai tîrziu, probabil de către Teon din Alexandria. Două lucrări de muzică presupuse a fi scrise de Euclid cu greu pot fi recunoscute drept operele sale proprii. Izvoarele arabe îl citează pe Euclid și ca autor al unor lucrări de mecanică. Nu s-a putut însă stabili dacă fragmentele tratatelor de mecanică (*Despre obiectele grele și ușoare*, *Despre pîrghie* și altele), care s-au păstrat în traduceri arabe și latine din evul mediu, îi aparțin sau nu lui Euclid.

Aristarh din Samos. Despre elevii lui Euclid, Conon din Samos și elevul său Dositeos, s-au păstrat doar mențiuni. Din această generație de savanți făcea parte direct și Aristarh din Samos (aproximativ 310—230 î.e.n.), cunoscut ca un astronom remarcabil, dar care a fost și un vestit matematician. Aristarh propaga învățătura că Pămîntul se rotește în jurul axei sale și se învîrtește în jurul Soarelui, că dimensiunile sferei stelelor fixe sînt de atîtea ori mai mari decît dimensiunile cercului pe care se mișcă Pămîntul, de cîte ori perimetrul acestuia din urmă depășește centrul său: el a fost învinuit de ateism și a trebuit să părăsească Atena. Aceste idei au fost dezvoltate mai tîrziu de către matematicianul indian Aryabhata (născut în anul 476), de matematicianul din Horezm, al-Biruni (973—1048) și de astronomul polonez Copernic (1473—1543), creatorul sistemului heliocentric.

După mărturia lui Arhimede, Aristarh a determinat unghiul sub care se vede diametrul Soarelui ca fiind egal cu $\frac{1}{720}$ din cercul zodiacal, adică $\frac{1}{2}$ grade (după datele actuale $31'59'',3 \pm 0'',1$); este posibil ca el să fi obținut acest rezultat strălucit cu ajutorul aparatului pe care l-a inventat *scaphe*, un fel de cadran solar perfecționat. Dintre lucrările sale au ajuns pînă la noi cartea *Despre dimensiunile și distanțele Soarelui și Lunii.* Lăsînd la o parte latura sa astronomică, observăm că această lucrare este construită consecvent din punct de vedere logic, reprezentînd sub raport matematic prima lucrare păstrată în limba greacă ce se ocupă de problemele pe care noi le includem acum în trigonometrie. E drept că Aristarh nu calculează funcțiile trigonometrice de care depind rapoarte căutate dintre dimensiuni și distanțe, ci se mulțumește cu indicarea limitelor între care se află valorile acestor funcții. El face aceasta pornind de la următoarele două propoziții pe care nu le demonstrează, probabil din cauză că ele erau atunci familiare matematicienilor:

1. Dacă α este unghiul măsurat în radiani, și $\alpha < \frac{\pi}{2}$ atunci raportul $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ scade, iar raportul $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$ crește atunci cînd α crește de la 0 la $\frac{\pi}{2}$.

2. Dacă β este un alt unghi măsurat în radiani și de asemenea $\beta < \frac{\pi}{2}$, atunci $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$.

Se înțelege că la Aristarh nu există radiani, sinusuri și tangente, ci unghiuri ce se măsoară prin fracțiuni din unghi drept, arce de cerc, respectiv coardele și tangentele lor. Se înțelege, de asemenea, că Aristarh nu folosește formule, ci dă propozițiilor sale o expresie verbală.

Arhimede. Perioada elenismului a dat pe cel mai mare matematician și mecanician Arhimede (aproximativ 287—212 î.e.n.).

Arhimede s-a născut la Siracuza, în Sicilia, unde s-a și dezvoltat activitatea sa științifică. După Cicero, Arhimede a fost „un om de origine joasă" (*humilis homunculus*), a trăit sărac, deși posibil să fi fost rudă îndepărtată cu Hieron, care guverna Siracuza. Arhimede a căpătat instruire de la tatăl său, astronomul și matematicianul Fidius, iar mai tîrziu în Alexandria unde s-a apropiat de elevii lui Euclid, și la întoarcerea în patrie a purtat corespondență cu aceștia în probleme științifice. O parte dintre aceste scrisori s-au păstrat. Biografia lui Arhimede a fost scrisă de un oarecare Heraclide, posibil un prieten de-al său, însă ea nu ni s-a păstrat.

După informații provenite din diferite izvoare ulterioare se știe că Arhimede a aplicat pe larg cunoștințele sale în practică, în primul rînd, după cum povestește istoricul roman Tit Liviu, pentru dezvoltarea economiei și a apărării orașului său natal. El a inventat o mașină de ridicat apa (*Șurubul lui Arhimede*) pentru irigarea cîmpurilor, a descoperit legea hidrostatică ce-i poartă numele și conform căreia asupra unui corp cufundat în lichid acționează o forță orientată în sus și egală cu greutatea lichidului dezlocuit. Această lege a fost aplicată de Arhimede pentru determinarea compoziției aliajelor cu ajutorul cîntăririi lor în apă. Arhimede folosea sisteme de pîrghii, scripeți, palane (sisteme de scripeți) și șuruburi pentru ridicarea unor greutăți mari, pentru construirea mașinilor militare de aruncat.

În timpul celui de-al doilea război punic, Arhimede, care făcea parte din partidul democrat ce milita pentru independența Siracuzei și căuta alianța cu Cartagina în lupta împotriva Romei, a condus apărarea orașului în timpul asediului acestuia timp de doi ani, și cu atîta succes, încît generalul roman Marcellus a reușit să ocupe orașul în anul 212 î.e.n. doar datorită unui atac perfid neașteptat dinspre uscat. În timpul asediului, un soldat roman l-a ucis pe Arhimede care ar fi desenat, conform legendei, pe nisip figuri geometrice și ar fi zis: „Nu atinge cercurile mele". Pe mormîntul lui Arhimede, uitat și regăsit de Cicero, au fost reprezentate o sferă și cilindrul circumscris. Arhimede, care a descoperit că rapoartele dintre volumele și suprafețele acestor corpuri se exprimă prin numere întregi, era foarte mîndru de această descoperire a sa.

Invențiile și descoperirile lui Arhimede, care uimeau mințile, au dat naștere și la alte legende. Astfel, se povestește că Arhimede, care era ba prieten, ba rudă cu regele Hieron al Siracuzei, a primit de la acesta sarcina de a stabili dacă nu cumva meșterul a adăugat argint în loc de aur în coroana executată de el pentru rege. Arhimede mult timp n-a știut cum să abordeze această problemă pînă cînd, o dată, cufundîndu-se într-o baie plină pînă la margini, a observat că s-a revarsat atîta apă cîtă a fost dezlocuită de corpul său. Intuind dintr-odată cum să rezolve problema, el a alergat gol acasă, strigînd „*Evrika, evrika!*". Lui Arhimede i se atribuie de asemenea faptul că el, cu ajutorul pîrghiilor, printr-o ușoară mișcare a mîinii, a făcut să se miște pe uscat o corabie mare, greu încărcată, ridicată din mare. Se povestește, de asemenea, că el, folosind oglinzi incendiatoare, probabil parabolice, a ars flota romană dușmană. Lui i se atribuie celebra expresie: „Dați-mi un punct de sprijin și voi deplasa lumea".

Spre deosebire de marele sistematizator Euclid, Arhimede a adus în matematică în primul rînd propriile sale descoperiri, în special în domeniul determinării ariilor figurilor curbilinii în plan și al ariilor și volumelor corpurilor mărginite de suprafețe curbe. Aceste descoperiri, contingente cu cartea XII a lui Euclid, reprezentau germenii calculului integral, elaborat 2000 de ani mai tîrziu în lucrările lui Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz și Newton. Distingîndu-se printr-o claritate excepțională a expunerii, prin priceperea de a face accesibile înțelegerii cele mai dificile probleme, lucrările lui Arhimede, ca și lucrările ale aproape tuturor autorilor antici, nu dezvăluie calea analitică cu ajutorul cărora au fost obținute rezultatele, ci le prezintă sub forma de-a gata, le expun sintetic.

Numai în *Scrisoarea către Eratostene despre unele teoreme de mecanică* [107], găsită în 1908 de către J.L. Heiberg, Arhimede povestește cum a descoperit el inițial unele teoreme: „Multe pe care le-am lămurit mai înainte cu ajutorul mecanicii le-am demonstrat ulterior cu ajutorul geometriei, deoarece raționamentele mele bazate pe această metodă nu erau încă demonstrații; este desigur mai ușor de a găsi demonstrația cînd ne facem o idee, cu ajutorul acestei metode, asupra problemei cercetate, decît de a face aceasta fără o asemenea idee prealabilă" [107, pp. 4—5].

Pe baza afirmației lui Arhimede însuși, precum și a faptului că, în unele din lucrările sale păstrate, el folosește rezultatele conținute în alte lucrări ale sale, Heath [108, vol. 2, p. 22] a stabilit următoarea ordine aproximativă a scrierii lor: 1) *Despre echilibrul planelor*, cartea I, 2) *Cvadratura parabolei*, 3) *Despre echilibrul planelor*, cartea II, 4) *Scrisoarea către Eratostene despre metoda mecanică de rezolvare a problemelor de geometrie*, 5) *Despre sferă și cilindru*, cărțile I și II, 6) *Despre spirale*, 7) *Despre conoizi și sferoizi*, 8) *Despre corpurile plutitoare*, cărțile I și II, 9) *Măsurarea cercului*, 10) *Numărarea firelor de nisip* (*Psammit*).

Despre echilibrul planelor. În această lucrare [109, cartea I conține 15 propoziții iar cartea II—10] principiile mecanicii teoretice sînt expuse printr-o metodă riguros geometrică.

Problema principală constă în a găsi centrele de greutate al paralelogramului, al triunghiului și al trapezului. Rezolvînd-o, Arhimede nu s-a mulțumit cu ideea că aceste figuri ar fi formate din segmente paralele cu laturile lor, deși din această reprezentare grosolană rezultă corect că centrele lor de greutate trebuie să fie situate pe dreptele ce reprezintă locurile geometrice ale mijlocurilor acestor segmente. El își dădea perfect seama că, de exemplu, paralelogramul nu este în realitate format din segmente, ci din paralelograme elementare. De aceea, dacă admitem că centrul de greutate al paralelogramului dat se află pe dreapta, care împarte în două segmente paralele cu latura sa, vom comite eroarea logică *petitio principi*, deoarece presupunem valabilă pentru paralelogramele elementare propoziția ce trebuie demonstrată. De aceea, deși el a obținut incontestabil rezultatele sale pe cale neriguroasă, a dat în fiecare caz în parte o demonstrație riguroasă prin metoda reducerii la absurd. Astfel, în cazul triunghiului, el demonstrează că centrul său de greutate trebuie să se găsească pe mediană.

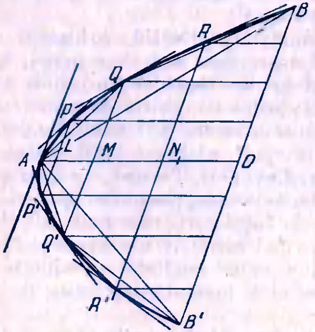


Fig. 24

Întreaga carte a doua a acestei lucrări se ocupă de găsirea centrului de greutate al unui segment parabolic, precum și al unui segment tăiat din el de o dreaptă paralelă cu baza. În vederea acestui scop, el înscrie în segment (fig. 24) mai întîi un triunghi BAB', unde A este punctul în care tangenta este paralelă la BB'. De asemenea el înscrie în cele două noi segmente formate triunghiurile BQA și $AQ'B'$, apoi — prin același procedeu — în cele patru segmente nou formate înscrie triunghiurile BRQ ș.a.m.d.

Examinînd figura înscrisă $BRQPAP'Q'R'B'$, Arhimede demonstrează că diametrele trasate prin punctele R, Q, P, P', Q', R', paralele cu AO, divid pe BB' în părți egale, în timp ce dreptele PP', QQ', RR', paralele cu BB', divid pe AO într-o proporție de numere impare, adică $AL:LM:MN:NO = 1:3:5:7$. Centrul de greutate al figurii înscrise, la fel ca și al segmentului parabolic, se află pe AO (aceasta se demonstrează prin metoda reducerii la absurd). Atunci centrul de greutate al segmentului parabolic se găsește mai aproape de vîrful A decît centrul de greutate al figurii înscrise în modul arătat, însă distanța dintre aceste două centre poate fi făcută mai mica decît orice mărime dată. Pentru aceasta este suficient doar să mărim numărul laturilor acestei figuri. În sfîrșit, se stabilește că pentru centrul de greutate G are loc raportul $AG:GO = 3:2$ și se găsește de asemenea centrul de greutate al figurii mărginite de parabolă și coardele PP', BB'.

Cvadratura parabolei. La lucrarea *Cvadratura parabolei* [110,24 de propoziții], Arhimede, care nu folosea termenul lui Apoloniu de „parabolă", ci vorbea de „secțiunea conului dreptunghiular" — denumirea operei este de origine mai tîrzie — a scris o prefață în care, adresîndu-se lui Dositeos după moartea lui Conon, își susține prioritatea în determinarea ariei segmentului de parabolă tăiat de o coardă arbitrară, rezultat obținut mai întîi, după cum spune el, cu ajutorul mecanicii, iar apoi demonstrat cu ajutorul geometriei (am spune acum prin metoda exhaustiei). Rezolvarea mecanică se bazează pe următoarele două proprietăți ale parabolei (fig. 25). Dacă Qq este coarda segmentului, P vîrful (în care tangenta este paralelă cu Qq), PV diametrul ce împarte pe Qq în două și dacă PV, fiind prelungit, intersectează tangenta QT în punctul T, atunci: 1) QV^2 este proporțional cu PV; 2) $TP = PV$. De aici Arhimede trage concluzia că dacă dreapta EO, paralelă cu TV, taie dreptele QT, QP, Qq și parabola în punctele E, F, O, și R, atunci au loc rapoartele $QV : VO = QF : FP$, $QO : Oq = ER : RO$.

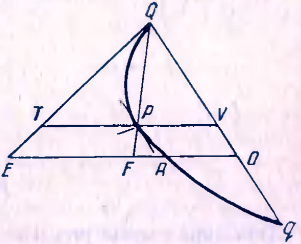


Fig. 25

După aceasta, Arhimede așază segmentul parabolic QR_1q, astfel (fig. 26) încît diametrul care divide pe Qq în două să fie vertical, duce în q diametrul EO pînă la intersecția O cu dreapta orizontală QO și pînă la E cu tangenta QE în punctul Q și prelungește pe QO pînă la A, punînd $AO = OQ$. Împărțind apoi prin punctele $O_1, O_2, \ldots, O_n$ coarda Qq, el duce prin ele drepte verticale ce taie pe OQ în punctele $H_1, H_2, \ldots, H_n$, tangenta QE în punctele

$E_1, E_2, \ldots E_n$, iar parabola în punctele R_1, $R_2, \ldots, R_n$. Apoi el unește pe QR_1 și o continuă pînă la intersecția F cu OE, mai departe pe QR_2 pînă la intersecția F_1 cu H_1E_1 s.a.m.d. Astfel se obțin două figuri formate din trapeze; una circumscrisă segmentului parabolic constă din trapezele FO_1, $F_1O_2, F_2O_3, \ldots$ și triunghiul E_nO_nQ; cealaltă, înscrisă în el, constă din trapezele R_1O_2, $R_2O_3, \ldots$ și din triunghiul R_nO_nQ (pentru simplificare notăm trapezele prin două vîrfuri opuse).

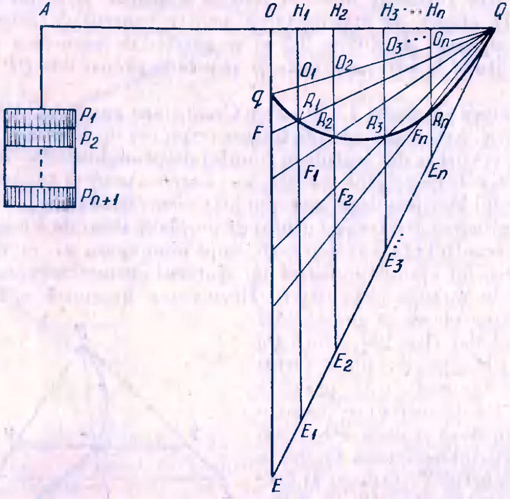


Fig. 26

Abia după această pregătire geometrică, Arhimede trece la considerațiile propriu-zis mecanice. AOQ se ia drept pîrghie cu brațe egale, O drept punctul de sprijin. Mai întîi se demonstrează că, dacă triunghiul QqE este atîrnat de pîrghie în punctele O și Q, el este echilibrat de greutatea P atîrnată în A, dacă $P = \frac{1}{3}\, QqE$. Apoi el demonstrează că greutatea P_1 care echilibrează în A trapezul E_1O_2 este mai mică decît aria acestui trapez înmulțită cu $\frac{OH_2}{OQ}$ însă mai mare decît aceeași arie înmulțită cu $\frac{OH_1}{OQ}$ și analog pentru celelalte trapeze. De aici el ajunge la concluzia că figura circumscrisă este echilibrată de o greutate mai mare, iar cea înscrisă de o greutate mai mică decît suma $P_1 + P_2 + ... P_{n+1} = \frac{1}{3} Qq\ E$.

După aceasta, Arhimede aplică metoda exhaustiei demonstrînd că prin mărirea numărului de diviziuni, diferența dintre figura circumscrisă și cea înscrisă poate fi făcută mai mică decît orice mărime dată și conchide că aria segmentului parabolic este egală cu $\frac{1}{3}$ din aria triunghiului QqE și, deoarece aceasta din urmă este de patru ori mai mare decît aria triunghiului înscris în segment, cu aceeași bază și înălțime ca și segmentul, aria segmentului este egală cu $\frac{4}{3}$ din aria acestui triunghi înscris.

În modul acesta Arhimede a ridicat metoda lui Eudoxus la o nouă treaptă, mai înaltă. La Arhimede existau adevărate sume de integrare — inferioară și superioară — și se executa în fapt trecerea la limită. Deosebirea față de metoda descoperită de Newton și Leibniz consta în primul rînd în faptul că la Arhimede nu existau nici noțiuni de „trecere la limită", „margine inferioară și superioară", nici notațiile corespunzătoare acestor noțiuni. În al doilea rînd, Arhimede aplica metoda sa numai la cazuri particulare, deși numeroase și variate, în timp ce în secolul al XVII-lea această metodă a devenit universală[1].

Este necesar să atragem atenția că, deși metoda utilizată de Arhimede este înrudită prin ideea sa fundamentală cu metoda integralei definite, identificarea acestor metode în lucrările unor istorici ai matematicii trebuie considerată ca o extindere nejustificată a noțiunilor moderne la antichitate. Și mai puțin nejustificate sînt afirmațiile ce se întîlnesc destul de frecvent că metoda mecanică de determinare a ariei segmentului de parabolă ar consta în aceea că Arhimede cîntărea efectiv segmentul tăiat dintr-un material omogen oarecare și îl compara cu greutatea triunghiului confecționat în același mod. Mai mult decît atît, Arhimede nu considera metoda mecanică ca avînd valoare demonstrativă în geometrie și o admitea doar pentru o evaluare prealabilă, ca o sugestie. El pornea de la principiul logic al inadmisibilității „substituirii genului prin specie". Noțiunile mecanice, ca avînd un număr mai mare de caracteristici decît noțiunile geometrice, erau

---

[1] Despre metoda exhaustiei la Arhimede, vezi lucrarea lui A.P. Iușkevici [111].

considerate încă de Aristotel ca străine în geometrie, dar aceasta nu avea nimic comun cu disprețul platonian față de mecanică.

Despre metodă. Din *Scrisoarea către Eratostene despre unele teoreme de mecanică* [107] am citat mai sus un fragment mic, dar important din punct de vedere principial care arată cît de profund era înțeleasă de Arhimede rigurozitatea matematică. În lucrarea *Despre metodă*, care numără 16 propoziții, este dedusă din nou aria segmentului de parabolă, apoi se demonstrează că volumul unui cilindru drept, circumscris unei sfere (sau unui elipsoid de revoluție) și avînd înălțimea egală cu diametrul sferei (sau cu axa de revoluție a elipsoidului), este egal cu $\frac{3}{2}$ din volumul sferei (sau al elipsoidului). Mai departe este determinat volumul segmentului tăiat de un plan perpendicular pe axă din corpurile de revoluție: paraboloid, sferă, elipsoid și hiperboloid cu două pînze. Arhimede găsește, în sfîrșit, volumele a două corpuri dintre care unul este format de o secțiune a cilindrului printr-un plan, iar celălalt prin intersecția a doi cilindri circulari drepți de diametru egal ale căror axe secante sînt perpendiculare între ele.

Despre sferă și cilindru. În scrisoarea către Dositeos cu care începe cartea I a lucrării *Despre sferă și cilindru* [112] Arhimede spune că publică aici, pentru prima dată, rezultatele originale obținute de el, pentru ca matematicienii să aibă posibilitatea să cunoască demonstrațiile și să judece valoarea lor. Aceste noi rezultate ale cărții I sînt următoarele: 1) aria suprafeței sferei este egală cu de patru ori aria cercului mare; 2) aria suprafeței unui segment sferic este egală cu aria cercului a cărui rază este egală cu distanța dintre vîrful segmentului și periferia sa circulară; 3) volumul cilindrului circumscris sferei și avînd înălțimea egală cu diametrul ei este egal cu $\frac{3}{2}$ din volumul sferei; 4) suprafața acestui cilindru, inclusiv bazele sale, este de asemenea egală cu $\frac{3}{2}$ din suprafața sferei. Ultimele două descoperiri ale lui Arhimede au fost săpate pe mormîntul lui.

Cea de-a doua carte a acestei lucrări conține șase probleme și trei teoreme. În probleme se cere să se construiască o sferă echivalentă cu un con dat sau cu un cilindru dat; să se intersecteze sfera printr-un plan, astfel încît volumele sau ariile suprafețelor celor două segmente să se găsească într-un raport dat; fiind date două segmente a două sfere diferite, să se găsească un al treilea segment asemenea unuia dintre ele și egal ca arie sau ca volum cu celălalt; să se taie dintr-o sferă dată un segment al cărui volum se găsește într-un raport dat cu un con de aceeași bază și înălțime.

Cel mai mare interes îl prezintă propoziția a patra din cartea II a acestei lucrări, în care se cere să se taie o sferă dată, astfel încît volumele segmentelor să se găsească într-un raport dat (vezi fig. 27 unde sînt reprezentate și secțiunile conurilor egal de mari

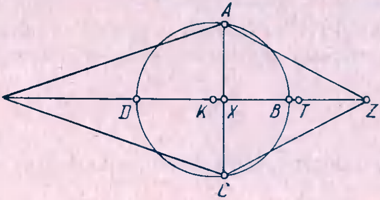


Fig. 27

cu segmentele căutate). Dacă înălțimea segmentului mare este $DX = x$, raza sferei r și raportul dat $\frac{m}{n}$, unde $m > n$, atunci problema poate fi scrisă cu ajutorul ecuației

$$x^3 + 4r^2 \frac{mr}{m+n} = 3rx^2 \qquad (1)$$

sau, punînd pentru simplificare $3r = a$, $2r = b$, $\frac{mr}{m+n} = c$,

$$x^3 + b^2c = ax^2 \qquad (1')$$

Arhimede exprimă problema sub forma proporției: se dau două drepte BD și BZ, dintre care DB este de două ori mai mare decît BZ, precum și un punct T pe BZ; se cere să se împartă DB printr-un punct X, astfel încît

$$\frac{BD^2}{DX^2} = \frac{XZ}{TZ}. \qquad (2)$$

Este ușor de văzut că proporția (2) se reduce la ecuația (1′). Arhimede promitea să dea la sfîrșitul propoziției rezolvarea și studiul problemei ajutătoare cu privire la împărțire, însă în textul tratatului *Despre sferă și cilindru* și în alte lucrări ale matematicianului din Siracuza, ce ni s-au păstrat, această soluție lipsește. Eutokios indica în comentariile sale la acest tratat un procedeu, care probabil apartinea lui Arhimede însuși. Modul de rezolvare se bazează pe o construcție geometrică analogă cu aceea pe care a folosit-o Menechmus pentru a construi latura x a cubului egal ca volum cu volumul b^2c al unui paralelipiped dat, adică la ecuația binomă

$$x^3 = b^2c.$$

Rădăcina ecuației (1′) se reprezintă ca abscisa punctului de intersecție a două secțiuni conice: a parabolei simetrice față de axa ordonatelor

$$\frac{2}{3}by = x^2$$

și a hiperbolei echilatere ale cărei asimptote sînt axa absciselor și dreapta $x = a$,

$$(a - x)y = \frac{3bc}{2}.$$

După informațiile lui Eutokios, Arhimede a dat de asemenea și diorismul problemei, adică a studiat condițiile în care rezolvarea ei este posibilă arătînd că segmentul căutat $DX = x$ există, dacă punctul T se află între B și Z. Exprimat în limbaj algebric aceasta înseamnă că dacă, așa cum și trebuie să fie, $\frac{m}{m+n} < 1$ sau $b^2c < \frac{4}{27}a^3$, atunci ecuația (1) are o rădăcină pozitivă mai mică decît $\frac{2}{3}a = 2r$. În acest caz există și o a doua rădăcină pozitivă care este mai mare decît $2r$, care din acest motiv nu se ia în considerație. Egalitatea $b^2c = \frac{4}{27}a^3$, adică $\frac{m}{m+n} = 1$ și $n = 0$, determină limita rădăcinii pozitive: în ultimul caz, hiperbola și parabola au în punctul comun o tangentă comună: am spune că ecuația are o rădăcină pozitivă dublă. Ecuația (1), sau mai precis (2), este folosită de Arhimede și în alte probleme.

Despre spirale. Această lucrare [113], constituită din 28 de propoziții, începe cu o prefață adresată lui Dositeos în care Arhimede își exprimă regretul pentru moartea lui Conon considerînd-o ca o grea pierdere pentru matematică și corectează ultimele două propoziții din cartea II a operei sale *Despre sferă și cilindru*, inițial comunicate lui de către Dositeos într-o formulare greșită. Mai departe, dă definiția spiralei — ca linie descrisă de un punct ce se mișcă uniform pe dreaptă cînd această dreaptă se rotește uniform în plan în jurul unui punct fix ca centru. Astfel, Arhimede aplică totuși aici mișcarea în geometrie, însă nu în procesul demonstrației cu folosirea raționamentelor asupra „mărimilor infinit mici", ci pentru definirea unor noi figuri geometrice. Pri-

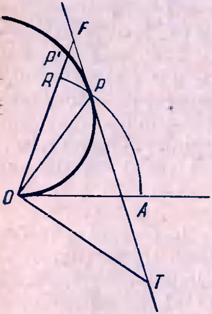


Fig. 28.

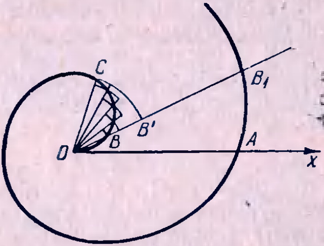


Fig. 29

mele cinci propoziții sînt preliminare; ele se ocupă de anumite relații între drepte și cercuri, care conduc, exprimate în formă algebrică, la ecuații de gradul patru, rezolvabile cu ajutorul intersecției parabolei cu o hiperbolă echilateră. Mai departe, după două propoziții asupra sumei seriei $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, se demonstrează proprietatea fundamentală a curbei (a cărei ecuație se scrie azi în coordonate polare sub forma $\rho = a\varphi$), în virtutea căreia fiecare rază intersectează curba în puncte egal depărtate între ele. Propozițiile următoare demonstrează (fig. 28) că lungimea subtangentei polare OT (adică a segmentului ce unește originea O cu punctul de intersecție T al tangentei PT în punctul P cu perpendiculara OT la raza vectoare Op) este egală cu lungimea arcului de cerc AP (unde OA este axa polară a spiralei, după expresia lui Arhimede — „linia ei inițială"). În sfîrșit, Arhimede, cu ajutorul metodei exhaustiei, înscriind în spirală și circumscriind o figură în formă de trepte (fig. 29), mărginită de arce de cerc și de segmentele razelor vectoare $OB = b$, $OC = c$, găsește aria ei egală cu $\frac{c^3 - b^3}{3c^2\,(c-b)}$ din sectorul circular $OB'C$. Pentru prima spiră lungimea subtangentei polare este egală cu perimetrul „primului cerc" (adică al cercului cu raza egală cu raza vectoare a capătului spirei), iar aria spirei este egală cu $\frac{1}{3}$ din aria acestui cerc. În modul acesta, spirala poate fi folosită pentru rezolvarea problemei rectificării cercului, prin urmare, și a cvadraturii sale. După cum a arătat încă Zeuthen [12, p. 126], Arhimede a studiat (fig. 28) triunghiul caracteristic infinit mic PRF format de tangenta la spirală, de arcul de cerc de rază OP și de raza vectoare OP' prelungită pînă la tangentă, rază apropiată de OP; acest triunghi este (aproximativ) asemenea cu triunghiul dreptunghic POT. Astfel, în lucrarea lui Arhimede erau prezenți nu numai germenii calculului integral, ci și ai calculului diferențial, care, alături de primul, a servit în secolele XVI—XVII drept punct de plecare în crearea analizei [114].

Despre conoizi și sferoizi. Arhimede a scris la începutul tratatului *Despre conoizi și sferoizi* o prefață adresată lui Dositeus, în care expune rezultatele obținute, dă definițiile suprafețelor considerate, care în terminologia actuală sînt: paraboloidul de revoluție (la Arhimede „conoid dreptunghic"), hiperboloidul de revoluție cu două pînze („conoid obtuzunghic") și două genuri de „sferoizi" — „alungit" și „turtit", generați prin rotația unei elipse în jurul „diametrului mai mare" și „diametrului mai mic". Denumirea de „conoid" înseamnă corp de forma unui con, iar „sferoid" — de forma unei sfere. Arhimede a denumit aceste corpuri conoid „dreptunghic" și „obtuzunghic" după denumirile de dinaintea lui Apoloniu ale parabolei și hiperbolei ca secțiuni ale conurilor dreptunghic și ascuțit, aceste secțiuni fiind presupuse perpendiculare pe una dintre generatoarele conului (elipsa era considerată „o secțiune a conului ascuțit"). Din cele 32 de propoziții ale acestui tratat, primele 18 sînt preliminare: asupra sumării seriilor, asupra unor proprietăți ale secțiunilor conice și ale corpurilor examinate; în celelalte se determină volumele segmentelor drepte și oblice ale acestor corpuri.

Despre corpurile plutitoare. Lucrarea de hidrostatică a lui Arhimede *Despre corpurile plutitoare* [115] expune în două cărți bazele acestei științe. Arhimede pune la baza teoriei sale două postulate. La începutul cărții se demonstrează propoziția că suprafața oricărui lichid în repaus este o sferă cu centrul în centrul Pămîntului, apoi propoziția asupra cufundării în lichid a corpurilor de aceeași greutate, respectiv mai puțin sau mai mult decît lichidul de volum egal, precum și cunoscuta teoremă denumită după numele lui Arhimede. Această propoziție (a 7-a) permite rezolvarea problemei legendare amintite cu coroana, și anume prin două procedee diferite.

A doua carte, formată din 10 propoziții, este în întregime consacrată studiului condițiilor de echilibru a unui segment drept de paraboloid de rotație, ce plutește — avînd în vedere diferite cazuri ale raportului dintre greutățile specifice ale corpului și lichidului, dintre parametrul parabolei generatoare și înălțimea segmentului. Arhimede examinează cazurile în care baza segmentului fie că este în întregime cufundată în lichid, fie că se găsește complet deasupra lui, și demonstrează că în aceste cazuri, dacă se deviază axa segmentului cu un unghi arbitrar de la poziția verticală, segmentul va reveni în starea de echilibru.

Menționăm că, în această lucrare care a apărut datorită dezvoltării construcțiilor de nave, Arhimede nu s-a plasat pe punctul de vedere greșit al filozofiei aristotelice a naturii răspîndită atunci, după care unele corpuri „ușoare“ tind în sus, iar altele „grele“ în jos, ci, urmînd pe materialistul Democrit, a considerat că toate corpurile tind către centrul Pămîntului.

Măsurarea cercului [116]. Probabil că este cea mai cunoscută lucrare a lui Arhimede, din care însă s-a păstrat doar un fragment format numai din trei propoziții și care, judecînd după limbă, nici nu este textul original, ci doar o transcriere a acestuia. Aici se demonstrează că:

1) aria cercului este egală cu aria unui triunghi dreptunghic cu înălțimea egală cu raza și cu baza egală cu circumferința;

2) aria cercului se raportează la pătratul construit pe diametrul său, ca 11 la 14, și

3) raportul oricărei circumferințe și al diametrului ei este mai mic decît $3\frac{1}{7}$, dar mai mare decît $3\frac{10}{71}$.

Arhimede demonstrează prima propoziție prin metoda exhaustiei, înscriind și circumscriind cercului poligoane regulate, începînd cu hexagonul regulat și dublînd de fiecare dată numărul laturilor. Textul celei de-a doua propoziții este, se pare, deteriorat; Arhimede nu putea să o plaseze înaintea celei de-a treia din care ea decurge. Cea mai interesantă este propoziția a treia în care se găsește o valoare aproximativă a numărului π. Ea este calculată ca valoarea aproximativă a perimetrelor a două poligoane cu 96 de laturi, unul circumscris și celălalt înscris, calculul bazîndu-se pe inegalitatea, considerată de Arhimede ca fiind cunoscută:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Numărarea grăunțelor de nisip. Ultima dintre lucrările lui Arhimede în limba greacă, care ni s-a păstrat, *Numărarea grăunțelor de nisip (Psammit)* [117], reprezintă o lucrare de aritmetică. În ea se expune un procedeu prin care se poate exprima un număr oricît de mare. La baza sistemului său, Arhimede a pus octada egală cu o miriadă de miriade, adică 10^8. Numerele pînă la 10^8 erau considerate „primele numere". Numărul 10^8 era socotit ca unitate a „numerelor secunde", numărul $(10^8)^2$ era considerat ca o unitate a numerelor „terțe" și astfel pînă la $(10^8)^{10^8}$—unitate a numerelor de ordinul 10^9. Toate aceste numere reprezentau prima perioadă, după care urmau celelalte perioade pînă la perioada a 10^8-a. Numărul cel mai mare ce poate fi exprimat cu ajutorul acestei numărări cu „octade" este $(10^{8\cdot 10^8})^{10^8}$ — un număr care în sistemul obișnuit de notație se scrie ca 1 urmat de 80 000 milioane de milioane de zerouri. Pentru scrierea lui ar fi fost necesară o distanță mai lungă decît de 500 de ori distanța de la Pămînt la Soare, dacă fiecare zero ar ocupa un milimetru.

Arhimede arată că sistemul său este mai mult decît suficient pentru a exprima numărul grăunțelor de nisip care ar umple universul, considerat de Arhimede ca o sferă mărginită de sfera stelelor fixe. Adoptînd concepția heliocentrică a lui Aristarh din Samos și bazîndu-se pe datele acestuia, Arhimede determină dimensiunile sferei stelelor fixe și găsește că ea este de 10^{12} ori mai mare decît sfera al cărei cerc mare este orbita Pămîntului. Admițînd că un fir de nisip constituie a 10^{-4}-a parte dintr-un grăunte de mac, iar acesta din urmă are un diametru egal cu $\frac{1}{40}$ din grosimea unui deget, el a găsit că numărul grăunțelor de nisip din univers va fi mai mic decît 10^{63}.

Este interesant de observat că datele astronomice pe care se baza Arhimede erau, pentru vremea sa, excepțional de precise. Astfel, lungimea unui cerc mare al sferei terestre el o ia egală cu 300 000 de stadii, adică 55 000 de kilometri (în realitate 40 000 de kilometri). Pentru unghiul sub care se vede discul solar (mărimea vizibilă a Soarelui), el găsește, cu ajutorul observaţiilor, marginea superioară 32,9', iar cea inferioară 27' (numai cu 55" mai mare decît valoarea reală). Diametrul Soarelui el îl consideră mai mare decît diametrul Pămîntului de cel mult 30 de ori (în realitate de 109 ori), distanța de la Pămînt la Soare egală cu 5 miliarde de stadii, adică 925 de milioane kilometri (în realitate 150 milioane de kilometri), raza sferei stelelor fixe egală cu 9,25 bilioane de kilometri, adică aproape un an-lumină ($9{,}46 \cdot 10^{12}$ km) — număr de același ordin ca și distanța pînă la stelele cele mai apropiate (Proxima din constelația Centaurului se află la 4,2 ani-lumină).

Se naște întrebarea: pentru ce era întreprinsă propriu-zis această cercetare, ce scopuri urmărea ea? Ea nu servea necesităților practice. Nu numai viața de toate zilele, dar nici știința din acel timp nu aveau nevoie de numere atît de mari. Ea a apărut datorită intereselor abstracte, teoretice, de construire a unei concepţii asupra lumii — răsturnînd concepţia răspîndită asupra existenței „ultimului număr", asupra imposibilității „de a număra nisipul mării", demonstrînd forța convingătoare a gîndirii umane abstracte. Și dacă în timpul lui Arhimede, acum 2 200 de ani, cele mai mari distanțe spațiale accesibile reprezentării omului depășeau pe cele mai mici de 10^{21} ori, astăzi cele mai mari dimensiuni accesibile măsurării depășesc pe cele mai mici de 10^4 ori.

Ipoteze. Lucrarea *Ipoteze* atribuită lui Arhimede [vezi 112] ni s-a păstrat într-un exemplar latin, tradus din arabă. Ea este compusă din 15 propoziții, care însă reprezintă doar o redare a originalului pierdut. În trei propoziții este studiată figura numită *arbelos* — cuțitul curbat al cizmarului, format din trei semicercuri și reprezentat în fig. 30. Arhimede stabilește că aria $ABCD$ mărginită de trei semicercuri este egală cu aria cercului al cărui diametru este egal cu CD.

Mai departe se demonstrează că dacă prelungim (fig. 31) orice coardă AB a cercului cu centrul în O, astfel încît $BC = OB$ și ducem linia CO care taie cercul în punctele D și E, atunci arcul BD va fi egal cu $\frac{1}{3}$ din arcul AE sau — dacă ducem încă EF paralelă cu AB — cu $\frac{1}{3}$ din arcul BF. Această propoziție poate servi pentru rezolvarea problemei trisecțiunii unghiului, dacă folosim o alunecare. Pentru aceasta avem nevoie — dacă se dă unghiul ACE ce trebuie împărțit în trei părți egale — doar să ducem prin A o dreaptă ABC, astfel încît segmentul BC dintre circumferință și prelungirea dreptei EO să fie egal cu OE.

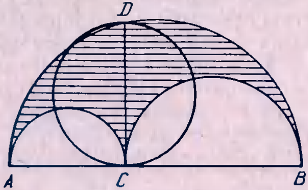


Fig. 30

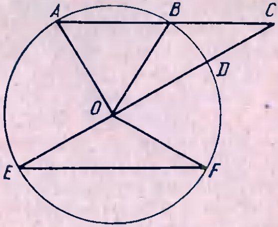


Fig. 31

Poliedre semiregulate. Datorită lui Pappus ni s-au păstrat informații cu privire la descoperirea poliedrelor semiregulate de către Arhimede. Așa se numesc poliedrele convexe ale căror fețe sînt toate poligoane regulate de mai multe tipuri, iar toate unghiurile spațiale sînt congruente între ele sau simetrice. Arhimede a găsit 13 astfel de corpuri bine definite, mărginite de 8, 14, 26, 32, 38, 62 sau 92 de fețe avînd forma de triunghi, pătrat, pentagon, hexagon, octogon, decagon și dodecagon. Zece dintre aceste corpuri sînt mărginite de două, celelalte trei de trei tipuri de poligoane. Din comunicarea lui Heron se vede că Arhimede (care arată că încă Platon cunoștea două dintre aceste corpuri) le-a obținut din cinci poliedre regulate (fig. 32). Șapte dintre corpurile lui Arhimede se obțin prin secționarea vîrfurilor poliedrelor regulate cu plane: fie *(a)* plane ce împart în două toate muchiile incidente în vîrf, fie *(b)* plane ce taie din acestea o parte mai mică într-un asemenea raport, încît poligoanele, formate astfel cu număr dublu de laturi față de numărul inițial, să fie poligoane regulate. Dintre celelalte poliedre semiregulate, patru se obțin: *(c)* prin tăierea muchiilor poliedrului regulat corespunzător cu un plan paralel cu muchia, plan care taie din celelalte muchii părți egale, iar apoi prin tăierea vîrfurilor fie prin procedeul *(a)*, fie prin *(b)*. În acest caz, unele corpuri pot fi obținute prin mai multe procedee. În sfîrșit, ultimele două corpuri rămase se obțin în modul următor: *(d)* în centrul feței poliedrului regulat corespunzător se așază un poligon regulat, asemenea poligonului ce mărginește fața, însă mai mic decît acesta și rotit cu un anumit unghi, în același sens pe toate fețele, apoi se unesc vîrfurile poligoanelor din fețele vecine printr-o rețea de poligoane regulate și restul din poliedrul regulat se

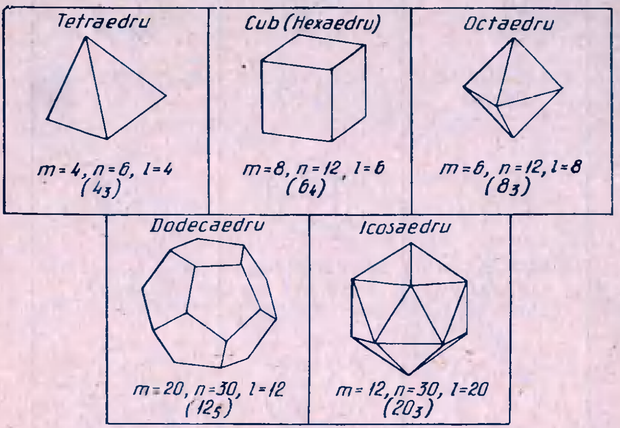


Fig. 32

îndepărtează. În afară de aceste 13 poliedre semiregulate determinate, Arhimede a indicat încă două clase infinite de poliedre semiregulate: prismele și antiprismele. În fig. 33 sînt reprezentate cele 13 corpuri ale lui Arhimede. Se indică numărul vîrfurilor m, al muchiilor n, și al fețelor l ale fiecărui corp, numărul fețelor la fiecare corp și cîte fețe de tipul dat posedă acest corp (de exemplu 4_3 înseamnă patru triunghiuri), prin ce procedeu și din care poliedru regulat a fost obținut el (de exemplu 6_4 *a* înseamnă procedeul *(a)*, dintr-un cub).

Lui Arhimede i se atribuie, de asemenea, o problemă referitoare la ecuațiile nedeterminate, formulată în versuri, care a căpătat denumirea de „problema taurilor lui Helicon": se cere să se găsească numărul taurilor și al vacilor de patru culori distincte, cu alte cuvinte, să se găsească opt necunoscute. Rezolvarea duce la așa-numita ecuație a lui Pell $x^2 - Dy^2 = 1$, unde $D = 4\,729\,494$. Cele mai mici rădăcini întregi, diferite de $x = 1$, $y = 0$ ale acestei ecuații sînt atît de mari, încît cele opt necunoscute se exprimă prin numere cu mai mult de 200 000 de cifre.

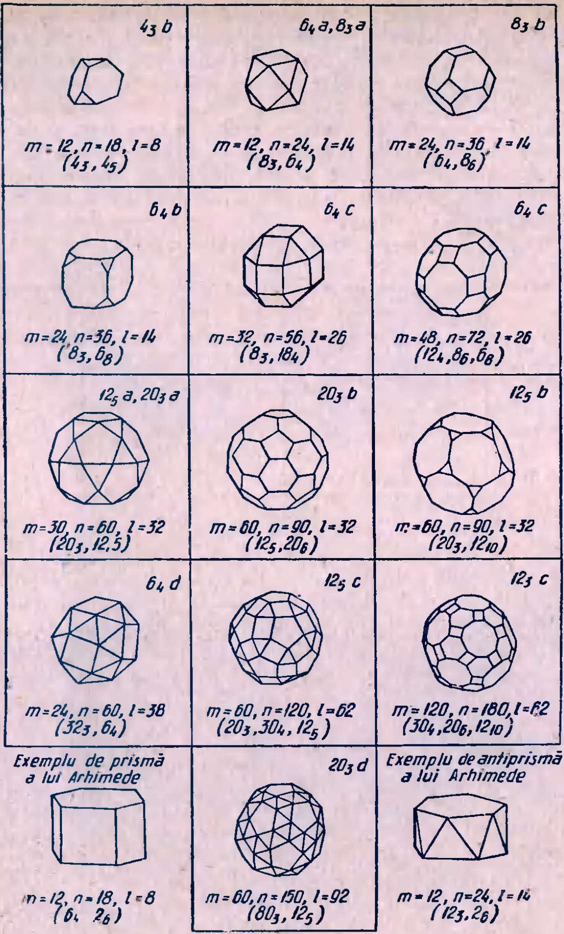

$4_3\,b$
$m = 12, n = 18, l = 8$
$(4_3, 4_5)$
$6_4\,a, 8_3\,a$
$m = 12, n = 24, l = 14$
$(8_3, 6_4)$
$8_3\,b$
$m = 24, n = 36, l = 14$
$(6_4, 8_6)$
$6_4\,b$
$m = 24, n = 36, l = 14$
$(8_3, 6_8)$
$6_4\,c$
$m = 32, n = 56, l = 26$
$(8_3, 18_4)$
$6_4\,c$
$m = 48, n = 72, l = 26$
$(12_4, 8_6, 6_8)$
$12_5\,a, 20_3\,a$
$m = 30, n = 60, l = 32$
$(20_3, 12,5)$
$20_3\,b$
$m = 60, n = 90, l = 32$
$(12_5, 20_6)$
$12_5\,b$
$m = 60, n = 90, l = 32$
$(20_3, 12_{10})$
$6_4\,d$
$m = 24, n = 60, l = 38$
$(32_3, 6_4)$
$12_5\,c$
$m = 60, n = 120, l = 62$
$(20_3, 30_4, 12_5)$
$12_3\,c$
$m = 120, n = 180, l = 62$
$(30_4, 20_6, 12_{10})$
Exemplu de prismă a lui Arhimede
$m = 12, n = 18, l = 8$
$(6_4\ 2_6)$
$20_3\,d$
$m = 60, n = 150, l = 92$
$(80_3, 12_5)$
Exemplu de antiprismă a lui Arhimede
$m = 12, n = 24, l = 14$
$(12_3, 2_6)$

Fig. 33

În sfîrşit, de numele lui Arhimede este legat jocul matematic „lădiţa lui Arhimede" — un pătrat din fildeş, tăiat în 14 părţi poligonale diferite, din care se cere să se refacă acest pătrat sau alte figuri date. Izvoarele arabe indică, de asemenea, o serie de alte lucrări ale lui Arhimede, dar nu s-au păstrat nici măcar urme ale acestora. S-a pierdut de asemenea lucrarea de astronomie a lui Arhimede *Despre construirea sferei cereşti* în care descria planetarul construit de el, pus în rotaţie de un motor hidraulic, precum şi lucrările sale de mecanică *Despre pîrghii* şi *Cartea reazemelor*.

Apreciind contribuţia lui Arhimede la dezvoltarea matematicii, observăm, în primul rînd, că — aşa cum a arătat A. Czwalina [118, p.7] — matematica lui Euclid admitea cu greu variaţia şi continuitatea; de exemplu, vedea în circumferinţă în primul rînd constanţa distanţelor punctelor ei pînă la un punct dat, în timp ce matematica lui Arhimede operează mult mai mult cu variabile; ea introduce explicit mişcarea în geometrie, mergînd prin aceasta cu îndrăzneală împotriva concepţiei metafizice dominante. Arhimede anticipează, în germene, acea cotitură în dezvoltarea matematicii pe care, după expresia lui Engels [3, p.206], a provocat-o „*mărimea variabilă* carteziană" şi care a dus curînd după aceea la crearea analizei matematice. Într-adevăr, după cum am văzut, Arhimede a dezvoltat apreciabil în operele sale atît metoda determinării ariilor şi volumelor, cît şi metoda determinării tangentelor la curbe şi a determinării maximelor şi minimelor (dînd acestor metode cea mai mare generalitate posibilă pe vremea aceea). El considera metoda „indivizibilelor" doar ca un procedeu euristic, care sugerează descoperirea teoremei, considerînd obligatorie demonstrarea ei prin metoda exhaustiei. El a introdus, pentru prima dată, examinarea sumelor superioară şi inferioară ce mărginesc mărimea căutată (aria sau volumul), a căror diferenţă devenea mai mică decît orice cantitate dată. El a introdus, de asemenea, examinarea triunghiului caracteristic legat de tangentă. Pentru dreaptă, circumferinţă, secţiunile conice şi spirală, el a demonstrat proprietatea importantă a mărimilor continue: faptul că ele iau între două valori ale lor toate valorile intermediare. El a găsit, de asemenea, procedeul de a reduce o clasă vastă de probleme de maxim şi de minim la probleme de construcţie a tangentei. În modul acesta, Arhimede a elaborat sistematic noţiunile care au stat apoi, după două milenii, la baza calculului integral şi diferenţial.

O altă trăsătură caracteristică a creaţiei matematice a lui Arhimede a fost înţelegerea legăturii dintre problemele individuale care permiteau să se rezolve printr-un același procedeu formal probleme cu conținut diferit. Astfel, de exemplu, el a descoperit că volumul unui segment de paraboloid se calculează prin același procedeu ca și aria unui triunghi, volumul unui con — ca aria unui sector al spiralei. Aceasta a devenit posibil din cauză că, fixînd atenția principală nu asupra mărimilor înseși, ci asupra variației lor, Arhimede s-a ridicat pe o treaptă de abstracție mai înaltă decît înaintașii săi, reușind să se abstragă de particularitățile concrete ale mărimilor examinate și să-și dea seama, așa cum am spune astăzi, de legăturile funcționale interne dintre ele.

O a treia particularitate, cel mai viu exprimată, a creației matematice a lui Arhimede, o constituie legătura lui cu mecanica, hidrostatica și astronomia, apropierea teoriei de practică, atenția acordată matematicii calculatorii și dezvoltarea procedeelor acesteia. În această privință, este deosebit de caracteristic calculul valorilor aproximative ale numărului π, stabilirea inegalității $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ care dă o eroare între 75 și 126 sutimi de miimi. Prin urmare, și aici Arhimede a reușit să învingă prejudecățile idealiste aristocratice relativ la faptul că a te ocupa de cunoștințe aplicative este „înjositor". El a pus metoda matematică în slujba științelor naturii și a tehnicii, creînd în lucrările sale un model remarcabil al acelei „cercetări exacte și sistematice" care, după cum arată Engels [3, p. 145], numindu-l pe Arhimede reprezentantul ei, a apărut pentru prima dată abia în perioada alexandrină, pentru a deveni în timpurile moderne bunul comun al științelor naturii și al tehnicii. Lucrările lui Arhimede, la fel ca și lucrările marelui său succesor Apoloniu din Perga, au exercitat o influență enormă asupra întregii dezvoltări ulterioare a matematicii. Metodele și ideile conținute în ele, deși încă neformulate în noțiuni și notații desăvîrșite, au ajuns pînă în timpurile moderne prin intermediul traducerilor arabe și au servit drept punct de plecare în crearea analizei [vezi și 119,120].

Cu toate că statul sclavagist egiptean aflat sub domnia Ptolemeilor, începînd cu sfîrșitul secolului al III-lea î.e.n., datorită războaielor neîntrerupte și a răscoalelor, pierdea tot mai mult poziția sa dominantă, economică și culturală, printre țările lumii elenistice, matematica alexandrină a continuat să înflorească și a dat roade remarcabile chiar atunci cînd filozofia, poezia și artele treceau printr-o perioadă de adîncă decădere. După Arhimede, timp de patru secole, nu a fost nimeni care să se poată compara cu această minte genială, dar cu toate acestea s-a păstrat amintirea unei serii de învățați, care au adus propria lor contribuție în dezvoltarea matematicii. Aceștia au fost Eratostene, Nicomede, Diocles, Zenodor și Hipsicle, amintit de noi mai înainte, autor al cărții XIV a *Elementelor* lui Euclid.

Eratostene. Asupra lui Eratostene s-au păstrat relativ multe date biografice; el s-a născut în anul 276 sau 275 (după alte informații în 284) î.e.n., în Cirene, pe țărmul nordic al Africii. În Alexandria, unde a trăit aproape întreaga sa viață, el a învățat la concetățeanul său Callimah, conducătorul renumitei Biblioteci alexandrine. Un timp, Eratostene și l-a petrecut în Atena. În vîrsta de 40 de ani, el s-a întors la Alexandria, unde a devenit învățătorul lui Filopator, fiul lui Ptolemeu al III-lea Everget (247—222 î.e.n.), iar mai tîrziu succesorul lui Callimah. Eratostene a murit aproximativ în anul 194 î.e.n., orb și, după unele informații, înlăturat din bibliotecă, în totală sărăcie. Talentele lui Eratostene au fost multilaterale. Arhimede l-a apreciat foarte mult, însă Eratostene nu a creat opere remarcabile.

Pînă la noi au ajuns doar două descoperiri propriu-zis matematice ale lui Eratostene: renumitul „ciur" al lui Eratostene *(coskinon)* și rezolvarea problemei din Delfi. Ciurul lui Eratostene reprezintă cunoscutul procedeu de a găsi toate numerele prime mai mici decît un număr *n* dat, în afară de numărul 2 ce trebuie adăugat. De altfel unii greci, ca neoplatonicianul Iamblic (mort aproximativ la 330 e.n.), considerau că numărul 2, fiind par, ar fi fost greșit considerat de Euclid printre numerele prime.

În comentariile la opera lui Arhimede *Despre sferă și cilindru*, Eutokios povestește istoria problemei din Delfi, originea ei legendară și soluțiile propuse de Arhitas, Eudoxus și Menechmus, toate acestea sub forma unei scrisori a lui Eratostene către Ptolemeu. Deși scrisoarea însăși este falsă, soluția lui Eratostene conținută în ea este însă veritabilă. După cum am mai arătat, această problemă — a duplicării cubului — a fost redusă de către Hipocrate din Chios la problema găsirii a două medii proporționale, iar ultima problemă el o rezolvă stereometric — prin intersecția a trei suprafețe de rotație. Eutokios însuși o rezolva cu ajutorul intersecției unei curbe de ordinul patru cu un cerc, iar Menechmus cu ajutorul intersecției a două secțiuni conice. Lui Platon i se atribuie una din soluțiile mecanice ale acestei probleme. Soluția lui Eratostene este tot mecanică și se face cu ajutorul unui aparat simplu numit *mesolabon.* Eratostene acorda descoperirii sale o importanță atît de mare, încît a ridicat o coloana consacrata lui Ptolemeu cu o inscripție care expune calea construcției și cu o reprezentare în bronz a aparatului.

Eratostene este și autorul lucrării *Platonikos* în care noțiunile fundamentale de matematică, în particular proporțiile precum și principiile muzicii, erau privite în lumina filozofiei platoniene. Despre o altă lucrare a lui Eratostene *Despre medii*, Pappus comunică doar că ea consta din două cărți, unde se pare erau studiate locurile geometrice ale punctelor ale căror distanțe pînă la trei drepte date formau una din proporțiile studiate de greci.

În afară de lucrările pur matematice, trebuie însă amintite și lucrările de astronomie ale lui Eratostene, printre care se găsește măsurarea Pămîntului, care i-a adus faimă și care este descrisă de el într-o lucrare aparte. Aceasta reprezintă prima determinare, istoricește stabilită, a dimensiunilor Pămîntului. Eratostene a găsit că lungimea unui cerc mare al sferei terestre este egală cu 250 000 de stadii egiptene, adică în funcție de diferite evaluări date acestei măsuri este cuprinsă între 39 și 46 mii de kilometri; această evaluare este mai exactă decît la Arhimede și trebuie considerată deosebit de reușită. Lucrarea *Măsurarea Pămîntului* conținea, după mărturia lui Claudiu Galenus (aproximativ 130—200 e.n.), și multe alte informații asupra geografiei și astronomiei matematice. Eratostene se ocupa și de cronologie; lui i se atribuie elaborarea, în locul vechiului calendar egiptean, în care anul era egal cu 365 de zile, a unui nou calendar cu an bisect de 366 de zile la fiecare al patrulea an. Acest calendar, care punea în concordanță datele calendaristice cu anotimpurile reale ale anului, a fost introdus printr-un decret la 7 martie 238 î.e.n., la adunarea preoților din Canope.

Nicomede. Despre Nicomede care a trăit în perioada dintre Eratostene și Apoloniu, se știe doar că pentru a găsi două medii proporționale și a rezolva problema trisecțiunii unghiului și dublării cubului, el a folosit curba descoperită de el numită concoidă (adică asemănătoare unei scoici). Așa o denumește Proclus. Pappus o numea cocleoidă, distingînd patru tipuri de cocleoide și arătînd că primul dintre aceste tipuri servește pentru rezolvarea ambelor probleme amintite. Nicomede și-a construit curba cu ajutorul unui aparat special inventat de el. Concoida lui Nicomede (fig. 34) reprezintă locul geometric al punctelor M pentru care $OM = OP \pm b$. După cum are loc una dintre inegalitățile $b>a, b = a$ sau $b<a$ (unde $a = OF$, $b = FA$), se obțin cele trei tipuri ale curbei. Ecuația ei în coordonate dreptunghiu-

lare este $(x-a)^2(x^2+y^2)-b^2y^2=0$ şi în coordonate polare $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$. Mai tîrziu noţiunea de concoidă a fost generalizată; a început să fie denumită concoidă curba ce se obţine mărind sau micşorînd raza vectoare a fiecărui punct al unei curbe date (nu numai al unei drepte), cu un segment constant b. În particular, E. Pascal (1588—1651), tatăl renumitului matemati-

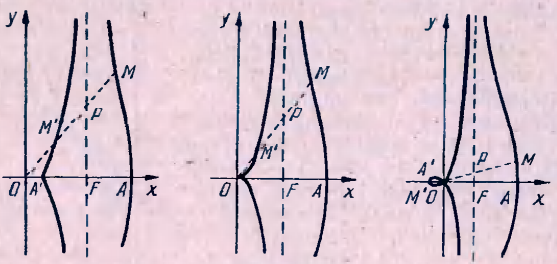


Fig. 34

cian Blaise Pascal, a examinat concoida cercului, al cărei pol se găseşte pe cerc. Ea a căpătat denumirea de melcul lui Pascal. Un caz particular al acesteia, cînd b este egal cu diametrul cercului, se numeşte cardioidă. După cum comunică Pappus, Nicomede a demonstrat că concoida are o asimptotă. Eutokios remarcă că Nicomede se mîndrea în mod deosebit cu descoperirea sa, opunînd-o aparatului lui Eratostene, pe care el îl considera practic inutilizabil şi necorespunzător spiritului geometriei. Găsirea a două medii proporţionale cu ajutorul concoidei se baza pe o construcţie prin alunecare, descrisă de Pappus şi Eutokios. Concoida este prima curbă după dreaptă şi cerc despre care se ştie că pentru desenarea ei continuă a fost creat un aparat special.

Diocles. Prin anul 200 î.e.n., dar posibil şi după Apoloniu, a trăit Diocles, care, la fel ca şi Nicomede, s-a ocupat de media dublă proporţională şi a descoperit o linie numită cisoidă (asemănătoare iederei). Cisoida (fig. 35) reprezintă locul geometric al punctelor M pentru care $OM = PQ$. Ecuaţia ei în coordonate carteziene are forma $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ unde $2a = OA$, iar în coordonate polare $r = a\left(\frac{1}{\cos} - \cos\varphi\right)$. Mai tîrziu se construiau cisoide nu numai ale cercului, ci și ale oricăror curbe. Diocles a scris — după informațiile lui Eutokios — lucrarea *Despre oglinzile incendiatoare*, din care Eutokios redă două fragmente. Diocles a rezolvat foarte ingenios și problema lui Arhimede cu privire la secționarea sferei cu un plan, astfel încît volumele celor două segmente să se găsească între ele într-o proporție dată. Această problemă se găsește, după cum am observat, sub forma celei de a patra propoziții în a doua carte a lucrării *Despre sferă și cilindru*. Sfîrșitul problemei, care conținea soluția lui Arhimede, era pierdut încă din antichitate. Diocles rezolvă această problemă, care ducea la o ecuație cubică, prin intersecția unei hiperbole echilatere cu o elipsă. Nu se știe exact ce formă aveau oglinzile incendiatoare de care se ocupa Diocles, însă izvoarele arabe îl indică drept inventatorul oglinzilor parabolice.

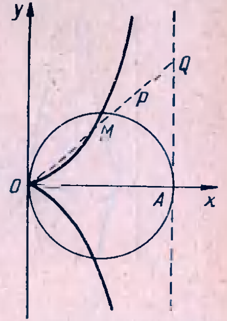


Fig. 35

Zenodor. S-au păstrat la Pappus și Teon din Alexandria extrase din lucrarea *Despre figurile izoperimetrice* a lui Zenodor, care a trăit tot prin anul 200 î.e.n. Interesul pentru figurile geometrice ce au perimetre egale a apărut la matematicienii greci, probabil în legătură cu faptul că în antichitate nematematicienilor li se părea paradoxal că, de exemplu, două paralelograme de perimetru egal pot avea totodată arii diferite. Zenodor a demonstrat că, dintre toate poligoanele regulate de perimetru egal, aria cea mai mare o are acela care are și numărul cel mai mare de unghiuri, că aria cercului e mai mare decît aria oricărui poligon regulat cu același perimetru ca și cercul, că, dintre toate poligoanele avînd un număr egal de laturi și perimetre egale, poligonul regulat are aria maximă. Zenodor nu s-a mărginit la problemele planimetrice, ci a demonstrat, de asemenea, că sfera are volum mai mare decît corpul format prin rotația unui poligon regulat de același perimetru în jurul unei axe ce trece prin centru și prin unul dintre vîrfuri, precum și faptul că volumul sferei este mai mare decît volumul unui poliedru regulat avînd aceeași suprafață ca și sfera.

Apoloniu din Perga. Al treilea și ultimul mare matematician din perioada elenistică, alături de Euclid și Arhimede, a fost Apoloniu din Perga (Perga, oraș în Asia Mică). El a trăit în special în Alexandria, unde a învățat la succesorii lui Euclid. Anul nașterii lui Apoloniu se stabilește la aproximativ 262, anul morții — aproximativ 200 î.e.n. El a vizitat marele centru al culturii grecești din acea vreme — orașul Pergam din nord-vestul Asiei Mici, unde l-a cunoscut pe Eudemos din Pergam, căruia i-a consacrat primele două cărți din a doua ediție a lucrării sale fundamentale în opt volume *Secțiuni conice* (*Conica*).

Secțiuni conice. Primele patru cărți din această lucrare [121, 122] au ajuns pînă la noi în limba greacă, următoarele trei în traducere arabă, iar ultima este pierdută. Abordarea de către Apoloniu a secțiunilor conice diferă de metodele tuturor predecesorilor săi, inclusiv Arhimede, printr-o putere neobișnuită a generalizării. În timp ce pînă la Apoloniu fiecare dintre cele trei tipuri de secțiuni se obținea dintr-o formă particulară a conurilor circulare drepte, el obține toate cele trei tipuri ale secțiunilor din orice con circular, drept sau oblic. Stabilind legătura dintre problema „aplicării ariilor“ și secțiunile conice, Apoloniu, spre deosebire de predecesorii săi, care denumeau aceste curbe secțiuni ale conurilor ascuțit, dreptunghic și obtuz, le-a dat denumirile elipsă, parabolă și hiperbolă — denumiri ce au intrat pentru totdeauna în știință.

Prima carte a *Secțiunilor conice* începe cu definiția conului circular, în general înclinat, conul fiind considerat de ambele părți ale vîrfului său. Tot aici se introduc noțiunile fundamentale ale teoriei secțiunilor conice, vîrful secțiunii conice, diametrele sale, diametrele conjugate și axele.

Apoloniu obține elipsa, parabola sau hiperbola, după cum planul taie toate generatoarele numai ale unei pînze a conului, este paralel cu o generatoare sau taie ambele pînze ale conului. Pentru fiecare dintre aceste curbe, Apoloniu stabilește proprietatea ei fundamentală, folosind coordonate oblice; drept axe de coordonate sînt alese un diametru arbitrar PP' și coarda conjugată cu acesta QQ'; originea coordonatelor P se află pe curbă. Dacă vom folosi notația algebrică modernă, aceste proprietăți se vor exprima sub forma

$$y^2 = 2px \pm \frac{p}{a} x^2,$$

unde semnul minus corespunde elipsei, iar semnul plus hiperbolei; în cazul parabolei termenul al doilea din membrul drept este egal cu zero; p reprezintă parametrul curbei. Avem $y = QV$, $x = PV$, $2a = PP'$, $2p = PL$. Se înțelege că Apoloniu exprima proprietățile acestor curbe cu ajutorul algebrei geometrice.

Astfel, deși Apoloniu nu a descoperit această proprietate fundamentală a secțiunilor conice ce a fost cunoscută încă lui Menechmus, Euclid și Arhimede, el a exprimat-o printr-un procedeu general, echivalent cu ecuația prin care sînt definite în geometria analitică secțiunile conice, dacă sînt raportate la coordonate oblice.

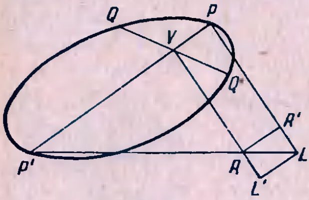


Fig. 30.

O parte apreciabilă din cartea I este consacrată demonstrării faptului că proprietatea fundamentală a secțiunilor conice nu depinde de alegerea diametrului la care ea este raportată sau, vorbind în limbajul modern, se demonstrează invarianța acestei proprietăți la trecerea de la un sistem de coordonate la altul.

Cartea II începe printr-o parte referitoare la asimptotele hiperbolei. În rest, în această carte sînt examinate hiperbolele conjugate, precum și proprietățile tangentelor duse la secțiunile conice și probleme de construcție a tangentelor în diferite condiții.

Cartea III conține în prima parte, propoziții asupra egalității ariilor figurilor rectilinii, formate de tangentele și secantele secțiunii conice. Propoziția asupra proprietăților armonice ale polului și polarei (Apoloniu nu folosește încă această terminologie), la fel ca și alte propoziții, este demonstrată separat pentru diferite cazuri.

Printre alte propoziții trebuie remarcate, în mod special, acelea care introduc focarele elipsei și hiperbolei și studiază proprietățile lor. În legătură cu focarele, este examinată de asemenea și normala. Pentru parabolă, focarul nu este examinat și nu este introdusă nici noțiunea de directoare.

Ultimele propoziții ale acestei cărți sînt în legătură cu studiul secțiunii conice ca loc geometric al punctelor ale căror coordonate oblice față de trei sau patru drepte satisfac anumite condiții.

Începînd cu cartea IV, Apoloniu a dedicat *Secțiunile conice* regelui Attal I (241—197 î.e.n.). Din conținutul acestei cărți mai interesant este faptul că aici este studiată problema numărului punctelor de intersecție ale secțiunii conice cu un cerc sau cu o altă secțiune conică, precum și cazurile de tangență a două secțiuni. Această problemă era importantă pentru greci, deoarece punctele de intersecție erau necesare la rezolvarea unor probleme ca aceea a duplicării cubului, pentru care propriu-zis au și fost studiate aceste curbe.

Cartea IV încheie oarecum partea mai elementară a teoriei secțiunilor conice; de aceea, este posibil, ca ea să fi fost mai răspîndită decît celelalte și de aceea s-a păstrat textul lor grecesc. Cartea V se distinge printre toate celelalte, atît prin conținut, cît și prin modul expunerii, ea depășind sensibil timpul său. În această carte, Apoloniu examinează normalele, duse din diferite puncte la secțiuni conice, ca drepte de lungime maximă sau minimă. În prefață, el remarcă că geometrii care s-au ocupat pînă la el de problema distanțelor extremale făceau aceasta doar în legătură cu diorisme pentru a lămuri condițiile în care se rezolvă o problemă sau alta, și o făceau foarte incomplet. Or, Apoloniu se ocupă de ea, ca de o problemă, care, după spusele sale, „aparține lucrurilor demne să te ocupi de ele înseși, numai de dragul lor". La sfîrșitul acestei cărți se examinează punctele din care se poate duce întotdeauna normala la partea mai apropiată a curbei (centrele de curbură în înțelegerea noastră), variația poziției acestor puncte, căreia îi corespunde evoluta secțiunii conice, și construcția normalelor la curbă din orice punct cu ajutorul intersecției curbei cu o hiperbolă echilateră.

În cartea VI sînt examinate secțiunile congruente și asemenea a două conuri drepte asemenea. Aici se rezolvă probleme de construcție a secțiunii unui con dat, congruentă cu o secțiune dată, precum și de construcție a unui con drept asemenea unui con dat și conținînd secțiunea dată.

Cartea VII avea un rol pregătitor, după cum indică Apoloniu, pentru cartea VIII, pierdută. Aici sînt examinate coardele paralele cu diametrele conjugate și se demonstrează cunoscutele „teoreme ale lui Apoloniu" asupra constanței sumei pătratelor diametrilor conjugați și a ariei paralelogramului construit pe ele, și altele.

Datorită folosirii algebrei geometrice, Apoloniu este nevoit să examineze de fiecare dată diferite cazuri particulare în parte. Această metodă a contribuit ca expunerea să fie uneori greoaie: în cele șapte cărți se numără 387 de propoziții. Cu toate acestea trebuie să admirăm măiestria cu care autorul a făcut față unui număr atît de mare de probleme dificile. După cum povestește

Geminus, această lucrare i-a adus pe drept lui Apoloniu renumele de mare matematician, însă a provocat totodată și invidie. A fost învinuit pe nedrept de îngîmfare, precum și că (Heraclide, biograful lui Arhimede) și-ar fi însușit lucrările nepublicate ale lui Arhimede.

Metoda lui Apoloniu a anticipat metoda geometriei analitice. La el nu existau coordonate, însă existau liniile de coordonate și unghiul de coordonate; liniile sale de coordonate au fost obligatoriu îndreptate după două direcții conjugate ale secțiunii conice, în timp ce în geometria analitică a lui Descartes, poziția acestor linii este arbitrară.

Alte opere ale lui Apoloniu. Alte lucrări ale lui Apoloniu sînt cunoscute numai după denumirile lor, citate de Pappus, în afară de una singură: *Despre secționarea într-un raport*, în două cărți păstrate în traducere arabă. O altă lucrare pierdută, tot în două volume, *Despre secționarea ariei* rezolva o problemă analogă. Lucrarea următoare, tot în două volume, *Despre o secționare determinată*, rezolva în toată generalitatea ei următoarea problemă. Se dau patru puncte A,B,C,D situate pe o dreaptă. Se cere să se găsească pe această dreaptă un punct P, astfel încît raportul $AP : CP : BP : DP$ să aibă o valoare dată. În lucrarea lui Apoloniu se stabilesc condițiile în care problema are soluție, precum și numărul acestor soluții.

Conținutul lucrării în două volume *Despre tangente*, Pappus îl reproduce astfel: se dau trei obiecte, dintre care fiecare poate fi punct, dreaptă sau cerc; se cere să se construiască un cerc care să treacă prin fiecare dintre punctele date (dacă sînt date puncte) și să fie tangent la drepte sau cercuri date. Aici sînt posibile zece cazuri distincte dintre care două (se dau trei puncte sau trei drepte) erau examinate în cartea IV a *Elementelor* lui Euclid. După cum se vede din observațiile lui Pappus, Apoloniu rezolva toate aceste probleme fără a folosi secțiunile conice, cu ajutorul riglei și al compasului.

Lucrarea *Locuri plane*, în două cărți, a fost consacrată clasificării locurilor geometrice și studiului în primul rînd al „locurilor plane“ — linia dreaptă și cercul. După cum arată Pappus, Apoloniu a definit aici, se pare pentru prima dată, transformările geometrice: omotetia și inversiunea care transformă locurile plane în locuri plane [vezi 123, p. 373].

Alunecările (două cărți) reprezentau teoriile problemelor legate de construcția unui segment de lungime dată astfel, încît dreapta pe care el se găsește să treacă printr-un punct dat și capetele segmentului să se afle pe două linii date. După spusele lui Pappus, Apoloniu s-a mărginit la studiul doar a trei probleme ce se rezolvă cu ajutorul compasului și a riglei și sînt cele mai utile ca aplicație în geometrie.

Deoarece Pappus, povestind despre cărțile pierdute, citează o mulțime de leme referitoare la ele, unii matematicieni de mai tîrziu, printre care și matematicianul Marino Ghetaldi din Dubrovnik (1566–1626), care se ocupa cu studiul operelor antice, au încercat să restabilească lucrările pierdute ale lui Apoloniu. De la ideile lui Apoloniu au pornit Descartes și Fermat atunci cînd au construit geometria analitică. Acesta din urmă a fost poreclit și „Apollonius Gallicus", adică Apoloniu gal (francez).

Apoloniu este, de asemenea, autorul lucrării *Comparația dodecaedrului cu icosaedrul.* Marinos, elevul lui Proclus, comunica că Apoloniu a scris, de asemenea, *Tratatul general,* în care se pare erau examinate principiile generale ale geometriei, axiomele, definițiile ș.a.m.d.

Dintre lucrările matematice negeometrice ale lui Apoloniu sînt citate două. *Okitokion* (literal — *Nașteri rapide*), operă în care se calcula valoarea aproximativă a numărului π, cu o precizie care ar depăși precizia lui Arhimede, deși aproximația acestuia din urmă $3\frac{1}{7}$, era considerată mai potrivită pentru practică. Se consideră că Apoloniu a găsit valoarea $\frac{62\,832}{20\,000}$ (adică 3.1416). Probabil că el a propus tot aici un sistem de numărare după tetrade (puteri ale miriadelor, adică 10 000), analog sistemului lui Arhimede. Sistemele lui Arhimede și Apoloniu au fost prototipuri ale sistemului nostru regulat de numărare la baza căruia sînt puse „hectadele", puterile lui 10^6.

În sfîrșit, Apoloniu a mai scris lucrarea despre *Iraționalitățile neordonate,* care reprezenta probabil un fel de continuare a cărții X a *Elementelor* lui Euclid.

Apoloniu a scris de asemenea o lucrare asupra aplicațiilor matematicii în optică: *Despre oglinzile incendiatoare.*

Apoloniu a fost nu numai un mare matematician, ci și un remarcabil astronom al timpului său.

Teodosiu. Pe la anul 150 î.e.n. a trăit matematicianul și astronomul Teodosiu din Bitinia (în Asia Mică) care, în afară de două lucrări de astronomie păstrate, a scris lucrarea *Sferica,* un îndreptar pentru geometria suprafeței sferice. După cum am văzut, această geometrie, dezvoltată de mult în legătură cu necesitățile astronomiei, a atins un nivel înalt încă în timpurile lui Euclid și chiar mai înainte. Ea era predată alături de geometrie, aritmetică și muzică, constituind *quadriviul* pitagoreicilor: despre ea au scris Autolikos și Euclid lucrări separate. Un îndreptar general însa sau un manual de geometrie sferică nu exista.

Euclid nu a inclus geometria sferică în *Elementele* sale, probabil tocmai din cauză că în timpul său ea era considerată ca o parte a astronomiei și nu a geometriei, și s-a mărginit doar la teorema proporționalității dintre volumul sferei și cubul diametrului ei și la poliedrele regulate înscrise în sferă. *Sferica* lui Teodosiu, formată din trei cărți, trebuia deci sa umple acest gol existent.

Spre deosebire de Euclid care a definit sfera drept corpul obținut prin rotația semicercului în jurul bazei sale, Teodosiu definește suprafața sferică ca aceea ale cărei puncte sînt egal depărtate de un punct dat, adică prin analogie cu definiția cercului la Euclid, și în general expunerea proprietăților sferei se face la el absolut analog cu cartea III a *Elementelor* ce expune proprietățile cercului.

Trăsăturile generale ale matematicii elenistice. Atrage atenția faptul că în perioada celei mai înalte înfloriri a matematicii teoretice din țările elenistice, aplicațiile ei în practică au fost relativ sărace. Aceasta se explică prin faptul că înseși științele naturii au fost slab dezvoltate și, prin urmare, lipseau însăși necesitatea și posibilitatea unei aplicări largi a matematicii. Științele naturii se reduc propriu-zis doar la germeni ai astronomiei și mecanicii. Fizica, știința care a devenit ulterior consumatorul principal al metodei matematice și care, totodată, a dat cei mai importanți stimuli dezvoltării ei, în esență nu se născuse încă atunci. Teoria secțiunilor conice, dezvoltată în toate amănuntele și subtilitățile ei, își găsea aplicație în special în matematica însăși (dar și aici într-o parte relativ neînsemnată), iar în afara ei doar în hidrostatică (corpurile plutitoare la Arhimede). Pînă la începutul secolului al XVII-lea, astronomia se mulțumea cu combinațiile mișcărilor circulare și, numai începînd cu marea descoperire a lui Johann Kepler, teoria secțiunilor conice a căpătat o largă aplicație în științele naturii. Unii istorici ai matematicii, de exemplu Zeuthen [12, p. 51], adept al concepțiilor idealiste asupra lumii, „explică" nivelul scăzut al aplicațiilor matematicii la problemele practice prin faptul că „grecii nu posedau capacitatea necesară pentru adevăratele calcule", precum și prin aceea că calculele practice sînt de cele mai multe ori aproximative, în timp ce grecii tindeau în geometria lor către determinări absolut exacte. Or, atît grecii cît și alte popoare din țările elenistice, care au dezvoltat pe larg navigația și comerțul, făceau față minunat calculelor practice.

Aplicația insuficientă a matematicii la științele naturii și la tehnică, la majoritatea matematicienilor din acea perioadă, se explică, prin urmare, nu prin particularitatea mistică a „spiritului elin", care s-ar fi îndreptat doar spre imperiul ideilor pure, ci prin insuficienta dezvoltare a științelor naturii și tehnicii din acea perioadă, care nu necesitau în starea lor de atunci mai mult decît le oferea matematica. Într-adevăr, de îndată ce în astronomie au apărut noi necesități, matematica a trecut imediat la satisfacerea lor, fără a se opri în fața faptului că trebuia să-și schimbe întreaga ei orientare, să devieze de la problemele pur teoretice spre problemele de calcul. Prin același fapt — absența (în afara celor mai simple necesități ale mecanicii terestre și cerești, și ale opticii geometrice) necesităților științelor naturii în generalizări matematice largi se explică propriu-zis și faptul că matematica teoretică greacă, atingînd în lucrările lui Arhimede și Apoloniu un nivel atît de înalt, s-a oprit aici, că matematica antică a încetat să se mai dezvolte în această direcție. Nefiind stimulată sub forma unor cerințe exterioare, ea nu a mai dezvoltat acele metode noi și puternice care, în esență, existau deja într-însa: metodele calculului diferențial și integral și ale geometriei analitice de mai tîrziu; s-a mărginit doar la completări ale sistemului, aparent desăvîrșit în general. Alături de această cauză principală a cotiturii atît de specifice în dezvoltarea matematicii antice, a acționat și o altă cauză inerentă însăși matematicii antice și reprezentînd un efect al cauzei principale. Metoda algebrei geometrice, considerînd doar segmente, arii și volume, era prin sine însăși mărginită, nu dădea posibilitatea generalizărilor la mărimi arbitrare sau, în orice caz, îngreuia puternic astfel de generalizări, îngusta domeniul de aplicație a ecuațiilor la ecuații pătratice, cubice și bipătratice, ce se reduceau la primele. Și chiar atunci cînd, mai tîrziu, Diofant a început să introducă simboluri ce simplificau scrierea operațiilor, aceste simboluri se refereau iarăși doar la mărimile algebrei geometrice.

Dacă însă matematica țărilor eline s-a oprit în dezvoltarea sa la nivelul pînă la care s-a ridicat pe la anul 200 î.e.n., ar fi totuși greșit să considerăm, așa cum cel puțin considerau pînă în ultimul timp majoritatea istoricilor matematicii din Occident, că din acest timp ar fi început perioada de decadență a matematicii antice pentru care apariția unor savanți atît de mari ca Heron din Alexandria și Diofant ar fi o strălucită excepție. Există părerea că dezvoltarea descendentă a matematicii a fost doar o parte inseparabilă a decadenței generale economice, politice și culturale a țărilor elenistice. Asemenea afirmații pleacă de la subaprecierea matematicii practice și, în general, a cunoștințelor aplicative de către diferiți reprezentanți ai intelectualității burgheze. Se înțelege că pînă la urmă, descompunerea progresivă a sistemului sclavagist al țărilor elenistice a dus și la degenerarea matematicii. După cum am văzut însă, aceste două procese nu s-au petrecut de loc simultan. Matematica antică nu numai că nu a început să degenereze, ci, dimpotrivă, a atins cea mai înaltă înflorire atunci cînd începuse de mult și continua perioada decadenței politice a țărilor elenistice. Abia, o dată cu secolul al III-lea e.n., matematica începe să decadă și ea.

În modul acesta, schimbările ce s-au petrecut în orientarea matematicii antice, de la cea pur teoretică la cea aplicativă și calculatorie, nu pot fi considerate drept un simptom al decadenței sale; această schimbare nu a fost provocată de descompunerea societății antice, ea decurgea din particularitățile matematicii antice însăși — ale cărei metode s-au epuizat în esență pe sine — și din starea științelor naturii, care nu puneau în fața matematicii problemele unor noi generalizări largi, ci, aflîndu-se în perioada acumulării inițiale și a sistematizării observațiilor, cereau ca ea să se adapteze la problemele de calcul.

Nu se poate să nu remarcăm cu prilejul acesta că faptul istoric dat infirmă în mod convingător născocirea răspîndită a idealiștilor că matematica ar dicta științelor naturii, ar fi forța motoare principală a dezvoltării lor, în timp ce lucrurile stau exact invers: oricît de mare ar fi importanța matematicii pentru științele naturii și oricare ar fi independența relativă a matematicii în dezvoltarea sa, cu toate acestea, în general și în ansamblu, dezvoltarea matematicii este supusă dezvoltării științelor naturii și tehnicii.

MATEMATICA ÎN ȚĂRILE IMPERIULUI ROMAN

Matematica la romani. Cunoștințele matematice au apărut și s-au dezvoltat în Roma antică pe baza dezvoltării tehnicii și a științelor naturii atît ale romanilor înșiși, cît și ale altor popoare care populau Peninsula Apenină și, în primul rînd, ale etruscilor, precum și datorită asimilării realizărilor altor popoare din bazinul mediteranean, în special ale matematicii grecești.

Compararea semnelor numerice ale etruscilor și ale romanilor antici arată o asemănare apreciabilă. Etruscii scriau:

5=Λ sau V; 10=X sau +, 50=↑ sau ↓; 100=⊕; 1000=8,

iar romanii:

5=V; 10=X; 50=Ψ sau ↓, sau ↑, sau ⊥, sau L; 100=Θ; 1000=ↀ

Semnele numerice ale etruscilor erau litere, însă nu s-a stabilit definitiv dacă ele reprezentau literele inițiale ale numeralelor sau pur și simplu litere ale alfabetului în ordinea lor succesivă.

Pe la anul 500 î.e.n., romanii au făcut cunoștință cu procedeul alfabetic grecesc de notație a numerelor, însă nu l-au adoptat. Cifrele romane I, V, X, L, C, M au apărut posibil și astfel: inițial existau doar cifrele I, X, C, M, fiecare fiind formată din cea precedentă prin adăugarea unei liniuțe care tăia semnul și însemna înzecirea (*decussatio* înseamnă și înzecirea și tăierea unei litere); semnele V și L au apărut mai tîrziu, reprezentînd jumătăți ale semnelor X și C. Forma definitivă a semnelor C și M s-a adaptat la literele inițiale ale denumirilor latine a lui 100 *centum* și 1 000 *mille*. Și mai tîrziu au apărut semnele intermediare D pentru 500 și **q** pentru 6, dintre care ultimul a ieșit repede din uz.

Asemănarea dintre notația etruscă și cea romană veche a numerelor nu se limitează numai la forma semnelor, ci se extinde și asupra principiului însuși de formare a numerelor compuse din cele de bază. Acesta este principiul scăderii. Romanii scriau

$$4 = IV,\ 8 = IIX,\ 9 = IX,\ 40 = XL,\ 90 = XC,\ 400 = CD$$

la fel ca şi etruscii, cu singura deosebire că aceştia din urmă, deoarece sensul întregii scrieri era invers decît la romani, puneau semnul de scăzut nu în stînga, ci în dreapta semnului principal. În afară de aceasta, etruscii foloseau scăderea mai des decît romanii. Ei scriau, de exemplu, astfel: $47 = \uparrow III$ şi chiar cu dublă scădere $38 = 50 - 10 - 2 = \uparrow XII$. Trebuie de asemenea observat că atît etruscii, cît şi romanii aplicau principiul scăderii numai în scrierea numerelor, nu însă în limbă, cu excepţia numeralelor în care 1 sau 2 se scad din 20, 30 şi aşa mai departe pînă la 100, de exemplu 18 = *duodeviginti* (doi din douăzeci) sau 99 = *undecentum* (unu din o sută).

Treptat, notaţiile s-au stabilizat; unele, de exemplu IIX, au fost abandonate. Pentru notaţia numerelor mai mari decît 1 000 se puneau deasupra semnelor numerice diferite semne; o bară orizontală însemna o amplificare de o mie de ori, de exemplu $\overline{XXX} = 30\,000$.

Pentru fracţii exista la romani sistemul de notaţie cu baza 12, fiecare fracţie de la $\frac{1}{12}$ la $\frac{11}{12}$ avînd semnul său şi denumirea sa. Astfel, romanii spuneau şi scriau de exemplu nu $\frac{1}{8}$ ci „o dată şi jumătate douăsprezecimi". Originea acestui sistem este necunoscută.

Procesul de numărare se efectua la romani în trei feluri diferite. Cel mai vechi a fost număratul pe degete, începînd cu mîna stîngă şi trecînd la cea dreaptă, fiecărui deget atribuindu-i-se valoarea după poziţia sa. Pliniu povesteşte că încă regele legendar Numa Pompiliu (sfîrşitul secolului al VIII-lea — începutul secolului al VII-lea î.e.n.) a ordonat să se ridice statuia lui Ianus, zeul cel cu două feţe, ale cărui degete reprezentau numărul 355, considerat atunci egal cu numărul zilelor dintr-un an.

Al doilea procedeu de care se serveau romanii a fost număratul pe abac (fig. 37), de cele mai multe ori o scîndură acoperită cu praf sau cu nisip pe care se aplicau trăsături, împărţind-o în coloane şi se puneau pietricele, *calculi*, de unde, după cum am remarcat, a şi provenit cuvîntul „calcul". Existau însă şi abace mai perfecţionate cu canalicule metalice în care se găseau beţişoare mobile prevăzute cu un cap. Canaliculele, rectilinii și paralele, erau în număr de 8 lungi și 11 scurte; bețișoarele erau în număr de 5 într-unul din canaliculele lungi, iar în celelalte cîte 4, iar în cele scurte cîte unul, în afară de unul în care existau două. Canaliculele scurte se aflau deasupra celor lungi, fiind oarecum o continuare a acestora; în interval erau gravate notațiile. Abacul, prevăzut cu un suport, se punea vertical în fața celui care număra. Canaliculul scurt, aflat deasupra ultimului canalicul lung din dreapta, a fost prevăzut cu un semn și însemna unciile, 12 uncii alcătuiau un as — măsura greutăților de aur și a banilor; asselor le erau rezervate canaliculele lungi prevăzute de la stînga la dreapta cu semnele I, X, C și așa mai departe pînă la un milion. Trei canalicule scurte din dreapta erau pentru $\frac{1}{2}$ uncie: *semuncie;* $\frac{1}{4}$ uncie: *siciliqus* și $\frac{1}{3}$ uncie: *duella.* Număratul pe abac se făcea prin deplasarea pietricelelor sau a bețișoarelor și nu prezenta dificultăți pentru adunare și scădere. Pentru înmulțire și împărțire, rezultatele intermediare trebuiau notate separat. Trebuia folosită tabla înmulțirii ori cunoscută pe de rost ori avută întotdeauna la îndemînă. S-a păstrat în literatură descrierea sunetelor ce ajungeau dintr-o școală romană pînă la urechile trecătorilor, provenite de la elevii care învățau tabla înmulțirii și scandau cu glas tare *bis bina quatuor* (doi × doi = patru), sub șuieratul nuielelor și printre vaietele celor pedepsiți, ceea ce constituie o mărturie a faptului că socotitul oral era în Roma antică larg răspîndit. Pentru a ușura operațiile cu numere mari și cu fracții, existau tabele de calcul ce s-au păstrat de-a lungul întregului ev mediu. Observăm de asemenea că, drept rămășiță a timpurilor foarte îndepărtate cînd numărul 600 era considerat limita numerelor, cuvîntul latin *sexcenti* era folosit în semnificația de „infinit multe“.

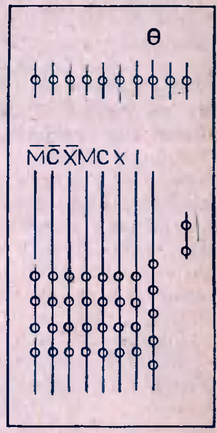


Fig. 37

Alături de socotit, un alt izvor al cunoștințelor matematice la romani îl constituia măsurarea pămînturilor: agrimensura practică. După cum comunică Marcus Terentius Varro în lucrarea sa *Despre agricultură* (50 sau 80 î.e.n.), romanii și-au apropriat priceperea de a măsura parcele de teren de la etrusci. Hotărnicirile se făceau la fundarea orașelor și a lagărelor, la construirea caselor, palatelor sau templelor, a căror denumire însăși *templum* provine de la *temnein*-ul grecesc — „a tăia" (pămînt). La fundarea orașului, a unei construcții sau a unei porțiuni de cîmp, dreptunghiul aflat la bază era orientat obligatoriu în direcțiile țărilor lumii, dar cel mai adesea în direcția răsăritului Soarelui în ziua cînd se făcea fundarea. Augurul trasa mai întîi aceste drepte numite *decimanus* și *cardo* folosind pentru aceasta trei metode diferite, descrise de agrimensorul Hyginus pe la anul 100 e.n., cu ajutorul aparatelor *cardo*, *groma* și *scioterum*.

Romanii foloseau, de asemenea, o tijă de măsurat; porțiunile de teren aveau inițial forma unor pătrate iar apoi a unor dreptunghiuri cu raportul laturilor 2 : 1. Cu ajutorul aparatelor lor simple, ei rezolvau și o problemă ca măsurarea lățimii unui rîu fără a trece pe celălalt mal. Ei nu foloseau însă pentru aceasta proporționalitatea triunghiurilor asemenea, ci reprezentau triunghiurile necesare în mărime naturală direct pe pămînt și apoi le măsurau cu metoda pe care o foloseau indienii din America de nord pînă la colonizarea europeană.

Monumentele puțin numeroase ce au ajuns pînă la noi nu ne permit să urmărim succesiv dezvoltarea matematicii la romani, așa cum s-a putut face relativ la matematica greacă antică și elenistică. În literatură nu a fost semnalată nici o descoperire matematică mai importantă a romanilor, nici un matematician remarcabil. Problema de ce romanii, spre deosebire de greci, nu au lăsat după ei în domeniul matematicii, ca și în domeniul științelor naturii, lucrări teoretice de sine stătătoare cu o importanță cît de cît însemnată nu poate fi rezolvată desigur prin referire la faimosul „spirit național". După cum remarca încă Cicero, romanii și-au concentrat atenția asupra cunoștințelor aplicative. Explicația științifică concretă a acestei probleme pe baza cercetării particularităților social-economice ale societății romane este încă o chestiune a viitorului. Incontestabil că tehnica militară a romanilor, hidrotehnica lor, construcțiile și agrimensura, precum și geografia ce s-a dezvoltat în legătură cu cuceririle necesitau multe cunoștințe matematice. Însă una din cauzele incontestabile ale faptului că Roma nu a devenit capitala științei din timpul său a fost aceea că o astfel de capitală a științei în

Imperiul Roman exista. Aceasta a fost Alexandria moştenită de Roma din perioada elenismului.

Alexandria în epoca romană. Creîndu-şi imperiul lor, ce cuprindea întregul bazin mediteranean, romanii au cucerit şi principalele ţări elenistice, inclusiv Grecia şi ţările Ptolemeilor şi a Seleucizilor. Cucerirea Egiptului ptolemeic a fost desăvîrşită de romani în anul 30 î.e.n. Alexandria şi-a păstrat în timpul romanilor poziţia sa de centru ştiinţific, devenind centrul ştiinţei pentru întregul Imperiu Roman. S-a păstrat în epoca romană şi limba greacă ca limbă ştiinţifică internaţională; limba latină a devenit limbă internaţională pentru ştiinţă mult mai tîrziu, după ce ea devenise limba religiei catolice.

Caracterul matematicii din Alexandria în epoca romană diferă însă net de matematica perioadei elenistice. Cauza principală a schimbării caracterului matematicii a fost însuşirea largă în Alexandria a tradiţiilor matematicienilor şi astronomilor din Babilon. Procesul de însuşire a acestor tradiţii a început încă înaintea cuceririi romane, însă legăturile dintre Egipt şi Mesopotamia, care s-au intensificat în timpul războaielor romane, au accelerat sensibil acest proces. Drept rezultat al asimilării tradiţiilor babiloniene, domeniul matematicii cu aplicaţii practice s-a lărgit, în special pe seama aplicaţiilor în astronomie; pe primul loc începe să apară matematica calculatorie, în particular apare trigonometria, necesară astronomiei. Aceasta a dat motiv unor istorici burghezi, care gîndesc metafizic şi consideră matematica numai ca o ştiinţă abstractă, să vorbească despre „decadenţa" matematicii din această perioadă. Aceste concepţii idealiste larg răspîndite au fost recent supuse unei critici juste de către Neugebauer [71].

Hiparh. Vom începe studiul matematicii alexandrine din epoca romană cu învăţaţii alexandrini din perioada premergătoare cuceririi romane, la care se mai simte încă influenţa astronomilor babilonieni. Unul dintre primii savanţi de acest fel a fost marele astronom al antichităţii Hiparh, originar din Niceea (în Bitinia). Deşi datele naşterii şi morţii lui Hiparh sînt necunoscute, nu încape îndoială că activitatea lui s-a desfăşurat în a doua jumătate a secolului al II-lea î.e.n. Ca astronom, Hiparh şi-a cucerit faima prin descoperirea precesiei (precesia echinoxilor), prin calculul extrem de exact al lungimii anului solar şi al duratei medii a lunii lunare, al înclinării eclipticii şi altele. În aceste cercetări el s-a bazat pe cunoştinţele babilonienilor; rezultatele obţinute de el coincid cu datele tablelor cuneiforme din acel timp. El a perfecționat calculele lui Aristarh cu privire la volumul și distanța Soarelui și a Lunii. Pentru explicarea mișcărilor aparente ale Soarelui, Lunii și ale planetelor, Hiparh s-a folosit, la fel ca și Apoloniu, de ipotezele epiciclurilor și ale cercurilor excentrice. Lui Hiparh i se atribuie (în legatură cu lucrările sale de astronomie) descoperirea proiecției stereografice a sferei pe un plan. El a alcătuit catalogul a circa o mie de stele. Lui îi aparține, de asemenea, perfecționarea instrumentelor astronomice. Hiparh a aplicat cunoștințele de astronomie la geografie, a introdus noțiunile de latitudine și longitudine geografică și le-a determinat pe acestea din urmă cu ajutorul observațiilor asupra eclipselor de Lună. El a scris, de asemenea, lucrarea *Despre corpurile antrenate în jos de greutatea lor*, aplicînd învățătura lui Aristotel corpurilor cerești.

Deși lucrările lui Hiparh, afară de una singură, nu au ajuns pînă la noi, Ptolemeu le expune totuși suficient de amănunțit, printre care și cea despre coardele cercului, importantă pentru matematică. Hiparh împărțea cercul în 360 de grade iar diametrul său în 120 de părți, considerînd $\frac{1}{120}$ din diametru ca unitate cu ajutorul căreia el exprima lungimile coardelor. Părțile cercului și diametrului se numeau *moire*; 30 de moire alcătuiau o „constelație", astfel încît într-un cerc erau 12 constelații, la fel ca în cercul Zodiacului. Fiecare moiră, atît a cercului cît și a diametrului, era împărțită în 60 de *lepte primare*, fiecare leptă primară era împărțită în 60 de *lepte secundare* și așa mai departe. Mai tîrziu, fracțiile sexagesimale au început să fie folosite în Alexandria nu numai în astronomie și pentru împărțirea cercului, ci și pentru calcule oarecare. Cifrele sexagesimale de la 1 la 59 erau notate cu ajutorul numerației alfabetice. Ordinele care lipseau erau notate fie printr-un loc liber între cifre, fie printr-un cerculeț; după părerea unor savanți, cerculețul reprezintă prima literă a cuvîntului grecesc οὐδεὶν (*udein* — nici unul), după părerea altora, cerculețul însemna *psephos* — o pietricică rotundă cu gaură care înlocuia zeroul în socotitul pe abac (valoarea numerică a literei o era egală cu 70, astfel încît această literă nu putea fi luată ca una din cifrele semnificative ale sistemului sexagesimal). Adunarea și scăderea fracțiilor sexagesimale se făceau la fel cum se fac aceste operații cu fracțiile zecimale. Înmulțirea fracțiilor se făcea în două feluri: fie ca pentru numere întregi, fie mai întîi fiecare factor era transformat în fracție ordinară de același fel, iar apoi, așa ca și noi, se înmulţeau numărătorul cu numărătorul şi numitorul cu numitorul. În înmulţirea fracţiilor sexagesimale, o oarecare dificultate o prezenta determinarea ordinului rezultatului. Pentru aceasta se folosea regula adunării ordinelor factorilor scrise deasupra cifrelor. În această regulă era conţinută, în germene, ideea logaritmilor. Analog cu înmulţirea se făcea şi împărţirea fracţiilor şi a numerelor mixte.

Stabilind relaţiile numerice dintre unghiuri şi coarde, adică exprimîndu-ne în limbajul modern, găsind unele propoziţii ale trigonometriei sferice, Hiparh a reuşit să rezolve problema determinării timpului de răsărit şi apus al stelelor, pentru diferite latitudini. În ceea ce priveşte tabelele lui Hiparh, nu există un număr suficient de date pentru a stabili cît difereau ele de tabelele lui Ptolemeu.

Despre Hiparh se spune, de asemenea, că el se ocupa de teoria combinaţiilor, de rezolvarea problemei numărului concluziilor posibile din zece axiome sau propoziţii.

Posidoniu. Dintre contemporanii lui Hiparh se citează Apolodor, care s-a ocupat de logistică, adică de aritmetica practică.

În aceeaşi perioadă de timp a trăit şi Posidoniu (aproximativ 135—51 î.e.n.), adept al filozofiei stoice, învăţător al lui Cicero, de origine din Apameia, care a profesat în insula Rodos. Posidoniu se ocupa de măsurarea mărimii Pămîntului, precum şi a diametrului Soarelui. În domeniul geometriei Posidoniu se interesează de problemele legate de fundamentele ei şi a scris o lucrare pentru a infirma concepţiile epicureicului Zenon din Sidon, care a criticat *Elementele* lui Euclid pentru motivul că teoremele nu pot fi în fapt deduse numai din axiomele, postulatele şi definiţiile date în *Elemente* şi că, pentru aceasta, trebuie să se facă de fiecare dată o mulţime de ipoteze ce nu sînt incluse în principiile de bază. Problemele de fundamentare logică a geometriei, în special teoria paralelelor lui Euclid, au început să intereseze tot mai mult pe matematicienii din acel timp.

După mărturia lui Proclus, Posidoniu pleca de la definiţia liniilor paralele ca drepte echidistante. El le defineşte astfel: „Se numesc paralele dreptele care, aflîndu-se într-un plan, nu se apropie şi nu se depărtează una de cealaltă, astfel încît toate perpendicularele, duse din punctele uneia dintre ele pe cealaltă, sînt egale între ele" [78, p. 176]. Dar însăşi presupunerea că locul geometric al punctelor egal depărtate de o dreaptă constituie o dreaptă este echivalent cu postulatul V.

Geminus. În a doua jumătate a secolului I î.e.n., a trăit Geminus din Rodos, elev al lui Posidoniu; lucrările lui Geminus ce nu au ajuns pînă la noi, citate de Proclus, Pappus și Eutokios, conțineau multe indicații ce au servit la elucidarea diferitelor probleme ale istoriei matematicii grecești. După spusele lui Eutokios, Geminus a fost autorul a „șase cărți despre teoriile matematice". Acestea erau un fel de enciclopedie a științelor matematice ce conțineau aritmetica, geometria, mecanica, astronomia, optica, geodezia, *canonica* (armonia muzicală), logistica. Aici existau vaste comentarii la *Elementele* lui Euclid. Din fragmentele păstrate, în limba greacă sau în traducere araba, se vede că această lucrare a fost consacrată cercetării principiilor logice pe care se construia matematica și apărării lor împotriva criticii epicureienilor și a scepticilor.

Respingînd pe filozofii care negau necesitatea și posibilitatea fundării logice a geometriei, Geminus a criticat totodată și pe Apoloniu, pentru faptul că acesta a încercat să demonstreze axiomele, și pe Euclid pentru faptul că aceasta a luat drept axiome, ceea ce în realitate trebuie demonstrat, și anume postulatul IV asupra egalității tuturor unghiurilor drepte și postulatul V asupra paralelelor. Cu privire la acesta din urmă Geminus a observat că la Euclid există o demonstrație a teoremei reciproce (cartea I, propoziția 17). Geminus, la fel ca și Posidoniu, dă definiția dreptelor paralele ca egal depărtate între ele. Plecînd de la această definiție, el deduce mai întîi toate propozițiile lui Euclid asupra paralelelor, iar apoi „demonstrează" postulatul V [78, pp. 176—177]. În afară de aceasta, el admite fără demonstrație propoziția că într-un plan dintr-un punct dat se poate duce numai o singură dreaptă paralelă cu o dreaptă dată, care de asemenea se demonstrează cu ajutorul postulatului V.

Geminus a fost autorul unei mari lucrări de astronomie *Meteorologica*. În afară de aceasta, lui Geminus i se atribuie lucrarea de astronomie *Introducere* (*Isagogé*), ce poate fi considerată ca un manual sau un îndreptar.

Menelau. Către sfîrșitul secolului I e.n., a trăit Menelau din Alexandria, autor al lucrării *Sferica*. Despre alte două lucrări de geometrie ale lui Menelau, *Elemente de geometrie* și *Cartea despre triunghiuri*, se știe din izvoare arabe.

Se presupune că în prima dintre ele, printre altele era rezolvată problema duplicării cubului cu ajutorul unei curbe pe care Menelau a numit-o „paradoxală" și despre care Tannery a presupus că era o curbă ce se obține prin intersecția sferei cu un con circular drept, al cărui diametru este egal cu raza sferei și a cărui generatoare trece prin centrul sferei. Această curbă, caz particular al hipopedei lui Eudoxus, este cunoscută sub denumirea de curbă a lui Viviani (1622—1703), proiecția ei pe planul tangent reprezintă lemniscata lui Bernoulli.

Lucrarea în trei volume a lui Menelau *Sferica* ce s-a păstrat în traducere arabă, conține pentru prima dată în istorie noțiunea de triunghi sferic [124].

Cartea I este consacrată propozițiilor fundamentale cu privire la triunghiurile sferice, analoge propozițiilor din *Elementele* lui Euclid, referitoare la triunghiurile plane. În cazul în care la Euclid se întîlnesc propoziții ce nu au un analog deplin în geometria sferică, Menelau le înlocuiește prin propoziții corespunzătoare. Astfel, de exemplu, el demonstrează că suma unghiurilor interne ale unui triunghi sferic este mai mare decît două unghiuri drepte.

Cartea II din *Sferica* lui Menelau are același conținut ca și cartea III a lucrării lui Teodosiu cu aceeași denumire, însă demonstrațiile sînt date aici mult mai pe scurt și mai clar.

Numai cartea III conține propriu-zis trigonometria. Desigur că Menelau aici, ca, în general, toți matematicienii din antichitate, nu folosește nicăieri noțiunea de sinus, la fel ca și noțiunile altor funcții trigonometrice: rolul pe care în trigonometria noastră îl joacă liniile sinusului, la Menelau îl joacă coardele (chd); linia sinusurilor unghiului α poate fi privită ca jumătate a coardei subîntinse de unghiul 2α, adică (fig. 38):

$$\sin \alpha = \frac{AM}{AO} = \frac{AA'}{2AO}.$$

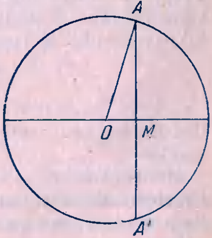


Fig. 38

În cartea III se demonstrează renumita teoremă a lui Menelau, care a căpătat mai tîrziu denumirea de teorema secantelor sau regula celor 6 mărimi. În această teoremă este studiată figura formată în plan sau pe sferă de 4 drepte, respectiv arce de cercuri mari, dintre care fiecare intersectează pe celelalte în trei puncte. Această figură care era denumită în evul mediu „figura secantelor", se numește astăzi „patrulater complet". Pentru cazul plan, teorema lui Menelau (fig. 39) pe care matematicienii din antichitate o formulau în termenii teoriei despre rapoarte compuse, poate fi scrisă astfel:

$$\frac{CE}{AE}=\frac{CF}{FD}\cdot\frac{BD}{AB};\qquad (1)$$

pentru cazul sferic în egalitatea (1) trebuie înlocuite segmentele prin coardele laturilor dublate sau în notațiile actuale prin sinusurile laturilor:

$$\frac{\sin CE}{\sin AE}=\frac{\sin CF}{\sin FD}\cdot\frac{\sin BD}{\sin AB}.\qquad (2)$$

Patrulaterul complet poate fi considerat și ca figura formată de

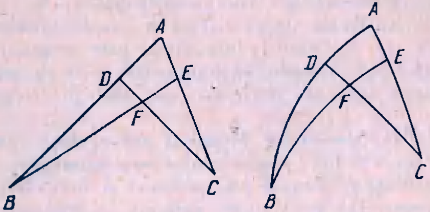


Fig. 39

unul dintre cele patru triunghiuri *ACD*, *ABE*, *ECF* și *DBF* prin intersecția secantei corespunzătoare cu dreptele *BFE*, *CFD*, *BDA* și *CEA*. De aceea teorema lui Menelau poate fi scrisă în patru variante, dintre care în *Sferica* sînt indicate prima și a treia (a doua este simetrică față de prima, a patra față de a treia); varianta a treia are forma:

$$\frac{\sin AC}{\sin AE}=\frac{\sin CD}{\sin DF}\cdot\frac{\sin BF}{\sin BE}.\qquad (2')$$

Cazul plan al teoremei lui Menelau era probabil cunoscut încă lui Euclid.

Menelau folosea, ca general cunoscută, teorema asupra raportului anarmonic a patru cercuri mari ce trec printr-un punct comun. Prin urmare, această teoremă era cunoscută încă înainte de Menelau.

Nicomah. Pe la anul 100 e.n., neopitagoreicul Nicomah din Gerasa, în Palestina, a scris *Introducere în aritmetică* [125], care trebuie considerată nu atît lucrare științifică, cît o introducere de popularizare în învățătura pitagoreică asupra numerelor. Ca nivel al expunerii, ea este mult în urmă față de Euclid. Nicomah nu dă demonstrații adevărate, ci numai ilustrează propozițiile prin exemple concrete. Din conținutul acestei lucrări, în afară de clasificarea numerelor și a rapoartelor dintre ele, inclusiv numerele poligonale, piramidale și alte numere figurative, ne mai suscită atenție faptul că Nicomah, fără a da formula de sumare a cuburilor numerelor, menționează totuși că în șirul de numere impare 1, 3, 5, 7, 9, 11... sînt cuburi $1, 3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$,...

Claudiu Ptolemeu. Renumitul astronom, geograf și optician grec, Claudiu Ptolemeu care a efectuat între anii 127 și 151 în Alexandria observațiile sale și a murit pe la anul 168, a scris *Culegere de matematici în XIII cărți* care a căpătat mai tîrziu denumirea arabizată *Almagest* (de la denumirea greacă „Μεγίστη σύνταξις" (Marea compoziție) [126]. Această lucrare reprezintă o strălucită expunere a tuturor cunoștințelor de astronomie din acele timpuri. Aici, în particular, este expus amănunțit sistemul geocentric al lui Ptolemeu. În *Almagest* este expusă sistematic trigonometria coardelor.

Trigonometria lui Ptolemeu. Cartea I din *Almagest* începe cu o expunere succintă a propozițiilor trigonometriei plane și sferice, necesare pentru alcătuirea tabelei coardelor (sinusurilor) și folosirea ei. Ptolemeu împarte cercul în 360 de părți, iar diametrul său în 120 de părți egale (p) și exprimă fracțiuni ale acestora în sistemul sexagesimal. Astfel, coarda $60° = 60^p$,

$$\text{chd } 90° = \sqrt{2 \cdot 60^2} = \sqrt{7200} = 84^p55'23'',$$

$$\text{chd } 120° = \sqrt{3 \cdot 60^2} = \sqrt{10\,800} = 103^p55'23'',$$

$$\text{chd } 36° = 37^p4'55'', \quad \text{coarda } 72° = 70^p32'3''^*$$

Coardele de 72° și 36° Ptolemeu le-a obținut cu ajutorul „secțiunii de aur" ca laturi ale pentagonului și decagonului regulat înscrise în cerc; extragerea rădăcinilor pătrate se făcea, așa cum se vede din comentariile lui Teon Alexandrinul, prin metoda încercărilor succesive bazate pe formula $(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$.

---

* Aici folosim notațiile: $1^p = \frac{1}{200}$ diametru, $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^p$; $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$; chd înseamnă coarda.

Din aceste valori, Ptolemeu obține mai departe pe cele următoare în baza propoziției $(\text{chd } \alpha)^2 + (\text{chd } 180° - \alpha)^2 = (\text{diametrul})^2$, căreia îi corespunde formula $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, astfel, din chd 72° se obține chd 108°, din chd 36° se obține chd 144° și așa mai departe.

Pentru a găsi chd $(\alpha - \beta)$ atunci cînd sînt cunoscute chd α și chd β, Ptolemeu demonstrează mai întîi teorema ce-i poartă numele (fig. 40): dacă $ABCD$ este un patrulater înscris în cerc, atunci

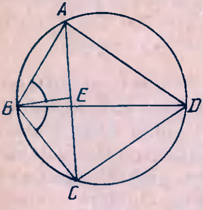


Fig. 40

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC.$$

Teorema lui Ptolemeu se demonstrează în felul următor: ducem BE pînă la intersecția cu AC astfel încît unghiurile ABE și DBC să fie egale. Din asemănarea triunghiurilor ABE și DBC, precum și ABD și BCE rezultă egalitatea scrisă mai sus. În cazul particular în care AD este diametrul cercului, se obține o egalitate pentru coarde echivalentă cu formula trigonometrică:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.$$

Pe această cale Ptolemeu a calculat:

$$\text{chd } 12° = \text{chd } (72° - 60°) = 12^p32'36''.$$

Pentru calculul coardelor unor arce mici, el trebuia să găsească coarda jumătății de arc, dacă este cunoscută coarda arcului întreg și de aceea Ptolemeu a demonstrat o propoziție echivalentă cu formula:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}.$$

Cu ajutorul ei, el a obținut valorile pentru chd 6°, chd 3°, chd $1\frac{1°}{2}$ și chd $\frac{3°}{4}$.

Pentru a putea construi tabelele coardelor calculate din $\frac{1°}{2}$ în $\frac{1°}{2}$, trebuia calculat încă chd 1° ca valoare intermediară între chd $1\frac{1°}{2}$ și chd $\frac{3°}{4}$, iar apoi trebuia avută formula pentru calculul lui chd $\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^\circ$ din chd α°. Pentru aceasta din urmă, Ptolemeu, aplicînd teorema sa, a obținut regula echivalentă cu formula:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

iar pentru interpolare, a dedus o propoziție echivalentă cu formula:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} > \alpha > \beta\right).$$

De aici el a găsit că:

$$\frac{4}{3} \text{ chd } \frac{3^\circ}{4} > \text{chd } 1^\circ > \frac{2}{3} \text{ chd } 1\frac{1^\circ}{2}$$

sau cu o bună aproximație chd $1^\circ = 1^p 2' 50''$, de unde:

$$\text{chd } \frac{1^\circ}{2} = 0^p 31' 24''.$$

Aceste date erau suficiente pentru a construi tabelele coardelor corespunzătoare unghiurilor de la $\frac{1^\circ}{2}$ pînă la 180° din $\frac{1^\circ}{2}$ în $\frac{1^\circ}{2}$, ceea ce este echivalent cu tabela sinusurilor de la $\frac{1^\circ}{2}$ la 90° din $\frac{1^\circ}{4}$ în $\frac{1^\circ}{4}$.

Pentru a găsi pe cale aproximativă coardele fracțiunilor mai mărunte Ptolemeu admite proporționalitatea directă a creșterilor; în a treia coloană din tabela sa, se află $\frac{1}{30}$ din diferența dintre valorile chd $\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^\circ$ și chd α°. El observă în acest caz că valoarea calculată pe această cale este doar aproximativă și că ea trebuie verificată, de exemplu, prin determinarea coardei arcului dublu și prin compararea cu valorile cunoscute.

Din valoarea obținută a lui chd 1°, Ptolemeu a găsit pentru circumferința cercului cu diametrul egal cu 120^p, valoarea

$$360 \cdot 1^p 2' 50'' \text{ sau } \pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3\,600} = 3{,}14166\ldots$$

$$\text{pentru } \sqrt{3} = 2 \text{ chd } 120^\circ = 1 + \frac{43}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3} = 1{,}7320509.$$

În ansamblu, tabelele lui Ptolemeu, care au servit în decursul a multor secole pentru rezolvarea triunghiurilor, sînt exacte pînă la cinci zecimale, inclusiv.

În ceea ce privește trigonometria sferică, toate propozițiile ce i-au fost necesare, Ptolemeu le deduce din teorema lui Menelau. El nu folosește, în acest caz, noțiunea de triunghi sferic dreptunghic, ci vorbește de arcele cercurilor mari secante și are de-a face numai cu coarde (echivalente cu sinusuri) subîntinse de arce și cu complementele lor (coardele acestor complemente sînt echivalente cu cosinusuri).

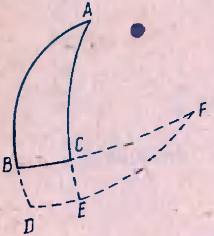


Fig. 41

Cu ajutorul teoremei lui Menelau, Ptolemeu a rezolvat în *Almagest* patru cazuri ale triunghiului sferic dreptunghic în vîrful C: 1) catetele a, b sînt date; 2) cateta b și ipotenuza c sînt date; 3) ipotenuza c și unghiul B sînt date și 4) cateta a și unghiul opus A sînt date. Relațiile folosite pentru aceasta între elementele triunghiului se scriu în notațiile actuale astfel:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \cos c = \cos a \cdot \cos b, \\ &2)\ \cos A = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c, \\ &3)\ \sin b = \sin c \cdot \sin B, \\ &4)\ \sin b = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} A. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Toate aceste relații se obțin ușor din teorema lui Menelau, alegînd convenabil laturile figurii. De exemplu, pentru a rezolva triunghiul CEF dreptunghic în vîrful E, dacă sînt date catetele $EF = a$, $CE = b$ (fig. 41), Ptolemeu ia polul B relativ la latura CE, ecuatorul BDA relativ la polul C și cercul mare BFE. Atunci:

$$AC = CD = 90^\circ, \qquad BE = 90^\circ, \qquad BF = 90^\circ - a,$$

$$AE = 90^\circ - b, \qquad DF = c$$

și din (2′) (p. 194) rezultă:

$$\cos c = \cos a \cos b. \tag{1_1}$$

Unghiul C este măsurat de arcul AD și din (2) (p. 194) se obține:

$$\cos C = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c. \tag{1_2}$$

Ptolemeu a lăsat de o parte cazurile în care sînt date o catetă și unghiul adiacent sau două unghiuri, ce nu i-au fost necesare. Triunghiurile cu unghiuri ascuțite, Ptolemeu le rezolvă în cazurile în care sînt date:

$$1)\ a,\ B,\ C;\ 2)\ a,\ c,\ B;\ 3)\ a,\ b,\ A\ \text{și}\ 4)\ a,\ B,\ A.$$

Ele se reduc toate la cele patru cazuri indicate mai sus ale triunghiurilor dreptunghice, dacă se duce înălțimea la latura c.

Alte opere ale lui Ptolemeu. În afară de *Almagest*, Ptolemeu ne-a mai lăsat lucrările *Analemma* și *Planisferium* — lucrare de astronomie care folosește pe larg matematica. Prima, la fel ca și lucrarea cu același titlu a lui Diodor din Alexandria, expune teoria proiecției ortogonale a sferei cerești pe trei plane perpendiculare între ele: meridianul, orizontul și primul cerc vertical. Cu ajutorul acestor proiecții se rezolva problema determinării poziției Soarelui deasupra orizontului într-o anumită zi și oră, pentru o anumită latitudine, și în baza unei construcții grafice se calcula distanța zenitală a Soarelui. Cu ajutorul acelorași metode, folosind propoziții echivalente cu formulele pentru rezolvarea triunghiurilor sferice, Ptolemeu a găsit arcul 2α descris deasupra orizontului de un astru, avînd declinația δ dată:

$$\cos \alpha = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi,$$

unde φ este înălțimea polului deasupra orizontului.

Planisferium, lucrare ce s-a păstrat doar în traducere latină dintr-o traducere arabă, expune proiecția stereografică a sferei cerești, adică proiecția emisferei nordice pe planul ecuatorului dintr-un punct situat în Polul Sud. Aici, ca și în multe alte lucrări ale lui Ptolemeu, sînt probabil expuse rezultatele lui Hiparh. Ptolemeu arată că proiecția oricărui cerc, fie mare sau mic, va fi iarăși un cerc (cu excepția cercurilor mari ce trec prin pol și ce se proiectează după drepte), însă el nu dă demonstrația generală a acestei propoziții importante, ci o demonstrează doar în cazuri particulare: pentru ecliptică, orizont etc., deși această demonstrație decurge din proprietățile secțiunilor circulare ale unui con circular oblic, studiate în *Secțiunile conice* ale lui Apoloniu. De asemenea Ptolemeu nu amintește despre o altă particularitate importantă a proiecției stereografice — păstrarea mărimii unghiurilor.

Teoria paralelelor lui Ptolemeu. Prin Proclus ne-a parvenit conținutul lucrării lui Ptolemeu, consacrată postulatului paralelelor [78, pp. 365—367]. Dorind să demonstreze postulatul V al lui Euclid, Ptolemeu intersectează dreptele AB și CD cu dreapta $EFGH$ (fig. 42) și încearcă să demonstreze că dacă dreptele AB și CD sînt paralele, suma unghiurilor AFG și CGF este egală cu două unghiuri drepte. El face demonstrația prin metoda reducerii la absurd. Să presupunem — raționează el — că această sumă nu este egală cu două unghiuri drepte. Atunci ea trebuie să fie: 1) fie mai mare decît două unghiuri drepte, 2) fie mai mică decît două unghiuri drepte. Să examinăm primul caz. Dacă ea

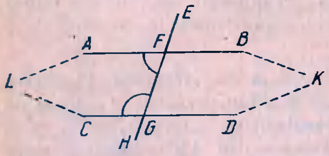


Fig. 42

este mai mare, suma unghiurilor BFG și FGD ca adiacente (interne de aceeași parte a secantei) trebuie să fie mai mică decît două unghiuri drepte. Dar AF și CG nu sînt mai mult paralele decît FB și GD, *prin urmare, dacă* FG *formează o pereche de unghiuri* AFG și FGC *ce dau în sumă mai mult decît două unghiuri drepte, ea trebuie să formeze de asemenea și o altă pereche de unghiuri* BFG *și* FGD *care, în mod egal, dau în sumă mai mult decît două unghiuri drepte.* Înainte însă s-a demonstrat că această a doua pereche de unghiuri este mai mică decît două unghiuri drepte, prin urmare am ajuns la o contradicție. Aceasta înseamnă că suma unghiurilor AFG și FGC nu poate fi mai mare decît două unghiuri drepte. În ceea ce privește al doilea caz, se poate arăta că suma unghiurilor AFG și FGC nu poate fi mai mică decît două unghiuri drepte. Astfel, s-a demonstrat că ea nu poate fi nici mai mare, nici mai mică decît două unghiuri drepte, prin urmare s-a demonstrat că ea este egală cu două unghiuri drepte.

După aceasta, Ptolemeu demonstrează, în sfîrșit, și postulatul V prin metoda reducerii la absurd. Să admitem că dreptele AB și CD, care formează cu dreapta EH unghiuri a căror sumă este mai mică decît două unghiuri drepte, nu se intersectează în partea în care se găsesc aceste unghiuri. Atunci, cu atît mai mult ele nu se vor intersecta de cealaltă parte unde se găsesc unghiurile a căror sumă este mai mare decît două unghiuri drepte, întrucît aceasta ar contrazice propoziția 16 din cartea II a *Elementelor*, în virtutea căreia unghiul exterior al triunghiului este mai mare decît oricare din cele interne, neadiacente cu acesta. Aceasta înseamnă că dreptele nu se întîlnesc nici de o parte nici de cealaltă parte a dreptei ce le intersectează, prin urmare ele sînt paralele. După cum am demonstrat însa mai sus, în acest caz suma unghiurilor cu dreapta secantă va fi egală cu două unghiuri drepte, iar aceasta contrazice ipoteza. Prin urmare, dreptele noastre trebuie să se intersecteze.

In toată această demonstrație, Ptolemeu a admis o eroare logică redată de noi cu caractere cursive. Afirmația că, în cazul dreptelor nesecante, unghiurile interne de o parte și de alta a secantei dau în sumă unghiuri egale este echivalentă cu postulatul V ce trebuie demonstrat. Noi am expus atît de amănunțit această încercare nereușită a lui Ptolemeu din motivul că ea reprezinta din punct de vedere istoric prima încercare, dintre nenumăratele încercări de a demonstra postulatul V, efectuate de matematicieni în diferite secole și țări, care s-a păstrat în toate amănuntele ei.

Lucrările de optică, mecanică și geografie ale lui Ptolemeu. În afară de cîteva lucrări de astronomie mai mici, Ptolemeu a scris o lucrare de optică ce s-a păstrat (incompletă) în traducere latină din limba arabă. În ea este expusă teoria oglinzilor, iar în ultima — cartea V — teoria refracției luminii.

Lui Ptolemeu i se atribuie, de asemenea, o lucrare de mecanică, în care era descrisă o invenție de a sa: cîntarul sub forma unei pîrghii-scară cu brațe inegale, cu greutatea-cursor mobilă.

În lucrarea *Geografia* (în 8 volume), care s-a bucurat de o mare popularitate, Ptolemeu, folosind proiecția cartografică a lui Marinos din Tyr (secolul I e.n.), a indicat latitudinile și longitudinile a 8 000 de puncte de pe suprafața terestră. În această lucrare se întîlnește ideea despre coordonate — numere ce definesc punctele suprafeței terestre.

Simplicius comunică că Ptolemeu a fost autorul lucrării *Despre măsurători*, în care se demonstra că un corp nu poate avea mai mult decît trei dimensiuni.

Matematica la Roma în timpul lui Iuliu Cezar și August. Știința învățaților alexandrini pătrunde la Roma în timpul împăratului roman Iuliu Cezar (104—44 î.e.n.). În secolul I î.e.n., în perioada înfloririi maxime a societății sclavagiste romane, cînd pe baza exploatării inumane a unui număr (datorită cuceririlor) tot mai mare de sclavi, tehnica producției a atins nivelul maxim, matematica romană, împreună cu arhitectura, hidrotehnica, geografia și, desigur, tehnica militară, trăiește o perioadă de avînt.

Însuşi Iuliu Cezar a fost autorul lucrării *Despre aştri* (*De astris*) al cărei scop era reforma calendarului. În anul 450 î.e.n., lungimea veche a anului de 355 de zile a fost corectată prin aceea că la fiecare doi ani se introducea o lună în plus care avea alternativ 22 şi 23 de zile. Datorită acestui fapt, însa, anul devenise prea lung, de aceea s-a trecut la eliminarea uneia dintre lunile intercalate, la început în mod dezordonat, iar apoi după fiecare 24 de ani. Datorită acestui fapt, cronologia s-a încurcat atît de mult, încît s-a creat o diferenţă de 85 de zile între apariţia de fapt şi cea nominală a echinoxului. Petrecînd anii 48—47 în Egipt, Cezar, după sfatul învăţatului alexandrin Sosigene, a hotărît să adopte calendarul alexandrin de 365 de zile şi cu an bisect la fiecare 4 ani, în care între 23 şi 24 februarie se intercala o zi în plus. Noul calendar a fost introdus în anul 45 î.e.n. Cezar s-a ocupat, de asemenea, de problema organizării unei măsurători generale a pămînturilor întregului Imperiu Roman. Lucrarea scrisă de el despre aceasta nu ni s-a păstrat însă, iar măsurătorile ca atare au fost efectuate abia în timpul lui August (63 î.e.n. — 14 e.n.) care a încredinţat conducerea măsurătorilor renumitului general şi constructor Marcus Vipsanius Agrippa. Lucrările cartografice la care a participat inginerul roman de drumuri Balbus şi grecul Heron Metricul, identificat în mod greşit de unii istorici cu Heron din Alexandria, au durat din anul 37 pînă în anul 20 î.e.n. Ca rezultat, a fost creată o mare hartă a lumii romane denumită după numele lui Agrippa şi expusă pentru public într-un portic special construit. Descrierea hărţii dată de Agrippa a servit drept izvor pentru *Istoria naturală* a lui Pliniu.

Datorită acestor lucrări, romanii au cunoscut lucrările alexandrine asupra agrimensurii practice şi a geodeziei, iar mai tîrziu şi lucrările lui Heron din Alexandria. Au fost introduse aparate cadastrale mai perfecţionate, se utilizau formule mai exacte pentru calculul ariilor, ale căror frontiere nu erau dreptunghiuri. Marcus Terentius Varro (circa 116 — 27 î.e.n.), învăţat multilateral, a fost autorul unei serii de lucrări de matematică care, din păcate, nu au ajuns pînă la noi: *Măsurători* (*Mensuralia*), *Geometria* în care figura Pămîntului era reprezentată în forma unui ou, tratatul *Aticul sau despre cifre* (*Atticus sive de numeris*, expunerea aritmeticii romane), precum şi o enciclopedie în 9 volume ale cărei cărţi IV şi V au fost consacrate geometriei şi aritmeticii, iar IX arhitecturii.

În a doua jumătate a secolului I î.e.n., a trăit Vitruviu, inginer militar în timpul lui Iuliu Cezar şi al lui August, mare constructor și arhitect care a condus, probabil, construcția și funcționarea apeductelor. Vitruviu este autorul lucrării *Zece cărți asupra arhitecturii* [127] terminată de el la sfîrșitul vieții sale, prin anul 14 î.e.n. În această enciclopedie a arhitecturii, există o serie de pasaje referitoare mai mult sau mai puțin la matematică, care dovedesc cunoștințele apreciabile ale autorului în acest domeniu. Vitruviu discută rapoartele diferitelor părți ale corpului uman, dă o schiță a învățăturii lui Aristoxen despre rapoartele armonice, face o descriere a trei descoperiri matematice, după părerea sa cele mai importante, și anume a incomensurabilității diagonalei și laturii unui pătrat, a triunghiului pitagoreic cu laturile 3, 4, 5 și a determinării greutății unei coroane. Lucrarea mai conține descrierile instrumentelor cadastrale și indicații pentru folosirea lor. În descrierea măsurării distanțelor, Vitruviu admite că perimetrul unei roți al cărei diametru este egal cu $4\frac{1}{6}$ picioare, este egal cu $12\frac{1}{2}$ picioare, adică el pune $\pi = 3$. Vitruviu folosea desene ale planurilor și fațadelor clădirilor, fiind prin aceasta unul din fondatorii geometriei descriptive.

În lucrarea păstrată în 12 volume *Despre agricultură* (*De rustica*) a lui *Junius Moderatus Columella* scrisă probabil în anul 62 e.n., capitolul II al cărții V este consacrat problemelor cadastrale. Aici cititorul face cunoștință cu sistemul de măsuri și cu rezolvarea unor probleme de geometrie, însă numai prin exemple concrete, fără să fie indicate reguli generale.

Sextus Julius Frontinus (aproximativ 40—103 e.n.) a scris despre măsurarea Pămîntului, tehnica militară și apeducte. În ultima lucrare (terminată prin anul 98) se întîlnesc o mulțime de calcule de perimetre ale țevilor de apeducte în care se ia $\pi = 3\frac{1}{7}$, exprimat aproximativ în fracții cu baza 12. Fragmente ale altor lucrări ale lui Frontinus, la fel ca și ale lui Hyginus, Balbus, Celsus, Nipsus, Epafroditus, Vitruvius Rufus, sînt cunoscute după un manuscris care a căpătat denumirea de *Codex arcerian* și care provine probabil din secolele VI — VII.

Toți scriitorii amintiți au folosit izvoare alexandrine. Geometria îi interesa de preferință ca disciplină aplicativă; ei au fost porecliți „agrimensori" (hotarnici). Interesul pentru măsurarea pămîntului a crescut în legătură cu dezvoltarea proprietății particulare asupra pămîntului și reîmpărțirea posesiunilor funciare sociale, cu litigiile judiciare tot mai frecvente asupra hotarelor parcelelor de pămînt, unde părerea agrimensorilor era hotărîtoare. Din asemănarea dintre terminologia folosită de ei, reprezentînd oarecum o traducere literală a termenilor folosiți de Heron Alexandrinul, Cantor [21, ed. a 4-a, vol. I, p. 555, 128] și alții au conchis că agrimensorii ar fi fost elevii săi, de aceea au stabilit timpul vieții sale nu mai tîrziu de secolul I e.n., ceea ce a fost însă infirmat pe baza studiului lucrărilor sale de mecanică. Asemănarea dintre terminologia și metodele agrimensorilor și a lui Heron din Alexandria trebuie astfel căutată într-un izvor comun, și anume metodele cadastrale răspîndite la savanții alexandrini, metode ce le-au parvenit din Egipt, posibil și din Babilon, iar de la ei au trecut și la romani.

În același fragment se întîlnesc și propoziții aritmetice, și anume probleme asupra numerelor poligonale.

Dar numărul mare de erori ce se găsesc în aceste propoziții de aritmetică și în special faptul că aici este așezată o figură ce nu are nici o legătură cu ele (un octogon regulat înscris în cerc cu linii ajutătoare trasate în el și prevăzute cu notații literale, cînd este vorba de... „numere" octogonale!) arată că acest fragment a nimerit în lucrare în mod întîmplător, deoarece pe agrimensori nu-i interesau problemele de aritmetică teoretică.

În modul acesta, după ce pentru un timp scurt de-a lungul unui veac și jumătate, de la Cezar la Traian, romanii și-au însușit cunoștințele matematice ale alexandrinilor atît cît să nu le fie străine cercetările de aritmetică teoretică, prin urmare și noțiunile de algebră legate de ele, ei au încetat să mai înțeleagă lucrările grecești corespunzătoare chiar în traducerea latină.

Despre cunoștințele practice ale romanilor în matematică ne putem face o idee și pe baza lucrărilor juridice și economice. Romanii foloseau de mult dobînda împotriva căreia fusese editată încă în anul 342 î.e.n. o lege care desigur nu era respectată. Calculul dobînzii făcea parte din cunoștințele general răspîndite. Se făceau de asemenea calcule în care se ținea seama de timpul probabil de folosire a diferitelor bunuri, așa cum arată Ulpian care a trăit la sfîrșitul secolului al II-lea și la începutul secolului al III-lea e.n. Dar nu se poate conchide din această observație dacă se determina durata probabilă a vieții și cum anume.

Calcule destul de complicate au fost legate de dreptul de moștenire. Un caz care a căpătat o mare popularitate și a intrat în multe manuale, atît de drept cît și de matematică, este următorul: cineva, murind, a lăsat testament că dacă soția sa gravidă va avea un băiat, atunci copilul trebuie să moștenească $\frac{2}{3}$ din avere, iar soţia $\frac{1}{3}$; iar dacă se naşte o fată ea va căpăta $\frac{1}{3}$, iar soţia $\frac{2}{3}$; dar s-au născut doi gemeni: un băiat şi o fată. Cum trebuie împărţită averea testată? Despre disputele legate de aceasta ne comunică mari jurişti romani. Salvianus Julianus, care a trăit în mijlocul secolului al II-lea e.n., a dat următoarea soluţie: întreaga moştenire trebuie împărţită în 7 părţi egale, din care fiul capătă 4, mama 2 şi fiica 1 parte, deoarece în acest fel fiul, în conformitate cu testamentul, va căpăta de două ori mai mult decît mama, iar mama de două ori mai mult decît fata.

Un contemporan al lui Salvianus Julianus a fost Apuleius din Madaur, o colonie romană din Africa de nord (aproximativ 135—180 e.n.) care a învăţat în Atena. Apuleius este cunoscut ca autor al romanului satiric *Măgarul de aur*, însă a fost şi autorul unei serii de lucrări de matematică. Apuleius a tradus în limba latină *Aritmetica* lui Nicomah. Lui i se atribuie şi manualul de aritmetică practică pentru comercianţi.

Heron din Alexandria, poreclit Heron Mecanicul, a fost unul din marii matematicieni-enciclopedişti ai antichităţii care a scris aproape în toate problemele matematicii, mecanicii, astronomiei şi fizicii. Datele vieţii acestui remarcabil inginer şi învăţat sînt atît de disputate încît într-un timp se presupunea că el ar fi trăit la începutul secolului I î.e.n., sau chiar mai înainte, în timp ce astăzi se înclină a se crede că viaţa şi activitatea sa corespund timpului dintre Ptolemeu şi Pappus, adică în secolul al III-lea e.n. Heron a scris pentru ingineri, arhitecţi, meşteri meşteşugari, lucrările sale urmărind mai mult scopuri aplicative decît teoretice. El a scris un îndreptar practic şi teoretic de geodezie care a servit acestui scop timp de multe secole. Totodată, Heron a dezvoltat la o treaptă înaltă matematica calculatorie, ridicînd rezolvarea problemelor cu ajutorul algebrei geometrice pînă la rezultate numerice concrete, sub forma în care ele sînt necesare pentru practică.

În domeniul pur teoretic, Heron a scris comentarii la *Elementele* lui Euclid.

Într-o altă lucrare, *Definiţiile*, Heron expune termenii tehnici folosiţi în geometrie, bazîndu-se pe învăţătura lui Euclid, autorul *Principiilor teoriei geometrice*. Valoarea acestei lucrări constă în aceea că aici sînt date diferite definiţii ale noţiunilor de geometrie separate, în dezvoltarea lor istorică.

Metrica lui Heron. Cea mai importantă lucrare de geometrie a lui Heron este *Metrica* sa [129] (învățătura despre măsurare) în trei cărți.

Cartea I conține regulile de măsurare a ariilor suprafețelor. Aici este dată formula de calcul a ariei unui triunghi scalen, așa-numita „formula lui Heron" care, probabil, a fost cunoscută încă lui Arhimede și pe care Heron o demonstrează cu ajutorul cercului înscris.

Heron dă exemple numerice, și anume exemple în care se cere extragerea rădăcinilor pătrate ce duc la iraționalități.

Heron aplică metoda babiloniană de extragere aproximativă a rădăcinii pătrate, procedeul egiptean de notație a fracțiilor și de expunere a regulilor. Astfel, la Heron tradițiile orientale sînt și mai puternice decît la Hiparh și Ptolemeu.

Pentru un hexagon regulat înscris într-un cerc de raza r, Heron consideră că valoarea aproximativă a laturii sale este $a = \frac{7}{8} r$, precum și că a este aproximativ egal cu distanța de la centrul cercului pînă la latura unui hexagon regulat înscris în cerc, adică $\frac{r}{2}\sqrt{3}$. Pentru cerc el dă valoarea dată de Arhimede $\pi = \frac{22}{7}$, precum și limitele mai precise decît cele găsite de Arhimede, puțin utile pentru practică, după părerea lui Heron.

Cartea I se încheie cu indicații asupra felului cum trebuie determinată aria figurilor plane neregulate, precum și a suprafețelor neregulate. În primul caz, se înscrie un poligon astfel încît conturul lui să nu difere prea mult de conturul curbiliniu al figurii și aria poligonului se determină ca suma ariilor triunghiurilor ce o compun. În al doilea caz suprafețele trebuie acoperite cu bucăți de hîrtie sau pînză subțire, iar apoi netezite și măsurate ariile lor.

Cartea II este consacrată măsurării volumelor. Ea se încheie cu observația că Arhimede a măsurat volumele corpurilor neregulate, cufundîndu-le în apă și măsurînd volumul lichidului dezlocuit de ele.

Cartea III se ocupă cu împărțirea figurilor în părți aflate într-un raport dat între ele, și anume atît a figurilor plane cît și a corpurilor: piramidă, con și sferă. Heron urmează aici lucrarea lui Euclid *Despre împărțirea (figurilor)* și parțial tratatul lui Apoloniu *Despre secționarea ariei* și tratatul lui Arhimede *Despre sferă și cilindru*. El rezolvă însă și multe probleme originale.

În împărțirea volumelor trebuie extrasă rădăcina cubică, și Heron expune metoda determinării ei aproximative.

Geometria lui Heron. O altă lucrare a lui Heron, *Geometria* [130], are un conținut asemănător *Metricii*. Aici însă regulile nu sînt demonstrate și nici măcar formulate sub forma generală, ci direct aplicate la rezolvarea exemplelor, și anume conform procedeului egiptean, fiecare exemplu este ilustrat de un șir întreg de cazuri numerice, din care se lasă pe seama cititorului să-și însușească regula generală. Aici se folosește de asemenea procedeul egiptean de scriere a fracțiilor. Lungimile și ariile sînt exprimate în unități particulare de măsură și se acordă multă atenție transformării unor unități de măsură în altele.

În *Geometrie* sînt rezolvate și ecuațiile pătratice; sînt conținute de asemenea și 13 probleme de ecuații nedefinite. Astfel, se cere să se găsească două dreptunghiuri, încît perimetrul celui de-al doilea să fie egal cu de trei ori perimetrul primului și ca aria primului să fie egală cu de trei ori aria celui de-al doilea. Aici se află, de asemenea, probleme de determinare a unui triunghi dreptunghic cu laturi raționale și arie dată, sau cu suma ariei și a perimetrului dată.

Lucrarea lui Heron *Stereometria*, în afară de măsurarea volumelor corpurilor geometrice, include și măsurarea volumelor clădirilor, teatrelor și amfiteatrelor, bazinelor de înot, fîntîni, nave, butoaie de vin și altele. *Geodezia* reprezintă un extras din *Geometrie* privind părțile referitoare la triunghiuri. Lucrarea *Măsurătorile*, atribuită lui Heron, conține de asemenea indicații asupra măsurării atît a figurilor geometrice, cît și a diferitelor vase, stane de piatră de diferite forme, coloane, turnuri, bolți și altele.

Un conținut asemănător îl avea și lucrarea *Geoponica* (despre construcția Pămîntului).

O lucrare importantă a lui Heron este *Dioptra*. Așa se numea un aparat ce servea anticilor în locul teodolitului actual.

După o descriere amănunțită a acestui aparat, aici se rezolvă mai întîi probleme asupra „altitudinii și distanței“, ca, de exemplu: determinarea diferenței de altitudini a două puncte, să se ducă o dreaptă care unește două puncte dintre care unul este invizibil, să se măsoare lățimea minimă a unui rîu etc. În lucrare se dă și o descriere a hodometrului (aparat pentru măsurarea drumului parcurs de o căruță).

Lucrările lui Heron în mecanică și optică. Lucrarea lui Heron *Mecanica* începe cu descrierea unui mecanism compus din roți dințate pentru deplasarea unei greutăți date cu ajutorul unei forțe date. Examinînd mișcarea roților și a arborilor cilindrici Heron observă că cercul, la fel ca și cilindrul și sfera, este figura cea mai mobilă.

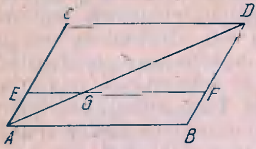


Fig. 43

Heron încearcă să rezolve așa-numitul „paradox al lui Aristotel" conținut în *Mecanica* sa, adică să explice de ce un cerc mare parcurge cu unul mic o distanță egală dacă ei au centru comun. Doar în timpul cînd ei se rostogolesc separat distanțele lor rectilinii parcurse se raportează între ele ca diametrii lor.

Apoi Heron demonstrează că mișcările uniforme se compun după regula paralelogramului din asemănarea triunghiurilor AEG și ACD (fig. 43), în care punctul A se mișcă uniform pe dreapta AB, în timp ce această dreaptă, rămînînd paralelă cu ea însăși, se mișcă uniform pînă la poziția CD, EF fiind o poziție intermediară.

Heron examinează mai departe mișcarea corpului pe un plan înclinat, centrele de greutate, cinci mașini mecanice simple: roata și axa ei, pîrghia, scripetele, pana și șurubul.

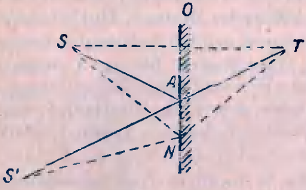


Fig. 44

Lăsînd de o parte lucrările lui Heron cu caracter mecanic aplicativ, ce conțin cunoștințe asupra balisticii, teoriei lichidelor și gazelor și prezintă un mare interes pentru istoria fizicii și tehnicii, lucrările sale asupra construcției mașinilor militare, a clepsidrelor* și a automatelor, mai observăm încă faptul că, în lucrarea *Catoptrica* (partea din optică ce studiază imaginile în oglindă), Heron a dat demonstrația egalității unghiurilor de incidență și de reflexie, demonstrație ce pleacă de la principiul filozofiei naturii că „natura nu face nimic în zadar" și că de aceea lumina se propagă pe dreaptă, adică pe drumul cel mai scurt. Și Heron demonstrează că dintre toate liniile frînte SNS' (fig. 44), ce duc de la obiectul S la oglinda O

* Orologii acționate de apă — *N.R.*

iar apoi către ochiul S', cea mai scurtă va fi aceea ale cărei ambe părți formează cu oglinda unghiuri egale, adică SAS'.

Pappus. Despre Pappus din Alexandria se știe doar că a trăit la sfîrșitul secolului al III-lea e.n. și s-a ocupat de restabilirea cunoștințelor matematice clasice uitate.

Lucrarea principală a lui Pappus este *Culegerea sa* [131] în 8 cărți — un îndreptar complet de geometrie, scris concis și clar, cu o cunoaștere profundă și multilaterală a obiectului. Tratatul conține o mulțime de informații istorice, se indică circa 30 de autori diferiți, datorită cărui fapt el servește drept izvor important de istorie a matematicii.

Prima carte a acestei lucrări, precum și prima jumătate a cărții II (13 propoziții) sînt pierdute. A doua jumătate a cărții III este consacrată octadelor lui Apoloniu.

Cartea III constă din patru părți. Partea I expune istoria problemei privind determinarea a două medii proporționale între două segmente.

Partea a II-a prezintă teoria diferitelor feluri de medii.

Partea a III-a conține o serie de paradoxuri geometrice luate din lucrarea *Paradoxele* lui Ericinus, predecesor sau contemporan cu Pappus. Aici, de exemplu, se demonstrează că se pot construi triunghiuri (sau paralelograme) ale căror laturi sînt mai mari decît laturile unui triunghi (paralelogram) dat, însă aria este mai mică.

În partea a IV-a se rezolvă problema înscrierii poliedrelor regulate într-o sferă, dar Pappus procedează complet altfel decît Euclid.

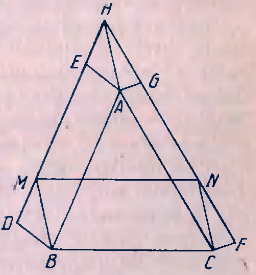


Fig. 45

Cartea IV constă din cinci părți. Partea I conține o generalizare interesantă (așa o numește Pappus însuși), a „teoremei lui Pitagora". Dacă pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC (fig. 45) construim paralelograme arbitrare $ABDE$ și $ACFG$, apoi prelungim pe DE și FG pînă la intersecția lor H și unind pe H cu A, ducem BM și CN paralel cu HA, atunci paralelogramul $BCNM$ va fi egal cu suma paralelogramelor $ABDE$ și $ACFG$.

În partea a II-a sînt examinate cercurile înscrise în *árbelos* (cosor) al lui Arhimede. Aici se demonstrează ingenios că dacă în această figură (fig. 46) este înscrisă o serie de cercuri cu centrele P, P_1, P_2,... din care primul este tangent la toate cele trei semicercuri iar celelalte tangente la două și dacă diametrele cercurilor înscrise sînt egale cu d, d_1, d_2,... iar perpendicularele coborîte din centrele lor pe AB sînt egale cu p, p_1, p_2,... atunci are loc egalitatea $p = d$.

În părțile III și IV, Pappus se ocupă de cvadratura cercului și trisecțiunea unghiului. Pentru a construi cvadratricea, Pappus, în afară de metoda mecanică, a propus alte două metode ce folosesc fie intersecția unei suprafețe elicoidale cu un plan, fie intersecția unui con circular drept cu un cilindru drept, avînd ca bază spirala lui Arhimede. Mai departe urmează o digresiune consacrată spiralei pe o suprafață sferică. Aplicînd metoda exhaustiei, Pappus demonstrează că aria suprafeței dintre spirală și cadranul BC se raportează la aria emisferei ca aria segmentului circular BC, la aria sectorului circular OBC.

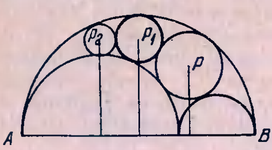


Fig. 46

În ultima parte a cărții IV se studiază împărțirea unghiului în trei sau mai multe părți egale cu ajutorul alunecării.

Cartea V începe cu o prefață extrem de interesantă scrisă într-o limbă literară minunată *Despre inteligența albinelor*, în care se spune că „deși zeii l-au înzestrat doar pe om cu rațiune, ei le-au dat animalelor instinctul... Astfel, albinele nu consideră potrivit să toarne mierea neglijent, oriunde la întîmplare, ci culegînd aromele din cele mai frumoase flori, ele mai întîi construiesc din ele vase numite faguri, toate egale, asemănătoare, lipite între ele. Însă numai trei figuri regulate dreptunghice — triunghiul, patratul și hexagonul — satisfac această condiție. Și albinele au ales pentru construirea fagurilor lor acea figură ce are numărul cel mai mare de unghiuri, deoarece ele au conchis că ea va conține mai multă miere decît celelalte la un consum egal de material. Noi însă, care pretindem că posedăm mai multă înțelepciune decît albinele, ne vom ocupa de studiul unei probleme mai generale, și anume a aceleia că dintre toate figurile plane cu laturi și unghiuri egale, avînd perimetrul egal, aria cea mai mare o are acea figură ce are numărul cel mai mare de unghiuri și dintre toate figurile plane de perimetru egal, aria cea mai mare o are cercul" [131, vol. I, pp. 304—309].

Desigur că lui Pappus i se poate ierta necunoașterea faptului că forma uimitor de rațională a celulelor albinelor nu este o consecință a unui plan intenționat și a predestinării dumnezeiești, ci o consecință a adaptării ca rezultat al selecției naturale. Ridică obiecții doar asemenea concepții naive atunci cînd ele continuă să fie emise și astăzi de către adepții concepției teologico-teleologice asupra lumii, de către neotomiști (adepții lui Toma din Aquino), J. Maritain, E. Gilson și alții.

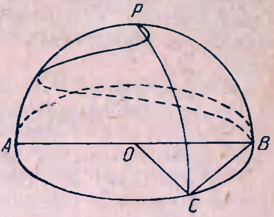


Fig. 47

Întreaga carte V este consacrată problemelor izoperimetrice. Pappus subliniază că pînă la el ele erau rezolvate prin metoda analitică, în timp ce el aplică o metodă proprie, sintetică, considerînd-o mai clară și mai scurtă. El remarcă, de asemenea, că filozofii au afirmat că lumea ar avea forma unei sfere, corpul cel mai „perfect", cel mai frumos și cel mai mare dintre toate corpurile de suprafață egală, însă demonstrația acestei afirmații ei nu au dat-o. Pappus însuși demonstrează că sfera este mai mare ca volum decît orice poliedru regulat ce are suprafața egală cu sfera, precum și mai mare decît conul și cilindrul.

Cartea VI *Culegere* este o lucrare de astronomie. Ea este consacrată îndreptării propozițiilor eronate ce se întîlneau în copiile lucrărilor de astronomie ale lui Teodosiu, Euclid, Menelau, Autolikos și Aristarh. Interesul matematic îl prezintă studiul formei aparente a cercului văzut dintr-un punct nesituat în planul lui, problemă de care s-a ocupat încă Euclid în *Optica* sa.

Cartea VII este prețioasă, îndeosebi, prin faptul că în ea se dă o descriere destul de amănunțită a lucrărilor ce intrau în așa-numitul „tezaur al analizei", format din operele lui Euclid, Apoloniu și Aristeu, ce serveau ca îndreptar pentru ridicarea cunoștințelor de matematică. Pappus dă, în legătură cu aceasta, definiția analizei și sintezei.

Trebuie observat că după descrierea tuturor lucrărilor ce intră în „tezaurul analizei", Pappus adaugă la *Secțiunile conice* ale lui Apoloniu un raționament asupra locurilor geometrice ale punctelor raportate la trei sau patru drepte și observă că studiul unor asemenea locuri, raportate la 5, 6 sau mai multe drepte, nu era cunoscut pînă la el. Pappus spune că în cazul în care numărul dreptelor este mai mare decît 6, raportul dintre segmente nu poate fi exprimat geometric, deoarece în geometrie există doar trei dimensiuni, deși unii autori și-au permis să vorbească de dreptunghi înmulțit cu un pătrat sau cu un dreptunghi, fără a explica ce înțelegeau ei prin aceasta.

Pappus observă mai departe că în timpul său mulți se ocupă de principiile primare și de izvorul natural al obiectului cercetării matematice. El citează două propoziții asupra corpurilor de revoluție ce anticipează teorema lui Guldin, fără a da însă demonstrații.

În aceeași carte sînt culese o mulțime de leme care trebuiau să ușureze studiul operelor ce au intrat în „tezaurul analizei".

Cartea VIII este consacrată mecanicii: aici se face o distincție între mecanica teoretică ca știință matematică și mecanica practică ca artă. Apoi se rezolvă diferite probleme referitoare la centrul de greutate al figurilor, la mișcarea pe un plan înclinat, ca, de exemplu: se dă o greutate care poate fi mișcată pe un plan orizontal cu ajutorul unei forțe date și un plan înclinat către orizont sub un unghi dat; se cere să se determine forța necesară pentru a deplasa această greutate în sus pe planul înclinat.

Mai departe Pappus rezolvă problema construirii unei secțiuni conice fiind date 5 puncte, indicînd de unde a provenit ea. Există un fragment dintr-o coloană cilindrică din care nu s-a păstrat nici o parte a bazei, nici perimetrul și se cere să se determine diametrul ei. Alegem atunci 2 puncte A și B pe această suprafață cilindrică și ducem din ele, ca din centre, 5 perechi de cercuri de diferite raze. Perechile de cercuri de raze egale se intersectează în 5 puncte situate într-un plan perpendicular pe AB. Ele pot fi ușor transportate pe orice plan.

Pappus rezolvă, de asemenea, și problema înscrierii în cerc a 7 hexagoane regulate egale și se ocupă, de asemenea, de construcția roților dințate și a șuruburilor.

Trebuie menționată o particularitate importantă a lucrărilor lui Pappus. El utilizează literele majuscule pentru a nota numerele generale, alături de literele minuscule (de rînd) ce sînt folosite pentru a nota numerele concrete. După cum am mai observat, notația mărimilor prin litere a fost introdusă încă de Aristotel și larg folosită de Euclid și de alți matematicieni din epoca elenistică, care notau toate numerele-segmente cu litere majuscule; dar, intenționat sau neintenționat, Pappus a lăsat de o parte reprezentarea intuitivă. Acesta era un pas important ce a pregătit apariția algebrei. În matematica antică însă, notația algebrică folosită pentru rezolvarea ecuațiilor a fost pentru prima dată introdusă ca sistem de către Diofant.

Diofant din Alexandria a trăit probabil pe la anul 250 e.n. În antologia greacă, pe lîngă versurile deja amintite, atribuite lui Euclid, mai există un vers privind datele vieții lui Diofant. În el se spune că copilăria lui alcătuia $\frac{1}{6}$ din viața lui, barba a început să crească după $\frac{1}{12}$, el s-a însurat după $\frac{1}{7}$ și după 5 ani i s-a născut un fiu care a trăit $\frac{1}{2}$ din vîrsta tatălui, iar acesta din urmă a murit la 4 ani după moartea fiului. De aici, pentru vîrsta lui Diofant se obține ecuația:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x,$$

de unde $x = 84$, dacă desigur această antologie, editată în secolul al VI-lea de către gramaticul Metrodor, nu redă date inventate.

Lucrarea principală a lui Diofant este *Aritmetica* [132] care conține 13 cărți dintre care însă nu ni s-au păstrat decît 6. În aceste cărți el aplică consecvent notațiile sale algebrice. În primul rînd, pentru mărimea necunoscută (x al nostru) pe care Diofant o definește ca conținînd o mulțime nedefinită de unități și o numește simplu *aritmós*, adică „număr", el introduce un semn care are forma lui ς'. Coeficientul numeric Diofant îl scrie alături după semnul necunoscutei: astfel $\varsigma'\bar{\iota}\bar{\alpha} = 11$ *aritmoi* $= 11x$. Puterile necunoscutei Diofant le notează cu literele inițiale ale denumirilor grecești corespunzătoare: x^2 — dinamis — $\delta^{\bar{\upsilon}}$, x^3 — *kubos* $\varkappa^{\bar{\upsilon}}$ x^4 — *dinamodinamis* $\delta\delta^{\bar{\upsilon}}$, x^5 — *dinamókubos* $\delta\varkappa^{\bar{\upsilon}}$, x^6 — *kubókubos* $\varkappa\varkappa^{\bar{\upsilon}}$. Diofant avea de asemenea notații pentru valorile reciproce ale necunoscutei și puterile lor: $\frac{1}{x}$ — *arithmostón* $\varsigma^{\bar{\varkappa}}$, $\frac{1}{x^2}$ — *dinamostón* $\delta^{\bar{\upsilon}\bar{\varkappa}}$ și așa mai departe. Puterile mai mari decît a 6-a nu erau examinate de Diofant. La Diofant nu existau nici un fel de semne pentru operațiile de adunare, înmulțire și împărțire. Adunarea era notată pur şi simplu prin aceea că termenii se scriau alături, de exemplu, $x^3 + 13x^4 + 5x$ se scria $\kappa^{\upsilon}\bar{\alpha}\delta^{\upsilon}\bar{\iota}\bar{\gamma}\varsigma'\bar{\varepsilon}$

Pentru notaţia unităţilor ca termeni aditivi se folosea prescurtarea μ° — literele iniţiale ale cuvîntului „monós" — unitatea, de exemplu: $x^3 + 13x^4 + 5x + 2$ se scria $\kappa^{\upsilon}\bar{\alpha}\delta^{\upsilon}\bar{\iota}\bar{\gamma}\varsigma'\bar{\varepsilon}\mu^{\circ}\bar{\beta}$

Pentru scădere, Diofant folosea semnul $\pitchfork$ — probabil prescurtarea cuvîntului „leipsis" — „se cere". În acest caz în polinom se scriau mai întîi toţi termenii pozitivi, iar apoi toţi termenii negativi separaţi de primii prin semnul $\pitchfork$ de exemplu: $x^3 - 5x^2 + 8x - 1$ sau $x^3 + 8x - (5x^2 + 1)$, adică

$$\kappa^{\upsilon}\bar{\alpha}\varsigma'\bar{\eta}\pitchfork\delta^{\upsilon}\bar{\varepsilon}\mu^{\circ}\bar{\alpha}$$

Datorită faptului că Diofant dispunea doar de un singur simbol pentru notaţia necunoscutei, el a fost nevoit să reformuleze în prealabil orice problemă cu mai multe necunoscute, astfel încît toate necunoscutele să fie exprimate prin una singură. În cazul ecuaţiilor nedefinite, el lua în locul unora dintre necunoscute numere arbitrare, indicînd totodată că s-ar fi putut lua în locul lor şi oricare altele şi de aceea soluţia lui nu pierdea din generalitate. Pentru a exprima toate necunoscutele prin una singură, Diofant era nevoit să utilizeze cele mai variate procedee, uneori foarte ingenioase.

Diofant folosea peste tot numai numerele întregi pozitive şi fracţiile pozitive. El nu avea noţiunea de mărime negativă. Ecuaţiile ce duceau la astfel de soluţii el le numea imposibile, absurde. El nu folosea nici iraţionalităţile şi dacă se întîlneau rădăcini iraţionale, apărea la el o problemă suplimentară de a alege mărimile ce figurează în ele, astfel încît rezultatul să fie raţional.

În *Aritmetica* Diofant rezolvă prin metoda generală anumite ecuaţii liniare şi pătratice şi numai într-un singur caz particular o ecuaţie cubică. Pentru ecuaţiile de forma:

$$a_1x^n + b_1 + a_2x^n + b_2 + \ldots = c_1x^n + d_1 + c_2x^n + d_2 + \ldots$$

Diofant indică regula generală ce constă în reducerea termenilor asemenea şi în eliminarea termenilor negativi, posibil prin adăugarea la ambele părţi ale ecuaţiei a unor mărimi egale, pînă cînd ea capătă forma $ax^n=b$. După aceasta problema se consideră rezolvată, dar se ia în considerare doar unica rădăcină pozitivă. Coeficienții a și b trebuie să fie astfel, încît rădăcina să fie rațională. În cazul în care ecuația se simplifică cu x^m, rădăcina $x=0$ nu se ia în considerație.

În rezolvarea ecuațiilor pătratice complete de cele trei tipuri pe care le-am mai întîlnit, ce dau rădăcini pozitive, Diofant nu formulează regula generală, deși promite să facă aceasta (este posibil ca aceasta să fi existat în partea pierdută a lucrării), ci o prezintă pe numeroase exemple. În acest caz se indică marginile inferioare și superioare ale iraționalităților ce se întîlnesc, iar rădăcina pătrata este considerată numai cu semn pozitiv.

Problema dacă Diofant cunoștea existența celei de-a doua rădăcini a ecuației, corespunzătoare rădăcinii pătratice cu semn negativ, a fost mult discutată. Nu încape însă îndoială că sub forma geometrică, cînd se aplica algebra *geometrică*, existența a două soluții era examinată încă de Euclid în *Elementele* sale [92, vol. I, cartea II, propozițiile 5—6; cartea VI, propozițiile 27, 28, 29].

Diofant a examinat sisteme de ecuații ce duc la o ecuație pătratică completă, și anume:

$$x+y=2a, \qquad xy=b, \tag{1}$$
$$x+y=2a, \quad x^2+y^2=b, \tag{2}$$
$$x-y=2a, \qquad xy=b, \tag{3}$$

pe care el le rezolva prin metoda substituției (folosind limbajul modern) și punînd în primele două cazuri $x=a+z$, $y=a-z$, iar în al treilea caz $x=z+a$, $y=z-a$.

Unicul caz al ecuației cubice pe care îl examinează Diofant,

$$x^3+3x-3x^2-1=x^2+2x,$$

se reduce la ecuația:

$$x^3+x=4x^2+4,$$

despre care el spune simplu „de unde găsim că x este egal cu 4", fără să arate dacă această soluție a fost obținută prin împărțirea cu divizorul comun x^2+1 sau prin încercări.

Contribuția principală a lui Diofant în matematică o constituie însă metodele sale de rezolvare a ecuațiilor nedefinite. Deoarece el admite ca soluție *orice numere raționale pozitive*, este clar că el nu se ocupă de loc de ecuațiile liniare nedefinite. Pentru ecuațiile pătratice, precum și pentru ecuațiile cubice și bipătratice, în măsura în care le rezolvă, el nu caută neapărat rădăcini, numere întregi, așa cum se face astăzi cînd se vorbește de „ecuațiile lui Diofant".

Ecuațiile pătratice nedefinite se întîlnesc în *Aritmetica*, în primul rînd, sub forma $Ax^2 + Bx + C = y^2$. În funcție de valorile coeficienților A, B, C apar diverse cazuri. Prezintă interes cazul $B = 0$. Diofant da un procedeu de a găsi un număr arbitrar de rădăcini ale ecuației $Ax^2 + C = y^2$, dacă se cunoaște una din ele. Diofant observă că această ecuație se rezolvă (rațional) numai atunci cînd A este suma a două pătrate și demonstrează că ecuația $Ax^2 + C = y^2$ se rezolvă (rațional) numai atunci cînd $A + C$ reprezintă un pătrat perfect. În cazul ecuației complete

$$Ax^2 + Bx + C = y^2,$$

Diofant nu o reduce la forma precedentă, ci examinează doar cazurile cînd fie A, fie C sînt pătrate perfecte, fie cînd expresia $\frac{1}{4} B^2 - AC$ este un pătrat perfect.

În afară de aceste ecuații, Diofant rezolvă și ecuațiile „duble" (*diploisótes*), adică sistemul:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x^2 + b_1x + c_1 = y^2 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = z^2. \end{array}\right\}$$

Cazul cel mai simplu, în care $a_1 = a_2 = 0$, Diofant îl rezolvă prin două metode diferite. În prima, el examinează două posibilități: fie $b_1 = b_2$, fie c_1c_2 reprezintă un pătrat. A doua metodă el o aplică doar în cazul particular în care $c_1 = c_2$ sînt pătrate. Cînd sistemul este complet, Diofant se mărginește numai la trei posibilități: fie $a_1 = a_2$, $c_1 = c_2$; fie $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $c_1 = c_2$; fie $b_1 = b_2 = 0$.

Ecuațiile nedefinite de ordin superior, Diofant le examinează sub forma:

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots Kx - M = y^2 \text{ sau } y^3,$$

în primul caz n nu depășește 6, iar în al doilea — 3. În *Aritmetica* se întîlnesc pentru y^2 cinci variante, iar în cazul în care membrul drept este un cub — două variante.

Se întîlnesc și cazuri relativ simple de sisteme compuse din două ecuații nedefinite cu pătrate și cuburi, de exemplu:

$$4x + 2 = y^3, \qquad 2x + 1 = z^2;$$

aici $y^3 = 2z^2$ și, prin urmare, $z = 2$; sau încă

$$2x^2 + 2x = y^2, \qquad x^3 + 2x^2 + x = z^3;$$

Diofant pune $y = mx$ de unde $z^3 = \frac{2m^4}{(m^2 - 2)^3}$, prin urmare m trebuie să fie egal cu $\frac{n^3}{2}$.

Metoda generală prin care Diofant rezolvă ecuațiile nedefinite se baza, în cazul sistemului de ecuații:

$$\alpha x + a = y^2; \tag{1}$$

$$\beta x + b = z^2 \tag{2}$$

pe identitatea:

$$(p + q)^2 - (p - q)^2 = 4pq.$$

Scăzînd ecuația (2) din (1), obținem:

$$(\alpha - \beta)x + (a - b) = y^2 - z^2.$$

Descompunînd membrul I în factorii p și $[(\alpha - \beta)x + (a - b)]/p$, iar membrul II în factorii $y - z$ și $y + z$ și egalîndu-i obținem:

$$y \pm z = \frac{(\alpha - \beta)x + (a - b)}{p} \tag{3}$$

$$y \mp z = p. \tag{4}$$

Adunînd (3) cu (4) și ridicînd la pătrat obținem:

$$y^2 = \alpha x + a = \frac{1}{4}\left\{\frac{(\alpha - \beta)x + (a - b)}{p} + p\right\}^2,$$

de unde după simplificare obținem:

$$(\alpha - \beta)^2x^2 + 2x\,[(\alpha - \beta)\,(a - b) - p^2\,(\alpha + \beta)] + (a - b)^2 - 2p^2(a + b) + p^4 = 0.$$

Pentru ca această ecuație să devină liniară, trebuie ca, fie coeficientul lui x^2, fie termenul liber să fie egal cu zero. Diofant examinează ambele cazuri, însă desigur nu sub forma generală, ci prin exemple numerice. Ambele cazuri dau, desigur, numai soluții particulare ale sistemului (1), (2). Acest sistem, ce se reduce la ecuația:

$$Ay^2 - Bz^2 = C,$$

a fost complet soluționat doar datorită teoriei formelor pătratice, creată de Gauss (1801).

Deoarece Diofant caută soluțiile pozitive, el este adesea nevoit să le determine astfel, încît ele să fie situate între anumite limite, ceea ce conduce, de exemplu, la problema: să se găsească valoarea lui x astfel încît x^n să fie cuprins între limite date a și b. Diofant înmulțește pe a și b mai întîi cu 2^n, apoi cu 3^n ș.a.m.d., pînă cînd se găsește un număr c, astfel încît are loc inegalitatea $ap^n < c^n < bp^n$; atunci el pune $x = \frac{c}{p}$. Se întîlnesc și probleme mai complicate, cînd, de exemplu, se cere să se găsească valoarea lui x, astfel încît $\frac{8}{x^2 + x}$ să fie cuprins între x și $x + 1$.

Diofant aplică o metodă specială pentru rezolvarea problemei privind determinarea a două sau trei pătrate, a căror sumă este egală cu un număr dat, fiecare dintre ele diferind puțin de un același număr, sau în alte cazuri trebuind să se găsească între limite cunoscute.

În afară de probleme, în *Aritmetica* există propoziții cu caracter general referitoare la teoria numerelor. Despre trei dintre ele se spune că sînt luate din *Porisme*, — lucrare pierdută a lui Diofant:

1) dacă a este un număr dat și dacă x și y sînt astfel, încît expresiile $x + a$, $y + a$ și $xy + a$ sînt pătrate, atunci laturile pătratelor $x + a$ și $y + a$ diferă cu 1;

2) dacă n^2 și $(n + 1)^2$ sînt două pătrate succesive și dacă mai luăm încă $4(n^2 + n + 1)$, atunci aceste trei numere se bucură de proprietatea că produsul oricărei perechi, mărit fie cu suma acelorași două numere, fie cu un alt treilea număr, este un pătrat;

3) diferența a oricare două cuburi este în același timp suma a două cuburi.

Printre alte propoziții menționăm aceea ce se referă la descompunerea unui număr în suma a două pătrate:

1) orice pătrat poate fi reprezentat în oricîte feluri sub forma sumei a două pătrate. Deoarece a^2 se poate reprezenta ca suma $x^2 + y^2$ unde $x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}a$, $y = \frac{2t}{1 + t^2}a$, t — orice fracție subunitară pozitivă;

2) prin urmare, și orice număr ce reprezintă suma a două pătrate poate fi reprezentat în oricîte feluri sub forma sumei a două pătrate;

3) produsul a două numere întregi ce sînt sume a două pătrate poate fi reprezentat sub forma sumei a două pătrate întregi în două feluri, adică:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2;$$

Diofant aplică această propoziție pentru a găsi patru triunghiuri dreptunghice cu laturi întregi și cu ipotenuza comună.

4) pentru ca unitatea să poată fi descompusă în doi termeni, astfel încît, adăugînd fiecăruia din ei un număr a dat, să obținem pătrate, este necesar în primul rînd ca numărul a să fie par. A doua condiție citată de Diofant nu poate fi descifrată, deoarece textul este deteriorat. Fermat a demonstrat că, în afara de prima condiție, trebuie îndeplinită și a doua: numărul $(2a + 1)$, împărțit prin pătratul cel mai mare prin care este el divizibil, nu trebuie să dea un rest divizibil prin numărul prim de forma $(4n - 1)$. De aici rezultă că nici un număr de forma $(4n + 3)$, $(4n - 1)$ nu poate fi reprezentat ca suma a două pătrate.

Diofant indică, de asemenea, o condiție particulară pentru ca un număr de forma $(3a + 1)$ să nu se descompună în trei pătrate, și anume a nu trebuie să aibă forma $(8b + 2)$.

Pentru a da cititorului o idee asupra bogăției conținutului lucrării *Aritmetica*, care a servit pentru matematicienii timpurilor moderne, începînd cu Fermat, drept sursă a unor cercetări ulterioare fertile, vom da cîteva exemple dintre cele mai tipice. Astfel, printre ecuațiile determinate, există problema (I, 39): se dau două numere a și b; să se găsească un număr x, astfel încît numerele $(a + x)b$, $(b + x)a$, $(a + b)x$ să formeze într-o ordine oarecare (dependentă de valorile lor) o progresie aritmetică. Este interesant sistemul (IV, 15):

$$\left.\begin{aligned}(y + z)x &= a,\\ (z + x)y &= b,\\ (x + y)z &= c.\end{aligned}\right\}$$

Diofant ia pe z drept necunoscută prin care exprimă pe x și y, și anume:

$$x = \frac{p}{z},\ y = \frac{q}{z},\ x + y = \frac{c}{z};$$

atunci:

$$\frac{pq}{z^2} + p = a,\ \frac{pq}{z^2} + q = b,$$

de unde $p - q = a - b$. Prin urmare, trebuie să descompunem pe c în două părți, astfel încît diferența acestor părți să fie egală cu $a - b$. Diofant aplică metoda falsei ipoteze, luînd mai întîi p și q în mod arbitrar doar cu condiția ca $p + q = c$, iar apoi, introduce corecții. În definitiv, el obține $z^2 = \frac{pq}{a - p}$, iar numerele a, b, c trebuie să fie astfel încît z să fie rațional.

Dintre ecuațiile nedefinite de ordinul 2 indicăm ecuația (II,9):

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

care se rezolva prin substituția:

$$x = z + a, \qquad y = m - b.$$

Sînt rezolvate și sistemele, ca de exemplu (III,5):

$$\left.\begin{array}{ll} x + y + z = t^2, & y + z - x = u^2, \\ z + x - y = v^2, & x + y - z = w^2, \end{array}\right\}$$

precum și ecuații mai complicate, ca de exemplu (III, 19):

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + x_1 = y_1^2, \ldots, \ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + x_4 = y_4^2.$$

Diofant formulează unele probleme într-un mod distractiv. Astfel, în cartea V problema 30 spune: „Cineva a cumpărat o cantitate oarecare de măsuri de vin, un fel cu 8 și celălalt cu 5 drahme. El a plătit pentru ele un număr pătrat de drahme; și dacă adăugăm la aceasta 60, se obține un pătrat a cărui latură este egală cu întregul număr de măsuri. Să se găsească cît s-a cumpărat și cu ce preț". În cazul general ($8 = m$, $5 = n$, $60 = a$), problema se scrie sub forma sistemului:

$$mx + ny = u^2,$$
$$u^2 + a = (x + y)^2.$$

Prin urmare, răspunsul afirmă că numărul de măsuri de cîte 5 drahme este egal cu $\frac{79}{12}$, iar numărul de măsuri cu cîte 8 drahme este egal cu $\frac{59}{12}$.

Dintre ecuațiile nedefinite de ordin superior, indicăm numai ca exemplu următoarele:

1) (IV, 6) $x^3 + y^2 = u^2$, $\qquad z^2 + y^2 = v^3$.
2) (IV, 11) $x^3 - y^3 = x - y$.
3) (V, 29) $x^4 + y^4 + z^4 = u^2$.

Aici Diofant pune $u = v^2 - p$ de unde obține

$$x^2 = \frac{p^2 - y^4 - z^4}{2p}.$$

El admite $p = y^2 + 4$, $z = 2$ de unde se obține:

$$x^2 = \frac{4y^2}{y^2 + 4}.$$

Punînd $y^2 + 4 = (y + 1)^2$, el obține:

$$y = 1\frac{1}{2}, \quad y^2 = 2\frac{1}{4}, \quad z^2 = 4, \quad p = 6\frac{1}{4},$$

sau, după înmulțire cu 4:

$$y = 3, \ z = 4, \ p = 25, \ x = \frac{12}{5}.$$

În sfîrșit, în *Aritmetica* există o serie de probleme cu privire la construcția triunghiurilor dreptunghice, ale căror laturi, fiind exprimate prin numere raționale, trebuie să satisfacă anumite condiții.

S-a păstrat de asemenea un fragment din lucrarea lui Diofant *Despre numerele poligonale*. Expunerea urmează aici metoda algebrei geometrice, de aceea este foarte greoaie și încurcată. Diofant rezolvă problemele asupra determinării numărului poligonal pe baza laturii sale și, reciproc, al laturii pe baza numărului. Ultima propoziție neterminată, ce se întrerupe la jumătatea unui cuvînt, este problema găsirii numărului de reprezentări posibile ale unui număr dat sub forma unui număr poligonal.

Lucrările lui Diofant *Porismele* și *Moriastica* (învățătura despre fracții) sînt pierdute. Prima este citată de Diofant în *Aritmetica*, a doua conținea probabil învățătura despre fracții, dar s-a păstrat numai denumirea ei.

Trebuie observat că în timp ce Pappus a stat în fruntea probabil a unei întregi școli matematice, direcția algebrică nu a căpătat o dezvoltare ulterioară în matematica antică. Ca și în alte domenii ale culturii, matematicienii din țările Imperiului Roman, care au urmat după Diofant, au fost mai degrabă niște comentatori decît creatori independenți.

Sporus. Dintre contemporanii lui Pappus, la sfîrşitul secolului al III-lea a trăit Sporus (Sporos), autorul lucrării de compilaţie *Kerıa* care conţine, între altele, expunerea problemelor cvadraturii cercului şi duplicării cubului şi critica metodei lui Hippias, bazată pe utilizarea cvadratricei, precum şi o critică nejustificată a aproximaţiei $3\frac{1}{7}$ şi $3\frac{10}{71}$ a lui Arhimede pentru π.

Porfiriu. Iamblic. Porfiriu (233—304), elev al lui Plotin (Plotinos), neoplatonician, remarcabil reprezentant al şcolii filozofice mistice, a scris comentariile la *Elementele* lui Euclid. Elevul său a fost Iamblic de origine din Calcida din Siria (a murit prin anul 330). El a scris nouă lucrări asupra sectei pitagoreicilor, din care s-au păstrat numai patru. Interesul cel mai mare pentru istoria matematicii îl prezintă cartea IV *Despre introducerea în aritmetică a lui Nicomah*. Aici Iamblic citează diferite propoziţii ale pitagoreicilor asupra numerelor pătrate şi „dreptunghiulare“ adică asupra numerelor de forma $n(n+1)$.

Mai departe, Iamblic dă următoarea propoziţie. Dacă luăm trei numere succesive dintre care ultimul divizibil cu 3 şi le adunăm, iar apoi adunăm în rezultatul obţinut cifra unităţilor, a zecilor, a sutelor etc., în rezultatul astfel obţinut facem acelaşi lucru, atunci repetînd succesiv această operaţie obţinem în sfîrşit numărul 6.

Această teoremă a cărei demonstraţie, sub formă generală, a dat-o Loria [133, p. 841] a apărut pe terenul „calculului pitagoreic“ ce servea pentru „prezicerea viitorului“. Adunînd valorile numerice ale unui nume oarecare, pitagoreicii luau în consideraţie numai *pitmen* („baza“, vezi p. 79) fiecărui număr (de exemplu, pentru ψ, care însemna 700 *pitmen* era 7 notat ca ζ) şi cu suma obţinută a *pitmenilor* procedau în acelaşi fel, pînă cînd ajungeau la numărul mai mic decît 10 ce era considerat *pitmen* al numelui dat.

Iamblic dă de asemenea o metodă de rezolvare a unui tip de sisteme de ecuaţii liniare ce poartă numele de *epántema* (înflorire) a lui Timaridas, matematician din timpul lui Platon. Această metodă aplicată sistemului:

$$x + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a, \quad x + x_1 = a_1, \quad x + x_2 = a_2, \ldots,$$
$$x + x_n = a_n,$$

el o extinde asupra sistemului de ecuații nedefinite, rezolvate în numere întregi. Ocupîndu-se de numerele perfecte dintre care el cunoaștea doar primele 4: 6, 28, 496 și 8 128, cunoscute încă lui Nicomah, Iamblic a emis ipoteza că ele sînt dispuse regulat, că în fiecare miriadă se întîlnește cîte unul (unul pînă la 10^8, apoi unul pînă la 10^{12} ș.a.m.d.), ceea ce este greșit.

Serenus. Unul dintre comentatorii datorită cărora au ajuns pînă la noi informații asupra lucrărilor pierdute ale clasicilor matematicii antice este Serenus din Antinoia, în Egipt, care a trăit probabil în secolul al IV-lea, în perioada dintre Pappus și Teon din Alexandria. El a scris un comentariu la *Secțiunile conice* pierdute ale lui Apoloniu, precum și la lucrările păstrate *Despre secțiunile cilindrului* și *Despre secțiunile conului*. În prima din ele, Serenus, așa cum arată el însuși, vrea să împrăștie eroarea săvîrșită de cei care studiază geometria că secțiunile cilindrului ar diferi de elipsă — secțiune a conului. Ultima parte a acestei lucrări este consacrată problemei privind forma umbrei cilindrului pe un plan, provocată de faptul că geometrul Peiton prieten al lui Serenus, care a scris un tratat asupra paralelelor, a fost supus unei critici nejuste pentru afirmația sa că umbra cilindrului pe un plan are forma unui paralelogram.

Lucrarea *Despre secțiunile conului* se ocupă cu secțiunile triunghiulare ale dreptelor și conurilor circulare oblice, ce se obțin prin intersecția conului cu un plan ce trece prin vîrful său.

Serenus studiază problema cînd aria triunghiului în diferite condiții date (de exemplu, perimetrul dat) devine maximă.

Teon din Alexandria. La sfîrșitul secolului al IV-lea a trăit cunoscutul matematician Teon din Alexandria. El este autorul comentariilor la *Almagestul* lui Ptolemeu, în 11 cărți, lucrare care, deși nu dovedește că Teon ar fi un mare matematician, conține însă informații istorice prețioase și ne dă o imagine asupra felului în care matematicienii alexandrini din acel timp foloseau fracțiile sexagesimale, cum se făceau înmulțirea, împărțirea, extragerea rădăcinii pătrate, în special cea aproximativă. Astfel, de exemplu, în cazul împărțirii lui 1 515°20′15″ prin 25°12′10″, (scrise bineînțeles prin semne literale), el procedează astfel:

Împărțitorul	Deîmpărțitul	Cîtul
20°12′10″	1 515°20′15″	termenul 1 — 60°
	25°·60=1500	
rest	15= 900′	
suma	920′	
	12′·60= 720′	
rest	200′	
	10″·60= 10′	
rest	190′	
	25 .7′ = 175′	
rest	15′ = 900″	termenul al 2-lea 7′
suma	915″	
	12′. 7′= 84″	
rest	831″	
	10″· 7′=4″10‴	
rest	829″50‴	
	25·33″= 825″	termenul al 3-lea 33″
rest	4″50‴= 290‴	
	12′·33″= 396‴	
Exces	106‴	

În modul acesta, cîtul este ceva mai mic decît 60°7′33″.

Teon din Alexandria a editat textul *Elementelor* lui Euclid. Adaptîndu-l parțial pentru o mai bună înțelegere de către elevi, a introdus în el și unele completări și — din punctul său de vedere — îndreptări. Acest text era foarte răspîndit în evul mediu. În afară de *Elemente*, Teon a editat de asemenea și *Optica* lui Euclid. Și — posibil — *Catoptrica*, atribuită lui Euclid, este o operă a lui Teon.

Hipatia. Fiica lui Teon, Hipatia din Alexandria (370—415), era filozof, matematician, astronom și medic, adeptă a neoplatonismului. După cum arată însuși Teon, Hipatia a luat parte la alcătuirea comentariilor lui la *Almagest*. După cum comunică Suidas (secolul al X-lea), Hipatia a scris comentarii la Diofant și la *Secțiunile conice* ale lui Apoloniu. Probabil tocmai datorită acestui fapt s-au păstrat primele șase cărți ale *Aritmeticii* lui Diofant, deoarece comentariile Hipatiei serveau drept izvor al copiilor ulterioare, iar celelalte șapte cărți ale *Aritmeticii* la care nu existau comentarii, au fost uitate. Hipatia, renumită prin elocvența și erudiția ei (era socotită printre păgînii cu cea mai mare autoritate din Alexandria), a fost sfîșiată de o gloată de fanatici creștini ațîțați de episcopul alexandrin Chiril. O gloată fanatică asemănătoare a distrus cu douăzeci de ani mai înainte Biblioteca din Alexandria. Astfel a fost distrus centrul științific principal al Imperiului Roman.

Decadența matematicii în țările Imperiului Roman era o consecință inevitabilă a decadenței generale a orînduirii sclavagiste din aceste țări. Decadența economică și politică a societății antice și răspîndirea învățăturilor filozofice mistice extrem de reacționare și a cultelor religioase au dus la faptul că știința din aceste țări a rămas fără apărare în fața loviturilor barbarilor și ale fanaticilor religioși.

Proclus. După căderea școlii științifice alexandrine, cultura și știința păgînă mai supraviețuiesc un timp oarecare în Atena. Aici se mută din Alexandria, Proclus (410-485) care a condus școala filozofică a neoplatonicienilor și a fost poreclit Diadoh (succesor). El a scris un mare număr de lucrări filozofice între care și comentariile la dialogurile lui Platon. Pentru matematică, cea mai mare importanță o au comentariile sale la cartea I a *Elementelor* lui Euclid [78], comentarii ce reprezintă unul dintre cele mai importante izvoare ale istoriei geometriei. Pentru alcătuirea *Comentariilor* sale, Proclus s-a folosit de o serie de lucrări ce ulterior au fost pierdute, și informațiile asupra acestor lucrări au ajuns pînă la noi numai datorită lui. În primul rînd aceasta este *Istoria geometriei* a lui Eudem, apoi lucrarea lui Geminus care purta, se pare, denumirea *Învățătură* sau *Teoria matematicii*, foarte vastă, care elucida în particular clasificarea științelor matematice; mai departe, comentariile la *Elementele* lui Euclid ale lui Heron, Porfiriu și Pappus, o lucrare oarecare a lui Apoloniu asupra geometriei elementare, tratatul lui Ptolemeu asupra postulatului paralelelor, lucrarea lui Posidoniu împotriva lui Zenon din Sidon și altele. Proclus, care a predat matematica, folosește uneori direct expresia „ascultătorii mei". *Comentariile* sale au fost destinate începătorilor, lucru pe care el îl afirmă deschis, arătînd că chestiunile dificile (în particular curbele folosite pentru rezolvarea problemei trisecțiunii unghiului) el le omite temporar. Lucrarea sa era însă destinată, se pare, apoi și pentru cercuri mai largi, și de aceea au fost incluse și capitole asupra liniei elicoidale, concoidei și cisoidei, inaccesibile pentru începători.

Comentariile încep cu două introduceri. În prima se vorbește despre raportul dintre matematică și filozofie, precum și despre clasificarea matematicii. În a doua — despre geometrie și obiectul ei, conform învățăturilor lui Platon, Aristotel și altor autori ai antichității. După aceasta urmează expunerea istoriei matematicii și se închide cu un panegiric la adresa lui Euclid. În sfîrșit, după explicarea deosebirii dintre teoreme și „probleme“, cu referire la afirmațiile diferiților scriitori cu autoritate în această problemă, este dată o schiță concisă a întregului conținut al cărții I a *Elementelor*.

Trecînd apoi la comentarea ei, Proclus analizează pe rînd, din punct de vedere istoric și critic, fiecare definiție, postulat și axiomă, după care trece la propoziții. De regulă, el explică mai întîi demonstrația dată de Euclid, apoi indică cîteva exemple concrete pentru exerciții și la sfîrșit infirmă obiecțiile ce s-au făcut sau pot fi făcute relativ la argumentele citate ale demonstrației. Doar într-un singur caz el adaugă în mod independent, de la sine, ceva nou, și anume cînd caută să demonstreze postulatul paralelelor, după ce expune încercarea lui Ptolemeu și obiecțiile împotriva ei. Aici el se bazează pe ipoteza implicită că distanța dintre două drepte nesecante, ce se află într-un plan, este mărginită și de aceea Proclus consideră că, dacă două drepte ce ies dintr-un punct și formează un unghi sînt prelungite pînă la infinit, distanța dintre ele va depăși orice mărime finită (ele fiind prelungite pînă la infinit) și, în particular, distanța dintre cele două drepte indicate. Ipoteza implicită a lui Proclus este de fapt echivalentă cu postulatul de demonstrat.

Ca exemplu, cităm un fragment din Proclus:

„... spunem că, în conformitate cu majoritatea părerilor, geometria a fost pentru prima dată descoperită în Egipt, avînd originea sa în măsurarea ariilor. Căci pentru egipteni aceasta a fost necesar, datorită revărsărilor Nilului ce ștergeau granițele adevărate ale pămînturilor oricui. Și în nici un fel nu este de mirare că descoperirea acestei științe, la fel ca și a altora, are ca izvor al său necesitățile practice, ținînd seama că tot ce începe, se mișcă de la imperfect la perfect. Astfel, trecerea de la simțire la gîndire, de la gîndire la înțelegere este simplă, firească. Așadar, așa cum aritmetica exactă a început la fenicieni fiind datorată aplicației sale în comerț și în tranzacții, tot astfel geometria a fost descoperită în Egipt din cauzele expuse mai sus" [78 pp. 64—65].

S-a păstrat, de asemenea, o lucrare a lui Proclus care constituie o introducere în învățătura lui Hiparh și Ptolemeu.

Domninus, Ammonius, Eutokios. Contemporan cu Proclus a fost Domninus din Larissa, care de asemenea era neoplatonician, autor al *Îndreptarului la introducerea în aritmetică*. Acesta constituie o expunere concisă și consecventă a învățăturii despre numere, bazată pe Euclid și dirijată împotriva metodei negeometrice de expunere a lui Nicomah. Din aceeași perioadă face parte și Ammonius din Alexandria care a scris o serie de comentarii între care unul la introducerea lui Porfiriu la Aristotel, unde este emisă ipoteza că numărul combinărilor a n elemente luate cîte doi este egal cu $\frac{n(n-1)}{2}$.

Pe la anul 500 e.n. a trăit Eutokios comentator al lui Arhimede și Apoloniu. El a scris comentarii la trei lucrări ale lui Arhimede: *Despre sferă și cilindru*, *Măsurarea cercului* și *Despre echilibrul planelor* și la primele patru cărți ale *Secțiunilor conice* ale lui Apoloniu.

Elevii lui Proclus. Din începutul secolului al VI-lea face parte și Marinos din Neapole în Palestina (vechiul Sihem), elev și biograf al lui Proclus. Lui Marinos îi aparține un comentariu la *Datele* lui Euclid, în care atenția principală este acordată problemei ce trebuie înțeles prin „date" în geometrie. Marinos arată că diferiți autori au conferit acestei noțiuni diferite definiții: Apoloniu înțelegea prin „date" ceva imuabil, Diodor — ceva cunoscut, Ptolemeu — ceva măsurat exact sau aproximativ, iar alții combinau aceste idei considerînd că aceasta ar fi ceva ce poate fi cunoscut. Din aceeași perioadă de timp face parte și Isidor din Alexandria care a stat în fruntea școlii filozofice din Atena, ale cărui lucrări matematice nu ne sînt cunoscute nici măcar după denumire, și succesorul său Damaskias din Damasc care a preluat această funcție prin anul 510 și este socotit autor al cărții XV a *Elementelor* lui Euclid.

În prima jumătate a secolului al VI-lea a trăit elevul lui Damaskias, comentator al lui Aristotel, Simplicius. În anul 529, cînd Iustinian, în lupta fanatică împotriva „păgînismului", a interzis predarea filozofiei în Atena, Simplicius a emigrat, împreună cu învățătorul său, în Persia, însă în anul 533 el s-a întors din nou în Atena. În comentariul său, el citează două fragmente mari din *Istoria geometriei* a lui Eudem. Simplicius a scris, de asemenea, un comentariu la cartea I a *Elementelor* lui Euclid.

Cu Simplicius se încheie istoria matematicii păgîne, care s-a dezvoltat în limba greacă. Matematicienii de mai tîrziu care au scris în limba greacă au fost creștini, și vom examina lucrările lor în capitolul despre matematica din Europa medievală.

Matematica ultimului veac al Imperiului Roman de Apus. Dacă matematica în limba greacă, care fusese limba de bază a științei atît în țările elenistice, cît și în țările Imperiului Roman, trece în secolele IV—V printr-o perioadă de decadență, — printr-o decadență și mai mare trece în acest timp matematica în limba latină.

Din secolul al IV-lea s-a păstrat un fragment din traducerea latină a extraselor din cărțile XII și XIII ale *Elementelor* lui Euclid, denumite aici în mod greșit cărțile XIV și XV. Acest manuscris de geometrie s-a păstrat sub forma unui palimpsest — text pe jumătate șters pe pergament, pe care în secolul al IX-lea au fost scrise cugetările teologice ale papii Grigoriu; pe același pergament s-au păstrat, sub forma de palimpseste, și extrase din Vergiliu și Tit Liviu.

Cu timpul, cunoștințele de matematică ale romanilor devin tot mai sărace în conținut. Ultimele opere avînd oarecare raport cu matematica, scrise în Roma înainte de prăbușirea ei (445), sînt lucrările grecului Macrobiu, apărute prin anul 400. Matematica este reprezentată aici prin cîteva raționamente risipite printre informații de gramatică, istorie și mitologie.

Matematica în Italia în timpul ostrogoților. După căderea Romei și formarea în Italia a regatului ostrogot al lui Teódoric, apar cîteva opere de matematică care continuă matematica din Imperiul Roman. Prin anul 460 a apărut *Calculul* lui Victorius care conținea tabele pentru operații cu fracții cu baza 12. În lucrarea enciclopedică în nouă volume *Satira* a lui Martianus Mineus Felix Capella din Cartagina, scrisă prin anul 470, se aduc laude lui Euclid, însă nici geometria, nici geodezia nu sînt expuse aci. Aritmetica este reprezentată prin mistica numerelor.

Casiodor (aproximativ 475—570), om de stat din epoca ostrogoților din Italia, a dat în lucrarea sa enciclopedică *Despre arte* o repovestire a informațiilor despre geometrii și aritmeticienii greci și romani, precum și o serie de definiții vagi. Lui Casiodor i se atribuie și lucrarea *Calculul pascaliilor* care a apărut în anul 562. Apariția unor asemenea lucrări, ce au devenit ulterior caracteristice pentru literatura medievală, a fost provocată de hotărîrea sinodului bisericesc de la Niceea (325) care a interzis creștinilor să sărbătorească paștele în același timp cu evreii. Paștele evreiesc este legat de anul lunar evreiesc în care se intercalează o a 13-a lună atunci cînd diferența dintre el și anul solar atinge o lună. Datorită acestui fapt, data paștelui după calendarul solar este mobilă. De aceea s-a hotărît ca paștele creștin să fie sărbătorit duminică după prima lună nouă ce apare după echinoxul de primăvară, iar în cazul în care aceste date coincid — în duminica următoare după această dată. În modul acesta, problema consta în a ști în ce zile ale săptămînii va cădea echinoxul de primăvară și ziua Lunii pline celei mai apropiate, ceea ce depinde de anumite cicluri, care conțin, fără rest, atît anul solar, cît și anul lunar. Sinodul din Niceea a luat în mod greșit 19 ani solari egali cu 235 de luni lunare (lunațiuni), în loc de 235 de luni și aproximativ $1\frac{1}{2}$ ore. Curînd s-a văzut necesitatea de a corecta această eroare și au început căutările relației exacte, a așa-numitului „număr de aur“ sau *epact*.

Un alt om de stat din același timp, prieten cu Casiodor, filozof neoplatonician, Anicius Manlius Severinus Boethius (s-a născut prin anul 480, a fost executat în anul 524), care a învățat la Atena, autor al comentariilor la lucrările de logică ale lui Aristotel și Porfiriu, autor al tratatului *Despre muzică* și al lucrării teologice-etice *Despre consolarea prin filozofie*, a scris de asemenea lucrări de matematică. Nefiind un matematician talentat, Boethius ocupă totuși un loc important în istoria acestei științe datorită traducerilor sale. El a tradus *Aritmetica* lui Nicomah, precum și primele trei cărți ale *Elementelor* lui Euclid. De altfel acestea nu au fost traduceri exacte, ci adaptate; în cartea lui Nicomah au fost incluse exemple numerice, în cărțile lui Euclid, Boethius a omis demonstrațiile. Lui Boethius i se atribuie *Introducere în aritmetică*, *Introducere în geometrie*, la fel ca și lucrări de astronomie ale căror manuscrise s-au păstrat din secolul al IX-lea. Prima reprezintă o prelucrare a *Aritmeticii* lui Nicomah, dar nu mai reușită decît aceasta.

În ansamblu, această lucrare arată că autorul ei nu se descurca prea bine în materie. Respectul ce s-a creat în evul mediu față de această lucrare se explică tocmai prin neclaritatea ei, precum și prin nimbul muceniciei cu care biserica catolică l-a împodobit pe Boethius. Ea l-a declarat luptător împotriva „ereziei" ariene și sfînt, în timp ce în realitate el a fost victima luptei politice dintre aristocrația romană pe care el o sprijinea și stăpînirea ostrogoților. În ceea ce privește geometria, marea majoritate a cunoscătorilor manuscriselor medievale consideră că aceasta este una din nenumăratele falsuri, atît de răspîndite în acel timp. În acest pseudo-Boethius, alături de expunerea celor mai simple propoziții geometrice din cărțile I, II și parțial II și IV ale *Elementelor* lui Euclid, reproduse fără demonstrații, se dă descrierea socotitului pe abac cu rondele conice (apexuri) prevăzute cu cifre de la 1 la 9 și sînt indicate regulile de înmulțire și împărțire — ultimele destul de neclar. Cu toate că această lucrare este un fals probabil din secolele IX—XI, ea dă totuși o imagine corectă asupra nivelului cunoștințelor de matematică, dacă nu ale lui Boethius însuși, cel puțin în general ale romanilor din acea epocă tîrzie. În ceea ce privește Boethius însuși, importanța sa constă în faptul că, datorită traducerilor sale, popoarele europene au căpătat în evul mediu primele cunoștințe ale moștenirii matematicii grecești, ceea ce, împreună cu munca enormă depusă în această privință de arabi, evrei, perși, tadjici, uzbeci, azerbaidjani, armeni și alții, a pregătit matematica epocii Renașterii.

Trebuie să amintim și de lucrarea unui anonim din Chartres (Franța) referitoare probabil la perioada precedentă lui Boethius. În această lucrare aria triunghiului se calculează după așa-numita formulă a lui Heron, aria suprafeței sferice ca de 4 ori aria cercului mare, raportul dintre perimetrul cercului și diametrul său se ia egal cu $\frac{22}{7}$, dar cu toate acestea formulele numerelor poligonale nu sînt înțelese de autor care le consideră formule pentru calculul ariilor poligoanelor și le plasează, de aceea, în textul de geometrie.

S-a găsit, de asemenea, manuscrisul latin al lucrării *Despre măsurarea iugartelor* (*jugerum* — măsură romană de pămînt, 240 pe 120 de picioare), probabil din secolele VI — VII. Ea este plină de reguli greșite, astfel, de exemplu, aria unui patrulater se calculează ca produsul mediilor aritmetice ale laturilor opuse, aria cercului ca produsul dintre $\frac{1}{4}$ din perimetru și el însuși, adică aici se consideră că $\pi = 4$. În acest manuscris s-a manifestat deosebit de pregnant faptul că în lumea culturii romano-latine se pierdea tot mai mult înțelegerea operelor realmente matematice, că cunoștințele de matematică, cu excepția celor mai elementare, decădeau tot mai mult.

BIBLIOGRAFIE

1. K. M a r x, *Capitalul*, vol. I, ed. a IV-a, Editura Politica, București, 1960.
2. F. E n g e l s, *Anti-Dühring*, ed. a III-a, E.S.P.L.P., București, 1955.
3. F. E n g e l s, *Dialectica naturii*, Editura Politică, București, 1959.
4. K. M a r x și F. E n g e l s, *Ideologia germană*, E.S.P.L.P., București, 1956.
5. К. М а р к с и Ф. Э н г е л ь с, *Об Англии*, М., 1953.
6. К. М а р к с и Ф. Э н г е л ь с, *Избранные письма*, М., 1957.
7. V.I. L e n i n, *Materialism și empiriocriticism*, ed. a II-a, Editura Politică, București, 1959.
8. V.I. L e n i n, *Caiete filozofice*, E.S.P.L.P., București, 1956.
9. В. И. Л е н и н, *Сочинения*, изд. 4.
10. А. Н. К о л м о г о р о в, *Математика*, БСЭ, т. 26, изд. 2-ое, 1954.
11. Ф. К э д ж о р и, *История элементарной математики*, перев. с англ. под ред. с примеч. и прибавл. И. Ю. Тимченко, изд. 2-ое, Одесса, 1917.
12. Г. Г. Ц е й т е н, *История математики в древности и в средние века*, перев. П. С. Юшкевича, предисл. М. Я. Выгодского, изд. 2-ое, подготовл. А. П. Юшкевича, М.-Л., 1938.
13. R. C. A r c h i b a l d, *Outline of the history of mathematics*, 6th ed., Oberlin, Ohio, 1949.
14. E. T. B e l l, *The development of mathematics*, 2d ed., N.Y.-L., 1940.
15. E. B o r t o l o t t i, *Storia della matematica elementare*, în *Enciclopedia delle matematiche elementari o complementi*, vol. 3_2, Milano, 1950.
16. C. B. B o y e r, *The concepts of the calculus*, 2 ed., N.Y., 1949.
17. I d e m, *History of analytic geometry*, N.Y., 1956.
18. A. v o n B r a u n m ü h l, *Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie*, Bd. 1—2, Leipzig, 1900—1903.
19. F. C a j o r y, *A history of mathematical notations*, vol. 1—2, Chicago, 1928—1930.
20. I d e m, *A history of mathematics*, N.Y., 1929.
21. M. C a n t o r, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, Bd. 1—2, Aufl. 3, Leipzig, 1907 u. folg. Rectificări vezi în „Biblioteca matematica", Folge 3 (Kleine Bemerkungen zur letzten Ausgabe von Cantors Vorlesungen), Aufl. 4, Bd. I, Leipzig, 1922.
22. J. C o o l i d g e, *A history of geometrical methods*, Oxford, 1940.
23. I d e m, *A history of the conic sections and quadric surfaces*, Oxford, 1945.
24. E. F e t t w e i s, *Das Rechnen der Naturvölker*, Leipzig, 1927.
25. S. G ü n t h e r, *Geschichte der Mathematik*, Teil 1, Leipzig, 1908.

26. J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, Bd. 1, Berlin, 1953.
27. G. Loria, *Guido allo studio della storia della mathematiche*, ed. 2. Milano, 1946.
28. Idem, *Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al secolo XIX*, ed. 2 Milano, 1950.
29. K. Menninger, *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*, Teil 1—2, Göttingen, 1957—1958.
30. G. Sarton, *Introduction to the history of science*, vol. 1—3, Baltimore, 1927—1947.
31. D. E. Smith, *History of mathematics*, vol. 1—2, Boston — London, 1930.
32. D. J. Struik. *A concise history of mathematics*, vol. 1—2, N.Y., 1948.
33. J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung*. 2 Aufl., Bd. 1—7, Berlin-Leipzig, 1921—1934; 3 Aufl., Bd. 1—4, 1930—1940.
34. *История естествознания*, *Литература*, опубликованная в СССР, т. I (1917—1947), М.-Л., 1949, т. 2 (1948—1950), М.-Л., 1955.
35. И. П. Павлов, *Полное собрание трудов*, т. 3, М.-Л., 1949.
36. M. Dobritzer, *Geschichte der Abiponer*, Wien, 1884.
37. L. Lévy-Bruhl, *Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures*, Paris, 1910.
38. Idem, *La mentalité primitive*, Paris, 1925.
39. J. Eisenstädter, *Elementargedanke und Übertragungstheorie in der Völkerkunde*, Jena, 1912.
40. J. Morgan, *Life and Adventure of William Buckley*, Hobart (Tasmania), 1952.
41. М. Косвен, *Происхождение обмена и меры ценности*, М.-Л., 1927.
42. Homer, *Iliada*, în romînește de Gh. Murnu, E.S.P.L.A. București 1959.
43. А. А. Драгунов, *Исследование по грамматике современного китайского языка*, М.-Л., 1952.
44. Н. Н. Миклухо-Маклай, *Путешествия*, т. 1, М.-Л., 1940.
45. Ю. Липперт, *История культуры*, СПб., 1895.
46. W. Wundt, *Elemente der Völkerpsychologie*, Leipzig, 1912.
47. О. Шрадер, *Индоевропейцы*, СПб., 1913.
48. А. Мейе, *Введение в сравнительное изучение индоевропейских языков*, М.-Л., 1938.
49. Э. Тэйлор, *Первобытная культура*, М., 1939.
50. В. Даль, *Толковый словарь живого великорусского языка*, т. 4, СПб., 1882.
51. В. И. Авдиев, *История Древнего Востока*. М., 1948.
52. *Политическая экономия*, Учебник, М., 1960.
53. *Древний мир, Сборник источников по культурной истории Востока, Греции и Рима*, под ред. Б. А. Тураева и И. Н. Бороздина, М., 1915.
54. *The Rhind Mathematical Papyrus*, ed. T.E. Peet, London, 1923.
55. *The Rhind Mathematical Papyrus*, ed. A. B. Chace, L. Bull, H. P. Manning, R.C. Archibald, vol. 2, Oberlin, Ohio, 1927—1929.
56. *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museum der schönen Künste in Moskau*, Hersgeg. und komment. von W. W. Struve unter Benutzung einer hierogliphischen Transkription von V. A. Turajew, Berlin, 1930.

57. М. Я. Выгодский, *Алгебра и арифметика в древнем мире*, М.-Л., 1941.
58. K. Vogel, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, München, 1929.
59. С. А. Яновская, *К теории египетских дробей*. — В кн.: *Труды Ин-та истории естествознания и техники*, т. 1, 1947.
60. O. Neugebauer, *Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung*, Berlin, 1926.
61. Б. Л. Ван дер Варден, *Пробуждающаяся наука, Математика Древнего Египета, Вавилона и Греции*, перев. И. Н. Веселовского, М., 1959.
62. S. N. Kramer, *Schooldays, A Sumerian Composition relative to the Education of a Scribe*, „Journal of the American Oriental Society", 1949, vol. 69, nr. 4.
63. F. Thureau-Dangin, *Textes mathématiques Babyloniens*, Leiden, 1938.
64. O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrifttexte*, Berlin, 1934—1937.
65. O. Neugebauer — A. Sachs, *Mathematical cuneiform texts*, vol. 1—3, New-Haven, 1945.
66. О. Нейгебауер, *Лекции по истории античных математических наук*, М.-Л., 1937.
67. И. Н. Веселовский, *Вавилонская математика*. — В кн.: *Труды Института истории естествознания и техники*, т. 5, М., 1955.
68. Hildegard Lewy, *Origin and development of sexagesimal system of numeration*. — „Journal of the American Oriental Society", vol. 69, nr. 1, 1949.
69. М. Я. Выгодский, *Математика древних вавилонян*, «Успехи математических наук», 1941, № 7—8.
70. E. M. Bruins, *Nouvelles découvertes sur les mathématiques babyloniennes*, Paris, 1952.
71. O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, 2[d] ed., Brown University, Press, 1957.
72. S. G. Morley, *The civilization of Maya*, California, 1946.
73. J. E. Thomson, *Maya arithmetics*, Washington, 1941.
74. L. Satterthwaite, *Concepts and structure of Maya calendrica arithmetics*, Philadelphia, 1947.
75. Г. Н. Попов, *Культура точного знания в древнем Перу*, Пгр. 1922.
76. Геродот, *История в девяти книгах*, перев. Ф. Г. Мищенко, М., 1888.
77. Аристотель, *Метафизика*, перев. А. О. Кубицкого, М.-Л., 1934.
78. *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, ed. G. Friedelein, Leipzig, 1873.
79. G. Milhaud, *Nouvelles études sur l'histoire de la pensée scientifique*, Paris, 1911.
80. Th. Hopfner, *Orient und Griechische Philosophie*, Leipzig, 1925.
81. A. Frajese. *La matematica nel mondo antico*, Milan. 1951.
82. Демокрит *в его фрагментах и свидетельствах древности*, М., 1935.
83. K. Vogel, *Beiträge zur griechischen Logistik*, München, 1936.

84. K. Reidemeister, *Die Arithmetik der Griechen*, Leipzig — Berlin, 1940.
85. Платон, *Политика или государство*, *Сочинения*, т. 3, перев. В. И. Карпова, СПб., 1863.
86. Аристофан, *Комедии*. т. 1. перев. под ред. А. Малецкого, М.-Л., 1934.
87. Л. Н. Толстой, *Война и мир*, т. 3, М., 1949.
88. *Античная философия* (*фрагменты и свидетельства*), под ред. Г. Ф. Александрова, М., 1940.
89. P. Tannery, *Mémoires scientifiques*, vol. 3, Paris, 1912—1913.
90. E. Frank, *Plato und die sogenannten Pythagoräer*, Halle, 1923.
91. Aristotle, *De caelo*, The works of Aristotle, transl. J. L. Stocks, vol. 2, Oxford, 1930.
92. Евклид, «*Начала*», перев. и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, т. 1, кн. I—IV, М.—Л., 1948; т. II, кн. VII—X, М.—Л., 1949; т. III, кн. XI—XV, М.-Л., 1950.
93. P. H. Michel, *De Pythagore à Euclide*, Paris, 1950.
94. A. Rey, *La science dans l'antiquité*, vol. I—III. Paris, 1930—1939.
95. Аристотель, *Физика*, перев. В. И. Карпова, М., 1937.
96. B. L. van der Waerden, *Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik*, „Mathematische Annalen", Bd. 117, 1940.
97. С. Я. Лурье, *Теория бесконечно малых у древних атомистов*, М.—Л., 1935.
98. Simplicius, *Physica*, Berlin, 1882—1895.
99. Платон, *Менон*, *Сочинения*, перев. В. Н. Карпова, т. 2, СПб., 1863.
100. Аристотель, *Аналитики первая и вторая*, перев. Б. А. Фохта, М., 1952.
101. И. Г. Башмакова, *Арифметические книги «Начал» Евклида*, в. кн.: *Историко-математические исследования*, вып. 2, М.—Л., 1949.
102. М. Я. Выгодский, *«Начала» Евклида*, В кн.: *Историко-математические исследования*, вып. I, М.-Л., 1948.
103. В. Н. Молодший, *Был ли Евклид последователем Платона?*, В кн.: *Историко-математические исследования*, вып. 2, М.-Л., 1949.
104. Л. Е. Майстров. *О статье М. Я. Выгодского «Начала» Евклида*, В кн.: *Историко-математические исследования*, вып. 2, М.—Л., 1949.
105. Euclide, *Les données*, Oeuvres en grec, en latin et en français, Ed. F. Peyrard, vol. 3, Paris, 1818.
106. Д. Д. Мордухай-Болтовской, *Поризмы и данные*, В кн.: *Труды совещания по истории естествознания*, М., 1948.
107. Архимед, *Послание к Эратосфену о некоторых теоремах механики*, В кн.: И. Гейберг, *Новое сочинение Архимеда*. Перев. И. Ю. Тимченко, Одесса, 1909.
108. T. Heath, *A history of Greek Mathematics*, vol. 1—2, Oxford, 1921.
109. Archimède, *De l'equilibre des planes ou des centres de gravité de planes*, *Oeuvres complètes*, trad. P. Ver. Eecke, Paris — Bruxelles, 1921,
110. Archimède, *La quadrature de la parabole*. *Oeuvres complètes*, trad. P. Ver Eecke, Paris — Bruxelles, 1921.

111. А. П. Юшкевич, *О методе исчерпывания древних математиков*, В кн.: *Труды совещания по истории естествознания*, М., 1948.
112. Архимеда две книги: *О шаре и цилиндре*, *Измерение круга и леммы*, перев. Ф. Петрушевского, СПб., 1823.
113. Archimède, *Des spirales*. *Oeuvres complètes*, trad. P. Ver Eecke, Paris — Bruxelles, 1921.
114. И. Г. Башмакова, *Дифференциальные методы в работах Архимеда*, В кн.: *Историко-математические исследования*, вып. 5, М., 1953.
115. Архимед, *О плавающих телах*, В кн.: Архимед, Стэвин, Галилей, Паскаль, *Начала гидростатики*, перев. и примеч. А. Н. Долгова, изд. 2, М.-Л., 1933.
116. Архимед, *Измерение круга*, В кн.: Ф. Рудио, *О квадратуре круга*, составил Ф. Рудио, перевод под редакцией и с примечаниями С. Н. Бернштейна, изд. 3, М.-Л., 1936.
117. Архимед, Исчисление песчинок («Псаммит»), перев. и примеч. Г. Н. Попова, М.—Л., 1932.
118. А. Чвалина, *Архимед*, М.—Л., 1934.
119. С. Я. Лурье, *Архимед*, М.—Л., 1945.
120. В. Ф. Каган, *Архимед*, М.—Л., 1949.
121. Аполлоний Пергский, *Конические сечения с коммент. Евтокия*, перевод И. Ягодинского — «Изв. Северо-Кавказского университета», т. 3 (15), Ростов ж/Д., 1928 (первые 20 предложений книги I).
122. Apollonius de Perga, *Les coniques*, trad. P. Ver Eecke, Bruges, 1923.
123. Б. А. Розенфельд, *Геометрические преобразования в работах Леонарда Эйлера*, В кн.: *Историко-математические исследования*, вып. 10, М., 1957.
124. M. Krause, *Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Nasr Mansūr b. 'Alī b. 'Irāq. mit Untersuchungen zur Geschichte des Textes bei den islamischen Mathematiker*, Berlin, 1936.
125. Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetic*, transl. M. L. D'Ooge, Ann Arbor, 1938.
126. Ptolemäus, *Syntaxis mathematica*, ed. J. L. Heiberg, Bd. 1—2, Leipzig, 1898.
127. Витрувий, *Десять книг об архитектуре*, перев. Ф. А. Петровского, М., 1936.
128. M. Cantor, *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Feldmesskunst*, Leipzig, 1875.
129. Hero Alexandrinus, *De mensuris*. *Opera quae supersunt omnia*, ed. J. L. Heiberg, t. 5, Leipzig, 1914.
130. Idem, *Geometrika*, *Opera quae supersunt omnia*, t. 4, ed. J.L. Heiberg, Leipzig, 1912.
131. Pappi Alexandrini, *Collections quae supersunt*, ed. F. Hultsch, Bd. 1—2, Berlin, 1877.
132. Diophante d'Alexandrie, *Les six livres arithmétiques et la livre de nombres polygones*, trad. P. Ver Eecke, Bruges, 1928.
133. G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Milano, 1914.

CUPRINS